آزمون نوبت دوم

چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۹۶/۶/۱۵

۱) تعداد ۴۱ عدد طبیعی را روی یک دایره قرار داده‌ایم با این خاصیت که از هر دو عدد کنار هم یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. نشان دهید دو عدد وجود دارند که کنار هم نیستند ولی همچنان یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

پاسخ:

این ۴۱ عدد را با شروع از یک عدد دلخواه به ترتیب $a_1, a_2, \ldots, a_{41}$ نام‌گذاری می‌کنیم. همچنین فرض کنید اعداد a_i و a_j غیرمتوالی با ویژگی مورد نظر یافت نشوند. از فرض مساله می‌دانیم که برای هر $1 \leq i \leq 41$ داریم $a_i|a_{i+1}$ یا $a_{i+1}|a_i$. (فرض می‌کنیم $a_{42} := a_1$) همچنین اگر $a_i|a_{i+1}$ آنگاه داریم $a_{i+2}|a_{i+1}$ چون اگر $a_{i+1}|a_{i+2}$ آنگاه i و $j = i + 2$ در حکم مساله صدق می‌کنند. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a_1|a_2$ (حالت دیگر مشابه است.) در این صورت خواهیم داشت $a_3|a_2$ و $a_3|a_4$ ... $a_{41}|a_{40}$ و $a_{41}|a_1$ ولی این نتیجه می‌دهد $a_{41}|a_2$ که باز با فرض در تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

۲) X یک فضای متریک فشرده و $\{x_1,\dots,x_n\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از X است. تعریف می‌کنیم

$$A=\{a>0:\bigcup_{i=1}^{n}B_a(x_i)=X\}.$$

ثابت کنید A مجموعه‌ای باز است. ($B_a(x)$ گوی باز به مرکز x و شعاع a است.)

پاسخ:

ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $a\in A$ آن‌گاه اعداد بزرگتر از a نیز در A هستند. پس A دو حالت دارد. یا نیم‌بازه‌ای به شکل (a_0,∞) است و یا نیم‌بازه‌ای به شکل $[a_0,\infty)$.

فرض کنیم $A=[a_0,\infty)$. در این صورت برای هر $r>\epsilon>0$ داریم $\cup_{i=1}^{n}B_{a_0-\epsilon}(x_i)\neq X$. به طور خاص، برای هر $k>\frac{1}{r}$ طبیعی اگر قرار دهیم $\epsilon=\frac{1}{k}$ نتیجه می‌شود که y_k ای وجود دارد که برای هر $i=1,\dots,n$، $d(x_i,y_k)>a_0-\frac{1}{k}$.

اکنون چون X فشرده است، پس دنباله‌ی $\{y_k\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{y_{k_j}\}$ دارد که به عضوی از X چون y همگراست.

اکنون با توجه به اینکه $d(x_i,y)=\lim d(x_i,y_{k_j})$، نتیجه می‌گیریم $d(x_i,y)\leq a_0$ که این با فرض $a_0\in A$ در تناقض است.

پس فرض خلف غلط است و در نتیجه $A=(a_0,\infty)$ که حکم را نتیجه می‌دهد.

(راه حل دوم)

فرض کنید $t\in A$ واضح است که همهٔ اعداد بزرگتر از t هم در A هستند. حال توجه کنیم که

$$X=\bigcup_{k}(\bigcup_{i=1}^{n}B_{t-\frac{1}{k}}(x_i))$$

اما چون X فشرده است پس اعداد k_1، ...، k_l وجود دارند که

$$X=\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_{t-\frac{1}{k_1}}(x_i)\right)\cup\dots\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_{t-\frac{1}{k_l}}(x_i)\right)=\bigcup_{i=1}^{n}B_{t-\frac{1}{s}}(x_i)$$

و s بیشترین عدد بین k_1، ...، k_l است. پس $t-\frac{1}{s}\in A$. در نتیجه $(t-\frac{1}{s},+\infty)\subseteq A$ و این یعنی A باز است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۳) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. اگر S یک زیرمجموعه ناتهی از تبدیلات خطی روی V باشد که نسبت به عمل ترکیب توابع بسته است، نشان دهید تبدیل خطی T در S هست که $\operatorname{Im} T \oplus \ker T = V$.

پاسخ:

بین اعضای S، عضو T را چنان می گیریم که $\ker T$ بیشترین بعد را داشته باشد. چون $T^{۲} \in S$ و $\ker(T) \subseteq \ker(T^{۲})$ پس $\ker(T) = \ker(T^{۲})$. حال ادعا می کنیم $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{۰\}$ زیرا اگر $v = Tw \in \ker(T) \cap \operatorname{Im}(T)$ آنگاه $\{۰\} =$ $Tv = T^{۲}w$ پس $w \in \ker(T^{۲}) = \ker(T)$. یعنی $v = Tw = ۰$. حال چون $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$ نتیجه می‌شود $\ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T) = V$.

