فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۹ (پاییز و زمستان ۱۳۹۵) صص. ۲۹ تا ۴۱

میراث فوریه*

ژان-پیِر کاهان

برگردان: سعید مقصودی

۱. غرض از مقالهٔ حاضر

میراث فوریه وجوه بسیاری دارد. فوریه در وهلهٔ اول یک فیزیکدان و یک ریاضیدان است. نام فوریه برای ریاضیدانان، فیزیکدانان، مهندسان و کلاً دانشمندان علوم طبیعی آشناست. اصطلاحاتی مانند معادلهٔ فوریه یا همان معادلهٔ گرما، سری فوریه، ضرایب فوریه، انتگرال‌های فوریه، تبدیل‌های فوریه، آنالیز فوریه، تبدیل‌های سریع فوریه جزء اصطلاحات علمی روزمره‌اند. مقالهٔ «نظریهٔ تحلیلی گرما» رویدادی دوران‌ساز در علم به شمار می‌آید. اما فوریه در حوزهٔ مصرشناسی نیز معروف است. او مقدمهٔ جامعی بر مجموعه کتاب‌های «مصر»[۱] نگاشته است و زمانی که سنگ رشید[۲] کشف شد، در مصر حضور داشت و باعث آشنایی ژان فرانسوا شامپولیون[۳]، رمزگشایِ کتیبه‌های هیروگلیف، با این موضوع شد. فوریه اهل سیاست و مدیریت هم بود. در انقلاب فرانسه شرکت داشت (آراگو[۴] گفته است که فوریه ثمرهٔ ناب انقلاب فرانسه بود، زیرا در ابتدا بنا بود به سلک کشیشان درآید) و در مقام «دبیر دائمی مؤسسهٔ مطالعات مصر»[۵] بناپارت و مونژ[۶] را در مصر همراهی کرد. پس از آن، بناپارت او را به سِمَت فرماندار گرِنوبل[۷] انتخاب کرد و وی در آنجا اقدامات مهمی در زمینهٔ آموزش و بهداشت صورت داد. فوریه پس از سقوط ناپلئون هم

عبارات و کلمات کلیدی. سری فوریه؛ سری مثلثاتی؛ قضیه‌های همگرایی سری فوریه؛ قضیهٔ یکتایی کانتور؛ آنالیز ریاضی در قرن نوزدهم.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Kahan, Jean-Pierre, The Heritage of Fourier, *Perspectives in Analysis: Essays in Honor of Lennart Carleson's 75th Birthday*, Springer-Verlag, New York, 2005, 83-95.

[۱] Description de l'Egypte [۲] Rosetta stone [۳] Jean-François Champollion [۴] Arago [۵] Institut d'Egypte
[۶] Monge [۷] Grenoble

به پاریس آمد و همان‌جا ماند و به عضویت دو فرهنگستان علوم[۱] و فرهنگستان فرانسه[۲] در آمد؛ به مقام دبیری دائم فرهنگستان علوم برگزیده شد و در رسمیت بخشیدن به علم آمار در فرانسه، نقش داشت.

«نظریهٔ تحلیلی گرما» و ابداع ابزارهای مربوط به آن، تنها اثر علمی فوریه نیست. او به معادله‌های جبری نیز علاقه‌مند بود و مطالعاتش دربارهٔ تعیین محل ریشه‌های این معادله‌ها، عین تحولی است که در آثار استورم[۳] نسبت به آثار دکارت[۴] در این زمینه شاهد هستیم. متأسفانه فوریه اعتنایی به تحقیقات گالوا در این زمینه نکرد و به تحقیقات خود او دربارهٔ نامعادله‌ها، یا به اصطلاحِ خودش، «تحلیل نامتعیّن‌ها»[۵] هم اعتنایی نمی‌شود. تصور داربو[۶] این بود که فوریه در اهمیت این موضوع راه اغراق رفته است و به همین سبب، در ویراستی که از مجموعه آثار علمی فوریه تهیه کرد، مقاله‌های مربوط به آن موضوع را کنار گذاشت. اگر آن مقاله‌ها منتشر می‌شد، برنامه‌ریزی خطی و آنالیز محدب نیز جزء میراث فوریه محسوب می‌شد.

فوریه انسانی فرهیخته و فیلسوفی با معیارهای قرن هجدهم بود. او از جهتی، یکی از آخرین نمایندگان مکتب عصر روشنگری است. از سوی دیگر، آثارش منبع اطلاعاتی مهمی دربارهٔ اوگوست کُنت[۷] است. کُنت نقطهٔ آغاز مکتب «پوزیتیویسم»[۸] فرانسه در قرن نوزدهم بود.

در اینجا به بخشی کوچک اما مهم از میراث علمی او خواهیم پرداخت که همان موضوع بسط یک تابع برحسب سری مثلثاتی و دستور محاسبهٔ ضرایب مربوط به آن است. این موضوع یکی از راه‌هایی است که می‌توان تأمل دربارهٔ فوریه و ارتباط او با فیزیک و فلسفهٔ طبیعی را از آن آغاز کرد و استمرار تحقیقاتش در حوزهٔ ریاضیات توسط دیگران را نیز مورد بررسی قرار داد.

دربارهٔ طرز نگاه‌ها به فوریه، تصور کلی من این است که برای مدت طولانی در فرانسه و حتی شاید در آلمان، اهمیت چندانی به او داده نشد و تنها در همین سال‌های اخیر است که از او بسیار نام برده می‌شود. این امر با بیان چند مطلب و نقل قول در ادامه، روشن خواهد شد. برای توضیح تداوم تحقیقات فوریه دربارهٔ سری‌های مثلثاتی توسط دیگران، به موضوعات بسیاری بر اساس اهمیت تاریخی و اهمیت حال حاضر آنها خواهیم پرداخت. به هر حال، بخش زیادی از همایش با موضوع «چشم‌اندازهایی در آنالیز»[۹] را می‌شود شرح میراث فوریه محسوب کرد.

