سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

---

۷) فرض کنید فضای متریک X جدایی‌پذیر باشد، یعنی X دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا است. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\lim_{x\to a} f(x)$ برای هر $a \in X$ وجود دارد. ثابت کنید مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارا است.

۸) فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ تابعی تحلیلی و غیر ثابت باشد، که در آن شعاع همگرایی سری برابر $R > 0$ است. ثابت کنید فاصلهٔ نزدیکترین صفر تابع f به مبدأ حداقل برابر $\dfrac{R|a_0|}{M + |a_0|}$ است، که در آن $M = M(R) = \sup_{|z|=R} |f(z)|$.

۹) فرض کنید G یک گروه باشد که مرتبهٔ هر عضو گروهِ مشتق آن، G'، متناهی است. ثابت کنید مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعضایی از G که مرتبهٔ متناهی دارند، زیرگروهی از G است.

۱۰) میدان K و زیر میدان F از آن مفروض است. فرض کنید n عددی طبیعی و A ماتریسی $n \times n$ با درآیه‌های در K باشد که $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank}(A^2)$ و به علاوه A در یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب در F صدق کند. ثابت کنید اولاً $K^n = \mathrm{Im(A)} \oplus \mathrm{Ker(A)}$ و ثانیاً چندجمله‌ای $f \in F[x]$ وجود دارد به طوری که ماتریس $E := f(A)$ خودتوان است و برای هر $x \in \mathrm{Im(A)}$ و هر $y \in \mathrm{Ker(A)}$ داریم $E(x + y) = x$. (یادآوری: منظور از $\mathrm{rank(A)}$ رتبهٔ ماتریس A است.)

۱۱) فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ دلخواه از اعداد طبیعی باشد. قرار دهید $C \oplus C = \{x + y | x, y \in C, x \neq y\}$. ثابت کنید افراز منحصر به‌فردی برای اعداد طبیعی به دو مجموعه مانند A و B وجود دارد به طوری که $A \oplus A$ و $B \oplus B$ شامل هیچ عدد اولی نیست. (راهنمایی: طبق اصل برتراند برای هر عدد طبیعی مانند n، حداقل یک عدد اول مانند p وجود دارد به طوری که $n < p \leq 2n$.)

۱۲) فرض کنید $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ و C یک دایره با محیطی به طول یک باشد. فاصلهٔ بین دو نقطه از دایره را برابر طول کوتاهترین کمان بین آن دو نقطه تعریف می‌کنیم. فرض کنید $T = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ که I_j ها کمان‌های مجزایی هستند. ثابت کنید اگر فاصلهٔ هر دو نقطهٔ T کوچکتر یا مساوی α باشد، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{m} \ell(I_j) \leq \alpha$$

که $\ell(I_j)$ طول کمان I_j است.