پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۷) فرض کنید فضای متریک X جدایی‌پذیر باشد، یعنی X دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا است. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ برای هر $a \in X$ وجود دارد. ثابت کنید مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارا است.

پاسخ:

تابع $\omega : X \longrightarrow [\circ, +\infty)$ را به صورت

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to \circ^+} (\sup f(B_\delta(x)) - \inf f(B_\delta(x)))$$

تعریف می‌کنیم که در آن $B_\delta(x) = \{y \in X : d(y, x) < \delta\}$. فرض کنید D مجموعه نقاطی باشد که در آن f ناپیوسته است. ابتدا توجه می‌کنیم که $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ که در آن $D_n = \{x \in X : \omega(x) > \frac{1}{n}\}$. پس برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم D_n ها حداکثر شمارا هستند. با توجه به آنکه هر زیرمجموعهٔ ناشمارا از فضای جدایی پذیر X (تعدادی ناشمارا) نقطهٔ حدی دارد کافی است نشان دهیم که D_n نقطهٔ حدی ندارد.

برای این منظور فرض کنید $x_\circ \in D_n$ دلخواه باشد. با توجه به فرض، $\ell_\circ = \lim\limits_{x \to x_\circ} f(x)$ موجود است. در نتیجه عددی مانند $\delta_n > \circ$ موجود است به طوری که $|f(x) - \ell_\circ| < \dfrac{1}{2n}$ برای هر $x \in B_{\delta_n}(x_\circ) \setminus \{x_\circ\}$. پس $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{n}$ برای هر $x, y \in B_{\delta_n}(x_\circ) \setminus \{x_\circ\}$. و لذا $\omega(x) \leq \dfrac{1}{n}$ برای هر $x \in B_{\delta_n}(x_\circ) \setminus \{x_\circ\}$. بنابراین $(B_{\delta_n}(x_\circ) \setminus \{x_\circ\}) \cap D_n$ تهی است و لذا $x_\circ \notin D'_n$.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۸) فرض کنید $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ تابعی تحلیلی و غیر ثابت باشد، که در آن شعاع همگرایی سری برابر $R>0$ است. ثابت کنید فاصلهٔ نزدیکترین صفر تابع f به مبدأ حداقل برابر $\frac{R|a_0|}{M+|a_0|}$ است، که در آن $M=M(R)=\sup_{|z|=R}|f(z)|$.

پاسخ:

اگر $M=+\infty$ در این صورت $\frac{R|a_0|}{M+|a_0|}=0$ و در این حالت چیزی برای اثبات نداریم. پس بدون آن که از کلیت مسأله کاسته شود فرض کنید $M=\sup_{|z|=R}|f(z)|<\infty$. فرض کنید $0<r<R$ دلخواه باشد. بنا به نابرابری کوشی $|a_n|\le\frac{M(r)}{r^n}$ برای هر $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. پس می‌توان نوشت

$$|f(z)-a_0|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z|^n\le M(r)\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{|z|}{r})^n=M\frac{\frac{|z|}{r}}{1-\frac{|z|}{r}}=M\frac{|z|}{r-|z|}$$

(توجه کنید که بنا به اصل ماکزیمم $M(r)\le M$، برای هر $r<R$.)

از طرف دیگر داریم

$$M\frac{|z|}{r-|z|}<|a_0|\Leftrightarrow M|z|<r|a_0|-|z|\;|a_0|\Leftrightarrow |z|<\frac{r|a_0|}{M+|a_0|}$$

در نتیجه $f(z)\neq 0$ هرگاه که $|z|<\frac{r|a_0|}{M+|a_0|}$. از آنجا که $r<R$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $f(z)\neq 0$ هر گاه $|z|<\frac{R|a_0|}{M+|a_0|}$. این به وضوح حکم را به اثبات می‌رساند.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۹) فرض کنید G یک گروه باشد که مرتبهٔ هر عضو گروهِ مشتق آن، G'، متناهی است. ثابت کنید مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعضایی از G که مرتبهٔ متناهی دارند، زیرگروهی از G است.

پاسخ:

فرض کنید H مجموعهٔ همهٔ اعضایی از G باشد که مرتبهٔ متناهی دارند. واضح است که H ناتهی است ($1 \in H$). حال دو عضو دلخواه $x, y \in H$ را در نظر بگیرید. پس عدد طبیعی n موجود است که $x^n = y^n = 1$. در نتیجه

$$(xy^{-1})^n G' = (xy^{-1}G')^n = \Big((xG')(y^{-1}G')\Big)^n \overset{(*)}{=} (xG')^n (y^{-1}G')^n = (x^n G')(y^{-n}G') = G',$$

