فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۹ (پاییز و زمستان ۱۳۹۵) صص. ۴۳ تا ۷۰

مقایسه‌ای از رویکردهای نیمن - پیرسون، بیز و کم- بیشینه در آزمون فرضیه‌های فازی

عباس پرچمی، سید محمود طاهری، و ناصررضا ارقامی

چکیده

در این مقاله، سه رویکرد نیمن–پیرسون، بیز و کم–بیشینه را به مسئلهٔ آزمون فرضیه‌های فازی (در حالتی که داده‌ها معمولی هستند) مطرح و مقایسه می‌کنیم. در هر سه رویکرد، اگر فرضیه‌ها دقیق در نظر گرفته شوند، آزمون مربوط معادل با آزمون‌های نیمن–پیرسون، بیز و کم–بیشینه برای فرضیه‌های دقیق خواهد بود. یک مثال کاربردی نیز در حوزهٔ کشاورزی ارائه می‌شود و به‌وسیلهٔ این سه رویکرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱. فرضیه‌های فازی: انگیزه‌ها و کاربردها

در رویکرد کلاسیک به آمار، فرضیه‌های آماری به‌وسیلهٔ مجموعه‌های معمولی (دقیق) بیان می‌شوند. اما در عمل، به دلایل مختلف، با مواردی مواجه می‌شویم که صورت‌بندیِ فرضیه‌ها با استفاده از مجموعه‌های فازی مناسب‌تر است. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱. یک آزمون رایج در بسیاری از مسائل کاربردی، آزمون مقایسهٔ میانگین‌های دو جامعهٔ مستقل است. مثلاً در حوزهٔ علوم تربیتی: مقایسهٔ دو روش آموزش از لحاظ میزان یادگیری، در حوزهٔ کشاورزی: مقایسهٔ رشد یک نوع گیاه بر اساس دو روش کشت، در حوزهٔ مهندسی سازه: مقایسهٔ مقاومت دو روش فناوری بتن. در اغلب این مسائل، برابریِ دقیق میانگین‌ها مورد نظر نیست، بلکه کافی است بررسی کنیم که آیا میانگین‌های دو جامعه «تقریباً برابر» هستند یا خیر؟ لذا مناسب‌تر و طبیعی‌تر این است که

عبارات و کلمات کلیدی. فرضیهٔ فازی؛ آزمون بیز؛ آزمون کم–بیشینه؛ لم نیمن–پیرسون؛ احتمال پیشامد فازی.

فرضیه‌های مورد آزمون به این صورت تنظیم شوند:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : & \mu_1 \text{ و } \mu_2 \text{ تقریباً برابر هستند} \\ \tilde{H}_1 : & \mu_1 \text{ و } \mu_2 \text{ تفاوت بسیار دارند} \end{cases}$$

در اینجا می‌توانیم مفاهیم «تقریباً برابر» و «تفاوت بسیار» را بر اساس مجموعه‌های فازی مدل‌سازی و در تنظیم فرضیه‌ها از آنها استفاده کنیم.

مثال ۲.۱. گاهی مناسب‌تر و واقعی‌تر است که برای صورت‌بندیِ فرضیه‌های مورد آزمون، از واژه‌های کلامی به‌جای ارائهٔ مقدارهای عددی دقیق استفاده کنیم. برای مثال، فرض کنید ادعایی از طرف نهاد سازندهٔ یک موشک زمین به زمین، مبنی بر کم خطا بودنِ موشک‌های تولیدی در اصابت به هدف، مطرح شده است. در این مورد، اگر میانگین خطا در برخورد به هدف را با متر اندازه‌گیری کنیم، فرضیه‌ها مثلاً این گونه بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \leq 100 \\ H_1 : & \mu > 100 \end{cases}$$

که در آن، μ متوسط فاصلهٔ محل اصابت موشک‌های تولیدی تا هدف است. اما روشن است که هرچه موشک نزدیک‌تر به هدف اصابت کند، تأثیر و شدت تخریب آن بیشتر است و هرچه دورتر اصابت کند، تأثیر کمتری دارد. لذا مناسب‌تر است که فرضیه‌های مورد آزمون، به‌کمک مجموعه‌های فازی به‌صورت زیر طراحی شوند که در آنها به‌جای عدد دقیق ۱۰۰، از واژه‌های کوچک و بزرگ استفاده شده است:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : & \mu \text{ کوچک است} \\ \tilde{H}_1 : & \mu \text{ بزرگ است} \end{cases}$$

مثال ۳.۱. گاهی کافی است مطمئن شویم که در یک جامعه یا سازوکار تحت مطالعه، وضعیت جدید از وضعیت قبلی به اندازه‌ای قابل قبول بهتر شده است. در این موارد فرضیه‌های فازی، فرضیه‌هایی معقول‌تر و طبیعی‌تر هستند. مثلاً جامعه‌ای را در نظر بگیرید که نرخ شیوع یک بیماری خاص در آن حدوداً ۰/۲۰ بوده است. پس از انجام یک واکسیناسیون همگانی، می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا این نسبت «بسیار کم» شده است یا خیر. در این مورد، طبیعی است که نخست واژه‌های کلامی «حدوداً ۰/۲۰» و «بسیار کم» را با دو مجموعهٔ فازی مدل‌سازی و آن‌گاه فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : & \theta \text{ حدوداً ۰/۲۰ است} \\ \tilde{H}_1 : & \theta \text{ بسیار کوچک است} \end{cases}$$

مثال ۴.۱. گاهی متغیر مورد بررسی و مشاهدات مربوط به آن، مبهم است. در این موارد نیز بسا بهتر باشد که فرضیه‌های مورد آزمون را نادقیق در نظر بگیریم. مثلاً اگر بخواهیم در مورد «رضایت شغلی» در میان افراد یک جامعه بررسی انجام دهیم، داده‌هایی (مشاهده‌هایی) به‌صورت زیر خواهیم داشت: «رضایت متوسط»، «رضایت نسبتاً زیاد»، «رضایت کم»، «رضایت خیلی کم»، .... در این مورد، طبیعی‌تر است که فرضیه‌های مورد آزمون را نیز فازی در نظر بگیریم. مثلاً به‌جای آزمون فرضیهٔ

H : متوسط رضایت شغلی بیشتر از ۸۲/۶ است

این فرضیهٔ فازی را آزمون کنیم که

$\tilde{H}$: متوسط رضایت شغلی نسبتاً زیاد است

مثال‌های بالا نمونه‌هایی از مسائلی هستند که در آنها تنظیم فرضیه‌ها به‌صورت مجموعه‌های فازی، موجّه یا مطلوب است. از این دست مسائل بسیار است. به‌منظور طولانی نشدن مقاله، از آوردن مثال‌های دیگر چشم‌پوشی می‌کنیم. در این مقاله، نخست توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان فرضیه‌های نادقیق را در قالب مجموعه‌های فازی صورت‌بندی کرد و سپس سه رویکرد به آزمون فرضیه‌های فازی را بررسی و مقایسه می‌کنیم.

۲. فرضیه‌های فازی: مفاهیم و تعریف‌ها

در این بخش، چند تعریف و رابطهٔ مقدماتی را دربارهٔ فرضیه‌های فازی مرور می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم که Θ فضای پارامتر مورد بحث است.

تعریف ۱.۲. هر گزارهٔ فازی به‌شکل «θ به‌صورت تابع H است : $\tilde{H}$» است که در آن، $H : \Theta \to [0, 1]$ یک فرضیهٔ فازی نامیده می‌شود. عبارت «θ به‌صورت تابع H است» دلالت بر این دارد که هر مقدار خاص مانند θ، با درجهٔ $H(\theta)$ متعلق به فضای پارامتر است.

به دیگر سخن، هر ادعا دربارهٔ پارامتر مجهول جامعه که به وسیلهٔ یک مجموعهٔ فازی بیان گردد، یک فرضیهٔ (پارامتری) فازی است [۱]. توجه کنید که با جایگذاری تابع نشانگر به‌جای تابع عضویت، تعریف فوق تبدیل به تعریف فرضیهٔ معمولی در آمار کلاسیک می‌شود و بنابراین فرضیه‌های معمولی (غیرفازی)، حالت خاصی از فرضیه‌های فازی هستند. برای مثال، فرضیهٔ غیرفازی $H : \theta = \theta_0$ را می‌توان یک فرضیهٔ فازی با تابع عضویت $I(\theta = \theta_0)$ در نظر گرفت.

