۱) آیا تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که تصویر هر زیر مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$ تحت f برابر با کل $\mathbb{N}$ شود؟

پاسخ:

چنین تابعی وجود ندارد. فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ یک تابع باشد. قرار می‌دهیم $A=f^{-1}(1)$. از دو مجموعه A و $\mathbb{N}\setminus A$ لااقل یکی نامتناهی است. اما تصویر A برابر با $\{1\}$ است و تصویر $\mathbb{N}\setminus A$ نیز عدد یک را ندارد.

۲) ثابت کنید فضای متریک (X,d) همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو زیر مجموعه ناتهی $A,B\subset X$ یک $x\in X$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $d(x,A)=d(x,B)$.

پاسخ:

عکس نقیض حکم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید X ناهمبند و $X=A\cup B$ یک جداسازی برای آن باشد. در اینصورت برای هر $x\in X$ داریم $d(x,A)=0, d(x,B)>0$ یا $d(x,A)>0, d(x,B)=0$.

حال فرض کنید دو زیرمجموعه ناتهی $A,B\subset X$ موجودند به طوری که برای هر $x\in X$ داریم $d(x,A)\neq d(x,B)$.

قرار دهیم $A_1=\{x\in X|d(x,A)<d(x,B)\}$ و $B_1=\{x\in X|d(x,A)>d(x,B)\}$.

در اینصورت به وضوح $X=A_1\cup B_1$ یک جداسازی است.

۳) فرض کنید R یک حلقه یکدار و I یک ایده‌آل راست ماکسیمال در R باشد. نشان دهید I یک ایده‌آل دو طرفه است یا $I^{2} = I$.

پاسخ:

فرض کنید I ایده آل دو طرفه نباشد . لذا

$$\exists r \in R, rI \nsubseteq I$$

که نتیجه می دهد $rI + I$ یک ایده‌آل راست و به طور سره شامل I است. بنابراین با توجه به فرض ماکسیمال بودن I داریم، $rI + I = R$ و لذا $a, b \in I$ موجودند که $ra + b = 1$. در نتیجه برای هر $x \in I$ داریم $x = (xr)a + xb \in I^{2}$ ، یعنی $I \subseteq I^{2}$ از طرفی واضح است که $I^{2} \subseteq I$ پس $I^{2} = I$.

۴) فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد و $f(0)=f(1)$. ثابت کنید

$$3f'(1)^2 \leq \int_0^1 f''(x)^2 dx.$$

پاسخ: با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\int_0^1 xf''(x)dx = \int_0^1 x df' = xf'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = f'(1) - 0 - (f(1) - f(0)) = f'(1)$$

از طرف دیگر بنا به نامساوی کوشی- شوارتز

$$\left(\int_0^1 xf''(x)dx\right)^2 \leq (\int_0^1 x^2 dx)(\int_0^1 f''(x)^2 dx) = \frac{1}{3}\int_0^1 f''(x)^2 dx.$$

بنابراین $f'(1)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 f''(x)^2 dx$.

۵) فرض کنید n عددی طبیعی و t عددی مثبت باشد. قرار می‌دهیم

$$A=\{(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{Z}^n : u_1,\dots,u_n\geq 0,\ \sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}\leq t\}.$$

نشان دهید $|A|>t^n$. ($|A|$ تعداد اعضای A را نشان می‌دهد.)

پاسخ:

حکم را با استقراء نشان می‌دهیم. برای $n=1$ روشن است که $|A|=\lfloor t\rfloor+1$ و حکم برقرار است. فرض کنید حکم برای n درست باشد. قرار می‌دهیم،

$$A=\{(u_1,\dots,u_{n+1})\in\mathbb{Z}^{n+1} : u_1,\dots,u_{n+1}\geq 0, \sum_{j=1}^{n+1}\frac{u_j}{j}\leq t\}.$$

