پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۱) فرض کنید $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ و $f:D\to\mathbb{C}$ یک تابع تحلیلی باشد به گونه‌ای که برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$، $f(\frac{1}{n})\in\mathbb{R}$. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $f^{(n)}(0)\in\mathbb{R}$ که در آن $f^{(n)}$ مشتق nاُم تابع f است.

پاسخ:

فرض کنید $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ بسط تیلور تابع تحلیلی f حول نقطهٔ ۰ باشد. قرار دهید $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$. به وضوح داریم:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_nz^n$$

و g بر D تابعی تحلیلی می‌باشد. پس $f-g$ بر D یک تابع تحلیلی است و به علاوه $(f-g)(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-g(\frac{1}{n})=0$ برای هر $n\geq 2$. پس مجموعهٔ صفرهای تابع تحلیلی $f-g$ در D دارای یک نقطهٔ حدی می‌باشد. لذا بنا به حکمی در توابع مختلط $(f-g)(z)=0$ برای هر $z\in D$. از آنجا $a_n=\bar{a}_n$ برای هر $n\in\mathbb{N}$. پس $a_n\in\mathbb{R}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$. ولی $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. بنابراین $f^{(n)}(0)\in\mathbb{R}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$. و این همان است که می‌خواهیم.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۲) $(i$ ثابت کنید اگر فضای متریک (X,d) همبند باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و هر دو نقطهٔ $x,y \in X$، عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ و نقاطی مانند $x_1,\dots,x_n \in X$ موجودند به طوری که $x_1 = x$، $x_n = y$ و برای هر $i < n$، $d(x_i,x_{i+1}) < \varepsilon$.

$(ii$ مثالی ارائه دهید که عکس حکم (i) برقرار نباشد.

$(iii$ ثابت کنید که عکس حکم (i) با فرض فشردگی X برقرار است.

پاسخ:

$(i$ شرط مذکور در این قسمت را می‌توان به این صورت بیان کرد که در فضای X می‌توان از هر نقطه‌ای به هر نقطهٔ دیگر با تعدادی متناهی گام با طول کمتر از ε رفت. حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. $x \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$C_\varepsilon = \{y \in X \ : \ \text{از } x \text{ به } y \text{ با تعدادی متناهی گام با طول کمتر از } \varepsilon \text{ می‌توان رفت}\}.$$

ادعا می‌کنیم $C_\varepsilon = X$. اولاً C_ε باز است زیرا اگر y نقطهٔ دلخواهی از C_ε باشد آنگاه

$$N_\varepsilon(y) \subseteq C_\varepsilon.$$

برای اثبات این امر فرض کنیم z نقطهٔ دلخواهی از $N_\varepsilon(y)$ باشد. در این صورت گام از y به z طول کمتر از ε دارد و چون از x به y با تعدادی متناهی گام با طول کمتر از ε می‌توانیم برویم اگر این گام اخیر یعنی از y به z را نیز اضافه کنیم، از x به z با تعدادی متناهی گام با طول کمتر از ε رفته‌ایم و لذا $z \in C_\varepsilon$. بنابراین y نقطه‌ای درونی برای C_ε است و لذا C_ε باز است.

ثانیاً C_ε بسته است. فرض کنیم $z \in \overline{C_\varepsilon}$. بنابراین دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در C_ε موجود است که $y_n \to z$. لذا عددی مانند $K \in \mathbb{N}$ هست که به ازای هر $n \geq K$ داریم $d(y_n,z) < \varepsilon$ و یا $z \in N_\varepsilon(y_n)$.

اما دیدیم برای $y_n \in C_\varepsilon$ داریم $N_\varepsilon(y_n) \subseteq C_\varepsilon$ و در نتیجه $z \in C_\varepsilon$. بنابراین C_ε بسته است. لذا C_ε زیرمجموعه‌ای هم باز هم بسته از X است و چون X همبند است پس $C_\varepsilon = \phi$ یا $C_\varepsilon = X$. اما $C_\varepsilon \neq \phi$ زیرا $x \in C_\varepsilon$. پس $C_\varepsilon = X$ و در نتیجه از x به هر نقطه‌ای از X با تعدادی متناهی گام با طول کمتر از ε می‌توان رفت.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

ii) مثال $[0,1) \cup (1,2]$ نشان می‌دهد که عکس حکم (i) لزوماً درست نیست.

iii) به برهان خلف فرض کنیم X همبند نباشد، پس زیرمجموعه‌ای هم بسته هم باز و سره مانند M دارد. چون M بسته و X فشرده است پس مجموعهٔ M فشرده است. به همین دلیل M^c نیز فشرده خواهد بود. اما $M \cap M^c = \phi$ و لذا داریم $d(M, M^c) > 0$.