مثال ۲.۲. فرض کنید θ نسبت (مجهول) افراد بزرگسال مرد ساکن در استان گلستان باشد که مبتلا به سرطان روده هستند. هر یک از فرضیه‌های زیر که تابع عضویت مربوط به آنها در ادامه درج شده است، یک فرضیهٔ فازی در مورد مقدار θ است (شکل ۱ را ببینید):

$\tilde{H}_1$: θ کوچک است (نسبت مبتلایان کم است)

$\tilde{H}_2$: θ بسیار کوچک است (نسبت مبتلایان بسیار کم است)

$\tilde{H}_3$: θ تقریباً ۰/۱۵ است

$$H_1(\theta) = \begin{cases} \frac{0/3-\theta}{0/3} & 0 \leq \theta < 0/3 \\ 0 & 0/3 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$H_2(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{0/3-\theta}{0/3}\right)^4 & 0 \leq \theta < 0/3 \\ 0 & 0/3 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$H_3(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < 0/10 \\ \frac{\theta-0/10}{0/05} & 0/10 \leq \theta < 0/15 \\ \frac{0/20-\theta}{0/05} & 0/15 \leq \theta < 0/20 \\ 0 & 0/20 \leq \theta \end{cases}$$

در همین مثال، فرضیه‌های زیر را در نظر بگیرید:

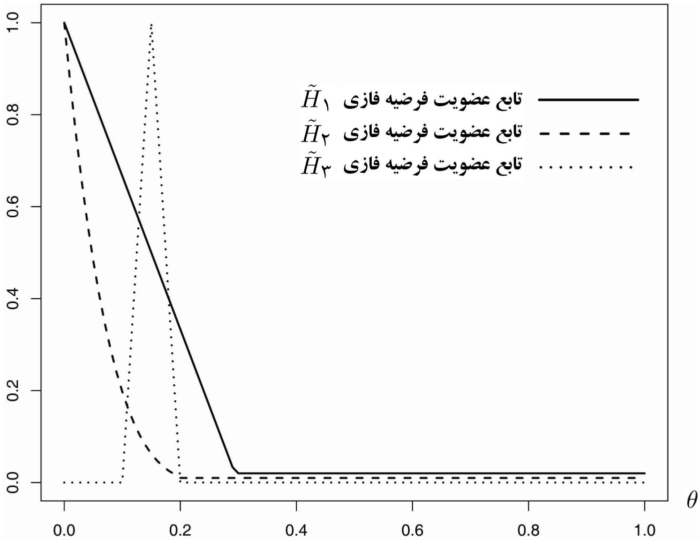
H_0 : θ کوچکتر یا مساوی ۰/۲۰ است

H_1 : θ بزرگتر از ۰/۲۰ است

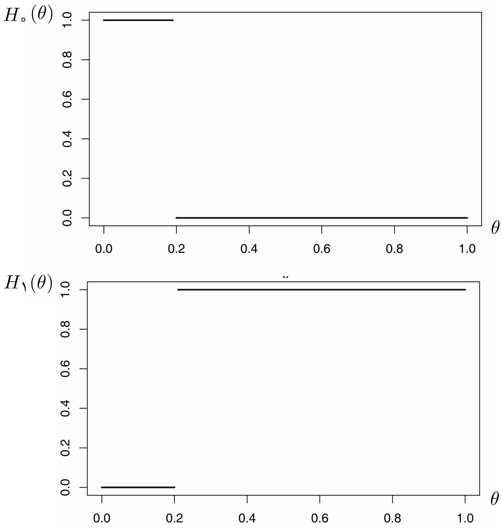
هر دو فرضیهٔ بالا، فرضیه‌های دقیق (غیرفازی) هستند و البته می‌توان این فرضیه‌ها را حالت‌های خاص از فرضیه‌های فازی با توابع عضویت زیر در نظر گرفت (شکل ۲ را ببینید):

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq 0/20 \\ 0 & 0/20 < \theta \leq 1 \end{cases} \qquad H_1(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta \leq 0/20 \\ 1 & 0/20 < \theta \leq 1 \end{cases}$$

مثال ۳.۲. میزان جذب عنصر سمی کادمیوم توسط ریشهٔ گیاه تربچه از یک خاک آلوده به $CdNO_3$، به‌عنوان متغیر تصادفی در یک تحقیق کشاورزی در نظر گرفته شده است. بر اساس تحقیقات پایس و بنتون [۱۳]، اگر میزان جذب کادمیوم توسط گیاه (برحسب میلی‌گرم در هر کیلوگرم مادهٔ خشک) در بازهٔ $[0/05, 0/2]$ باشد، آن‌گاه جذب ایده‌آلی توسط گیاه صورت گرفته است. همچنین حداکثر میزان جذب



شکل ۱. نمودار توابع عضویت سه فرضیهٔ فازی در مثال ۲.۲



شکل ۲. نمودار توابع عضویت فرضیه‌های دقیق H_0 (نمودار بالایی) و H_1 (نمودار پایینی) در مثال ۲.۲

قابل قبول کادمیوم برای گیاه تربچه برابر ۳ میلی‌گرم در هر کیلوگرم مادهٔ خشک است. فرض کنید ادعایی

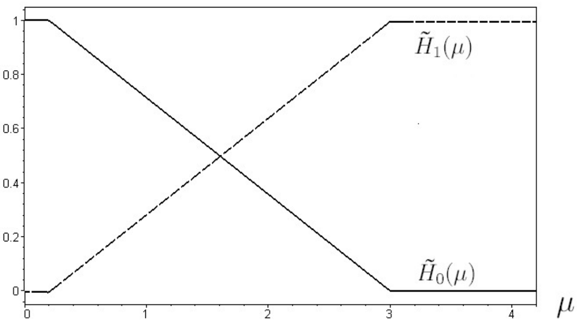
دربارهٔ تربچه‌های کاشته‌شده در یک تحقیق گلخانه‌ای مطرح شده است مبنی بر اینکه میانگین جذب کادمیوم (μ) منطبق بر جذب مناسب معرفی‌شده توسط پایس و بنتون [۱۳] است. برای بررسی صحت و سقم این ادعا، فرضیه‌ها به‌شکل زیر صورت‌بندی شده‌اند:

$$\begin{cases} \tilde{H}_۰ : \text{میانگین جذب کادمیوم کم است} \\ \tilde{H}_۱ : \text{میانگین جذب کادمیوم زیاد است} \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

در اینجا مفاهیم نادقیقِ «کم» و «زیاد» به‌ترتیب به‌وسیلهٔ

$$H_۰(\mu) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq \mu < ۰/۲ \\ \frac{۳-\mu}{۲/۸} & ۰/۲ \leq \mu < ۳ \\ ۰ & \mu \geq ۳ \end{cases}$$

و $H_۱(\mu) = ۱ - H_۰(\mu)$ مشخص شده‌اند (شکل ۳). از آنجا که کادمیوم عنصری سمی است، می‌توان



شکل ۳. توابع عضویت فرضیه‌های فازی در مثال ۳.۲

ادعا کرد که جذب کمتر آن برای گیاه مناسب‌تر بوده و لذا در معرفی $H_۰(\mu)$، میزان عضویت اعداد $[۰, ۰/۲]$ به مجموعهٔ فازیِ جذب مناسب کادمیوم، برابر ۱ در نظر گرفته شده است (شکل ۳ را ببینید). توجه داشته باشید که اگر به‌منظورِ صورت‌بندی این ادعا، از فرضیه‌های معمولی و غیرفازی

$$\begin{cases} H_۰ : \mu \leq ۰/۲ + ۲/۸t \\ H_۱ : \mu > ۰/۲ + ۲/۸t \end{cases} \qquad (۲.۲)$$

استفاده کنیم، آن‌گاه به‌ازای مقدارهای مختلف $۰ \leq t \leq ۱$ می‌توان فرضیه‌های $H_۰$ و $H_۱$ زیادی را مطرح ساخت که لزوماً آزمون آنها منتهی به جواب یکسان نمی‌شود و امکان متناقض شدن نتایج آزمون فرضیه‌های دقیق (۲.۲) به‌ازای مقدارهای مختلف $t \in [۰, ۱]$ وجود دارد. دلیل این امر، ابهام موجود در تعیین میزان

مناسب مقدار جذب توسط پایس و بنتون است و لذا ادعای مبهم آنها نیز قابلیت صورت‌بندیِ دقیق در قالب فرضیه‌های دقیق را ندارد. بنابراین برای رفع این مشکل، می‌توان به‌کمک مجموعه‌های فازی، مسئله را به‌وسیلهٔ فرضیه‌های فازی (۱.۲) صورت‌بندی کرد. این موضوع از مزیت‌های به کارگیریِ فرضیه‌های فازی در برخی از مسائل کاربردی و واقعی به‌شمار می‌آید.

تعریف ۴.۲. ([۲۰]) فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و انتگرال تابع عضویت فرضیهٔ $\tilde{H}$ متناهی باشد. «تابع چگالی احتمال وزنی X تحت فرضیهٔ فازی $\tilde{H}$» را با نماد $f(x;\tilde{H})$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$f(x;\tilde{H}) = \int_\theta H^*(\theta) f(x;\theta) d\theta$$

تعریف می‌کنیم که در آن، H^* تابع عضویت نرمال‌شدهٔ فرضیهٔ $\tilde{H}$، عبارت است از

$$H^*(\theta) = \frac{H(\theta)}{\int_\theta H(\theta) d\theta}.$$

در حالت گسسته به‌جای انتگرال از مجموع‌یابی استفاده می‌شود.

توجه داشته باشید که در حالت پیوسته، تابع عضویت نرمال‌شده لزوماً یک تابع عضویت نیست، زیرا اگر $\int_\theta H(\theta)d\theta < ۱$، آن‌گاه ممکن است به‌ازای برخی از θها تابع عضویت نرمال‌شده، $H^*(\theta)$، مقدارهایی بزرگتر از یک اختیار کند.

تابع $f(x;\tilde{H})$ یک تابع چگالی احتمال است، زیرا اولاً $f(x;\tilde{H})$ نامنفی است و ثانیاً

$$\begin{aligned} \int_x f(x;\tilde{H})dx &= \int_x \int_\theta H^*(\theta) f(x;\theta) d\theta dx \\ &= \int_\theta H^*(\theta) \left(\int_x f(x;\theta)dx \right) d\theta \\ &= \int_\theta H^*(\theta) d\theta = ۱. \end{aligned}$$

به‌علاوه اگر H فرضیهٔ معمولی (غیرفازی) «$H: \theta = \theta_۰$» باشد، آن‌گاه $f(x;H) = f(x;\theta_۰)$.

تعریف ۵.۲. فرض‌های تعریف ۴.۲ را در نظر بگیرید. در این صورت احتمال پیشامد A تحت فرضیهٔ فازی $\tilde{H}$ با

$$P_{\tilde{H}}(A) = \int_\theta H^*(\theta) P_\theta(A) d\theta$$

تعریف می‌شود. در حالت گسسته، به‌جای انتگرال مجموع‌یابی قرار می‌گیرد.

