

بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

(۱) فرض کنید $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ و $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع تحلیلی باشد به گونه‌ای که برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، $f(\frac{1}{n}) \in \mathbb{R}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ که در آن $f^{(n)}$ مشتق n ام تابع f است.

(۲) (i) ثابت کنید اگر فضای متریک (X, d) همبند باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر دو نقطه $x, y \in X$ عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ و نقاطی مانند $x_1, \dots, x_n \in X$ موجودند به طوری که $x_1 = x$ ، $x_n = y$ و برای هر $i < n$ ، $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$.

(ii) مثالی ارائه دهید که عکس حکم (i) برقرار نباشد.

(iii) ثابت کنید که عکس حکم (i) با فرض فشردگی X برقرار است.

(۳) فرض کنید G یک گروه و K زیرگروهی از آن باشد.

(i) ثابت کنید $\frac{N_G(K)}{C_G(K)}$ با زیرگروهی از $\text{Aut}(K)$ یکرخت است.

(ii) ثابت کنید اگر K دوری باشد و $K \trianglelefteq G = G'$ ، آنگاه $K \leq Z(G)$.

(۴) فرض کنید F یک میدان، $M_n(F)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درآیه‌های در F ، $A \in M_n(F)$ و ماتریس وارونپذیر $P \in M_n(F)$ چنان باشد که $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است. ثابت کنید هر دو زیرفضای پایای A نسبت به شمول قابل مقایسه‌اند اگر و تنها اگر $\lambda \in F$ و ماتریس پوچتوان $N \in M_n(F)$ با شرط $N^{n-1} \neq 0$ موجود باشد که $A = \lambda I + N$.

(۵) دو نفر به نام‌های A و B با هم سکه‌بازی می‌کنند؛ به این ترتیب که هر یک سکه‌هایشان را پرتاب می‌کنند، اگر نتیجه هر دو پرتاب یکی بود هر دو سکه را A می‌برد و در غیر آن صورت هر دو سکه را B برمی‌دارد. فرض کنید A دارای m سکه و B دارای n سکه باشند. به طور متوسط چند بار بایستی بازی تکرار شود تا بالاخره یک نفر سکه‌هایش تمام شود؟

(۶) فرض کنید C مجموعه کانتور باشد. ثابت کنید $C - C = [-1, 1]$. (لازم به ذکر است که $C - C = \{x - y \mid x, y \in C\}$ و C برابر با مجموعه اعدادی در بازه $[0, 1]$ است که بسط نامختوم آن‌ها در پایه ۳ فقط ارقام ۰ یا ۲ دارند، به عنوان مثال $\frac{1}{3} \in C$ چون بسط نامختوم آن $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$ است هر چند بسط مختوم آن $\frac{1}{3}$ است.)