که در آن تساوی $(*)$ به دلیل آبلی بودن $\frac{G}{G'}$ برقرار است. پس $(xy^{-1})^n \in G'$ و از اینجا بنا به فرض عدد طبیعی m موجود است که $(xy^{-1})^{nm} = 1$. این نشان می‌دهد که $xy^{-1} \in H$ و بنابراین $H \leq G$.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۱۰) میدان K و زیر میدان F از آن مفروض است. فرض کنید n عددی طبیعی و A ماتریسی $n \times n$ با درآیه‌های در K باشد که $\mathrm{rank(A)} = \mathrm{rank}(A^۲)$ و به علاوه A در یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب در F صدق کند. ثابت کنید اولاً $K^n = \mathrm{Im(A)} \oplus \mathrm{Ker(A)}$ و ثانیاً چندجمله‌ای $f \in F[x]$ وجود دارد به طوری که ماتریس $E := f(A)$ خودتوان است و برای هر $x \in \mathrm{Im(A)}$ و هر $y \in \mathrm{Ker(A)}$ داریم $E(x+y) = x$. (یادآوری: منظور از $\mathrm{rank(A)}$ رتبهٔ ماتریس A است.)

پاسخ:

<u>برهانِ «اولاً»</u>. با اتخاذ نماد A برای عملگر خطی متناظر با ماتریس A، یعنی $A\ :\ K^n \to K^n$ با ضابطهٔ $A(x) = Ax$، و مشابه آن برای $A^۲$، عملگر خطی $B\ :\ \mathrm{Im}(A) \to \mathrm{Im(A)}$ را با $B = A|_{\mathrm{Im(A)}}$ در نظر می‌گیریم. می‌توانیم بنویسیم

$$\dim \mathrm{Im}(A^۲) = \mathrm{rank}(A^۲) = \mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A) \overset{(*)}{=} \dim \mathrm{Ker(B)} + \dim \mathrm{Im(B)} =$$
$$\dim(\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)) + \dim \mathrm{Im}(A^۲),$$

که در آن تساوی $(*)$ بنا به قضیهٔ رتبه ـ پوچی برقرار است. بنابراین $\dim(\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)) = ۰$ و از اینجا $\mathrm{Im(A)} \cap \mathrm{Ker(A)} = 0$. دوباره بنا به قضیهٔ رتبه ـ پوچی و تساوی اخیر،

$$n = \dim \mathrm{Im(A)} + \dim \mathrm{Ker(A)} - \dim(\mathrm{Im(A)} \cap \mathrm{Ker(A)}) = \dim(\mathrm{Im(A)} + \mathrm{Ker(A)}).$$

پس $K^n = \mathrm{Im(A)} \oplus \mathrm{Ker(A)}$.

<u>برهانِ «ثانیاً»</u>. ابتدا توجه می‌کنیم که ویژگی خودتوانی برای عملگر مطلوب E، از شرط دیگر موردنظر برای آن، که تأمین خواهیم نمود، نتیجه می‌شود. بنا به فرض، چندجمله‌ای ناصفر $g(x) = x^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$ با ضرایب در F وجود دارد که $g(A) = 0$ و درجهٔ g کوچکترینِ ممکن با این ویژگی است. دو حالت می تواند رخ دهد:

<u>حالت (۱)، $a_۰ \neq ۰$</u>. در این حالت داریم $\frac{-۱}{a_۰}(A^{m-۱} + a_{m-۱}A^{m-۲} + \cdots + a_۱)A = I \quad (**)$. قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{-۱}{a_۰}(x^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_۱x)$. خواهیم داشت $E = f(A) = I$. بنا به $(**)$، A وارون‌پذیر است و بنابراین $\mathrm{Ker(A)} = 0$. بدیهی است که برای هر $x \in \mathrm{Im(A)}$، داریم $E(x) = x$.

<u>حالت (۲)، $a_۰ = ۰$</u>. دراین حالت $a_۱ \neq ۰$، درغیراین‌صورت از $(A^{m-۲} + a_{m-۱}A^{m-۳} + \cdots + a_۲I)A^۲ = 0$ یعنی صفر بودن عملگر $A^{m-۲} + a_{m-۱}A^{m-۳} + \cdots + a_۲I$ روی $\mathrm{Im}(A^۲) = \mathrm{Im(A)}$ به تناقض صفر بودن همان عملگر روی $\mathrm{Im(A)}$ یعنی به $(A^{m-۲} + a_{m-۱}A^{m-۳} + \cdots + a_۲I)A = 0$ می‌رسیم که با کوچکترین بودنِ درجهٔ g در تناقض است. حال قرار دهیم: $f(x) = \frac{-۱}{a_۱}x^{m-۱} - \frac{a_{m-۱}}{a_۱}x^{m-۲} - \cdots - \frac{a_۲}{a_۱}x$. توجه می‌کنیم که $(E-I)A = (f(A) - I)A = \frac{-۱}{a_۱}g(A) = 0$. حال برای هر $x = Ax' \in \mathrm{Im(A)}$ و $y \in \mathrm{Ker(A)}$ داریم