دقت کنید که با فرض امکان جابه‌جاییِ ترتیب انتگرال‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} \int_\theta H^*(\theta) P_\theta(A) d\theta &= \int_\theta H^*(\theta) \int_A f(x;\theta) dx d\theta \\ &= \int_A \int_\theta H^*(\theta) f(x;\theta) d\theta dx \\ &= \int_A f(x;\tilde{H}) dx. \end{aligned}$$

اگر H فرضیهٔ مرکب و غیرفازی «$H : \theta \in \Theta'$» و Θ' متناهی باشد، آن‌گاه می‌توان $P_H(A)$ را متوسط $P_\theta(A)$ روی $\theta \in \Theta'$ دانست، زیرا بنابر تعریف ۵.۲ در این حالت داریم

$$\begin{aligned} P_H(A) &= \frac{\int_\theta I_{\Theta'}(\theta) P_\theta(A) d\theta}{\int_{\Theta'} d\theta} \\ &= \frac{\int_{\Theta'} P_\theta(A) d\theta}{\int_{\Theta'} d\theta} \\ &= E_{\Theta'} P_\theta(A) \end{aligned}$$

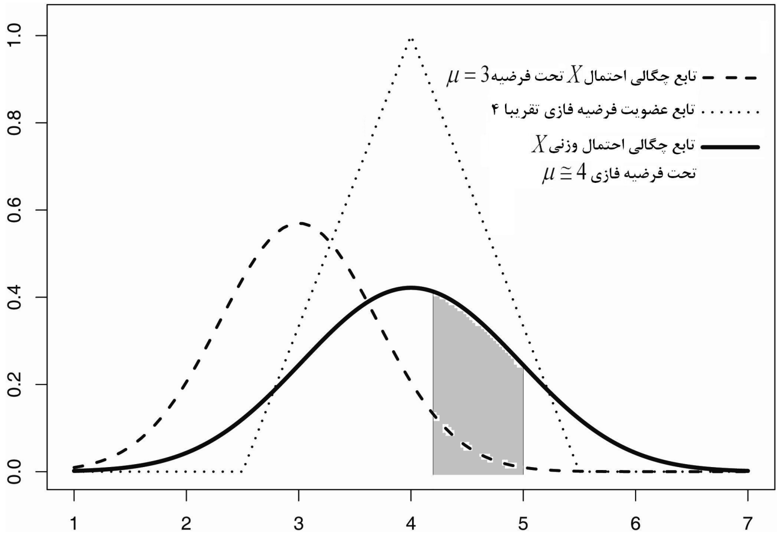
که در اینجا، منظور از $E_{\Theta'}$ امید ریاضی نسبت به توزیع یکنواخت روی مجموعهٔ Θ' است. همچنین در حالت خاص‌تر اگر H فرضیه سادهٔ غیرفازی «$H : \theta = \theta_\circ$» باشد، آن‌گاه $P_H(A) = P_{\theta_\circ}(A)$.

مثال ۶.۲. فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس ۰/۷ باشد. همچنین فرض کنید مفهوم «تقریباً ۴» به‌وسیلهٔ تابع عضویت زیر ارائه شده باشد:

$$H(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu - ۲/۵}{۱/۵} & ۲/۵ < \mu \leq ۴ \\ \dfrac{۵/۵ - \mu}{۱/۵} & ۴ < \mu \leq ۵/۵ \\ ۰ & \text{اگرنه} \end{cases}$$

طبق تعریف ۴.۲، تابع چگالی احتمال وزنی X تحت فرضیهٔ فازی «$\tilde{H} : \mu \cong ۴$» به‌صورت زیر است (شکل ۴ را ببینید):

$$\begin{aligned} f(x;\mu \cong ۴) &= \int_{\mu} H^*(\mu) f(x;\mu) d\mu \\ &= \frac{۲}{۳} \int_{\mu} H(\mu) \frac{۱}{\sqrt{۱/۴\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۱/۴}} d\mu \\ &= \frac{۲}{۳\sqrt{۱/۴\pi}} \int_{۲/۵}^{۴} \frac{\mu - ۲/۵}{۱/۵} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۱/۴}} d\mu \\ &+ \frac{۲}{۳\sqrt{۱/۴\pi}} \int_{۴}^{۵/۵} \frac{۵/۵ - \mu}{۱/۵} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۱/۴}} d\mu \,, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



شکل ۴. تابع چگالی احتمال وزنی نرمال تحت فرضیهٔ فازی $\mu \cong ۴$ و تابع چگالی احتمال نرمال تحت فرضیهٔ $\mu = ۳$ در مثال ۶.۲

حال بر اساس تعریف ۵.۲ و به‌کمک تابع چگالی احتمال وزنی X، مثلاً می‌توان احتمال این پیشامد را که متغیر تصادفی X بین اعداد ۴/۲ و ۵ باشد تحت فرضیهٔ فازی «$\tilde{H} : \mu \cong ۴$» به‌صورت زیر محاسبه

کرد:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{H}}(۴/۲ < X < ۵) &= \int_{۴/۲}^{۵} f(x;\tilde{H})\,dx \\ &= \frac{۲}{۳\sqrt{۱/۴\pi}}\int_{۴/۲}^{۵}\int_{۲/۵}^{۴}\frac{\mu-۲/۵}{۱/۵}e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۱/۴}}d\mu\,dx \\ &\quad +\frac{۲}{۳\sqrt{۱/۴\pi}}\int_{۴/۲}^{۵}\int_{۴}^{۵/۵}\frac{۵/۵-\mu}{۱/۵}e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۱/۴}}d\mu\,dx \\ &= ۰/۲۵۵ \end{aligned}$$

که برابر با سطح ناحیهٔ خاکستری در شکل ۴ است.

۳. آزمون نیمن-پیرسون

در ابتدای این بخش، برخی از تعریف‌های مربوط به آزمون فرضیه‌های فازی را بر اساس مراجع [۶، ۱۸] مرور می‌کنیم. فرض کنید $X = (X_۱, \ldots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال $f(x_i;\theta)$ و $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ بردار مقدارهای مشاهده‌شده باشد که در آن، $\theta \in \Theta$ پارامتر مجهول است. می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{H}_۰ : \text{است } H_۰ \text{ به‌صورت تابع } \theta \\ \tilde{H}_۱ : \text{است } H_۱ \text{ به‌صورت تابع } \theta \end{cases} \qquad (۱.۳)$$

تعریف ۱.۳. در مسئلهٔ آزمون فرضیه‌های فازی (۱.۳) هر تابع Φ (تابعی از مجموعهٔ مقدارهای ممکن نمونهٔ تصادفی به بازهٔ $[۰, ۱]$) به‌طوری‌که $\Phi(x)$ احتمال رد $\tilde{H}_۰$ به‌ازای مقدار مشاهده‌شدهٔ x را نشان دهد، یک تابع آزمون نامیده می‌شود.

از این پس، آزمونی که تابع آزمون آن $\Phi(X)$ باشد را به‌اختصار «آزمون Φ» می‌نامیم.

تعریف ۲.۳. تابع توان آزمون Φ به‌صورت

$$\beta_\Phi(\theta) = P_\theta\{d(X) = a_۱\} = E_\theta[\Phi(X)]$$

تعریف می‌شود که در آن، $d(X) = a_۱$ به معنی رد $H_۰$ است.

تعریف ۳.۳. فرض کنید $\Phi(X)$ یک تابع آزمون برای آزمون فرضیه‌های فازی (۱.۳) باشد و همچنین $\int_\Theta H_۰(\theta)d\theta < \infty$ و $\int_\Theta H_۱(\theta)d\theta < \infty$. احتمال ارتکاب خطای نوع اول آزمون Φ عبارت

است از

$$\begin{aligned}\alpha_\Phi &= P_{\tilde{H}_۰}\left\{d(X)=a_۱\right\}\\ &= \int_\Theta H_۰^*(\theta)P_\theta\left\{d(X)=a_۱\right\}d\theta\\ &= \int_\Theta H_۰^*(\theta)E_\theta\Phi(X)d\theta\end{aligned}$$

و احتمال ارتکاب خطای نوع دوم، عبارت است از

$$\begin{aligned}\beta_\Phi &= P_{\tilde{H}_۱}\left\{d(X)=a_۰\right\}\\ &= \int_\Theta H_۱^*(\theta)P_\theta\left\{d(X)=a_۰\right\}d\theta\\ &= \int_\Theta H_۱^*(\theta)\left[۱-E_\theta\Phi(X)\right]d\theta.\end{aligned}$$

(در حالت گسسته، از مجموع‌یابی به‌جای انتگرال استفاده می‌شود).

اگر به‌تسامح، تابع عضویتِ فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۰$ را به‌چشم تابع چگالی احتمال θ بنگریم، آن‌گاه α_Φ را می‌توان میانگین وزنی $E_\theta\Phi(X)$ تلقی نمود. تفسیری مشابه را می‌توان برای β_Φ بیان کرد. در حالت آزمون فرضیهٔ ساده در مقابل ساده (مانند آنچه در لم نیمن–پیرسون معمولی وجود دارد)، α_Φ و β_Φ به احتمال ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم معمولی تبدیل می‌شوند.

تعریف ۴.۳. آزمون Φ را یک آزمون در سطح (معناداری) α می‌نامیم اگر $\alpha_\Phi \leq \alpha \in [۰,۱]$. همچنین α_Φ را اندازهٔ آزمون Φ می‌گوییم.

تعریف ۵.۳. آزمون در سطح αی Φ را بهترین آزمون در سطح α می‌نامیم اگر به‌ازای هر آزمون در سطح αی Φ^*، داشته باشیم $\beta_\Phi \leq \beta_{\Phi^*}$.