حال فرض کنیم $\varepsilon = d(M, M^c)$. نقاط $x \in M$ و $y \in M^c$ را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که M سره است و لذا M و M^c ناتهی هستند. طبق فرض باید بتوانیم از x تا y توسط تعدادی متناهی گام با طول کمتر از ε برویم. اما در این میان نقاطی مانند $x' \in M$ و $y' \in M^c$ هستند که پشت سر هم آمده‌اند و لذا باید $d(x', y') < \varepsilon$. بنابراین

$$d(x', y') < \varepsilon = d(M, M^c) \leq d(x', y')$$

که تناقض است.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۳) فرض کنید G یک گروه و K زیرگروهی از آن باشد.

i) ثابت کنید $\dfrac{N_G(K)}{C_G(K)}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut(K)}$ یکریخت است.

ii) ثابت کنید اگر K دوری باشد و $K \trianglelefteq G = G'$، آنگاه $K \leq Z(G)$.

پاسخ:

(i) برای هر $g \in N_G(K)$، $\varphi_g : K \to K$ را با ضابطهٔ $\varphi_g(x) = g^{-1}xg$ تعریف می‌کنیم. از آنجا که $g \in N_G(K)$، برای هر $x \in K$ داریم $g^{-1}xg \in K$؛ در نتیجه φ_g یک خودریختی خوش تعریف روی K تعریف می‌کند، یعنی $\varphi_g \in \mathrm{Aut(K)}$. حال $\varphi : N_G(K) \to \mathrm{Aut(K)}$ را با ضابطهٔ $\varphi(g) = \varphi_g$ تعریف می‌کنیم. به راحتی دیده می‌شود که φ یک همریختی است و داریم:

$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \{g \in N_G(K) | \varphi(g) = id\} \\
&= \{g \in N_G(K) | \varphi_g(x) = id(x), \forall x \in K\} \\
&= \{g \in N_G(K) | gx = xg, \forall x \in K\} = C_G(K)
\end{aligned}$$

لذا قضیهٔ اول یکریختی نتیجه می‌دهد که $N_G(K)/C_G(K)$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut(K)}$ یکریخت است.

(ii) بنا به قسمت (i) و به دلیل نرمال بودن K در G، $G/C_G(K)$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut(K)}$ یکریخت است. چون K دوری است، لذا $\mathrm{Aut(K)}$ آبلی است. پس $G/C_G(K)$ نیز آبلی است و لذا $G' \leq C_G(K)$. حال چون $G' = G$، نتیجه می‌شود $G \leq C_G(K) \leq G$. پس $G = C_G(K)$ و بنابراین $K \leq Z(G)$.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۴) فرض کنید F یک میدان، $M_n(F)$ مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درآیه‌های در F، $A \in M_n(F)$، و ماتریس وارونپذیر $P \in M_n(F)$ چنان باشد که $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است. ثابت کنید هر دو زیرفضای پایای A نسبت به شمول قابل مقایسه‌اند اگر و تنها اگر $\lambda \in F$ و ماتریس پوچتوان $N \in M_n(F)$ با شرط $N^{n-1} \neq 0$ موجود باشد که $A = \lambda I + N$.

پاسخ: اثبات "اگر"

کافی است ثابت کنیم هر دو زیرفضای پایای هر تبدیل خطی پوچتوان N روی F^n با شرط $N^{n-1} \neq 0$ نسبت به شمول مقایسه‌پذیر می‌باشند. توجه کنید که $N^n = 0$. حال از آن جا که $N^{n-1} \neq 0$، پس بردار ناصفری چون $\alpha \in F^n$ وجود دارد به طوری که $N^{n-1}\alpha \neq 0$. ابتدا توجه کنید که مجموعهٔ $\{N^{n-1}\alpha, \dots, N\alpha, \alpha\}$ یک پایه برای F^n می‌باشد. برای این منظور فرض کنید $C_1 N^{n-1}\alpha + \cdots + C_{n-1}N\alpha + C_n\alpha = 0$. با اثردادن N^{n-1} بر طرفین رابطهٔ بالا، نتیجه می‌گیریم که $C_n N^{n-1}\alpha = 0$ و از آنجا $C_n = 0$، پس $C_1 N^{n-1}\alpha + \cdots + C_{n-1}N\alpha = 0$. حال با اثر دادن N^{n-2} بر طرفین تساوی اخیر، خواهیم دید که $C_{n-1} = 0$. با تکرار عملی مشابه برای $n-2$ بار دیگر خواهیم دید که $C_i = 0$ برای $1 \leq i \leq n$. این ایجاب می‌کند که $\{N^{n-1}\alpha, \dots, N\alpha, \alpha\}$ پایه‌ای برای F^n است. قرار دهید

$$M_0 = \langle 0 \rangle = \{0\}, \qquad M_i = \langle N^{n-1}\alpha, \dots, N^{n-i}\alpha \rangle.$$

