

موجکها برای فشرده‌سازی تصویر

نویسنده: استفان مالا^۱

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

تصاویر، خواه به شکل ذخیره‌سازی عددی در حافظه رایانه‌ها و خواه در حین انتقال از نقطه‌ای به نقطه دیگر در شبکه اینترنت جای زیادی اشغال می‌کنند. خوشبختانه می‌توان بدون تنزل کیفیت آنها را فشرده و متراکم ساخت.



شکل ۱. این سه تصویر توان روش‌های فشرده‌سازی فعلی را به نمایش می‌گذارند. تصویر اصلی (A) از 512×512 نقطه تشکیل شده است که رنگ آمیزی هر نقطه با انتخاب یک درجه از میان ۲۵۶ درجه خاکستری ممکن صورت گرفته است. تصویر (B) نتیجه فشرده‌سازی با ضریب ۸ است به این ترتیب که درجه رنگ‌های مختلف را به ۲ درجه تقلیل داده است (فقط سیاه یا سفید). تصویر (C) نتیجه فشرده‌سازی با ضریب ۳۲ است اما از یک پایه موجک‌ها استفاده کرده است. در مورد اخیر اختلاف با تصویر اصلی به زحمت قابل تشخیص است (نمایش تصاویر کار مؤلف است)

^۱ Mallat, Stéphane: *Des ondelettes pour comprimer une image*, in: *L'explosion des mathématiques*, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 32-35

یک تصویر عددی را می‌توان فشرده کرد، درست مانند آب پرتقالی که آن را به صورت چند گرم پودر فشرده درمی‌آورند. موضوع صحبت، فریکاری و بازی با کلمات نیست، بلکه سخن از فنون دانش ریاضی و انفورماتیک است که اجازه می‌دهند فضای اشغال شده به وسیله یک تصویر در رایانه یا در یک خط مخابراتی تقلیل یابد. امروزه این فنون برای نگهداری و ذخیره اطلاعات یا برای انتقال آنها از طریق اینترنت، تلفن، ماهواره و یا هر وسیله دیگر ضروری هستند.

فشرده‌سازی یک تصویر به معنای حذف اضافات و نمایش تصویر به کمک تعداد محدودی پارامتر است. مثال برجسته زیر به درک ایده اصلی کمک می‌کند: در مورد یک تصویر سفید یکنواخت، بیان درجه خاکستری برای یکایک نقاط تصویر بی‌فایده است، زیرا این کار خیلی طولانی‌تر از آن خواهد شد که بگوییم: «همه نقاط تصویر سفیدند». مسأله نمایش، یکی از موضوع‌های مرکزی در ریاضیات است و کاربرد آن بسیار فراتر از فشرده‌سازی تصاویر است. در طول ده سال اخیر، بر اثر گسترش نظریه موجکها^۱ پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در نظریه نمایش حاصل شده است. در زمینه پردازش تصویر، این پیشرفت‌ها منجر به پذیرش استاندارد جدید فشرده‌سازی (JPEG-2000) شده است. این داستان دارای پیچ و خم‌های متعددی است که نقش ریاضیات را در چشم‌انداز علوم و فناوری نوین به خوبی نمایان می‌سازد.

سی و دو بار جای کمتر با استفاده از موجک‌ها

تصویری مانند شکل ۱ A را در نظر بگیریم. این تصویر از 512×512 نقطه تشکیل شده است که درجه خاکستری آنها از ۰ (سیاه) تا ۲۵۵ (سفید) تغییر می‌کند. هر یک از ۲۵۶ درجه خاکستری ممکن می‌تواند به وسیله یک «هشتایی»^۲ نمایش داده شود، یعنی به وسیله یک عدد دو-دویی متشکل از هشت بیت^۳ (پس یک هشتایی چیزی جز دنباله‌ای هشت رقمی از ۰ و ۱ نیست، مانند ۱۱۰۱۰۰۰۱). بنابراین برای کد کردن تنها یک تصویر از این نوع $2097152 = 8 \times 512 \times 512$ بیت لازم است، که این هم خیلی زیاد است! نخستین فکری که به ذهن می‌رسد این است که تعداد درجه‌های خاکستری را کم کنیم، مثلاً آنها را به سیاه و سفید محدود کنیم، مانند شکل ۱ B. دو

^۱ Théorie des ondelettes

^۲ octet

^۳ bit

مقدار ممکن برای درجهٔ خاکستری را با یک بیت (که ارزش ۰ یا ۱ دارد) کدگذاری می‌کنیم. به این ترتیب تعداد بیت‌ها را هشت بار کم کرده‌ایم. البته، کیفیت تصویر شدیداً تنزل یافته است. اکنون شکل ۱ C را نگاه کنید. کدگذاری آن ۳۲ بار کمتر از شکل اصلی و روش به کار رفته مبتنی بر نظریهٔ موجک‌هاست. اما می‌بینید که تنزل کیفیت به زحمت قابل مشاهده است! چرا؟ زیرا به جای آن که درجهٔ دقت شکل را کم کنیم شیوهٔ نمایش اطلاعات را تغییر داده‌ایم.