قضیه ۶.۳ (لم نیمن–پیرسون تعمیم‌یافته [۱۸]). *فرض کنید $X=(X_۱,\ldots,X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال $f(x_i;\theta)$ و $x=(x_۱,\ldots,x_n)$ بردار مقدارهای مشاهده‌شده باشد که در آن، $\theta\in\Theta$ پارامتر مجهول است. برای آزمون فرضیه‌های فازی*

$$\begin{cases}\tilde{H}_۰: \text{است } H_۰ \text{ به‌صورت تابع } \theta\\ \tilde{H}_۱: \text{است } H_۱ \text{ به‌صورت تابع } \theta\end{cases}$$

الف) *هر آزمون به‌صورت*

$$\Phi(x)=\begin{cases} 1 & \frac{\int_\Theta H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_\Theta H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta}>k \\ 0 & \frac{\int_\Theta H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_\Theta H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta}<k \end{cases} \qquad (۲.۳)$$

برای هر $k \geq 0$، بهترین آزمون در اندازهٔ خود است. به‌علاوه به‌ازای $k=\infty$، آزمون

$$\Phi(x)=\begin{cases} 1 & \int_\Theta H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta=0 \\ 0 & \int_\Theta H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta>0 \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

بهترین آزمون در اندازهٔ صفر است.

ب) *برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ آزمونی به‌شکل (۲.۳) یا (۳.۳) وجود دارد به‌طوری‌که در آن، $\alpha_\Phi=\alpha$.*

۴. آزمون کم-بیشینه

در ابتدای این بخش، مفاهیم مقدماتی نظریهٔ تصمیم را به‌کوتاهی مرور می‌کنیم [۱۵، ۱۶]. فرض کنیم $\mathcal{L}(\theta,a):\Theta\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ تابع زیان باشد که در آن، $\mathcal{A}$ فضای اعمال است. تابع $\mathcal{L}(\theta,a)$ نشان‌دهندهٔ مقدار زیان است وقتی مقدار پارامتر θ است و ما تصمیم a را اتخاذ نموده‌ایم. فرض کنیم $\mathcal{D}$ ردهٔ توابع تصمیم (توابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathcal{A}$) باشد. تابع $\mathcal{R}:\Theta\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ را که به‌صورت $\mathcal{R}(\theta,d)=E_\theta\mathcal{L}(\theta,d(X))$ تعریف می‌شود، *تابع ریسک* می‌نامیم. بر اساس این تعریف‌ها، رویکرد کم-بیشینه، تصمیم $d_m\in\mathcal{D}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که

$$\max_\theta \mathcal{R}(\theta,d_m)\leq\max_\theta\mathcal{R}(\theta,d).$$

چنین تصمیمی، در صورت وجود، تصمیم کم-بیشینه (مینیماکس) نامیده می‌شود. مسئلهٔ آزمون فرضیهٔ «$H_0:\theta=\theta_0$» در مقابل فرضیهٔ «$H_1:\theta=\theta_1$» را می‌توان حالتی خاص از بحث فوق در نظر گرفت که در آن، فضای اعمال متشکل از دو عمل a_0 (پذیرش H_0) و a_1 (پذیرش H_1) است. بنابراین در این حالت، $\mathcal{A}=\{a_0,a_1\}$ و $\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}$. تابع زیان نیز در مسئلهٔ آزمون فرضیه معمولاً به‌صورت

$$\begin{cases} \mathcal{L}(H_1,a)=C_1 & a=a_0,\ \ C_1>0 \\ \mathcal{L}(H_0,a)=C_0 & a=a_1,\ \ C_0>0 \\ \mathcal{L}(H_0,a)=0 & a=a_0 \\ \mathcal{L}(H_1,a)=0 & a=a_1 \end{cases} \qquad (۱.۴)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن، C_0 زیان ناشی از ارتکاب خطای نوع اول و C_1 زیان ناشی از ارتکاب خطای نوع دوم است.

در مسئلهٔ آزمون فرضیه‌های فازی نیز حالتی را در نظر می‌گیریم که فضای اعمال متشکل از تنها دو نقطهٔ $a_\circ$ و a_1 است که در آن، به‌ازای $j=\circ, 1$، عمل a_j نشان‌دهندهٔ پذیرش فرضیهٔ فازی «θ به‌صورت تابع H_j است : $\tilde{H}_j$» (و رد فرضیهٔ دیگر) است.

تعریف ۱.۴. در آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_\circ : \text{است } H_\circ \text{ به‌صورت تابع } \theta \\ \tilde{H}_1 : \text{است } H_1 \text{ به‌صورت تابع } \theta \end{cases}$$

تصمیم d_m را تصمیم کم-بیشینه و یا به‌طور معادل، Φ_m را آزمون کم-بیشینه نامیم اگر به‌ازای هر $d \in \mathcal{D}$ داشته باشیم

$$\max\left\{\mathcal{R}(\tilde{H}_\circ, d_m)\ ,\ \mathcal{R}(\tilde{H}_1, d_m)\right\} \leq \max\left\{\mathcal{R}(\tilde{H}_\circ, d)\ ,\ \mathcal{R}(\tilde{H}_1, d)\right\}.$$

قضیه ۲.۴ ([۱۴]). *فرض کنید $X=(X_1,\dots,X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال $f(x_i;\theta)$ و $x=(x_1,\dots,x_n)$ بردار مقدارهای مشاهده‌شده باشد که در آن، $\theta \in \Theta$ پارامتر مجهول است. در آزمون فرضیه‌های فازی*

$$\begin{cases} \tilde{H}_\circ : \text{است } H_\circ \text{ به‌صورت تابع } \theta \\ \tilde{H}_1 : \text{است } H_1 \text{ به‌صورت تابع } \theta \end{cases}$$

با در نظر داشتن تابع زیان

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a) = C_1 & a = a_\circ,\ \ C_1 > \circ \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_\circ, a) = C_\circ & a = a_1,\ \ C_\circ > \circ \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_\circ, a) = \circ & a = a_\circ \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a) = \circ & a = a_1 \end{cases} \tag{۲.۴}$$

آزمون کم-بیشینه، فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_\circ$ را رد می‌کند اگر و تنها اگر $\lambda(x) \geq k$ که در آن،

$$\lambda(x) = \frac{\int_\Theta H_1(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_\circ(\theta) f(x;\theta) d\theta} \tag{۳.۴}$$

و مقدار ثابت k به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$C_1\, P_{\tilde{H}_1}\left\{\frac{\int H_1(\theta) f(X;\theta) d\theta}{\int H_\circ(\theta) f(X;\theta) d\theta} < k\right\} = C_\circ P_{\tilde{H}_\circ}\left\{\frac{\int H_1(\theta) f(X;\theta) d\theta}{\int H_\circ(\theta) f(X;\theta) d\theta} \geq k\right\}. \tag{۴.۴}$$

نتیجه ۳.۴. *تحت زیان ۰-۱، یعنی حالتی که $C_۰ = C_۱ = ۱$، آزمون کم-بیشینه، فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۰$ را در مقابل $\tilde{H}_۱$ رد می‌کند اگر و تنها اگر $\lambda(x) \geq k$ که در آن، ثابت k از رابطهٔ*

$$P_{\tilde{H}_۱}\left\{\frac{\int H_۱(\theta)f(X;\theta)d\theta}{\int H_۰(\theta)f(X;\theta)d\theta} < k\right\} = P_{\tilde{H}_۰}\left\{\frac{\int H_۱(\theta)f(X;\theta)d\theta}{\int H_۰(\theta)f(X;\theta)d\theta} \geq k\right\},$$

یعنی رابطهٔ $\alpha_\Phi = \beta_\Phi$ به‌دست می‌آید.

به‌کمک قضیهٔ ۶.۳ می‌توان احتمال ارتکاب خطای نوع دوم ($P_{\tilde{H}_۱}\{\tilde{H}_۰$ قبول$\}$) در آزمون فرضیه‌های فازی را با فرضِ ثابت بودنِ احتمال ارتکاب خطای نوع اول ($P_{\tilde{H}_۱}\{\tilde{H}_۰$ رد$\}$) کمینه کرد. اما در قضیهٔ ۲.۴، سطح ثابت αیی برای $P_{\tilde{H}_۰}\{d(X) = a_۱\}$ در آزمون فرضیه‌های فازی در نظر گرفته نمی‌شود و در عوض، آزمون کم-بیشینه با آزاد اختیار کردنِ احتمالات خطای نوع اول و دوم، مقدار

$$\max\left\{\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, d)\ ,\ \mathcal{R}(\tilde{H}_۱, d)\right\}$$

را کمینه می‌سازد.

ایدهٔ اصلی قضیهٔ ۲.۴ جانشینیِ توابع عضویت فرضیه‌های $\tilde{H}_۰$ و $\tilde{H}_۱$ به‌جای تابع‌های نشانگر

$$H_۱(\theta) = \begin{cases} ۱ & \theta = \theta_۱ \\ ۰ & \theta = \theta_۰ \end{cases} \qquad \text{و} \qquad H_۰(\theta) = \begin{cases} ۱ & \theta = \theta_۰ \\ ۰ & \theta = \theta_۱ \end{cases}$$

است. در این حالت داریم

$$\int_\Theta H_۰(\theta)f(x;\theta)d\theta = f(x;\theta_۰),\quad \int_\Theta H_۱(\theta)f(x;\theta)d\theta = f(x;\theta_۱)$$

و در نتیجه با توجه به قضیهٔ ۲.۴، آزمون کم-بیشینه، فرضیهٔ $H_۰$ را رد می‌کند اگر و تنها اگر $\frac{f(x;\theta_۱)}{f(x;\theta_۰)} \geq k$ که در آن، ثابت k از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$C_۱\ P_{\theta_۱}\left\{\frac{f(X;\theta_۱)}{f(X;\theta_۰)} < k\right\} = C_۰\ P_{\theta_۰}\left\{\frac{f(X;\theta_۱)}{f(X;\theta_۰)} \geq k\right\}.$$

بنابراین آزمون کم-بیشینه برای فرضیهٔ ساده در مقابل ساده که در صفحه ۵۲۱ از [۱۶] مطرح شده است، حالتی خاص از قضیهٔ ۲.۴ است.