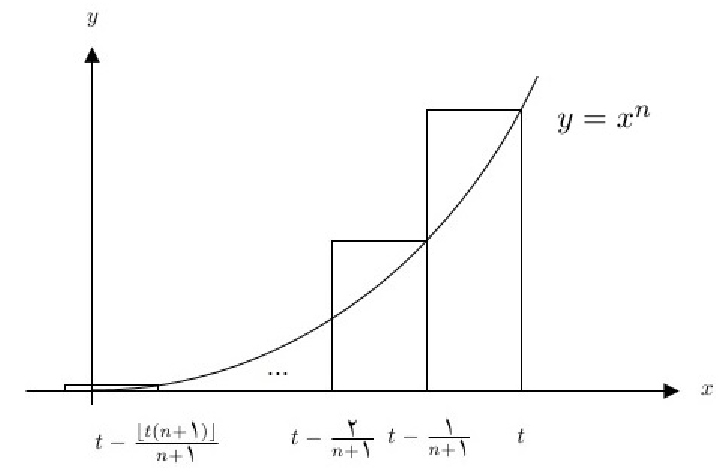
با بازنویسی رابطه به شکل $\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{j}\leq t-\frac{u_{n+1}}{n+1}$ و با تغییر مقادیر u_{n+1} از $k=0$ تا $k=\lfloor t(n+1)\rfloor$ و استفاده از فرض استقراء داریم،

$$|A|>\sum_{k=0}^{\lfloor t(n+1)\rfloor}\left(t-\frac{k}{n+1}\right)^n.$$

با توجه به شکل بعد می‌توان برای سری سمت راست کران پایین مناسبی بر حسب انتگرال تابع x^n روی بازه $[0,t]$ بدست آورد و در نتیجه،

$$\sum_{k=0}^{\lfloor t(n+1)\rfloor}\left(t-\frac{k}{n+1}\right)^n\geq (n+1)\int_0^t x^n\,\mathrm{d}x=t^{n+1},$$

و حکمِ استقراء اثبات می‌شود.



۶) گروه G را مناسب گوییم هرگاه برای هر دو عنصر هم‌مرتبه a,b در آن، $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ موجود باشد به طوری که $\sigma(a)=b$. فرض کنید G یک گروه مناسب از مرتبه p^k (p یک عدد اول) و N زیرگروه نرمالی از G باشد به طوری که برای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ داشته باشیم $\alpha(N)\subseteq N$. ثابت کنید G/N نیز یک گروه مناسب است.

پاسخ:

برای راحتی در نگارش اعضای G/N را به $\bar{x}$ نشان می دهیم که در آن $x\in G$. فرض کنید $p^r=o(\bar{x})=o(\bar{y})$، باید نشان دهیم عنصر $\Theta\in Aut(G/N)$ موجود است به طوری که $\Theta(\bar{x})=\bar{y}$.

اگر $r=0$، Θ را همانی در نظر می‌گیریم. فرض کنید $r\geq 1$، $o(x)=p^n$ و $o(y)=p^m$. با توجه به تقارن می توان فرض کرد $m\geq n$. بنابراین اگر قرار دهیم $b=y^{p^{m-n}}$ و از رابطه $o(t^i)=\frac{o(t)}{(o(t),i)}$ استفاده کنیم داریم $o(b)=p^n=o(x)$. لذا طبق فرضیات مساله، عنصر $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$ موجود است به طوری که $\sigma(x)=b$ حال با توجه به شرط بیان شده روی N، نگاشت $\bar{\sigma}:G/N\to G/N$ با تعریف $\bar{\sigma}(\bar{x})=\overline{\sigma(x)}$ در $\mathrm{Aut}(G/N)$ قرار دارد و همچنین داریم $\bar{\sigma}(\bar{x})=\bar{b}$. لذا $o(\bar{x})=o(\bar{b})$ و از آنجا $p^r=\frac{p^r}{(p^r,p^{m-n})}$ که نتیجه می‌دهد $m=n$ یعنی $b=y$ و $\bar{\sigma}(\bar{x})=\bar{y}$.