بخش عمدهٔ این مقاله تشکیل شده است از اظهارنظرهای مختلف و نقل قول‌ها (۱.۲ ویکتور هوگو، ۲.۲ یاکوبی، ۳.۲ فوریه، ۴.۲ دیریکله و ریمان). در بخش ۳، به نظریهٔ ریمان دربارهٔ سری‌های مثلثاتی و در بخش ۴، به مسئلهٔ همگرایی (۱.۴ قضیه کارلسون، ۲.۴ شکل‌های متفاوت همگرایی) پرداخته شده است. در پایان، در بخش ۵، به موضوع بازگشت دوبارهٔ فوریه خواهیم پرداخت.

[۱] Académie des sciences [۲] Académie Française [۳] Jacques C. F. Sturm [۴] Descartes [۵] Analyse indéterminée [۶] Darboux [۷] Auguste Comte [۸] positivism [۹] Perspectives in Analysis

۲. چند نقل قول

۱.۲. ویکتور هوگو. کار را با ویکتور هوگو[۱] آغاز می‌کنیم. هوگو در سال ۱۸۶۲ در جزیرهٔ گرنزی[۲] در تبعید به‌سر می‌بُرد و در همان‌جا بخش زیادی از کتابش را به نگارش درآورد. این همان سالی است که رمان او با نامِ «بینوایان» منتشر شد. این رمان دربرگیرندهٔ مطالب زیادی راجع به روزگار فرانسه در آغاز قرن نوزدهم است. عنوان یکی از فصل‌های آن، «به سال ۱۸۱۷» است. در این فصل، ژوزف فوریه طی عبارتی کوتاه در داستان ظاهر می‌شود:

> «در فرهنگستان علوم فرانسه یک فوریهٔ مشهور بود که اخلاف فراموشش کردند، و در همان موقع نمی‌دانم در کدام کلبهٔ محقر، فوریهٔ گمنامی وجود داشت که زمان آینده به‌یادش خواهد آورد.» (*بینوایان، ویکتور هوگو، ۱۸۶۲*)

منظورِ مورد اول، ژوزف فوریه و دومی، شارل فوریهٔ آرمان‌گرا است. مسلماً ویکتور هوگو، ژوزف فوریه را «افتخار ملی» به‌شمار نمی‌آورد. فوریه با فرانسوا آراگو که بعداً در سِمَت «دبیر دائم فرهنگستان علوم» جانشین فوریه شد، رابطهٔ دوستی داشت. پس از درگذشت فوریه در سال ۱۸۳۰، آراگو به‌عنوان یک دوست و ویکتور کوزَن[۳] به‌عنوان عضوی از فرهنگستان فرانسه، سوگنامه‌هایی نگاشتند. هر دو سوگنامه به‌لحاظ مطالب مربوط به زندگی ژوزف فوریه بسیار ارزشمند و جالب‌اند، لیکن در هیچ‌یک از آنها به تحقیقات وی در ریاضیات اعتنایی نشده است و یا ارزش کمی برای آن قائل شده‌اند. آراگو که در جوانی و خیلی زودتر از فوریه به عضویت فرهنگستان علوم برگزیده شد، احتمالاً بی‌رغبتیِ زیاد لاگرانژ را به موضوع تجزیهٔ یک تابع برحسب سری‌های مثلثاتی به خاطر داشته و خبر داشته است که در اعطای جایزهٔ فرهنگستان به فوریه برای تحقیقاتش دربارهٔ نظریه تحلیلی گرما در سال ۱۸۱۱، لاگرانژ شک و تردیدهایی را دربارهٔ آن نظریه هم از حیث کلیت و هم به‌لحاظ دقت، مطرح کرده بود. فوریه رقیبانی نظیر کوشی و پواسن[۴] داشت. از این مطالب روشن می‌شود که چرا سوگنامهٔ آراگو، چیزی شبیه به یک مراسم خاکسپاری مجلل به نظر می‌رسد.

واقع امر این است که فرانسویان تا همین اواخر بر جایگاه فوریه واقف نبودند. در پاریس «خیابان شارل فوریه» وجود دارد، اما خیابان ژوزف فوریه وجود ندارد. در اولین ویراست دانشنامهٔ اونیورسال[۵]، که در فرانسه هم‌ترازِ دانشنامهٔ بریتانیکا است، هیچ مقاله‌ای دربارهٔ ژوزف فوریه نیامده است؛ در ویراست ششم آن به سال ۱۹۷۴ هم وضع به‌همین منوال بود. پیش از این گفته شد که داربو تنها بخشی از آثار ریاضی فوریه، و در واقع نظریهٔ تحلیلی گرما، را منتشر کرد و هیچ‌گاه مجموعه آثار فوریه انتشار نیافت. تا همین سال‌های اخیر هم در فرانسه، حداقل بجز گرنوبل، توجه زیادی به زندگی و آثار ژوزف فوریه نمی‌شد؛ اما در شهر گرنوبل مدت‌ها پیش، مؤسسهٔ ریاضی آنجا به اسم مؤسسهٔ ژوزف فوریه نامگذاری شد و در سال ۱۹۸۷ دانشگاهی را که این مؤسسه وابسته به آن بود، به اسم دانشگاه ژوزف فوریه نامگذاری کردند. در

[۱] Victor Hugo [۲] Guernsey [۳] Victor Cousin [۴] Poisson [۵] Universalis

سال ۱۹۹۸ کتاب فوق‌العاده‌ای منتشر شد: «فوریه، خالق ریاضیات فیزیک»[۱] نوشتهٔ ژان دُنبرِ[۲] ریاضیدان و ژان–برنارد روبر[۳] فیزیکدان. نشانه‌هایی وجود دارد گویای این که نام ژوزف فوریه دیگر در فرانسه از یادها نخواهد رفت.