فرض کنیم $X = (X_۱, \ldots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع جرم احتمال $f(x_i;\theta)$، و $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ بردار مقدارهای مشاهده‌شده باشد. در این حالت اگر خود را محدود به آزمون‌های غیرتصادفی کنیم، آنگاه در بسیاری از حالت‌ها kیی نمی‌توان یافت که در رابطهٔ (۴.۴) صدق کند. در این

موارد، آزمون کم-بیشینه برای فرضیه‌های فازی در ردهٔ آزمون‌های غیرتصادفی وجود ندارد و باید آن را در ردهٔ آزمون‌های تصادفی که به‌شکل

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{\int_\Theta H_۱(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_۰(\theta) f(x;\theta) d\theta} > k \\ \delta & \frac{\int_\Theta H_۱(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_۰(\theta) f(x;\theta) d\theta} = k \\ ۰ & \frac{\int_\Theta H_۱(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_۰(\theta) f(x;\theta) d\theta} < k \end{cases} \tag{۵.۴}$$

هستند، جستجو کرد. لذا با توجه به قضیهٔ ۲.۴، در این حالت باید k به گونه‌ای یافت شود که در رابطهٔ

$$\mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_۰, k) = \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_۱, k)$$

صدق کند. توجه داشته باشید که در رابطهٔ اخیر، ریسک آزمون تصادفی (۵.۴) را می‌توان برحسب ریسک آزمون غیرتصادفی با ناحیهٔ بحرانی $\frac{\int_\Theta H_۱(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_۰(\theta) f(x;\theta) d\theta} \geq k$ به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}, k) = E_\theta \mathcal{L}(\tilde{H}, d_m(X)) \\ = \; & \mathcal{L}(\tilde{H}, a_۰)\, P_{\tilde{H}_۱}\{d_m(X) = a_۰\} + \mathcal{L}(\tilde{H}, a_۱)\, P_{\tilde{H}_۰}\{d_m(X) = a_۱\} \\ = \; & \begin{cases} \mathcal{R}(\tilde{H}_۱, k) + (۱-\delta)\left(\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, \bar{k}) - \mathcal{R}(\tilde{H}_۱, k)\right) & \text{تحت فرضیهٔ } \tilde{H}_۱ \\ \mathcal{R}(\tilde{H}_۰, \bar{k}) + \delta\left(\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, k) - \mathcal{R}(\tilde{H}_۰, \bar{k})\right) & \text{تحت فرضیهٔ } \tilde{H}_۰ \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن، $\bar{k}$ اولین (کوچکترین) عضو دنبالهٔ تغییرات $\frac{\int_\Theta H_۱(\theta) f(x;\theta) d\theta}{\int_\Theta H_۰(\theta) f(x;\theta) d\theta}$ بعد از k است.

۵. آزمون بیز

فرض کنیم $X = (X_۱, \ldots, X_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال $f(x_i; \theta)$ با بردار مشاهدات $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\theta \in \Theta$ دارای تابع چگالی پیشین $\pi(\theta)$ باشد. طاهری و بهبودیان [۱۹] ناحیهٔ بحرانی آزمون بیز را برای فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_۰ : \text{است } H_۰ \text{ به‌صورت تابع } \theta \\ \tilde{H}_۱ : \text{است } H_۱ \text{ به‌صورت تابع } \theta \end{cases}$$

تحت تابع زیان ۰-۱ به‌صورت

$$\int_\Theta H_۰(\theta) \pi(\theta|x) d\theta \leq \int_\Theta H_۱(\theta) \pi(\theta|x) d\theta$$

معرفی نمودند که در آن، $\pi(\theta|x)$ توزیع پسین θ به شرط مشاهدات می‌باشد. این آزمون بیز تحت تابع زیان (۲.۴) نیز قابل تعمیم است:

تعریف ۱.۵. یک آزمون بیز تحت تابع زیان (۲.۴) فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_0$ را در مقابل فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_1$ رد می‌کند اگر و تنها اگر

$$C_0 \int_\Theta H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta \le C_1 \int_\Theta H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta. \qquad (۱.۵)$$

بنابر تعریف ۱.۵، آزمون بیز فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_0$ را در مقابل فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_1$ رد می‌کند اگر و تنها اگر $\frac{\int_\Theta H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta}{\int_\Theta H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta}$ بیشتر از نسبت زیان ارتکاب خطای نوع اول به زیان ارتکاب خطای نوع دوم، یعنی $\frac{C_0}{C_1}$ باشد. بنابراین در حالت خاص $C_0 = C_1 = 1$، تعریف ۱.۵ معادل با تعریف آزمون بیز در حالت فرضیه‌های فازی تحت تابع زیان ۰–۱ می‌شود ([۱۹]، صفحه ۴۰).

در آزمون فرضیهٔ «$H_0 : \theta \in \Theta_0$» در مقابلِ «$H_1 : \theta \in \Theta_1$»، توابع عضویت فرضیه‌ها به‌صورت

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \text{اگرنه} \end{cases} \quad \text{و} \quad H_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_1 \\ 0 & \text{اگرنه} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$\int_\Theta H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta = \int_{\Theta_0} \pi(\theta|x)d\theta = P(\theta \in \Theta_0|x)$$

و

$$\int_\Theta H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta = \int_{\Theta_1} \pi(\theta|x)d\theta = P(\theta \in \Theta_1|x)$$

که در آن، $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ و $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. در نتیجه همانند آزمون فرضیه‌های معمولی به روش بیز، ناحیهٔ رد این آزمون بیز به‌صورت

$$C_0 P(\theta \in \Theta_0|x) \le C_1 P(\theta \in \Theta_1|x) \qquad (۲.۵)$$

است (صفحه ۱۶۴ از [۸] را ببینید).

۶. مثال کاربردی در کشاورزی

فرض کنید یک محقق کشاورزی با توجه به امکان گسترش یک آفت، می‌خواهد نسبت به سمپاشی یا عدم سمپاشی یک مزرعه تصمیم‌گیری کند. در حالت معمولی، نسبت گیاهانی که دچار آفت می‌شوند حدود ۰/۱۰ است، در حالی که این احتمال وجود دارد که به‌دلیلِ مسائل محیطی، این نسبت به حدود ۰/۳۰

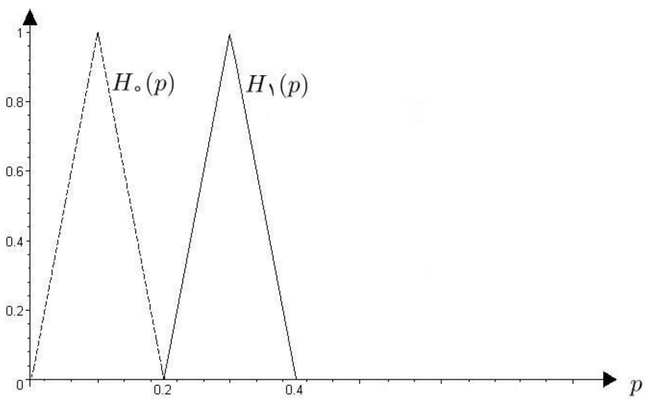
افزایش یافته باشد. بنابراین تمایل او آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \ p \cong 0/10 & (\text{تقریباً } 0/10 \text{ است } p) \\ \tilde{H}_1: \ p \cong 0/30 & (\text{تقریباً } 0/30 \text{ است } p) \end{cases}$$

است که مفاهیم فازی تقریباً ۰/۱۰ و تقریباً ۰/۳۰ به‌ترتیب به‌وسیلهٔ توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند (شکل ۵):

$$H_0(p) = \begin{cases} 10p & 0 \le p < 0/1 \\ 2 - 10p & 0/1 \le p < 0/2 \\ 0 & \text{اگرنه} \end{cases}, H_1(p) = \begin{cases} 10p - 2 & 0/2 \le p < 0/3 \\ 4 - 10p & 0/3 \le p < 0/4 \\ 0 & \text{اگرنه} \end{cases}$$

وی نمونه‌ای شامل ۲۲ گیاه را بررسی می‌کند و متوجه می‌شود که ۴ گیاه آفت دارند. اگر فرض کنیم X_i به‌ازای $i = 1, \ldots, 22$ در نمونهٔ تصادفی دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت p است، آن‌گاه آمارهٔ $S = \sum_{i=1}^{22} X_i$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 22$ و p خواهد بود و مقدار مشاهده شدهٔ آن برابر است با $\sum_{i=1}^{22} x_i = 4$.



