

۱. حلقه  $R$  و عناصر خودتوان  $e, f \in R$  مفروض هستند به طوری که  $e + f$  خودتوان است. ثابت کنید  $ef$  هم خودتوان است. (عصر  $x$  از حلقه  $R$  را خودتوان گویند هرگاه  $x^2 = x$ ).
۲. ثابت کنید تابع  $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  که با ضابطه  $d(m, n) = \log \frac{\sqrt{mn}}{(m, n)}$  تعریف می شود یک متر روی  $\mathbb{N}$  است. (منظور از  $(m, n)$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $m$  و  $n$  است.)
۳. می دانیم برای هر عدد طبیعی  $n$ ، معادله  $x^n + \dots + x - 1 = 0$  دقیقاً یک ریشه مثبت دارد که آن را  $u_n$  می نامیم. نشان دهید دنباله  $\{u_n\}$  همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.
۴. فرض کنید  $R$  یک حلقه متناهی و یکدار و  $U(R)$  مجموعه تمام عناصر وارونپذیر آن باشد. اگر مرتبه  $U(R)$  و مرتبه  $R$  نسبت به هم اول باشند، نشان دهید  $R$  عنصر پوچتوان ناصفر ندارد (عصر  $x$  در  $R$  را پوچتوان گویند هرگاه عدد طبیعی  $n$  موجود باشد به طوری که  $x^n = 0$ ).
۵. فرض کنید  $P_1, \dots, P_n$  نقاطی داخل دایره ای به شعاع یک باشند به طوری که برای هر نقطه مانند  $P$  روی این دایره، حاصلضرب فاصله های  $P$  از نقاط  $P_1, \dots, P_n$  حداکثر یک باشد. نشان دهید نقاط  $P_1, \dots, P_n$  در مرکز دایره قرار دارند.
۶. فرض کنید  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته است که تحدید آن به هر خط در  $\mathbb{R}^2$  یکنوا باشد، یعنی برای هر  $a, b \in \mathbb{R}^2$  تابع  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $g(t) = f(ta + b)$  یکنوا است. ثابت کنید تابع  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و بردار  $v$  در  $\mathbb{R}^2$  وجود دارند که  $f(x) = h(x.v)$  (منظور از  $x.v$  ضرب داخلی  $x$  و  $v$  است).