نخست آنالیز ژوزف فوریه^۱ به صحنه آمد ...

همان‌گونه که گفتیم، تصویر عددی شده به کمک 512×512 عدد مشخص می‌شود که شدت روشنایی را در هر نقطه تعیین می‌کنند. بنابراین همانطور که نقطه‌ای روی یک روبه را، که فضایی دوبعدی است، می‌توان با دو مؤلفه تشخیص داد، می‌توان تصویر مورد بحث را به عنوان نقطه‌ای از فضای 512×512 بعدی تعبیر کرد، و از خود پرسید که مناسبترین محورهای مختصات برای نمایش چنین نقطه‌ای کدام‌اند؟ یک دستگاه محورهای مختصات همان چیزی را مشخص می‌کند که یک پایه^۲ می‌نامند (البته طبیعت آن بسیار مجردتر از طبیعت محورهای مختصات در هندسهٔ مقدماتی است).

نخستین پیشرفت بنیادی را ژوزف فوریه، ریاضیدان-فیزیکدان، در سال ۱۸۰۲ طی رساله‌ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت تحقق بخشید. موضوع انتشار حرارت ظاهراً به مسألهٔ مورد بحث ما مربوط نیست. برای آن که یک تابع $f(x)$ (که از نظر ریاضی نقطه‌ای است از یک فضای بینهایت بعدی) به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود، فوریه اساساً ثابت کرد که می‌توان از «محورهای» استفاده کرد که به کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می‌شوند. به عبارت نسبتاً دقیق‌تر، فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می‌توان به وسیلهٔ حاصل جمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(ax)$ و $\cos(ax)$ که هر کدام در ضرب شده باشد، نمایش داد.

این «پایه‌های فوریه» به صورت ابزاری اساسی، با کاربردهای فوق‌العاده متواتر در علوم، درآمده‌اند، زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت‌های فیزیکی فراوان به کار می‌روند. به ویژه آنها را برای نمایش صداها و تصاویرها به کار می‌برند. اما

^۱ Joseph Fourier

^۲ base

مهندسين نيك مي دانند كه در مورد سيگنال‌هاي پيچيده نظير تصاوير، توابع سينوس وار نه تنها ايده آل نيستند بلكه از شرايط مطلوب دورند: مثلاً به شكل كارآمدي قادر به نمايش ساختارهاي گذرا نظير مرزهاي موجود در تصوير نيستند.

... سپس «تبديل به موجكها» فرا رسيد

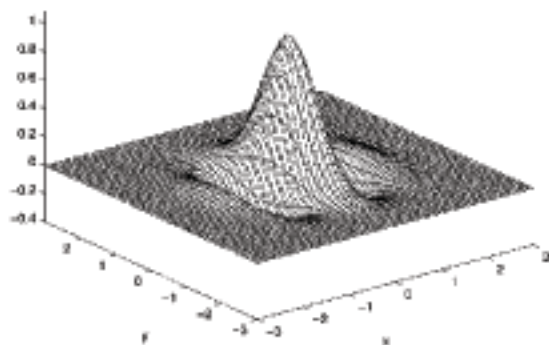
تنها متخصصين پردازش سيگنال نبودند كه به محدوديت‌هاي پايه‌هاي فوريه وقوف يافتند. در سال‌هاي ۱۹۷۰ يك مهندس - ژئوفيزيكدان فرانسوي به نام ژان مورله^۱ متوجه شد كه پايه‌هاي فوريه بهترين ابزار رياضي ممكن در اكتشافات زيرزمين نيستند. اين موضوع - در آزمايشگاهي متعلق به الف آكيتين^۲ منجر به يكي از اكتشافات تبديل به موجكها گرديد. اين روش رياضي كه بر مجموعه‌اي از توابع پايه، متمايز از توابع سينوس وار متداول در روش فوريه بنا مي‌شود، در برخي از موقعيت‌ها با شايستگي بيشتري جايگزين تبديل فوريه مي‌گردد. وانگهي از سال‌هاي ۱۹۳۰ فيزيكدانان متوجه شده بودند كه پايه‌هاي فوريه براي تحليل حالت‌هاي يك اتم از تناسب خوبي برخوردار نيستند. اين موضوع منشأ كارهاي متعددي شد كه بعدها در نظريه موجكها فوايد زيادي داشتند. همين حوالی سال‌هاي ۱۹۳۰، رياضيدان‌ها نيز به قصد تحليل ساختارهاي تكين موضعي به فكر اصلاح پايه‌هاي فوريه افتادند. اين مسأله موجب آغاز يك برنامه وسيع تحقيقاتي گرديد كه هنوز هم فعال است. به عبارت ديگر گروه‌هاي علمي با وسائلي كه در اختيار داشتند، به تغييراتي در پايه‌هاي فوريه پرداختند. در سال‌هاي ۱۹۸۰، ايو ميير^۳ رياضيدان فرانسوي، نخستين پايه‌هاي موجكي متعامد را كشف كرد (تعامد نوعي از ويژگي‌ها را بيان مي‌كند كه موجب تسهيلات فراواني در استدلال و محاسبه مي‌شود؛ پايه‌هاي فوريه نيز متعامدند). اين اكتشاف و به دنبال آن ملاقات‌هاي اتفاقي كه در كنار دستگاه فتوكپي يا كنار دستگاه قهوه‌دم‌كني يا هنگام نوشيدن قهوه در دانشگاه رخ مي‌داد، حركت علمي چندرشته‌اي وسيعي را در فرانسه به وجود آورد، كه تاثيرات بين‌المللي آن قابل ملاحظه بود. كاربردهاي نظريه موجك‌ها و الگوريتم‌هاي موجكي راه خود را نه تنها در زمينه‌هاي متعدد علمي و تكنولوجييك باز كردند، بلكه منشأ تاسيس چندين مؤسسه [علمي-صنعتي]

