بازسازی رویه‌ها برای نگارگری

نویسنده: ژان ـ دانیل بواسونا [1]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

موضوع مورد بحث بازسازیِ رویه‌ای است که فقط تعدادی از نقاط آنرا می‌شناسیم: مسأله‌ای که غالباً با آن برخورد می‌کنیم، اعم از اکتشافات زمین‌شناسی، بایگانی بقایای اسناد باستان‌شناختی و تصویرسازی پزشکی یا صنعتی

هنگامی که به کاوش زیر پوستهٔ خاکی زمین در برخی از اماکن می‌پردازیم تا شکل‌گیری لایه‌های زمین‌شناسی را بشناسیم، یا هنگامی که بخواهیم به نقشه‌برداری اعماق دریا دست بزنیم، تعداد نقاط اندازه‌گیری ناچار متناهی است. حال آن که لازم است، بر مبنای این داده‌ها که تعداد محدودی هستند، به بازسازی رویه‌های متناظر بپردازیم. در همهٔ دستگاه‌های تصویرگری کامپیوتری (از قبیل اسکنرها، تله‌مترها، تصویرگرهای سه بُعدی و غیره) که در پزشکی، یا در صنعت، یا باستانشناسی و جز آن به کار می‌روند، وضع به همین منوال است. به عنوان نقطهٔ آغاز، یک شیئ واقعی وجود دارد، که ممکن است بخشی از بدن انسان، یک قطعهٔ مکانیکی، یک اثر باستانی، یک ساختار زمین‌شناسی و یا هر چیز دیگری باشد. از این شیئ حقیقی، به کمک ابزارها فقط می‌توان تعدادی از نقاط را ثبت

[1] Boissonnat, Jean-Daniel: *Reconstruire des surfaces pour l'imagerie*, in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 88-91

کرد، و سپس به کمک آن‌ها باید به طور مجازی شکل شیئ موردنظر را بازسازی کرد. موضوع مورد بحث در مسألهٔ به نامِ بازسازی رویه‌ها همین است (شکل ۱). پس مسأله این است که با در دست داشتن تعدادی متناهی نقطه بتوانیم به ارائهٔ نمایشی هندسی و کامپیوتری از شیئ دست یابیم، و از روی آن بتوانیم شیئ را برای تماشا روی یک پرده آماده سازیم، یا آنرا در حافظهٔ کامپیوتر بایگانی کنیم، و به سادگی محاسباتی روی آن انجام دهیم، و حتی بتوانیم تغییراتی در شکل آن بدهیم و یا بتوانیم با فرمان‌هایی از راه دور در نسخه‌ای از آن دستکاری‌های لازم را انجام دهیم. به طور خلاصه، همین قدر که شکل یک شیئ از حیث عددی ذخیره شد، و این ذخیره‌سازی با دقت کافی صورت گرفت، امکانات عدیده‌ای در اختیار خواهیم داشت تا به عمل یا محاسبه بپردازیم.

شکل ۱. بازسازی یک رویه به کمک یک نمونه از نقاط آن: این مسأله در حوزه‌های گوناگون مطرح می‌شود.

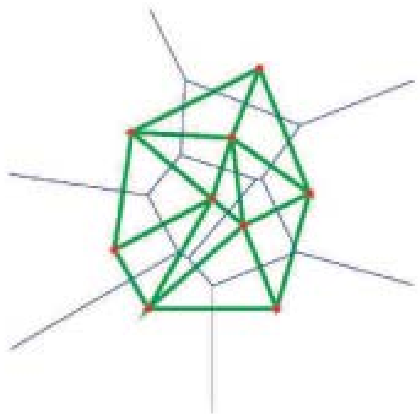
فواید اقتصادی و صنعتی مسألهٔ بازسازی رویه‌ها، هم‌چنین سرشت بنیادی آن از نظر علمی، منجر به آن شده‌اند که ظرف بیست سال گذشته کارهای متعددی در این زمینه صورت پذیرد. اما صورت‌بندی ریاضی مسأله توسط متخصصین، کار بسیار متأخرتر و مربوط به همین ایام اخیر است، که اجازه داده است الگوریتم‌های مؤثر طراحی شود و بازسازی اطمینان‌بخشی فراهم گردد. سپس برخی از دست‌آوردهای این هندسهٔ الگوریتمی با سرعت فراوان به دنیای صنعت منتقل شده‌اند و این انتقال با ایجاد نهادهای نوپایی (مانند ریندراپ جئوماژیک[۱] در ایالات متحده) صورت گرفته است و یا با عرضهٔ محصولات جدیدی به وسیلهٔ سرکردگان طراحی به کمک رایانه و یا به وسیلهٔ