۲.۲. یاکوبی. مهم‌تر از این موارد، این است که کارل گوستاف یاکوبی[۴] که در آن زمان ۲۶ سال داشت، چند هفته‌ای پس از درگذشت فوریه به او ادای احترام کرد و در نامه‌ای به لُژاندر[۵] نوشت:

> «شایسته بود که آقای پواسُن داوری خود را دربارهٔ آقای فوریهٔ فقید در چنین زمان نامناسبی منتشر نمی‌کرد و من و آبل را به‌دلیل عدم توجه کافی به موضوع حرکت گرما مورد سرزنش قرار نمی‌داد. در حقیقت، آقای فوریه هدف غایی در ریاضیات را علاوه بر تبیین پدیده‌های طبیعی، نفع عامهٔ مردم می‌دانست. لیکن در جایگاه یک فیلسوف، طبعاً آگاه بود که یگانه غایت علم همان سروریِ عقل آدمی است و از این حیث، پرسش از اعداد، به‌اندازهٔ پرسش از جهان هستی ارزشمند است.»

عبارت کلیدی «سروریِ عقل آدمی» برخلاف دیدگاه فوریه، بدل به شعار ریاضیات محض می‌شود. به‌ویژه می‌بینیم که ژان دیودونه[۶] این شعار را عنوان یکی از کتاب‌های مشهورش قرار داده است.

۳.۲. فوریه. طی چند جمله در مقدمهٔ کلیِ مقاله فوریه در نظریه تحلیلی گرما، می‌توان به‌روشنی به دیدگاه او پی برد. در اینجا [ترجمه] گزیده‌ای از این جمله‌ها را می‌آوریم.

> «بررسی دقیق طبیعت پربارترین منبع اکتشافات ریاضیات است.» «معادله‌های تحلیلی را می‌توان برای همهٔ پدیده‌های عمومی به‌کار برد. زبانی ساده‌تر، فراگیرتر، کم‌خطاتر و تواناتر از این زبان برای بیان روابط پایدار بین اجسام طبیعی وجود ندارد.» «از این منظر، آنالیز ریاضی وسعتی به اندازهٔ خودِ طبیعت دارد. ویژگی اصلی‌اش بیان روشن آن است. در آن، نشانی از مفاهیم مبهم نیست. پدیده‌های بسیار متفاوتی را به یکدیگر مربوط می‌سازد و شباهت‌های پنهان آنها را آشکار و بدین وسیله آنها را قابل فهم و اندازه‌گیری می‌کند. گویا آنالیز ریاضی، قابلیتی از ذهن آدمی است تا جبرانی باشد برای کوتاهی عمر و نقص حواس انسان.»

این تعریفی باشکوه از آنالیز ریاضی است. ضمناً باید افزود که مسائل مربوط به زندگی انسان‌ها و صنعت نیز در فوریه تعلق خاطر ایجاد کرده بودند و این امر به موازات «بررسی دقیق طبیعت» یکی دیگر از منابع مهم تحقیقات و اکتشافات او بود. در اینجا ترجمهٔ گزیدهٔ [دیگری] را به‌تقریب می‌آوریم:

---

[۱] Fourier, créateur de la physique mathématique [۲] Jean Dhombres [۳] Jean- Bernard Robert [۴] Carl Gustav Jacobi [۵] Legendre [۶] Jean Dieudonné

«معادلهٔ گرما، همانند معادله‌های مربوط به تارهای مرتعش یا حرکت مایعات، در مبحث کاملاً جدیدی از آنالیز ریاضی قرار می‌گیرد [یعنی معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی]. پس از تشکیل معادله، باید به جستجوی جواب‌ها پرداخت. بدین معنی که از یک بیان کلی، به جواب خصوصی مقید به شرایط از پیش تعیین‌شده، دست یافت. انجام چنین تحقیقاتی، دشوار و نیازمند نوع جدیدی از آنالیز بر پایهٔ قضایای جدید است . . .. این روش هیچ ابهامی در جواب‌ها باقی نمی‌گذارد. این مطالعه و بررسی، همچون هر مطالعه و بررسی مفید دیگر، در آخر به کاربردهای عددی می‌رسد.»

نگرش فوریه به‌خوبی در مقدمهٔ کلیِ گفته‌شده در بالا، بیان شده است: کار از پدیده‌های طبیعی آغاز می‌شود و با نتیجه‌گیری‌های عددی پایان می‌یابد. در این بین، «نوع جدیدی از آنالیز» مورد نیاز است که امروزه آنالیز فوریه نامیده می‌شود. اکنون این رهیافت، نسبت به پنجاه سال پیش، با وجود روش‌های مدل‌سازی رایانه‌ای، جلوه‌ای مدرن‌تر یافته است و دلیلِ رواج دوبارهٔ دیدگاه‌های فوریه را روشن می‌کند.

۴.۲. دیریکله و ریمان. دیریکله و ریمان دنباله‌روان اصلی فوریه بودند. دیریکله در مدتی که بین سال‌های ۱۸۲۲ و ۱۸۲۵ در پاریس اقامت داشت، فوریه را ملاقات کرد. دیریکله در آن زمان، بیست سال هم نداشت. او در سال ۱۸۲۹ اولین حکم کلی و بدون غلط را دربارهٔ همگرایی سری‌های فوریه منتشر کرد. آن مقاله با ادای احترام به فوریه (هندسه‌دان نامی که راهی نو در کاربرد آنالیز گشوده است) و انتقادی از رویکرد کوشی به مسئلهٔ همگرایی آغاز می‌شود. نقطهٔ آغاز بحث دیریکله در این موضوع همانند فوریه، تابعی است که به طریقی مشخص شده است. پس از آن، دستورهایی برحسب انتگرال داده می‌شوند که ضرایب مربوط به سری فوریه را به‌دست می‌دهند. مسئله این بود که نشان دهیم این سری فوریه به آن تابع همگرا است. راه‌حل دیریکله برای این مسئله، شاهکاری در آنالیز بود و به شرایط مشهور دیریکله در باب این مسئله منتهی شد. نکتهٔ مهمی هم به دنبال داشت: برای اینکه دستورهای انتگرالی مربوط، معنی‌دار باشند، لازم است تابع داده شده در برخی شرایط صدق کند. دیریکله طی بحثی کوتاه در این باره، مثال معروفش از تابعی را که روی نقاط گویا یک مقدار و روی نقاط گنگ مقدار دیگری اختیار می‌کند می‌آورد؛ چنین تابعی نه با تعریف وی و نه با تعریفی که بعدها ریمان برای انتگرال بیان کرد، روی هیچ بازه‌ای انتگرال‌پذیر نیست. از زمان دیریکله به‌بعد، *مسئلهٔ همگرایی* سری فوریه (یعنی، سری مثلثاتی‌ای که ضرایب آن از دستورهای انتگرالی فوریه به‌دست آمده باشند) به دو سؤال بنیادی پیوند می‌خورد: منظور از *تابع* چیست؟ منظور از *انتگرال* چیست؟ واقعیت این است که اصطلاح *سری فوریه*[1] نخستین بار در رسالهٔ ریمان در باب سری‌های مثلثاتی، نگاشته‌شده در سال ۱۸۵۴، آمده است. رسالهٔ ریمان با تاریخچه‌ای