۴) مکعبی با اضلاع به طول یک را در نظر بگیرید و فرض کنید γ خمی پیوسته و بسته است که روی وجوه مکعب قرار دارد و با همهٔ وجه ها در تماس است. (اگر خم با یک ضلع یا رأس از یک وجه مکعب برخورد کند نیز می گوییم با آن وجه در تماس است). کمترین مقدار ممکن برای طول این خم را به دست آورید.

پاسخ: بدون کم شدن از کلیت، مکعب $[0,1]^3$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$، $0 \le t \le 1$ پرمایشی برای خم با ویژگی‌های مورد نظر باشد. همچنین به سادگی می‌توان γ را با خمی قطعه به قطعه مشتق‌پذیر (یا یک چندضلعی) تقریب زد که طول کمتر یا مساوی داشته باشد و ویژگی‌های سوال را حفظ کند. پس بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که γ خمی قطعه به قطعه مشتق‌پذیر (یا یک چند ضلعی) است.

با در نظر گرفتن تصویر خم روی محور x نتیجه می‌شود $\int_0^1 |\gamma_1'(t)|\,\mathrm{d}t \ge 2$. زیرا تصویر خم γ به روی محور xها خمی پیوسته و بسته است که از نقاط صفر و یک نیز می‌گذرد و بنابراین حداقل طول آن دو است. به طور مشابه برای γ_2 و γ_3 نیز این نابرابری برقرار است. به علاوه با توجه به اینکه همواره خم روی سطح مکعب قرار دارد نتیجه می‌شود که برای نقاط مشتق‌پذیری γ حداقل یکی از مقادیر $\gamma_i'(t)$، $i = 1, 2, 3$ صفر است. از نامساوی

$$\sqrt{a^2 + b^2} \ge \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

و صفر بودن حداقل یکی از مقادیر $\gamma_i'(t)$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} \ge \frac{|\gamma_1'(t)| + |\gamma_2'(t)| + |\gamma_3'(t)|}{\sqrt{2}}.$$

با انتگرال‌گیری از طرفین بدست می‌آوریم،

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 |\gamma_i'(t)|\,\mathrm{d}t \ge 3\sqrt{2}.$$

بنابراین حداقل طول ممکن برای خم γ برابر با $3\sqrt{2}$ است. مثلث متساوی‌الضلاعی که اضلاع آن قطرهای سه وجه مکعبی است که از مبدا می‌گذرند در شرایط مساله صدق می‌کند و طولی برابر با $3\sqrt{2}$ دارد.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۵) برای هر دنبالهٔ $n_1, n_2, \ldots$ از اعداد مثبت، دنبالهٔ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_k = 2 + \cfrac{n_1}{2 + \cfrac{n_2}{\ldots + \frac{n_k}{2}}}$$

حد دنبالهٔ x_k را در صورت وجود با $[n_1, n_2, \ldots]$ نشان می‌دهیم.

S را مجموعهٔ همهٔ xهایی می‌گیریم که به ازای یک دنبالهٔ $n_i \in \{5, 20\}$ داشته باشیم $x = [n_1, n_2, \ldots]$.

الف) $\min(S)$ و $\max(S)$ را بیابید.

ب) ثابت کنید اگر به ازای هر i، $n_i \in \{5, 20\}$، آنگاه دنبالهٔ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ دارای حد است.

ج) ثابت کنید $S = [\min(S), \max(S)]$.

پاسخ:

الف) نشان می‌دهیم $\min(S) = \frac{5}{2}$ و $\max(S) = 10$.

ابتدا نشان می‌دهیم

$$[5, 20, 5, 20, \ldots] = \frac{5}{2}, [20, 5, 20, 5 \ldots] = 10$$

قرار می‌دهیم $a_k = [\underbrace{5, 20, 5, 20, \ldots}_{k}]$. دقت کنید که دنباله‌ی a_{2k} دنباله‌ای صعودی است و در بازه‌ی I_0 قرار دارد. همچنین دنباله‌ی a_{2k+1} دنباله‌ای نزولی است و در بازه‌ی I_0 قرار دارد. پس این دو دنباله همگرا هستند. حد آن‌ها را a و a' می‌نامیم، a و a' باید در معادله‌ی $x = 2 + \frac{5}{2 + \frac{20}{x}}$ صدق کنند که تنها جواب مثبت آن، $\frac{5}{2}$ است. پس $a = a' = \frac{5}{2}$ و در نتیجه $\lim a_k = \frac{5}{2}$.