شکل ۵. توابع عضویت فرضیه‌های فازی $\tilde{H}_0$ و $\tilde{H}_1$ در مثال کاربردی

الف) آزمون نیمن-پیرسون: با توجه به گسسته بودن توزیع آمارهٔ آزمون، طبق قضیهٔ ۶.۳، آزمون

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\int H_1(p) f(x;p) dp}{\int H_0(p) f(x;p) dp} > k \\ \delta & \frac{\int H_1(p) f(x;p) dp}{\int H_0(p) f(x;p) dp} = k \\ 0 & \frac{\int H_1(p) f(x;p) dp}{\int H_0(p) f(x;p) dp} < k \end{cases} \tag{۱.۶}$$

پرتوان‌ترین آزمون در سطح $\alpha = ۰/۱۰$ است که در آن، مقدارهای ثابت k و $\delta(x)$ از رابطهٔ $\alpha_\Phi = ۰/۱۰$ به دست می‌آیند. طبق نتایج جدول ۱، $\frac{\int H_۱(p) f(x;p) dp}{\int H_۰(p) f(x;p) dp}$ تابعی اکیداً صعودی از آمارهٔ $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i$ است و لذا می‌توان پرتوان‌ترین آزمون را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i > k \\ \delta & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = k \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < k. \end{cases} \qquad (۲.۶)$$

از طرفی، با توجه به تعریف ۳.۳، α_Φ برابر است با

$$\begin{aligned} & P_{p \cong ۰/۱۰} \{d(X) = a_۱\} \\ &= \int H_۰^*(p)\, P_p\,(d(X) = a_۱)\, dp \\ &= ۱۰ \int_۰^۱ H_۰(p) \left\{ P_p \left(\sum_{i=۱}^{۲۲} X_i > k \right) + \delta P_p \left(\sum_{i=۱}^{۲۲} X_i = k \right) \right\} dp \\ &= ۱۰ \int_۰^{۰/۱۰} ۱۰p \left\{ \left(\sum_{s=k+۱}^{۲۲} \binom{۲۲}{s} p^s (۱-p)^{۲۲-s} \right) + \delta \binom{۲۲}{k} p^k (۱-p)^{۲۲-k} \right\} dp \\ &+ ۱۰ \int_{۰/۱۰}^{۰/۲۰} (۲ - ۱۰p) \left\{ \left(\sum_{s=k+۱}^{۲۲} \binom{۲۲}{s} p^s (۱-p)^{۲۲-s} \right) + \delta \binom{۲۲}{k} p^k (۱-p)^{۲۲-k} \right\} dp. \end{aligned}$$

مقادیر α_Φ برای همهٔ مقدارهای محتمل k به‌ازای $\delta = ۰$ محاسبه شده و در جدول ۴ با نماد $\alpha_\Phi|_{\delta=۰}$ نشان داده شده است. با توجه به ستون‌های اول و دوم این جدول، می‌توان نتیجه گرفت که $k = ۴$ و در نتیجه عدد ثابت δ از رابطهٔ تک‌مجهولی

$$\begin{aligned} ۰/۱۰ &= ۰/۰۹۵ + ۱۰\delta \Big\{ \int_۰^{۰/۱۰} ۱۰p \ \binom{۲۲}{۴} p^۴ (۱-p)^{۱۸} dp \\ &+ \int_{۰/۱۰}^{۰/۲۰} (۲ - ۱۰p) \ \binom{۲۲}{۴} p^۴ (۱-p)^{۱۸} dp \Big\} \end{aligned}$$

برابر با ۰/۰۴۶ محاسبه می‌گردد. پس در این مثالِ کاربردی، آزمون تصادفی

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i > ۴ \\ ۰/۰۴۶ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = ۴ \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < ۴ \end{cases}$$

پرتوان‌ترین آزمون در سطح ۰/۱۰ است. در نتیجه بر اساس مشاهدهٔ $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = ۴$، پرتوان‌ترین آزمون، فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۰$ را با احتمال ۰/۰۴۶ رد و با احتمال ۰/۹۵۴ می‌پذیرد.

جدول ۱. مقدارهای عددی $\frac{\int H_۱(p)f(x;p)dp}{\int H_۰(p)f(x;p)dp}$ برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون و همچنین مقدارهای عددی $\frac{\int H_۱(p)\pi(p|x)dp}{\int H_۰(p)\pi(p|x)dp}$ برای یافتن آزمون بیز به‌ازای مقدارهای مختلف $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i$ در مثال کاربردی:

$\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i$	$\frac{\int_۰^۱ H_۱(p)f(x;p)dp}{\int_۰^۱ H_۰(p)f(x;p)dp}$	$\frac{\int_۰^۱ H_۱(p)\pi(p\|x)dp}{\int_۰^۱ H_۰(p)\pi(p\|x)dp}$
۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۷
۱	۰/۰۲۵	۰/۰۲۸
۲	۰/۰۹۷	۰/۰۹۶
۳	۰/۳۲۳	۰/۲۸
۴	۰/۹۳۲	۰/۸۰
۵	۲/۴۹	۲/۰۹
۶	۶/۴۸	۵/۲۶
۷	۱۶/۷	۱۲/۹
۸	۴۳/۹	۳۱/۰
۹	۱۱۶	۷۴/۳
۱۰	۳۱۶	۱۷۷
۱۱	۸۷۶	۴۲۳
۱۲	۲۴۶۶	$۱/۰۱ \times ۱۰^۳$
۱۳	۷۰۴۹	$۲/۴۶ \times ۱۰^۳$
۱۴	$۲/۰۴ \times ۱۰^۴$	$۱/۳۱ \times ۱۰^۴$
۱۵	$۵/۹۶ \times ۱۰^۴$	$۳/۸۵ \times ۱۰^۴$
۱۶	$۴۱/۷۶ \times ۱۰^۵$	$۱/۱۵ \times ۱۰^۵$
۱۷	$۵/۲۳ \times ۱۰^۵$	$۳/۵۱ \times ۱۰^۵$
۱۸	$۱/۵۶ \times ۱۰^۶$	$۱/۰۹ \times ۱۰^۶$
۱۹	$۴/۶۸ \times ۱۰^۶$	$۳/۴۴ \times ۱۰^۶$
۲۰	$۱/۴۱ \times ۱۰^۷$	$۱/۰۷ \times ۱۰^۷$
۲۱	$۴/۲۵ \times ۱۰^۷$	$۲/۶۲ \times ۱۰^۷$
۲۲	$۱/۲۸ \times ۱۰^۸$	$۷/۹۲ \times ۱۰^۷$

ب) آزمون کم-بیشینه: علاوه بر فرض‌های فوق، فرض کنید هزینهٔ سمپاشی برابر ۱۰ واحد پولی و هزینهٔ (زیان) ناشی از عدم سمپاشی در حالی که آفت شیوع پیدا کرده باشد، معادل ۶۰ واحد پولی باشد. بنابراین تابع زیان مالی را می‌توان همانند جدول ۲ برحسب واحد پولی در نظر گرفت.

جدول ۲. تابع زیان مالی برای سمپاشی و یا عدم سمپاشی برحسب واحد پولی $(\mathcal{L}^*(\theta, a))$:

عمل	حالت طبیعت	
	آفت حدود ۰/۳۰	آفت حدود ۰/۱۰
عدم سمپاشی	۶۰	۰
سمپاشی	۱۰	۱۰

اگر نسبت شیوع آفت حدودا ۰/۳۰ باشد، بهترین حالت آن است که مزرعه سمپاشی شود. ولی حالت دوم آن است که با وجود حدودا ۰/۳۰ آفت، مزرعه سمپاشی نشود که در این صورت، زیان کشاورز برابر ۶۰ واحد خواهد بود. از مقایسهٔ این دو حالت درمی‌یابیم که در حالت دوم، زیان کشاورز ۵۰ واحد بیشتر از حالت اول است و تنها افسوس و تأسف ۵۰ واحد پولی را خواهد خورد. با توجه به آنچه مطرح شد، تابع زیان جدول ۲ نیاز به تصحیح داشته و مناسب‌تر است که به‌ازای هر حالت طبیعت، تمامی زیان‌ها نسبت به بهترین (کمترین) زیان مقایسه گردند. لذا با توجه به جدول ۲، به‌وسیلهٔ فرمول

$$\mathcal{L}(\theta, a) = \mathcal{L}^*(\theta, a) - \inf_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^*(\theta, a)$$

تابع زیان تصحیح‌شده در جدول ۳ درج شده است (برای توضیحات بیشتر به صفحه ۱۱۳ از [۱۵] و یا صفحه ۳۷۶ از [۸] مراجعه کنید). بنابراین برای تصمیم‌گیریِ کم-بیشینه، می‌توان زیان مطرح شده در جدول ۳ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a_0) &= 0, \qquad \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a_1) = 10, \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a_0) &= 50, \qquad \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a_1) = 0. \end{aligned} \tag{۳.۶}$$

جدول ۳. تابع زیان تصحیح‌شدۀ مالی برای سمپاشی و یا عدم سمپاشی برحسب واحد پولی:

تصمیم	حالت طبیعت	
	آفت حدود ۰/۳۰ $(\tilde{H}_۱)$	آفت حدود ۰/۱۰ $(\tilde{H}_۰)$
عدم سمپاشی $(a_۰)$	۵۰	۰
سمپاشی $(a_۱)$	۰	۱۰

توجه داشته باشید که اگرچه ناحیۀ بحرانی آزمون کم-بیشینه به‌صورت (۵.۴) مطرح شده است، با توجه به اکیداً صعودی بودنِ $\frac{\int H_۱(p)f(x;p)dp}{\int H_۰(p)f(x;p)dp}$ نسبت به $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i$، این آزمون معادل آزمون

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i > k \\ \delta & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = k \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < k \end{cases} \qquad (۴.۶)$$