Jean Morlet^۱

Elf-Aquitaine^۲

Yves Meyer^۳

در ایالات متحده گردیدند.



شکل ۲. نمودار یک موجک که در فشرده‌سازی تصاویر به کار می‌رود.

ریاضیات موجک‌ها در حوزه‌های متعددی نقش محوری داشته‌اند

ریاضیات در این زمینه، خواه در مورد پالایش و ژرفاندیشی و خواه به‌عنوان بستر کمکی، نقشی بنیادین برعهده داشته است. با تفکیک مفاهیم اصلی از کاربردهای مشخص، ریاضیات موجب گردید که دانشمندان رشته‌های مختلف - در فیزیک، در پردازش سیگنال، در نظریهٔ اطلاعات و غیره- دریابند که گذر به فراسو، صیقل دادن ابزارها و کنترل کردن کارایی موفقیت آنها، همهٔ این هدفها مدیون کارهای جدیدی است که روی آنالیز فوری صورت گرفته است. سرانجام، این نظریه امکان به کار بستن روش استاندارد را در محاسبهٔ علمی فراهم کرد (این روش، تبدیل به موجک‌های سریع است) که محصول همکاری بین ریاضیدانان و متخصصین پردازش سیگنال است. تصویر C در شکل ۱ با همان پدیده‌های موجکی به دست آمده است که در آمار، زلزله‌شناسی و محاسبات علمی به کار می‌رود و الگوریتم سریع آنها نیز یکی است. به کمک استاندارد بین‌المللی JPEG 2000، این موجک‌ها همهٔ زمینه‌های تصویر را از اینترنت گرفته تا دستگاه‌های عکاسی عددی دربرگرفته و در حال گسترش به سوی ماهواره‌ها هم هستند.

بین دنیای موجک‌ها و دنیای هندسه پلی باید ساخت

دیدیم که پایه‌های فوریه در تحلیل پدیده‌های گذرا، سازگاری خوبی ندارند، حال آنکه پایه‌های موجکی برای این کار سازگارند. آیا این پایان داستان است؟ خیر. در پردازش

تصویر و هم‌چنین در همهٔ زمینه‌هایی که موجک‌ها به صورت ابزار اصلی در آمده‌اند، همهٔ دست‌اندرکاران در حال حاضر دغدغهٔ یک نوع مسأله را دارند: آن موضوع بهره‌برداری از نظم هندسی است. در واقع می‌دانیم که یک تصویر، هر قدر هم پیچیده باشد، با ترسیم ساده‌ای مرکب از تعداد نسبتاً کمی خط به گونهٔ قابل توجهی نمایش داده می‌شود، و غالباً مرزهای اشیائی را که در تصویر ظاهر می‌شوند می‌توان با خم‌های هندسی بس ساده‌ای برازش کرد. بنابراین اگر بتوانیم از این خم‌ها و از نظم آنها استفاده کنیم خواهیم توانست نتایج به دست آمده تا این زمان را به نحو قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیم؛ نظریهٔ موجک‌ها در حال حاضر قادر به این کار نیست. ساختن چنین پلی با دنیای هندسه، مسائل ریاضی مشکلی را مطرح می‌کند، اما با توجه به ارزش علمی و صنعتی این مهم می‌توان امیدوار بود که این پل ظرف ده سال آینده ساخته شود. آیا این مسأله در فرانسه به نتیجه خواهد رسید؟

استفان مالا

گروه ریاضی کاربردی

مدرسه پلی تکنیک، پالزو

چند مرجع

- B. B. Hubbard, *Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique* (Pour la Science/Belin, 1995).
- S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (Ecole polytechnique/Ellipses, 2000).
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents* (Hermann, 1992).

Stéphane Mallat

Département de mathématiques appliquées,

École Polytechnique, Palaiseau