$$E(x+y) = E(x) + E(y) = E(Ax') + f(A)y = Ax' + ۰ = Ax' = x.$$

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۱۱) فرض کنید C یک زیرمجموعهٔ دلخواه از اعداد طبیعی باشد. قرار دهید $C \oplus C = \{x+y|x, y \in C, x \neq y\}$. ثابت کنید افراز منحصر به‌فردی برای اعداد طبیعی به دو مجموعه مانند A و B وجود دارد به طوری که $A \oplus A$ و $B \oplus B$ شامل هیچ عدد اولی نیست. (راهنمایی: طبق اصل برتراند برای هر عدد طبیعی مانند n، حداقل یک عدد اول مانند p وجود دارد به طوری که $n < p \leq ۲n$.)

پاسخ:

واضح است که اعداد طبیعی فرد و اعداد طبیعی زوج یک افراز با خاصیت موردنظر هستند. حال ثابت می‌کنیم این افراز منحصر به‌فرد است.

فرض کنید $\mathbb{N} = A \cup B$ و $A \cap B = \emptyset$ به طوری که $A \oplus A$ و $B \oplus B$ شامل هیچ عدد اوّلی نیست. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید $۱ \in A$. ثابت می‌کنیم A برابر با مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B برابر با مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج است. حکم را به استقراء ثابت می‌کنیم. با توجه به اینکه $۱ \in A$ و $۳ = ۲ + ۱$ لذا $۲ \in B$.

حال فرض کنید

$$\{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲k-۱\} \subseteq A$$

و

$$\{۲, ۴, ٦, \ldots, ۲k\} \subseteq B$$

با توجه به اصل برتراند برای $n = ۲k + ۱$ می‌توانیم نتیجه بگیریم عدد اوّلی مانند p وجود دارد که

$$۲k + ۱ < p \leq ۴k + ۲$$

چون $k \geq ۱$ لذا $۲k + ۱ < p \leq ۴k + ۱$. اما

$$۰ < p - (۲k + ۱) \leq ۲k$$

از آنجایی که تفاضل p و $۲k + ۱$ عددی زوج و کوچکتر یا مساوی $۲k$ است، پس $۲k + ۱$ متعلق به مجموعهٔ A است.

همچنین

$$۰ < p - (۲k + ۲) \leq ۲k \underset{\text{فرد است } p}{\Longrightarrow} ۰ < p - (۲k + ۲) \leq ۲k - ۱$$

p عددی فرد و $۲k + ۲$ زوج است لذا تفاضل آنها در A قرار می‌گیرد پس $۲k + ۲$ به مجموعهٔ B تعلق دارد.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه دوم ۸۵/۲/۲۰

---

۱۲) فرض کنید $\circ < \alpha < \frac{۱}{۲}$ و C یک دایره با محیطی به طول یک باشد. فاصلهٔ بین دو نقطه از دایره را برابر طول کوتاهترین کمان بین آن دو نقطه تعریف می‌کنیم. فرض کنید $T = I_۱ \cup \cdots \cup I_m$ که I_j ها کمان‌های مجزایی هستند. ثابت کنید اگر فاصلهٔ هر دو نقطهٔ T کوچکتر یا مساوی α باشد، آنگاه

$$\sum_{j=۱}^{m} \ell(I_j) \leq \alpha$$

که $\ell(I_j)$ طول کمان I_j است.

پاسخ:

بستار T، یعنی $\bar{T}$ را درنظر بگیرید. واضح است که فاصلهٔ دو نقطهٔ $\bar{T}$ کمتر یا مساوی α است. پس T را از ابتدا بسته فرض می‌کنیم. دو نقطه x و y از T را که بیشترین فاصله را دارند در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض کنید $\overrightarrow{xy}$ کوتاهترین کمان بین x و y باشد.

T' را از روی T به نحو زیر می‌سازیم. اگر $z \in \overrightarrow{xy} \cap T$ آنگاه z را در T' قرار می‌دهیم. اما اگر $z \in T$ و $z \notin \overrightarrow{xy}$ آنگاه متقاطر z نسبت به مرکز دایره یعنی z' را در T' قرار می‌دهیم. واضح است که $z' \notin T$ زیرا $\frac{۱}{۲} > \alpha > \circ$ و فاصلهٔ z' و z مساوی $\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی z' باید در کمان $\overrightarrow{xy}$ قرار گیرد زیرا در غیر این صورت فاصلهٔ z با x یا y از فاصلهٔ بین x و y بیشتر خواهد بود. لذا کلیهٔ نقاط T' در کمان $\overrightarrow{xy}$ قرار می‌گیرند. از طرفی جمع طول کمان‌های T با جمع طول کمان‌های T' برابر است و T' در کمان $\overrightarrow{xy}$ قرار دارد. لذا حکم نتیجه می‌شود.