[1] Fouriersche Reihe

انتقادی از موضوع مورد بحث از زمان آغازِ مناقشه راجع به تارهای مرتعش در قرن هجدهم تا زمان انتشار مقالهٔ یادشده از دیریکله، شروع می‌شود. مقالهٔ دیریکله، از یک سو، دربارهٔ ادامهٔ تحلیلی و هارمونیک توابع و از سوی دیگر، دربارهٔ همگرایی معمولی و مطلق سری‌های عددی، ملهم از اشتباهات کوشی، بود. چند صفحه‌ای از رساله هم به انتگرال‌های عادی و تعمیم‌یافته اختصاص داشت. انتگرال ریمانِ تابع کراندار روی بازهٔ کراندار طی چند سطر تعریف شده است و (پیش از لبگ!) ریمان شرایط لازم و کافی صریحی برای انتگرال‌پذیری تابع به‌دست می‌دهد.

یکی از مضمون‌های سراسری رسالهٔ ریمان، تصدیق نقش فوریه در این موضوع است. پس از کشمکش‌های راجع به تارهای مرتعش بین دالامبر[۱]، اویلر[۲]، دانیل برنولی[۳] و لاگرانژ[۴]، «موضوع نمایش تابع دلخواه برحسب عبارتی تحلیلی، تقریباً به مدت پنجاه سال هیچ پیشرفت اساسی‌ای نکرده بود تا اینکه فوریه نکته‌ای بیان کرد و این مسئله ظاهر جدیدی به خود گرفت و در این بخش از ریاضیات، دورانی نو آغاز گردید. دیری نپایید که اهمیت فوق‌العادهٔ این موضوع برای پیشرفت فیزیکِ ریاضیاتی معلوم شد. فوریه این نکته را بیان می‌کند که برای سری مثلثاتی مفروض

$$f(x) = a_۱ \sin x + a_۲ \sin ۲x + \cdots + \frac{۱}{۲}b_۰ + b_۱ \cos x + b_۲ \cos ۲x + \cdots ,$$

ضرایب که با فرمول‌های

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

معین می‌شوند، خوش‌تعریف‌اند. او اظهار می‌کند که تعریف این سری برای تابع کاملاً دلخواه $f(x)$ معنی‌دار است. فوریه $f(x)$ را تابعی به‌اصطلاح ناپیوسته می‌گیرد (نمودار یک خط شکسته بالای محور xها) و سری‌ای به‌دست می‌آورد که در واقع همواره مقدار آن تابع را به‌دست می‌دهد.» ریمان پس از بحث دربارهٔ دلیل بی‌میلیِ لاگرانژ و خصومت پواسن، اظهار می‌کند که «در واقع فوریه بود که ماهیت سری‌های مثلثاتی را به‌طور کامل و به‌درستی دریافت. از آن پس، این سری‌ها بارها در فیزیکِ ریاضیاتی به‌منظور نمایش توابع دلخواه به‌کار گرفته شده‌اند و به آسانی می‌توان متقاعد شد که در هر مورد خاص، سری فوریهٔ مورد بحث، واقعاً به مقدار تابع همگرا است.» برای این کار، یک برهان کلی مورد نیاز بود. این برهان را، پس از کارهای کوشی در این باره، دیریکله برای ردهٔ وسیعی از توابع ارائه داد. این رده (به گفتهٔ ریمان) تمامی نیازهای احتمالی فیزیک را در بر می‌گیرد. با وجود این، «کاربرد سری‌های فوریه محدود به تحقیقات فیزیک نیست؛ امروزه آنها را با موفقیت در حوزه‌ای از ریاضیات محض، به نام نظریهٔ اعداد، به‌کار می‌گیرند و ظاهر امر این است که مهم‌ترین توابع در آن نظریه، جزء ردهٔ توابعی نیستند که دیریکله بررسی کرده است.»

[۱] d'Alembert [۲] Euler [۳] Daniel Bernoulli [۴] Lagrange

۳. نظریهٔ سری‌های مثلثاتی ریمان

با این حال، ریمان در مهم‌ترین و بدیع‌ترین بخش رساله‌اش مسیرهایی را دنبال نمی‌کند که فوریه و دیریکله ترسیم کردند. ریمان به‌جای اینکه از یک تابع آغاز کند و ویژگی‌های سری فوریه (و به‌ویژه مسئلهٔ همگرایی) آن را بررسی کند، کار را با یک سری مثلثاتی همه‌جا همگرا شروع می‌کند و به بررسی ویژگی‌های تابع مجموع می‌پردازد. ابزار و روش‌های ابداعی ریمان در این کار، به نظریهٔ سری‌های مثلثاتی ریمان مشهور است. این روش، مستلزم انتگرال‌گیری دوگانهٔ صوری از سری مفروض و عمل ضرب صوری در سری‌های (یا توابعِ) به‌قدر کافی منظم است. از دیدگاه امروزی، این مطلب تمهیدی بر رهیافت نظریهٔ توزیع‌های شوارتس است. آشکارتر اینکه ریمان در آنجا مفاهیم «توابع هموار» زیگموند[۱] و «اندازه‌نماها»[۲] و «تابع‌نماها»[۳]ی کاهان و سِیلم[۴] را به‌کار می‌برد که بعدها معرفی شدند.