است. از طرفی، دامنۀ تغییرات متغیر تصادفی گسستۀ $\sum_{i=۱}^{۲۲} X_i$ مجموعۀ $\{۰, ۱, \ldots, ۲۲\}$ است و لذا همان‌طورکه در جدول ۴ مشهود است نمی‌توان kیی در این دامنه یافت که در $\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, k) = \mathcal{R}(\tilde{H}_۱, k)$ صدق کند. جدول ۴ حاوی مقدارهای ریسک آزمون غیرتصادفی تحت فرضیه‌های فازی $\tilde{H}_۰$ و $\tilde{H}_۱$ است که با در نظر داشتن مقدارهای $C_۰ = ۱۰$ و $C_۱ = ۵۰$ به‌صورت زیر برحسب k محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{H}_۰, k) &= C_۰ P_{p\cong ۰/۱۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲} X_i \geq k\right) \\ &= ۱۰ C_۰ \int_۰^۱ H_۰(p) P_p\left(\sum_{i=۱}^{۲۲} X_i \geq k\right) dp \\ &= ۱۰^۲ \int_۰^{۰/۱۰} ۱۰p \left(\sum_{s=k}^{۲۲} \binom{۲۲}{s} p^s (۱-p)^{۲۲-s}\right) dp \\ &+ ۱۰^۲ \int_{۰/۱۰}^{۰/۲۰} (۲ - ۱۰p) \left(\sum_{s=k}^{۲۲} \binom{۲۲}{s} p^s (۱-p)^{۲۲-s}\right) dp \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\tilde{H}_{۱},k) &= C_{۱}P_{p\cong ۰/۳۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i<k\right)\\ &=۱۰C_{۱}\int_{۰}^{۱}H_{۱}(p)P_p\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i<k\right)dp\\ &=۵۰۰\int_{۰/۲۰}^{۰/۳۰}(۱۰p-۲)\left(\sum_{s=۰}^{k-۱}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)dp\\ &+۵۰۰\int_{۰/۳۰}^{۰/۴۰}(۴-۱۰p)\left(\sum_{s=۰}^{k-۱}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)dp.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه با توجه به مقدارهای $C_{۰}=۱۰$ و $C_{۱}=۵۰$، می‌توان ریسک آزمون تصادفی را نیز تحت فرضیه‌های فازی $\tilde{H}_{۰}$ و $\tilde{H}_{۱}$ برحسب k به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_{۰},k)=C_{۰}\left\{P_{p\cong ۰/۱۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i>k\right)+\delta P_{p\cong ۰/۱۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i=k\right)\right\}\\ &=۱۰^{۲}\int_{۰}^{۰/۱۰}۱۰p\left\{\left(\sum_{s=k+۱}^{۲۲}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)+\delta\binom{۲۲}{k}p^k(۱-p)^{۲۲-k}\right\}dp\\ &+۱۰^{۲}\int_{۰/۱۰}^{۰/۲۰}(۲-۱۰p)\left\{\left(\sum_{s=k+۱}^{۲۲}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)+\delta\binom{۲۲}{k}p^k(۱-p)^{۲۲-k}\right\}dp\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_{۱},k)=C_{۱}\left\{P_{p\cong ۰/۳۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i<k\right)+(۱-\delta)P_{p\cong ۰/۳۰}\left(\sum_{i=۱}^{۲۲}X_i=k\right)\right\}\\ &=۵۰۰\int_{۰/۲۰}^{۰/۳۰}(۱۰p-۲)\left\{\left(\sum_{s=۰}^{k-۱}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)+(۱-\delta)\binom{۲۲}{k}p^k(۱-p)^{۲۲-k}\right\}dp\\ &+۵۰۰\int_{۰/۳۰}^{۰/۴۰}(۴-۱۰p)\left\{\left(\sum_{s=۰}^{k-۱}\binom{۲۲}{s}p^s(۱-p)^{۲۲-s}\right)+(۱-\delta)\binom{۲۲}{k}p^k(۱-p)^{۲۲-k}\right\}dp.\end{aligned}$$

اکنون باید مقدار k را به گونه‌ای از دامنهٔ تغییرات آن به‌دست آورد که در دو رابطهٔ

$$\mathcal{R}(\tilde{H}_{۰},k)>\mathcal{R}(\tilde{H}_{۱},k) \quad \text{و} \quad \mathcal{R}(\tilde{H}_{۰},k+۱)<\mathcal{R}(\tilde{H}_{۱},k+۱)$$

صدق کند. بر اساس اطلاعات جدول ۴، ابتدا $k=۳$ به‌دست می‌آید و سپس نتیجه می‌شود که

$$\Phi_m(x)=\begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i > ۳ \\ \delta & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = ۳ \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < ۳ \end{cases}$$

تابع آزمون تصادفی کم-بیشینه است و در آن، عدد ثابت δ از رابطهٔ

$$\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, ۴)+\delta\left(\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, ۳)-\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, ۴)\right)=\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, ۳)+(۱-\delta)\left(\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, ۴)-\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, ۳)\right)$$

به‌دست می‌آید. رابطهٔ اخیر را می‌توان به‌کمک اطلاعات جدول ۴ به‌صورت

$$۲/۰۴+\delta\,(۳/۸۰-۲/۰۴)=۱/۴۶+(۱-\delta)\,(۴/۲۵-۱/۴۶))$$

بازنویسی کرد و در نتیجه $\delta=۰/۴۸۶$. بنابراین با در نظر داشتن تابع زیان (۳.۶)، آزمون تصادفی کم-بیشینه به‌صورت

$$\Phi_m(x)=\begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i > ۳ \\ ۰/۴۸۶ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = ۳ \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < ۳ \end{cases}$$

است و لذا بر اساس مشاهدهٔ $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i=۴$، تابع زیان (۳.۶)، فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۰$ در مقابل فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۱$ در این مثالِ کاربردی رد می‌گردد.

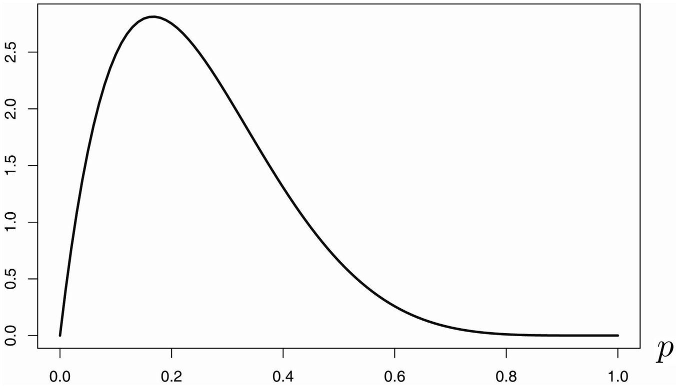
ج) آزمون بیز: اکنون علاوه بر فرض‌های بالا و تابع زیان بند (ب)، فرض کنید بتوانیم طبق شواهد موجود و نظرات کارشناسان، توزیع پیشین $Beta(۲,۶)$ را برای p در نظر بگیریم، یعنی به‌ازای $۰\leq p\leq ۱$ داریم $\pi(p)=۴۲p(۱-p)^۵$ (شکل ۶ را ببینید). برای محاسبهٔ توزیع پسین، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \pi(p|x) &\propto \pi(p)\ f(x|p) \\ &= \left(۴۲p(۱-p)^۵\right)\left(p^{\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i}(۱-p)^{۲۲-\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i}\right) \\ &\propto p^{۱+\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i}(۱-p)^{۲۷-\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i} \end{aligned}$$

و بنابراین $p|x\sim Beta(۲+\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i, ۲۸-\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i)$.

جدول ۴. مقادیر α_Φ به‌ازای $\delta = ۰$ برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون تصادفی و همچنین مقدارهای $\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, k)$ و $\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, k)$ برای یافتن آزمون تصادفی کم-بیشینه برای همهٔ مقدارهای محتمل k:

k	$\alpha_\Phi\|_{\delta=۰}$	$\mathcal{R}(\tilde{H}_۰, k)$	$\mathcal{R}(\tilde{H}_۱, k)$
۰	۱	۱۰	۰
۱	۰/۸۴۶	۸/۴۶	۰/۰۳۹
۲	۰/۶۱۲	۶/۱۲	۰/۳۳۹
۳	۰/۳۸۰	۳/۸۰	۱/۴۶
۴	۰/۲۰۴	۲/۰۴	۴/۲۵
۵	۰/۰۹۵	۰/۹۵	۹/۳۰
۶	۰/۰۳۹	۰/۳۹	۱۶/۵
۷	۰/۰۱۳	۰/۱۳	۲۴/۹
۸	$۴/۳۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۳۶ \times ۱۰^{-۲}$	۳۳/۰
۹	$۱/۱۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۱۹ \times ۱۰^{-۲}$	۳۹/۷
۱۰	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۳}$	۴۴/۵
۱۱	$۴/۱۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۱۲ \times ۱۰^{-۳}$	۴۷/۴
۱۲	$۶/۴۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۶/۴۲ \times ۱۰^{-۵}$	۴۸/۹
۱۳	$۸/۴۷ \times ۱۰^{-۷}$	$۸/۴۷ \times ۱۰^{-۶}$	۴۹/۶
۱۴	$۹/۳۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۹/۳۹ \times ۱۰^{-۷}$	۴۹/۸
۱۵	$۸/۶۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۸/۶۶ \times ۱۰^{-۸}$	۴۹/۹
۱۶	$۶/۵۷ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۶/۵۷ \times ۱۰^{-۹}$	$\simeq ۵۰$
۱۷	$۴/۰۳ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۴/۰۳ \times ۱۰^{-۱۰}$	$\simeq ۵۰$
۱۸	$۱/۹۵ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۱/۹۵ \times ۱۰^{-۱۱}$	$\simeq ۵۰$
۱۹	$۷/۱۷ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۷/۱۷ \times ۱۰^{-۱۳}$	$\simeq ۵۰$
۲۰	$۱/۸۸ \times ۱۰^{-۱۵}$	$۱/۸۸ \times ۱۰^{-۱۴}$	$\simeq ۵۰$
۲۱	$۳/۷۰ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۳/۷۰ \times ۱۰^{-۱۶}$	$\simeq ۵۰$
۲۲	$\simeq ۰$	$\simeq ۰$	$\simeq ۵۰$



شکل ۶. تابع چگالی احتمال $Beta(۲,۶)$ به عنوان پیشین p در مثال کاربردی

بر اساس تعریف ۱.۵ و با توجه به مقدار $\frac{C_۰}{C_۱} = \frac{۱۰}{۶۰} = ۰/۱۶۷$، آزمون بیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi_B(x) = \begin{cases} ۱ & \frac{\int H_۱(p)\pi(p|x)dp}{\int H_۰(p)\pi(p|x)dp} \geq ۰/۱۶۷ \\ ۰ & \frac{\int H_۱(p)\pi(p|x)dp}{\int H_۰(p)\pi(p|x)dp} < ۰/۱۶۷. \end{cases}$$

بر اساس نتایج جدول ۱، $\frac{\int H_۱(p)\pi(p|x)dp}{\int H_۰(p)\pi(p|x)dp}$ تابعی اکیداً صعودی از آمارهٔ $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i$ است و در نتیجه آزمون فوق معادل آزمونِ

$$\Phi_B(x) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i \geq ۳ \\ ۰ & \sum_{i=۱}^{۲۲} x_i < ۳ \end{cases}$$

خواهد بود. بنابراین با به‌کار بردنِ تابع زیان (۳.۶) و چگالی پیشین $Beta(۲,۶)$ و همچنین مقدار مشاهده شدهٔ $\sum_{i=۱}^{۲۲} x_i = ۴$ در این مثال کاربردی، آزمون بیز فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۰$ را در مقابل فرضیهٔ فازی $\tilde{H}_۱$ رد می‌کند.