[۱] Raindrop Geomagic

دست‌اندرکاران نگارگری پزشکی (مانند سیستم‌های داسو[۱] یا زیمنسِ پزشکی[۲]) جامهٔ عمل پوشیده است.

نمودارهای وورونوی[۳]، مثلث‌بندی دلونه[۴]، دو ابزار هندسی لازم

برای آن‌که یک رویه از روی شکل تیره و تار متشکل از تعدادی نقاط نمونهٔ آن بازسازی شود، بیشتر الگوریتم‌ها ابزاری را به کار می‌برند که در هندسهٔ الگوریتمی حکم ابزار مرکزی و محوری را دارد و آن هم مثلث‌بندی دلونه است. این نامگذاری از نام



شکل ۲. نمودار وورونوی (آبی) و مثلث‌بندی دلونه (سبز) برای مجموعه‌ای از نقاط (قرمز). نمودار وورونوی و مثلث‌بندی دلونه از ابزارهای اساسی در هندسهٔ الگوریتمی هستند.

ریاضیدان روسی بوریس دلون[۵] (۱۸۹۰ تا ۱۹۸۰) گرفته شده است که تلفظ نام فرانسوی شدهٔ آن دلونه است. مثلث‌بندی دلونه به گونه‌ای طبیعی بر مبنای نموداری تعریف می‌شود که نمودار وورونوی نامیده می‌شود، که آن هم برگرفته از نام ریاضیدان روسی گئورگی

---

۱ Dassault Systemes

۲ Siemens Medical

۳ diagrammes de Voronoï

۴ triangulation de Delaunay

۵ Boris Delone

وورونوی[۱] (۱۸۶۸ تا ۱۹۰۸) است. یک مجموعهٔ متناهی از نقاط فضا را در نظر بگیریم و آن را E بنامیم. نمودار وورونویی وابسته به E، تقسیم فضا (در شکل ۲ با رنگ آبی) به حجره‌هایی محدب است و هر حجره مرکب از نقاطی از فضا است که به یکی از نقاط E نزدیک‌تر از سایر نقاط‌اند. به این ترتیب، حجره‌ها، که چند وجهی‌های محدب هستند، بدون ابهام تعریف می‌شوند. اکنون آن نقاط E را که حجرهٔ وورونوی آن‌ها کنار هم می‌افتند با خط مستقیم به هم وصل کنیم. مجموعهٔ پاره‌خط‌های حاصل، مثلث‌بندی دلونهٔ وابسته به E را تشکیل می‌دهد (در شکل ۲ با رنگ سبز). این ساختارها را می‌توان در فضاهای با بعد دلخواه تعریف کرد، از جمله در فضای سه بعدی معمولی که از نظر بازسازی رویه‌ها، جالب‌ترین فضاهاست. نمودارهای وورونویی (شکل‌های ۲ و ۳) جزء اصلی‌ترین موضوع‌های مورد بحثِ هندسهٔ الگوریتمی است و در ۱۹۸۰ ارتباط آن‌ها با نظریهٔ پولی‌توپها[۲] روشن شد (پولی‌توپها مشابه چندوجهی‌ها در فضاهای با بعد بیشتر از ۳ هستند). بررسی آن‌ها در زمینهٔ نمونه‌برداری رویه‌ها خیلی هم جدیدتر است.