نظریهٔ سری‌های مثلثاتی ریمان نقش بزرگی در تاریخ ریاضیات ایفا کرد. دلیل این امر، طرح دو مسئله‌ای است که ریمان آنها را بدون پاسخ گذاشت و به‌دست گئورگ کانتور حل شدند: یکی اینکه ثابت کنید اگر یک سری مثلثاتی، همه‌جا همگرا باشد، ضرایب آن به صفر می‌گرایند و مسئلهٔ دشوارترِ دوم اینکه ثابت کنید چنانچه سری مثلثاتی، همه‌جا به صفر همگرا باشد، آن سری، سری صفر است. حکم اخیر همان «قضیهٔ یکتایی» کانتور است. کانتور سپس در پی «گسترشی» از این حکم برآمد: آیا اگر فرض را به این صورت ضعیف‌تر کنیم که سری مورد بحث، خارج از یک مجموعهٔ مفروض همگرا به صفر باشد، این نتیجه به قوت خود باقی می‌ماند؟ کانتور ثابت کرد برای مجموعه‌های «تحویل‌پذیر»[۵] (مجموعه با بستارِ شمارا) پاسخ مثبت است. این فرصت اولین فرصتی بود که کانتور برای ابداع نظریه‌اش دربارهٔ اعداد حقیقی و مجموعه‌های اعداد حقیقی می‌یافت. لذا نظریهٔ سری‌های مثلثاتی به‌لحاظ تاریخی سرمنشأ نظریهٔ مجموعه‌ها است. مجموعه‌های یکتایی (که پاسخ پرسش گفته‌شده برای آنها مثبت است) و مجموعه‌های چندگانگی[۶] (نقطهٔ مقابل مجموعه‌های یکتایی) به‌صورت یک مکان ایده‌آل برای به‌کار بستن روش‌های آنالیز تابعی، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ اعداد و منطق درآمدند. ریاضیدانانی که آثار مهمی در این زمینه دارند عبارت‌اند از: لبگ، مارتسل ریس[۷]، یانگ، مِنشُف[۸]، رایچمن[۹]، باری[۱۰]، زیگموند، مارتسینکیه‌ویچ[۱۱]، سِیلم و پس از آنها آر. کوفمن[۱۲]، تی. کورنر[۱۳]، جی.-پی. کاهان، بی. مَندلبرو[۱۴]، وای. کتس‌نلسون[۱۵]، بی. کانس[۱۶] و متأخرتر از آنها اِی. اس. کِخریس[۱۷]، و اِی. لوؤ[۱۸] جی، دِبز[۱۹] و جی. سَن‌رمون[۲۰] جی. بورگَن[۲۱]، اِم. اَش[۲۲] و جی. وانگ[۲۳]. تاریخچهٔ مختصری از این موضوع را می‌توان در [۴] یافت. قضیهٔ یکتایی کانتور بدین معنی است که چنانچه مجموع یک سری مثلثاتی همه‌جا همگرا، معلوم باشد، ضرایب آن خوش‌تعریف‌اند. برای

---

[۱] Zygmund [۲] pseudomeasures [۳] pseudofunctions [۴] Salem [۵] reducible [۶] multiplicity [۷] Marcel Riesz [۸] Menchoff [۹] Rajchman [۱۰] Bari [۱۱] Marcinkiewicz [۱۲] R. Kaufman [۱۳] T. Körner [۱۴] B. Mandelbrot [۱۵] Y. Katznelson [۱۶] B. Connes [۱۷] A. S. Kechris [۱۸] A. Louveau [۱۹] G. Debs [۲۰] J. Saint-Raymond [۲۱] J. Bourgain [۲۲] M. Ash [۲۳] G. Wang

محاسبهٔ این ضرایب، نوع جدیدی از دستورات فوریه به‌انضمام معنای جدیدی از انتگرال مورد نیاز است. مقصودِ نظریهٔ «کلی‌سازی»[۱] مرتبهٔ دوم اِی. دانژوا [۲] همین امر است. کتاب «درس‌هایی دربارهٔ حساب ضرایب سری‌های مثلثاتی» وی (به‌سال ۱۹۴۱، ۱۹۴۹) در چهار جلد، تقریر کامل همین موضوع است.

۴. مسئلهٔ همگرایی پس از دیریکله

نظریهٔ ریمان و قضیهٔ یکتایی کانتور جزء میراث فوریه‌اند، منتها قسمت اصلی آن نیستند. قسمت اصلی را خود ریمان به‌خوبی بیان کرده که همان مسئلهٔ همگرایی است که دیریکله مورد بررسی قرار داده است. تصور دیریکله، علی‌رغم اینکه از عهدهٔ اثبات آن برنیامد، این بود که سری فوریهٔ تابع پیوسته باید نقطه‌وار به خود تابع همگرا باشد. نادرستی این مطلب را پُل دوبوا–ریمون[۳] بعدها در سال ۱۸۷۳ ثابت کرد و تابعی پیوسته ساخت که سری فوریه‌اش در نقطهٔ مفروضی واگرا است. ساختار آن مثال، صورتی از «متراکم‌سازی تکینی‌ها» است. لبگ و همچنین فِیِر[۴] مثال‌های دیگری به‌دست داده‌اند. امروزه این مثال به‌عنوان کاربردی متداول از قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس ذکر می‌شود و در اثبات آن از این مطلب که نرم L^1 هستهٔ دیریکله (یا، به‌اصطلاح، ثابتِ لبگ) کرندار نیست، استفاده می‌شود. آیا می‌شود تابع پیوسته‌ای ساخت که سری فوریهٔ آن همه‌جا واگرا باشد؟ این سؤال نیز تا سال ۱۹۶۵، پیش از اثبات قضیهٔ کارلسون، بی‌پاسخ مانده بود و کتس‌نلسون و نگارندهٔ مقالهٔ حاضر ثابت کردند یا چنین تابعی را می‌توان ساخت و یا سری فوریهٔ هر تابع پیوسته، تقریباً همه‌جا به خودِ تابع همگرا است. نکته در این بود که تابعی پیوسته بسازیم که سری فوریهٔ آن روی مجموعهٔ پوچِ مفروضی واگرا باشد.