۷. نتیجه‌گیری و کارهای آینده

سه رویکرد نیمن–پیرسون، کم–بیشینه و بیز که در این مقاله برای آزمون فرضیه‌های فازی مبتنی بر داده‌های دقیق مطرح شد، قابل مقایسه با برخی از تحقیقات دیگر در این زمینه است. آرنولد [۷] پرتوان‌ترین آزمون برای فرضیه‌های فازی (با داده‌های دقیق) را به گونه‌ای متفاوت با رویکرد نیمن–پیرسونی بخش ۳،

معرفی کرده است. وی احتمال خطاهای نوع اول و دوم را با

$$\alpha_\Phi = \sup_{\{\theta\in\Theta: H_0(\theta)>H_1(\theta)\}} \{(H_0(\theta) - H_1(\theta))\, \Phi(t,\theta)\}$$

و

$$\beta_\Phi = \sup_{\{\theta\in\Theta: H_0(\theta)<H_1(\theta)\}} \{(H_1(\theta) - H_0(\theta))\, (1-\Phi(t,\theta))\}$$

تعریف می‌کند که در آن، $\Phi(t,\theta)$ تابع توان بر اساس آمارهٔ آزمون T است. لذا تعمیم او برای احتمال خطاهای نوع اول و دوم مبتنی بر سوپریمم اختلاف توابع عضویت فرضیه‌های فازی است، در حالی که تعمیم مطرح شده در این مقاله مبتنی بر احتمال وزنی پیشامدهای فازی است. رویکرد مطرح شده در بخش ۴ از این مقاله برای تعمیم آزمون کم-بیشینه با کار کازالس و همکاران [۹] متفاوت است، زیرا آنها آزمون کم-بیشینه را برای فرضیه‌های غیرفازی مبتنی بر داده‌های فازی معرفی کردند ولی ما در این مقاله مسئلهٔ آزمون کم-بیشینه را برای فرضیه‌های فازی مبتنی بر داده‌های غیرفازی مورد بررسی قرار داده‌ایم. دلگادو و همکاران [۱۰] نیز روش بیزی متفاوتی را نسبت به آنچه در بخش ۵ برای آزمون فرضیه‌های فازی مطرح شد، مبتنی بر تجزیهٔ مسئلهٔ فازی به خانواده‌ای از مسائل غیرفازی، ارائه کردند. در آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس داده‌های معمولی، که در مقالهٔ حاضر بررسی شد، ناحیه‌های بحرانی آزمون‌های کم-بیشینه و نیمن-پیرسون (در سطح معناداری α) به‌صورت

$$\frac{\int_\Theta H_1(\theta) f(x;\theta)d\theta}{\int_\Theta H_0(\theta) f(x;\theta)d\theta} \geq k$$

است که در آن، مقدار ثابت k به‌ترتیب از رابطه‌های

$$C_1\, P_{\tilde{H}_1}\{\tilde{H}_0 \text{ قبول}\} = C_0\, P_{\tilde{H}_0}\{\tilde{H}_0 \text{ رد}\}$$

و $P_{\tilde{H}_0}\{\tilde{H}_0 \text{ رد}\} = \alpha$ محاسبه می‌شوند. از سوی دیگر، ناحیهٔ بحرانی آزمون بیز، به‌صورت

$$\frac{\int_\Theta H_1(\theta)\pi(\theta) f(x;\theta)d\theta}{\int_\Theta H_0(\theta)\pi(\theta) f(x;\theta)d\theta} \geq k$$

است که $k = \frac{C_0}{C_1}$. در این مقاله، آزمون‌های کم-بیشینه و بیز مبتنی بر تابع زیان (۲.۴) محاسبه و معرفی شده‌اند. از آنجا که معمولاً مسائل واقعی و کاربردی در علوم مختلف آمیخته با ابهام هستند، لذا یک مثال کاربردی در بخش ۶ به‌منظور اشاره بیشتر به قابلیت‌های کاربردی این آزمون‌ها مطرح و حل شد.

گفتنی است که موضوع آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس رویکردهای مختلف توسط دیگر محققان دنبال و بررسی شده است که برای مرور برخی از پژوهش‌های اخیر می‌توانید به [۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۰]

مراجعه نمایید. همچنین حقیقی‌نژاد و طاهری در [۴، ۵] به بررسی برآوردگرهای بیز و کم–بیشینه بر پایهٔ تابع زیان فازی پرداخته‌اند. لذا ایدهٔ به‌کارگیری تابع زیان فازی را می‌توان برای آزمون فرضیه‌های فازی در روش‌های بیز و کم–بیشینه به‌عنوان کارهای آینده مورد بررسی قرار داد. همچنین در راستای این تحقیق می‌توان به تعمیم ایدهٔ پیشنهادی برای آزمون‌های کم–بیشینه و بیز در حالتی که تابع زیان ثابت نبوده، بلکه به مقدار پارامتر θ بستگی داشته باشد، پرداخت. از دیگر موضوعات بالقوه، می‌توان به آزمون فرضیه در چارچوب نظریهٔ تصمیم مبتنی بر متغیر تصادفی فازی و آزمون فرضیه برای ارزیابیِ مدل‌های رگرسیون فازی اشاره کرد.

مراجع

[۱] پرچمی، ع.، ماشین‌چی، م.، آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایهٔ p–مقدار، *سری سیستم‌های فازی و محاسبات نرم*، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، انتشارات انجمن سیستم‌های فازی ایران، تهران ۱۳۹۰، ۱۸-۱.

[۲] ترابی، ح.، شمشیری، ر.، تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی برای فرض‌های فازی، *اندیشهٔ آماری*، سال سیزدهم، شماره یکم (۱۳۸۷)، ۲۶-۲۰.

[۳] چاچی، ج.، *روش‌های آماری بر اساس اطلاعات نادقیق*، رسالهٔ دکتری آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان ۱۳۹۱.

[۴] حقیقی‌نژاد، ا.، طاهری، س.م.، برآوردگرهای بیز و مینیماکس بر پایهٔ تابع زیان فازی، *گزارش هفتمین کنفرانس آمار ایران*، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران ۱۳۸۳، ۵۸۰-۵۶۷.

[۵] حقیقی‌نژاد، ا.، طاهری، س.م.، برآوردگرهای بیز و مینیماکس بر پایهٔ داده‌های فازی، *گزارش چهارمین همایش مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن*، دانشگاه مازندران، بابلسر، ۱۳۸۲، ۵۴-۴۲.

[۶] طاهری، س.م.، ماشین‌چی، م.، *مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی*، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان ۱۳۸۷.

[7] Arnold, B. F., An approach to fuzzy hypothesis testing, *Metrika*, **44** (1996), 119-126.

[8] Berger, J. O., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd. edn., Springer-Verlag, New York, 1985.

[9] Casals, M. R., Gil, M. A., Gil, P., The fuzzy decision problem: An approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, *European Journal of Operational Research*, **27** (1986), 371-382.

[10] Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A., Testing fuzzy hypotheses, a Bayesian approach, in: M. M. Gupta et al. (editors), *Approximate Reasoning in Expert Systems*, North-Holland, Amsterdam, 307-316, 1985.

[11] Hesamian, G., Chachi, J., Two-sample Kolmogorov-Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables, *Statistical Papers*, **56** (2015), 61-82.

[12] Hesamian, G., Shams, M., Parametric testing statistical hypotheses for fuzzy random variables, *Soft Computing*, **20** (2016), 1537-1548.

[13] Pais, I., Benton, J. J., *The Handbook of Trace Elements*, St. Lucie Press, Florida,1997.

[14] Parchami, A., Mashinchi, M., Testing fuzzy hypotheses with crisp data: The minimax approach, *2nd. Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems*, Maleke-Ashtar University, Tehran, 2008.

[15] Parmigiani, G., Inoue, L. Y. T., Lopes, H. F., *Decision Theory Principles and Approaches*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2009.

[16] Rohatgi, V. K., Ehsanes Saleh, A. K., *An Introduction to Probability and Statistics*, 2nd. edn., John Wiley & Sons, New York, 2001.

[17] Taheri, S. M., Arefi, M., Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistics, *Soft Computing*, **13** (2009), 617-625.

[18] Taheri, S. M., Behboodian, J., Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing, *Metrika*, **49** (1999), 3-17.

[19] Taheri, S. M., Behboodian, J., A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing, *Fuzzy Sets and Systems*, **123** (2001), 39-48.

[20] Torabi, H., Behboodian, J., Sequential probability ratio test for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Austrian Journal of Statistics*, **34** (2005), 25–38.

عباس پرچمی: گروه آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان
رایانامه: parchami@uk.ac.ir

سید محمود طاهری: دانشکده فنی، دانشگاه تهران
رایانامه: sm_taheri@ut.ac.ir

ناصررضا ارقامی: گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
رایانامه: arghami_nr@yahoo.com