با استدلالی مشابه، اگر $b_k = [\underbrace{20, 5, 20, 5, \ldots}_{k}]$ حد دنباله‌ی b_k جواب معادله‌ی $x = 2 + \frac{20}{2 + \frac{5}{x}}$ است که برابر با ۱۰ است.
حال کافی است نشان دهیم اگر $[n_1, n_2, \ldots]$ موجود باشد در بازه‌ی $[\frac{5}{2}, 10]$ است. با توجه به این‌که مقدار x_kها نسبت به $n_1, n_3, \ldots$ صعودی و نسبت به $n_2, n_4, \ldots$ نزولی است،پس x_k در بازه‌ی $[a_k, b_k]$ قرار دارد. در نتیجه $\lim x_k$ در بازه‌ی $[\frac{5}{2}, 10]$ است.

ب) تعریف می‌کنیم $J_۰ = [\frac{۵}{۲}, ۱۰]$ و $I_۰ = [۲, ۱۲]$. همچنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = ۲ + \frac{۵}{x}, \quad g(x) = ۲ + \frac{۲۰}{x}$$

توجه کنید که f و g توابع اکیداً نزولی هستند و هر یک از بازه‌های $I_۰$ و $J_۰$ را به زیرمجموعه‌ای از خودشان می‌نگارند. و داریم $g(J_۰) = [۴, ۱۰]$ و $f(J_۰) = [\frac{۵}{۲}, ۴]$.

لم ۱: فرض کنید $b \geqslant a \geqslant ۲$. در این صورت،

$$fog(b) - fog(a) \leqslant \frac{۲۵}{۱۴۴}(b-a)$$

$$fof(b) - fof(a) \leqslant \frac{۲۵}{۸۱}(b-a)$$

$$gog(b) - gog(a) \leqslant \frac{۲۵}{۳۶}(b-a)$$

$$gof(b) - gof(a) \leqslant \frac{۱۰۰}{(۲a+۵)(۲b+۵)}(b-a)$$

اثبات. داریم $fog(x) = \frac{۹x+۴۰}{۲x+۲۰} = \frac{۹}{۲} - \frac{۲۵}{x+۱۰}$، بنابراین $|fog(a) - fog(b)| = \frac{۲۵|a-b|}{(a+۱۰)(b+۱۰)}$ که با توجه به این‌که $a, b \geqslant ۲$ نتیجه می‌شود $|fog(a) - fog(b)| \leqslant \frac{۲۵}{۱۴۴}|a-b|$.

همچنین داریم $fof(x) = \frac{۹x+۱۰}{۲x+۵} = \frac{۹}{۲} - \frac{۲۵}{۴x+۱۰}$ که مشابهاً با توجه به این‌که $a, b \geqslant ۲$ نتیجه می‌دهد $|fof(a) - fof(b)| \leqslant \frac{۲۵}{۸۱}|a-b|$.

مشابهاً داریم $gog(x) = \frac{۱۲x+۲۰}{x+۱۰} = ۱۲ - \frac{۱۰۰}{x+۱۰}$ که مشابهاً با توجه به این‌که $a, b \geqslant ۲$ نتیجه می‌دهد $|gog(a) - gog(b)| \leqslant \frac{۲۵}{۳۶}|a-b|$.

همچنین داریم $gof(x) = \frac{۲۴x+۱۰}{۲x+۵} = ۱۲ - \frac{۵۰}{۲x+۵}$ که نتیجه می‌دهد $|gof(a) - gof(b)| = \frac{۱۰۰|a-b|}{(۲a+۵)(۲b+۵)}$. $\square$

لم ۲: فرض کنید $h_۱, h_۲, \ldots \in \{f, g\}$ و قرار دهید $I_k = h_۱ o h_۲ o \cdots o h_k(I_۰)$. در این صورت $I_۰ \supset I_۱ \supset I_۲ \supset \cdots$ و $\cap I_k \subset J_۰$ و $|I_k| \to ۰$.

اثبات. فرض کنید $I_k = [x_k, y_k]$.

داریم $I_{2k} = e_1 o e_2 o \cdots o e_k(I_0)$ که $e_i \in \{fof, fog, gof, gog\}$. با توجه به صعودی بودن e_iها، دنباله‌ی x_{2k} صعودی و دنباله‌ی y_{2k} نزولی است. همچنین توجه کنید که $x_{2k} \geqslant [\underbrace{5, 20, 5, 20, \ldots}_{2k}]$ و $y_{2k} \leqslant [\underbrace{20, 5, 20, 5, \ldots}_{2k}]$. پس $\lim x_{2k}$ و $\lim y_{2k}$ در بازه‌ی J_0 هستند.