۱.۴. قضیهٔ کارلسون. قضیهٔ سال ۱۹۶۶ کارلسون[۵] پرسش گفته‌شده در بالا را پاسخ داد: سری فوریهٔ تابع پیوسته، تقریباً همه‌جا به خود تابع همگرا است و برای توابع پیوسته چیزی بهتر از این نمی‌توان گفت [۱]. ولی چنانچه ردهٔ توابع مورد بحث را بزرگتر بگیریم، گفتنی‌های بسیاری داریم. کارلسون ثابت کرد این نتیجه برای L^2 برقرار است (۱۹۶۶)، و آر. هانت[۶] آن را برای L^p که $p > ۱$ ثابت کرد (۱۹۶۷). از سوی دیگر، این نتیجه برای L^1 برقرار نیست، زیرا کلموگُرُف تابعی در L^1 ساخت که سری فوریه‌اش تقریباً همه‌جا (۱۹۲۲) و حتی همه‌جا واگرا است (۱۹۲۶). وضعیت در نزدیکیِ[۷] L^1 در این اواخر مورد بررسی قرار گرفته است و همان‌طور که خواهیم دید، باعث مطرح شدن پرسش‌های پیچیده‌ای شده است.

اکنون برای اینکه اهمیت نتیجهٔ سال ۶۷–۱۹۶۶ کارلسون–هانت را درک کنیم، به ویراست و چاپ‌های پیاپی کتاب «سری‌های مثلثاتی» [۱۱] زیگموند رجوع می‌کنیم. بهترین نتیجهٔ شناخته‌شده پیش از ۱۹۶۶ برای توابع عضو L^2 در حالت کلی متعلق به کلموگُرُف بود (۱۹۲۲): برای یک دنبالهٔ شکافدارِ[۸] آدامار مانند (n_k)، مثلاً $n_k = ۲^k$، مجموع‌های جزئی مرتبهٔ n_k تقریباً همه‌جا به خود تابع میل می‌کند. برای

[۱] totalization [۲] A. Denjoy [۳] Paul du Bois-Raymond [۴] Fejer [۵] Carleson [۶] R. Hunt [۷] situation near
[۸] lacunary

توابع عضو L^p، $p > ۱$، در حالت کلی همین حکم برقرار است، منتها اثبات آن متکی به یک ابزار پیچیده موسوم به نظریهٔ لیتلوود-پِیلی[1] است (۱۹۳۸). دو فصل از ویراست دوم کتاب زیگموند به نظریهٔ لیتلوود-پیلی و همگرایی تقریباً همه‌جاییِ مجموع جزئی مرتبهٔ n_k اختصاص دارد که کاربرد اصلی آن نظریه محسوب می‌شود. کشف کارلسون، تغییری اساسی در چشم‌انداز موضوع مورد بحث ایجاد کرد. نخست اینکه نتیجهٔ کلموگُرُف دیگر بهترین نتیجه نبود. دوم اینکه به‌سبب گسترشی که هانت از قضیهٔ کارلسون به همهٔ L^pها، $p > ۱$، به‌دست داد، قضیهٔ لیتلوود-پیلی تبدیل به وسیله‌ای منسوخ در بررسی مسئلهٔ همگرایی شد. این موضوع چیز غیرمنتظره‌ای برای زیگموند بود. در زمان حیاتش چندین «چاپ» جدید از ویراست دوم کتاب «سری‌های مثلثاتی» به بازار آمد، ولی هیچ «ویراست سومی» عرضه نشد. «ویراست سوم» آن کتاب می‌بایست یک بازنویسی کامل می‌بود. برای این کار، قضیهٔ کارلسون-هانت می‌بایست آورده می‌شد و بسیاری از نتایج جزئی و روش‌های مربوط، کنار گذاشته می‌شد؛ نگه‌داشتن نظریهٔ لیتلوود-پیلی هم دیگر هیچ دلیلی نداشت. خوشبختانه زیگموند بازنویسی آن را بدین صورت دنبال نکرد و کتاب با همان شرح زیبایش از نظریهٔ لیتلوود-پیلی، بدون قضیهٔ کارلسون-هانت، باقی‌مانده است.

وضعیتِ در نزدیکیِ $L^۱$ ارتباط نزدیکی با رفتار مجانبی مجموع‌های جزئی $S_n(f,x)$ دارد وقتی که $f \in L^۱$. نخستین نتیجهٔ مهم در این باره از آنِ هاردی است (۱۹۱۳): اگر $f \in L^۱$، آن‌گاه تقریباً همه‌جا $S_n(f,x) = o(\log n)$. هاردی حدس زد که این بهترین نتیجهٔ ممکن است. در جهت عکس این حکم، مثال سال ۱۹۲۶ کلموگُرُف وجود تابعی مانند $f \in L^۱$ را ثابت کرد که همه‌جا $\lim |S_n(f,x)| = \infty$. برای چه دنباله‌های صعودی $l(n)$ تابع $f \in L^۱$ موجود است به‌طوری که همه‌جا $\lim(|S_n(f,x)|/l(n)) = \infty$؟ بهترین نتیجه در این باره، تا چند سال پیش این بود که شرط $l(n) = o(\log\log n)$ حکم مورد نظر را به‌دست می‌دهد (چن[2] ۱۹۶۲). در سال ۱۹۹۹، کونیاگین[3] تا $l(n) = o((\log n/\log\log n)^{۱/۲})$ پیش رفت، و بچکارِف[4] در سال ۲۰۰۳ ثابت کرد که اگر به‌جای دایره، گروه کانتور را بگذاریم، شرط $l(n) = o((\log n)^{۱/۲})$ کفایت می‌کند. اکنون مسئلهٔ دشوار، بهتر کردن نتیجهٔ هاردی یا کونیاگین است. یک موردِ آزمودنی عبارت است از $l(n) = (\log n)^p$ که $۱/۲ < p < ۱$.