فایدهٔ نمودارهای وورونوی و مثلث‌بندی‌های دلونه چیست؟ اگر E یک نمونه‌برداری مرکب از n نقطه باشد که از رویهٔ S گرفته شده‌اند، می‌توان نشان داد نمودار وورونویی E و مثلث‌بندی دلونهٔ نظیر آن، شامل اطلاعات زیادی در مورد رویهٔ S اند. هنگامی که نمونه‌برداری به اندازهٔ کافی متراکم باشد، می‌توان تقریب‌های دقیقی برای رویهٔ موردنظر فراهم کرد. مثلاً برداری که نقطهٔ P از E را به دورترین رأس حجرهٔ وورونویِ همین نقطه وصل می‌کند، تقریب خوبی برای قائم بر رویهٔ S در نقطهٔ P است.

باید مطمئن شد که زمان‌های محاسبه در حد معقولی کوتاه و الگوریتم‌ها قابل اعتمادند

به این ترتیب امروزه چندین الگوریتم بازسازی می‌شناسیم که قادرند به اتکای نمونه‌برداری متناهی از نقاط یک رویهٔ S، به ساختن یک رویهٔ S' منتهی شوند به قسمی که رویهٔ S' را به شکل صحیح تقریب بزند. آنچه مهم‌تر است این که الگوریتم‌های موجود اجازه می‌دهند یک کران بالا برای اختلاف بین S و S' به‌دست آید، کرانی که البته بستگی به تراکم نقاط نمونه‌برداری دارد.

از آنجا که اطلاعات فراهم شده به کمک ابزارهای اندازه‌گیری غالباً صدها هزار و

---

۱ Georgi Voronoï

۲ polytopes

بلکه میلیون‌ها نقطه را در بر می‌گیرند، مسائل ترکیبیاتی و الگوریتمی نقشی بحرانی در بازی با این اطلاعات ایفا می‌کنند. مثلاً دانستن این نکته که مقدار محاسباتی که مثلث‌بندی دلونه ایجاب می‌کند از حد معقولی فراتر است یا نه، حائز اهمیت است. در بدترین و نامطلوب‌ترین حالت، عدد T یعنی تعداد مراحل محاسبه (و یا نهایتاً زمان محاسبه) ممکن است تربیعی باشد، یعنی T در بدترین حالات، به شکل توان دوم تعداد نقاط نمونه‌برداری است. اما فرض می‌کنیم که برای رویه‌هایی که خوب نمونه‌برداری شده باشند، این وضعیت رخ نمی‌دهد. در مورد رویه‌های چندوجهی گونهٔ[۱] S، یعنی رویه‌هایی که مرکب از وجه‌هایی به شکل چند ضلعی باشند، جدیداً نتایج دقیقی به دست آورده‌اند: در واقع، برای این گونه رویه‌ها و با شرایط ضعیفی روی نمونه‌برداری‌ها، ثابت شده است که در بدترین حالت، اندازهٔ محاسبات در مثلث‌بندی، متناسب با تعداد نقاط نمونه‌برداری است. در مورد رویه‌های هموار موضوع حساستر است؛ هم‌اکنون تحقیقات فعالی در مورد آن‌ها در حال اجراست.

نمی‌توان به کرانهایی که از حیث نظری به دست می‌آیند اکتفا کرد، بلکه باید شیوهٔ علمی و سریع محاسبه را در مثلث‌بندی برای این بازی‌های اطلاعاتی بدانیم. الگوریتم‌های متعددی را می‌شناسیم. کارآمدترین آن‌ها را متصادف[۲] می‌نامند زیرا در ضمن اجرای آن‌ها تعدادی انتخاب تصادفی صورت می‌گیرد. نظریهٔ الگوریتم‌های متصادف با سرعت زیاد در سال‌های ۱۹۹۰ رشد کرده و منجر به تحلیل‌های دقیقی شده است، که در بوتهٔ تجربه هم ارزش آن‌ها به اثبات رسیده است. در موارد زیادی، از جمله مثلث‌بندی دلونه، دخیل کردن بخشی از کار به صورت اتفاقی و تصادفی، تجویز می‌کند که در جستجوی حل بهینهٔ بدترین حالت (که احتمال اندکی دارد) نباشیم و به این ترتیب الگوریتم‌های ساده و در عین حال بسیار کارامد از نظر میانگین حاصل شده‌اند. مثلاً با نمونه‌برداری ۱۰۰۰۰۰ نقطه در حدود ۱۰ ثانیه بازسازی رویه را می‌توان انجام داد (به کمک پنتیوم ۴، با ۵۰۰ مگاهرتز).