فقط می‌ماند ثابت کنیم $|I_k| \to 0$. فرض کنید $|I_k| \to \alpha > 0$. از آن‌جا که $\lim x_{2k} \geqslant \frac{5}{2}$ و $y_k \geqslant x_k + \alpha$ پس k_0 وجود دارد که برای $k > k_0$، $(2x_{2k}+5)(2y_{2k}+5) > 101$ بنابر این از لم ۱ نتیجه می‌شود، که برای $k > k_0$، $|gof(I_{2k})| \leqslant \frac{100}{101}|I_{2k}|$.

از طرفی، از لم ۱ نتیجه می‌شود $|fog(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{144}|I_{2k}|$ و $|fof(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{81}|I_{2k}|$ و $|gog(I_{2k})| \leqslant \frac{25}{36}|I_{2k}|$.

بنابراین برای $k > k_0$، داریم $|I_{2k+2}| \leqslant \frac{100}{101}|I_{2k}|$. پس $I_{2k} \to 0$ که با فرض در تناقض است. $\square$

اکنون می‌توانیم نشان دهیم برای هر دنباله‌ی $\{5, 20\} \ni n_1, n_2, \ldots$، دنباله‌ی $x_k = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ همگراست.

برای هر k، اگر $n_k = 5$، قرار می‌دهیم $h_k = f$ و اگر $n_k = 20$، قرار می‌دهیم $h_k = g$ و بازه‌های I_k را مانند لم ۲ تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $n \geqslant k$، $x_n \in I_k$. پس از لم ۲ نتیجه می‌شود که دنباله‌ی x_k کوشی و در نتیجه به عددی در J_0 همگراست.

ج) باید ثابت کنیم برای هر $x \in J_0$، دنباله‌ی $n_k \in \{5, 20\}$ وجود دارد که $x = [n_1, n_2 \ldots]$.

دنباله‌ی n_k را به طور استقرایی می‌سازیم. قرار می‌دهیم $y_1 = x$. در مرحله‌ی kاُم، اگر $y_k \leqslant 4$، قرار می‌دهیم $n_k = 5$ و $h_k = f$ و اگر $y_k \geqslant 4$، قرار می‌دهیم $n_k = 20$ و $h_k = g$. سپس تعریف می‌کنیم $y_{k+1} = h_k^{-1}(y_k)$ و همین کار را ادامه می‌دهیم. با توجه به نحوه‌ی تعریفِ y_kها، داریم $y_k \in I_0$.

اکنون اگر تعریف کنیم $I_k = h_1 o h_2 o \cdots o h_k(I_0)$، از آن‌جا که $x = h_1 o h_2 o \cdots o h_k(y_{k+1})$ داریم $x \in I_k$ و همچنین $x_k \in I_k$. پس $x_k \to x$.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۶) فرض کنید R یک حلقه یکدار و $f(x)$ یک چند جمله ای ناصفر با ضرایب در R باشد. اگر M یک عضو ماکسیمال (نسبت به رابطهٔ شمول) در مجموعهٔ $\{J \trianglelefteq R[x] : f \notin J\}$ باشد. ثابت کنید:

$$\forall\, I \trianglelefteq R,\ \ M \neq I[x]$$

پاسخ: (راه حل اول)

به روش برهان خلف، فرض کنید I ایدآلی باشد که $M = I[x]$ آنگاه $R[x]/M = R[x]/I[x] \cong R/I[x]$. سمت راست رابطه قبل، یک حلقه چندجمله‌ای است و واضح است که در حلقه‌های چندجمله‌ای، اشتراک همه ایدآل‌های غیر صفر، برابر با صفر است. پس در سمت چپ رابطه قبل هم باید اشتراک همهٔ ایدآل‌های غیرصفر برابر با صفر باشد. اما هر ایدآل ناصفر حلقه $R[x]/M$ به شکل N/M است که $M \subsetneqq N$. بنابراین $f \in N$. در نتیجه $f + M$ متعلق به اشتراک تمام ایدال‌های ناصفر $R[x]/M$ است که تناقض است.

(راه حل دوم)

فرض کنید $\deg(f(x)) = n$ و $M = I[x]$. قرار دهید $L = M + \langle x^{n+1} \rangle$ در این صورت L ایدآل $R[x]$ است و $M \subsetneqq L$ (زیرا $x^{n+1} \in L \setminus M$). همچنین $f \notin L$ چرا که در غیر این صورت، اگر $f \in L$ آنگاه $f(x) = g(x) + x^{n+1}h(x)$ که $g(x) \in M$ و چون $\deg f(x) = n$ ، نتیجه می شود $h(x) = 0$. پس $f(x) = g(x) \in M$ که تناقض است. بنابراین $f \notin L$ که با ماکسیمال بودن M تناقض دارد.