۲.۴. شکل‌های متفاوت همگرایی. رواج دوبارهٔ سری‌های فوریه در قرن بیستم عمدتاً به‌دلیل مطرح شدن روش‌های جدید در مطالعهٔ مسئلهٔ همگرایی بوده است. در وهلهٔ نخست، می‌توان به‌جای همگرایی عادی، فرآیندهای مجموع‌پذیری را وارد کار کرد. این راه را فِیِر در سال ۱۹۰۰ گشود و به معرفی مفاهیم هسته‌های مثبت، همانی‌های تقریبی، ضربگرها و پیچش منتهی شد. مهم‌ترینِ این مفاهیم، یعنی پیچش، خیلی دیر صورت‌بندی شد و عملاً هیچ تعریف صوری هم حوزهٔ واقعی این مفهوم را پوشش نمی‌دهد.

---
[1] Littlewood-Paley [2] Chen [3] Konyagin [4] Bochkarev

جبرهای پیچشی وینر[1] باعث شد درک بهتری از مفهوم پیچش حاصل شود. جبرهای پیچشی وینر یکی از سرچشمه‌های مفهوم حلقه‌های نرمدار (جبرهای باناخ) گلفاند[2] بودند. از سوی دیگر، همگرایی را می‌توان در فضای توابع و همچنین برای مفاهیم مجموع‌پذیری مورد بررسی قرار داد. این مسیر، پیوندی محکم بین سری‌های فوریه و سرچشمه‌های آنالیز تابعی ایجاد کرد. انتگرال لبگ (۱۹۰۱) و کاربردهای آن در سری‌های فوریه (۱۹۰۶)، تکان‌های اولیهٔ این پیوند به‌حساب می‌آیند و بعد از آنها قضیهٔ ریس–فیشر (۱۹۰۷) قرار می‌گیرد. حکم سادهٔ «L^p کامل است» (که ابتدا نیازمند تعریف فضاهای L^p و فضای متریک کامل است) جزء میراث فوریه است. سری‌های فوریه نخستین نمونه از سری‌های متعامد است و این‌گونه سری‌ها در همهٔ بخش‌های آنالیز ظاهر می‌شوند. در $L^۲$–همگرایی آنها شکی نیست، ولی مسائل همگراییِ تقریباً همه‌جاییِ آنها، نظیر حالت سری‌های فوریهٔ کلاسیک، واقعاً جالب‌اند. هزاران مقاله و صدها کتاب راجع به این موضوعات در حال نگارش است و من در اینجا دیگر بر آنها تأکید نمی‌کنم.

۵. فوریه دوباره باز می‌گردد

اجازه دهید برگردیم به سراغ فوریه. فوریه سری‌های مثلثاتی را اولین‌بار و نوعاً در حل مسئله‌ای دربارهٔ توزیع دما در یک جسم صلب مفروض به‌شکلِ استوانه‌ای با قاعدهٔ نیم‌نوار $-\pi/۲ \leq x \leq \pi/۲$، $۰ \leq y < \infty$ و $-\infty < z < \infty$ به‌کار برد. دما در قاعدهٔ افقی ($y = ۰$) برابر با ۱ و در ضلع‌های قائم ($x = \pm\pi/۲$) برابر با ۰ است. در حالت تعادلِ گرمایی، مقدار دما، $u(x, y)$، در معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

صدق می‌کند که $u(\pm\pi/۲, y) = ۰$ و $u(x, ۰) = ۱$ $(-\pi/۲ < x < \pi/۲)$. جوابی صوری برای این معادله به‌صورت

$$u(x,y) = a_۱ e^{-y}\cos x + a_۳ e^{-۳y}\cos ۳x + a_۵ e^{-۵y}\cos ۵x + \cdots \qquad (۱.۵)$$

است و شرط آخر مسئله با قید

$$۱ = a_۱\cos x + a_۳\cos ۳x + a_۵\cos ۵x + \cdots \quad \left(-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}\right) \qquad (۲.۵)$$

بیان می‌شود. فوریه پیش از آوردن دستورهای انتگرالی ضرایب، آنها را به شیوه‌ای عجیب و غریب با استفاده از مشتق‌گیری، برش، و حل یک دستگاه خطی محاسبه می‌کند. داربو اظهار می‌کند که این روش، طبیعی است و حق با داربو است. کاری که فوریه انجام داد این بود که چندجمله‌ایِ مثلثاتیِ $۱ - \sum a_n \cos nx$ (n فرد) از درجهٔ مفروض را که در ۰ تا حد ممکن تخت[3] است مورد توجه قرار داد و سپس حد a_n را هنگامی

[1] Wiener [2] Gelfand [3] flat

که درجه به بینهایت میل می‌کند، یعنی $(-۱)^{n+۱}۴/\pi n$، محاسبه کرد. مشتق این چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تا حد ممکن در ۰ تخت هستند، فرد نیز هستند و انتگرال آنها روی $(-\pi/۲, ۰)$ برابر با ۱ است. به زبانِ نظریهٔ توزیع‌ها، آنها به $۲(\delta_{-\pi/۲} - \delta_{\pi/۲})$ همگرا هستند و این مطلب، برای اثبات (۱.۵) وقتی $y > ۰$ کفایت می‌کند. برهان (۲.۵) دشوارتر است.

البته فوریه چیزی از نظریهٔ توزیع‌ها نمی‌دانست، ولی توانایی زیادی در درک محاسبات داشت. پس عاقلانه است که پیش از مطرود شمردنِ روش‌ها و احکام وی، سعی کنیم از آنها سر دربیاوریم. فوریه پس از به‌دست دادنِ دستورهای انتگرالی ملاحظه کرد که به‌دلیل وجود عامل‌های نمایی، همگرایی سری (۱.۵) به‌ازای $y > ۰$ بسیار سریع است. نظرش دربارهٔ سری (۲.۵) این بود که همگرایی آن را می‌توان ثابت کرد و عملاً هم بعداً در آن فصل اثبات درستی برای آن آورد. او سپس این فرآیند را به توابعِ دیگر گسترش و دستورهای فوریه را برای توابع متناوب کلی با دورهٔ تناوب ۲π به‌دست داد. پس از آن، ادعا کرد که این روش را می‌توان برای توابع دلخواه به‌کار گرفت و یک سری مثلثاتی به‌دست آورد که همواره به آن تابع همگرا باشد. از نگاه دقیق و رسمی، این مطلب نادرست است و ما همین الان برخی از تحقیقات مهم برای یافتن مفاهیم و احکام صحیح در این باره را مورد بررسی قرار دادیم. فوریه به‌سبب عدم دقت در بیان برخی از احکام، به‌ویژه از طرف داربو، در معرض انتقاد بوده است و این امر تا حدودی علت عدم محبوبیت طولانی مدت او در بین فرانسویان بود. ولی فوریه سزاوار احترام است نه به این دلیل که چند قضیه اثبات کرد و احکام بی‌نقصی بیان کرد، بلکه از این نظر که برنامه‌ای بلندمدت را در ریاضیات به راه انداخت. در هر بخشی از نظریهٔ تحلیلی گرما می‌توان نمونه‌هایی از عباراتی یافت که نامعقول انگاشته می‌شدند و شاید به‌نظر، پیشگویانه نیز برسند. یک نمونه ذکر می‌کنیم ([۲] فصل III ص. ۲۵). فوریه از دستورهای انتگرالی ضرایب، دستور