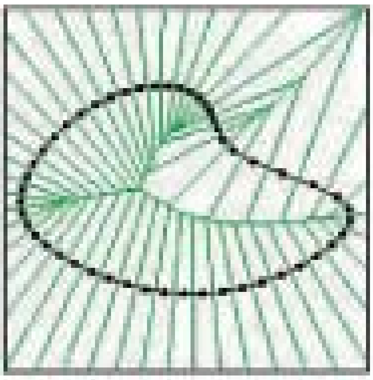
درست است که محاسبهٔ سریع مهم است، اما محاسبهٔ قابل اعتماد از آن هم مهم‌تر است. این مسأله‌ای حساس است، زیرا کامپیوترها به طور کلی اعداد را با تقریب و دقتی محدود نمایش می‌دهند (منظور تعدادی متناهی رقم اعشاری است). به این ترتیب نمی‌توان نمایش عددی و در عین حال دقیق برای اعدادی نظیر π یا $\sqrt{۲}$ که بی‌نهایت

---

[۱] polyédrique

[۲] randomnisé

رقم اعشاری دارند، ارائه داد. انباشتگی خطاهای ناشی از گرد کردن ممکن است به رفتار ناهنجاری برای یک برنامه بینجامد. هر چند این رفتارها را کاملاً می‌شناسیم، اما



شکل ۳. نمودار وورونوی مجموعه‌ای از نقاط یک خم

مهار کردن آن‌ها بسیار مشکل است و تحقّق و نگهداری الگوریتم‌های قابل اعتماد بسیار پرهزینه‌اند. بخش عمده‌ای از پژوهش نوین در زمینهٔ هندسهٔ الگوریتمی، ناظر به این مسائل است و اینجاست که شاخه‌هایی از دانش نظیر الگوریتمیک [۱]، محاسبهٔ صوری [۲] (جایی که کامپیوتر به جای اعداد صریح، نمادها را دست‌کاری می‌کند)، و حساب کامپیوترها [۳] در هم می‌آمیزند. بر اثر این تلاش‌ها، تاکنون چندین کتابخانهٔ نرم‌افزاری گسترش یافته‌اند که امکان برنامه نویسی‌های ساده، کارآمد و اطمینان‌بخش را فراهم می‌کنند، از جمله کتابخانهٔ CGAL (کتابخانهٔ الگوریتم‌های هندسهٔ محاسباتی [۴]) که به کمک همکاری بین‌المللی دانشگاه‌ها و سازمان‌های پژوهشی تأسیس و توسعه یافته است.

ژان ـ دانیل بواسونا
INRIA (انستیتوی ملی پژوهشی در انفورماتیک و اوتوماتیک)
سوفیا ـ آنتیپولیس

---

۱ algorithmigue

۲ Calaul Formel

۳ arithmétique des Ordinateurs

۴ Computational Geometry Algorithms Library

چند مرجع

- J.-D. Boissonnat et M. Yvinec, Algorithmic geometry (Cambridge University Press, 1998).
- J.-D. Boissonnat et F. Cazals, “Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions”, dans *Proceedings of the 16* $^{\text{th}}$ *Annual ACM Symposium of Computational Geomerty* (2000).
- CGAl, The Computational Geometry Algorithms Library, `http://www.cgal.org`.

Jean-Daniel Boissonnat
INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique), Sophia-Antipolis