داریم

$$M_0 = \{0\} < M_1 = \langle N^{n-1}\alpha \rangle < \cdots < M_n = F^n.$$

به وضوح هر M_i یک زیرفضای پایای N است. این نشان می‌دهد که هر N پوچتوان با $N^{n-1} \neq 0$ مثلثی‌پذیر است. حال فرض کنید M یک زیرفضای پایای ناصفر برای A باشد. ثابت می‌کنیم به ازای یک j با $1 \leq j \leq n$ داریم $M = M_j$. این نشان خواهد داد که هر دو زیرفضای پایای A مقایسه‌پذیر می‌باشند. گیریم $1 \leq j \leq n$ بزرگترین عدد طبیعی باشد به طوری که عضوی چون $0 \neq x \in M$ موجود باشد به گونه‌ای که

$$x = C_1 N^{n-1}\alpha + \cdots + C_j N^{n-j}\alpha \qquad (*)$$

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

که در آن $C_j \neq 0$. نشان می‌دهیم که $M = M_j$. با اثر دادن N^{j-1} بر طرفین تساوی بالا خواهیم داشت $C_j N^{n-1}\alpha = N^{j-1}x \in M$ و از آنجا $N^{n-1}\alpha \in M$، زیرا $C_j \neq 0$. با اثر دادن N^{j-2} بر طرفین معادله $(*)$ و نظر به اینکه $N^{n-1}\alpha \in M$، نتیجه می‌گیریم که $N^{n-2}\alpha \in M$. به همین ترتیب اگر این کار را j بار انجام دهیم نتیجه می‌گیریم که $N^{n-j}\alpha \in M$. از آنجا خواهیم داشت $M_j = \langle N^{n-1}\alpha, \ldots, N^{n-j}\alpha\rangle \subseteq M$. از طرف دیگر از آنجا که $N^{n-j}\alpha \in M$، با توجه به تعریف j روشن می‌شود که $M \subseteq M_j$. این یعنی $M = M_j$ که همان است که می‌خواستیم.

" تنها اگر"

ابتدا توجه کنید که A تنها یک مقدار ویژه می‌تواند داشته باشد چرا که در غیر این صورت فضاهای ویژه متناظر به دو مقدار ویژه متمایز نسبت به شمول قابل مقایسه نمی‌باشند و این با فرض در تناقض است. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توان فرض کرد که تنها مقدار ویژهٔ A صفر است، چرا که زیرفضاهای پایای $A - \lambda I$ و A یکسانند. یعنی می‌توان فرض کرد که A پوچتوان است. ادعا می‌کنیم بردار غیرصفر $\alpha \in F^n$ موجود است به طوریکه $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$ پایه‌ای برای F^n می‌باشد. فرض کنید چنین نباشد. برداری چون $0 \neq \alpha \in F^n$ اختیار کنید. به روشنی زیرفضای تولید شده توسط $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$ یک زیرفضای پایای A می‌باشد که غیربدیهی است (یعنی برابر صفر یا F^n نیست). این زیرفضا را M بنامید. پس $0 \subsetneq M \subsetneq F^n$. بنابراین برداری چون $0 \neq B \in F^n \setminus M$ موجود است. از فرض خلف نتیجه می‌شود که زیرفضای تولید شده توسط $\{\beta, A\beta, \ldots, A^{n-1}\beta\}$ یک زیرفضای پایا و نابدیهی A است. این زیرفضا را N بنامید. M و N به وضوح غیر قابل مقایسه‌اند که این با فرض در تناقض است. در نتیجه بردار غیرصفر $\alpha \in F^n$ موجود است به طوری که $\{A^{n-1}\alpha, \ldots, A\alpha, \alpha\}$ پایه‌ای برای F^n می‌باشد. به این ترتیب $A^n = 0$ ولی $A^{n-1} \neq 0$ زیرا $A^{n-1}\alpha \neq 0$. این برهان حکم را پایان می‌رساند.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۵) دو نفر به نام‌های A و B با هم سکّه‌بازی می‌کنند؛ به این ترتیب که هر یک سکّه‌هایشان را پرتاب می‌کنند، اگر نتیجهٔ هر دو پرتاب یکی بود هر دو سکه را A می‌برد و در غیر آن صورت هر دو سکه را B برمی‌دارد. فرض کنید A دارای m سکه و B دارای n سکه باشند. به طور متوسط چند بار بایستی بازی تکرار شود تا بالاخره یک نفر سکه‌هایش تمام شود؟

پاسخ:

با توجه به توضیحات مسأله، یک رابطهٔ بازگشتی پیدا می کنیم. فرض کنیم $A(m,n)$ مقدار موردنظر باشد. وقتی که یک بار بازی انجام شود، با احتمال $\frac{1}{2}$ فرد A برنده است و پارامترها به $(m+1, n-1)$ تغییر می‌کنند و بطور مشابه، با احتمال $\frac{1}{2}$ نفر B می‌برد که پارامترها برابر $(m-1, n+1)$ می‌شوند. پس

$$A(m,n) = 1 + \frac{1}{2}A(m-1,n+1) + \frac{1}{2}A(m+1,n-1) \ ; \ m,n > 0$$

شرایط مرزی عبارتند از: $A(0,n) = 0 = A(m,0)$

با استفاده از این شرایط مرزی و رابطهٔ بازگشتی فوق، $A(m,n)$ به‌طور یکتایی مشخص می‌شود. برای پیدا کردن $A(m,n)$، اگر آن را تابعی از یک متغیر، مثلاً n درنظر بگیریم، در این صورت از رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود که روی خط $m+n =$ یک مقدار ثابت داریم

$$A(m-1,n+1) + A(m+1,n-1) - 2A(m,n) = -2 \qquad (*)$$

بنابراین $A(m,n)$ باید یک تابع درجه دوم باشد. چون $A(0,n) = A(m,0) = 0$، پس باید $A(m,n) = cm.n$ باشد. با جایگزینی cmn در $(*)$ داریم

$$\begin{aligned} & c(m-1)(n+1) + c(m+1)(n-1) - 2cmn = -2 \\ & c[mn + m - n - 1 + mn - m + n - 1 - 2mn] = -2 \\ & \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

در نتیجه $A(m,n) = mn$. پس بطور متوسط بازی باید به اندازهٔ حاصلضرب پول A و B تکرار شود.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۴/۲/۱۴

---

۶) فرض کنید C مجموعهٔ کانتور باشد. ثابت کنید $C-C=[-۱,۱]$. (لازم به ذکر است که $C-C=\{x-y|x,y\in C\}$ و C برابر با مجموعهٔ اعدادی در بازهٔ $[۰,۱]$ است که بسط نامختوم آن‌ها در پایهٔ ۳ فقط ارقام ۰ یا ۲ دارند، به عنوان مثال $\frac{۱}{۳}\in C$ چون بسط نامختوم آن $\sum_{i=۲}^{\infty}\frac{۲}{۳^i}$ است هرچند بسط مختوم آن $\frac{۱}{۳}$ است.)

پاسخ:

برای $x\in[۰,۱]$، می‌دانیم که $x\in C$ اگر و تنها اگر در بسط نامختومِ مبنای ۳ی عدد x، رقم ۱ ظاهر نشود. کافی است نشان دهیم که

$$[۰,۱]\subseteq C-C.$$

فرض کنید $y\in[۰,۱]$ دلخواه باشد. قرار دهید

$$\frac{۱-y}{۲}=\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{y_i}{۳^i}$$

که در آن $y_i\in\{۰,۱,۲\}$ (برای هر $i\in\mathbb{N}$). اعداد $a_i,b_i\in\{۰,۱\}$ را به گونه‌ای اختیار کنید که $y_i=a_i+b_i$. به وضوح داریم

$$\begin{aligned}
۱-y &= \sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۲a_i}{۳^i}+\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۲b_i}{۳^i}\\
y &= \sum_{i=۱}^{\infty}\frac{(۲-۲a_i)}{۳^i}-\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۲b_i}{۳^i}
\end{aligned}$$

ولی $۲-۲a_i\ ,\ ۲b_i\in\{۰,۲\}$. از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۲-۲a_i}{۳^i}\quad,\quad\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۲b_i}{۳^i}\in C.$$

این برهان حکم را به پایان می‌رساند.