$$F(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha)d\alpha\left(\frac{۱}{۲} + \sum_i \cos i(x-\alpha)\right)$$

را نتیجه می‌گیرد. داربو در حاشیهٔ این مطلب می‌نویسد که پرانتزها هیچ معنایی ندارند. اما توضیحات فوریه از این قرار است:

> «عبارت (...) تابعی از x و α را نمایش می‌دهد به‌طوری که اگر در تابعی مانند $F(\alpha)$ ضرب شود و اگر بعد از نوشتن $d\alpha$، بین حدود $\alpha = -\pi$ و $\alpha = \pi$ از آن انتگرال گرفته شود، تابع داده شدهٔ $F(\alpha)$ به تابع مشابهی از x، یعنی ضرب‌شدهٔ آن در نصف محیط دایره، تغییر خواهد یافت.»

به نظرِ من، آشکار است که فوریه فهمی شهودی از اندازهٔ دیراک و طریقهٔ به‌کاربستن آن داشته است (به‌ویژه، در بخش‌های جلوتر رساله، در قسمت مشتق و نمایش به‌صورت انتگرال فوریه). گفتنی است که اولین

نوشتهٔ لوران شوارتس[۱] دربارهٔ نظریهٔ توزیع‌ها، مقاله‌ای بود (۱۹۴۵) با عنوان «تعمیم مفاهیم تابع، مشتق، تبدیل فوریه، و کاربردهای ریاضیات در فیزیک»[۱۰]. بنابراین از یک دیدگاه می‌توان گفت که نظریهٔ توزیع‌ها جزء میراث فوریه است.

در باب مشتقات جدید و جالب‌تر سری‌های فوریه به‌اختصار سخن خواهم گفت. تبدیل سریع فوریه که کولی[۲] و تاکی[۳] (۱۹۶۵) آن را «الگوریتمی برای محاسبهٔ ماشینی سری‌های فوریهٔ مختلط» معرفی کرده بودند، کاربردهای ارزشمندی در همهٔ بخش‌های علوم از اختر فیزیک گرفته تا زیست‌شناسی یافته است. موجک‌های ایو مِیِر[۴] از کارهای فیزیکدانان و مهندسین سرچشمه گرفت و بلافاصله بستر مشترکی برای متخصصان شاخه‌های مختلف علوم و صنایع ایجاد کرد. این موضوع کاملاً شناخته‌شده و همچنان در حال پیشرفت است[۵] و بازگو کردن آن بی‌مورد است. نکتهٔ اصلی، تا جایی که به میراث فوریه ربط دارد، این است که FFT [تبدیل سریع فوریه] و موجک‌ها گواه آن هستند که فلسفهٔ فوریه، که در بالا آمد، دوباره رواجی چشمگیر خواهد یافت.

در ابتدا اشاره کردیم که در اینجا خود را به میراث ریاضی فوریه و، به بیان دقیق‌تر، سری‌های فوریه محدود خواهیم کرد. عملاً هم تعداد زیادی از موارد جذاب در تاریخ سری‌های فوریه را انتخاب کردیم و ذکری از هیچ مسئلهٔ حل‌نشده‌ای به میان نیاوردیم. ترتیب سخنرانی من دقیقاً این نبود. لیکن اکنون خوش‌تر دارم با تأمل در باب گذشته، و نه با ارائهٔ فهرستی شخصی از مسائل حل‌نشده، سهمی در «چشم‌اندازهایی در آنالیز» داشته باشم. گذشتهٔ ریاضیات، پرمایه است و مسیری که گذشته از طریق آن در جدیدترین تحقیقات ریاضی طنین‌انداز می‌شود، جزء «چشم‌اندازهایی در آنالیز» به‌شمار می‌آید.

مراجع

[1] Carleson, L., On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135-157.

[2] Fourier J., *Thèorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot Pére et Fils, Paris, 1822.

[3] Jaffard, S., Meyer, Y., Ryan, R. D., *Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 2001.

[4] Kahane, J.-P., Sets of uniqueness and sets of multiplicity, *Banach Center Publications*, **56** (2002), 55-68.

[5] Kahane, J.-P., Lemarié-Rieusset, P.G., *Séries de Fourier et Ondelettes*, Cassini, Paris, 1998.

[6] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd. edn., Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] Kolmogorov, A. N., *Selected Works*, vol. I, Kluwer, Netherlands, 1991.

[۵] برای نمونه [۳] را نگاه کنید.

[۱] Laurent Schwartz [۲] Cooley [۳] Tuckey [۴] Yves Meyer

[8] Konyagin, S. V., On divergence of trigonometric Fourier series everywhere, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math.*, **329** (1999), 693-697.

[9] Riemann, B., *Über die Darstellbarkeit Einer Function Durch Eine Trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, Universität Göttingen, 1854.

[10] Schwartz, L., Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématique et physiques, *Annales Univ. Grenoble*, **21** (1945), 57-74.

[11] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, 3rd. edn., Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

سعید مقصودی: زنجان-دانشگاه زنجان-گروه ریاضی

رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir