پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۶/۲/۲۰

---

۱) تمام نقاط محیط دایره‌ای را به طور دلخواه با دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. آیا لزوماً با هر رنگ‌آمیزی، مثلثی با رئوس همرنگ محاط در دایره وجود دارد که

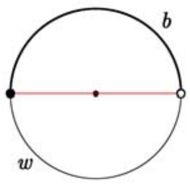
الف) متساوی الاضلاع باشد؟

ب) قائم‌الزاویه باشد؟

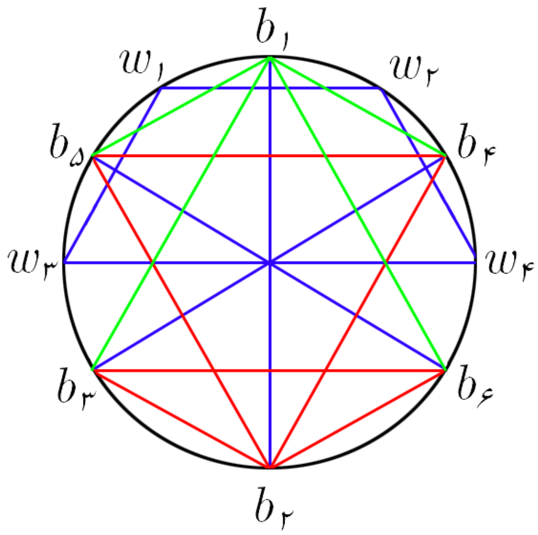
ج) متساوی الساقین باشد؟

پاسخ:

الف و ب) با رنگ‌آمیزی دایره با دو رنگ سیاه (b) و سفید (w) به صورت دو نیم دایرهٔ نیمه‌باز می‌بینیم که پاسخ منفی است. چون هر مثلث متساوی‌الاضلاع دارای یک رأس در قسمت سفید و دو رأس در قسمت سیاه یا برعکس است. همچنین وترِ هر مثلث قائم‌الزاویه قطری از دایره است که رئوس آن به دو رنگ می‌باشد.



ج) پاسخ مثبت است. ابتدا وتری با دو رأس همرنگ (مثلاً سفید) انتخاب می‌کنیم که قطر نباشد (w_1w_2). حال رأس‌هایی که با این وتر مثلث متساوی‌الساقین پدید می‌آورند بر قطر عمود بر این وتر قرار دارند. بدترین حالت آن است که دو سر این قطر از رنگ دیگر (یعنی سیاه) باشند (b_1b_2)، پس به فرض عدم وجود مثلث متساوی‌الساقین دو سر قطر عمود بر این قطر سفید هستند (w_3, w_4). حال دو وتر w_1w_3 و w_2w_4 را در نظر می‌گیریم. اگر همچنان مثلث متساوی‌الساقینی نداشته باشیم انتهای قطرهای عمود بر آنها باید سیاه باشند، $(b_3, b_4$ و $b_5, b_6)$. حال مثلث‌های متساوی‌الساقین $b_2b_4b_5$، $b_2b_3b_6$، $b_1b_4b_5$ و $b_1b_3b_6$ با رأس‌های سیاه پدید آمده‌اند.



پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۶/۲/۲۰

---

۲) جمع مینکوفسکی دو مجموعهٔ $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d \mid a \in A,\ b \in B\}$$

ثابت کنید اگر A کران دار و B بسته باشد، آنگاه

$$(A + B)' = (A' + B) \cup (A + B')$$

که منظور از A'، مجموعه نقاط حدی A است.

پاسخ:

به راحتی می‌توان دید که برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ و هر $A \subseteq \mathbb{R}^d$،

$$(A + \{x\})' = A' + \{x\} \tag{۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A' + B &= \bigcup_{b\in B} (A' + \{b\}) = \bigcup_{b\in B} (A + \{b\})' \\ &\subseteq \left(\bigcup_{b\in B} (A + \{b\})\right)' = (A + B)' \end{aligned} \tag{۲}$$

با توجه به این که در نتایج به دست آمده از خصوصیات مجموعه‌های A و B استفاده‌ای نشد، به‌طور مشابه داریم

$$A + B' \subseteq (A + B)' \tag{۳}$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$(A + B') \cup (A' + B) \subseteq (A + B)' \tag{۴}$$

اکنون فرض کنید $c \in (A + B)'$. پس دنبالهٔ $\{a_n + b_n\}$ با جمله‌های متمایز وجود دارد که

$$(a_n + b_n) \to c \tag{۵}$$

که $a_n \in A$ و $b_n \in B$ مجموعه A کران‌دار است، در نتیجه دنبالهٔ $\{a_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد. برای سادگی می‌توان فرض کرد که همین دنباله همگراست و حد آن نقطه‌ای مثل $a \in \bar{A}$ است. در این صورت دنبالهٔ $\{b_n\}$ نیز به $c - a$ میل می‌کند. B بسته است، لذا $c - a \in B$.

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸٦/۲/۲۰

با توجه به این که $\bar{A} = A \cup A'$، دو حالت برای نقطه a می‌توان متصور بود؛
حالت اول: $a \in A'$. در این صورت

$$c = a + (c - a) \qquad (٦)$$

که $a \in A'$ و $c \ - a \in B$. پس $c \in A' + B$.

حالت دوم: $a \in A/A'$. در این صورت دنبالهٔ $\{a_n\}$ از جایی به بعد متحد با a است. در نتیجه با توجه به این که جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n + b_n\}$ متمایز است، از جایی به بعد جملات دنبالهٔ $\{b_n\}$ هم متمایز خواهد بود و لذا حد آن، یعنی $c - a$، عضو B' است. در نتیجه $c \in A + B'$.

پس هر کدام از دو حالت اول یا دوم رخ دهد a عضو $(A + B') \cup (A' + B)$ است. در نتیجه

$$.(A + B)' \subseteq (A + B') \cup (A' + B) \qquad (٧)$$

از (۴) و (٧) نتیجه می‌شود

$$.(A + B)' = (A + B') \cup (A' + B) \qquad (٨)$$

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۶/۲/۲۰

---

۳) فرض کنید گروهی مانند G وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با اندیس ۲ باشد (n عددی طبیعی است). ثابت کنید گروهی آبلی و متناهی هم وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با اندیس ۲ است.

پاسخ:

فرض کنیم H_1، ...، H_n لیستی از همهٔ زیرگروههای G باشد که اندیسشان در G برابر با ۲ است. پس هر H_i نرمال بوده، در نتیجه $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ هم نرمال است و همچنین چون هر H_i دارای اندیس متناهی است می‌توان نتیجه گرفت که اندیس $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ هم متناهی است. پس گروه $\frac{G}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}$ که آنرا A می‌نامیم، متناهی است. ادعا می‌کنیم که A همان گروه مورد نظر است:
فرض کنید B زیرگروهی از A با اندیس ۲ باشد. طبق قضایای یکریختی، می‌توان نوشت $B = \frac{K}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}$ جاییکه $H_1 \cap \cdots \cap H_n \subseteq K \trianglelefteq G$. حال از

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{G}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}}{\frac{K}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}} \cong \frac{G}{K}$$

نتیجه می‌شود که اندیس K در G مساوی ۲ است و در نتیجه K یکی از H_iها است. پس A دقیقاً n زیرگروه با اندیس ۲ دارد که عبارتند از

$$\frac{H_1}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}, \frac{H_2}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}, \ldots, \frac{H_n}{H_1 \cap \cdots \cap H_n}$$

(توجه کنیم که چون H_iها دو به دو متمایز هستند پس گروه‌های ذکر شده در بالا هم دو به دو متمایز هستند).

باقی کار این است که نشان دهیم A آبلی است. چون هر H_i اندیس ۲ دارد پس گروه $\frac{G}{H_i}$ دو عضوی و در نتیجه آبلی است، پس $G' \subseteq H_i$. بنابراین $G' \subseteq H_1 \cap \cdots \cap H_n$ و در نتیجه A آبلی است.

---

۴) آیا می‌توان دو تاس ناسالم را چنان انتخاب کرد که احتمال پیشامد مجموع j در پرتاب همزمان آنها برای هر j، $۲ \leq j \leq ۱۲$، عددی در بازهٔ $\left(\frac{۲}{۳۳}, \frac{۴}{۳۳}\right)$ باشد؟

پاسخ: دو تاس A و B به ترتیب با احتمال‌های $A_۱$، ...، $A_۶$ و $B_۱$، ...، $B_۶$ برای وجوه ۱ و ۲ و $\cdots$ و ۶ آنها

در نظر می‌گیریم و احتمال پیش‌آمد مجموع j در پرتاب همزمان آنها را با P_j نشان می‌دهیم، $۲ \leq j \leq ۱۲$. در این صورت $P_j = \sum_{k=۱}^{j} A_k B_{j-k}$. فرض کنید شرط $\frac{۲}{۳۳} < P_j < \frac{۴}{۳۳}$ برای $j = ۲, ۳, \ldots, ۱۲$ برقرار باشد. اکنون با توجه به این که $P_۲ = A_۱ B_۱$، $P_{۱۲} = A_۶ B_۶$ و

$$P_۷ = A_۱B_۶ + A_۲B_۵ + A_۳B_۴ + A_۴B_۳ + A_۵B_۲ + A_۶B_۱,$$

داریم

$$\begin{aligned} P_۷ \geq A_۱B_۶ + A_۶B_۱ \quad &\geq ۲\sqrt{A_۱A_۶B_۱B_۶} = ۲\sqrt{A_۱B_۱A_۶B_۶} \\ &\geq ۲\sqrt{P_۲P_{۱۲}} \geq ۲\sqrt{\frac{۲}{۳۳}\cdot\frac{۲}{۳۳}} \geq \frac{۴}{۳۳} \end{aligned}$$

که امکان ندارد.

---

۵) نشان دهید $\mathbb{R}^{2}$ زیرمجموعه‌ای چگال دارد که هیچ سه نقطه‌اش هم‌خط نیستند.

پاسخ:

مجموعهٔ گوی‌هایی که هم شعاع و هم مختصات مرکزشان گویاست شمارا است. آن‌ها را اندیس‌گذاری می‌کنیم: $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط صفحه باشد که برای هر n داشته باشیم $x_n \in B_n$، آنگاه مجموعه نقاط این دنباله در صفحه چگال است. برای این که شرط دیگر نیز برقرار شود، کافی است به شکل استقرایی x_n را طوری انتخاب کنیم که برای هر $i < j < n$، در راستای خط گذرنده از دو نقطه x_i و x_j نباشد. این کار به وضوح ممکن است زیرا تعداد متناهی خط نمی‌توانند یک گوی را بپوشانند.

---

۶) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و معکوس‌پذیر با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید:

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \mathrm{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^3) & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & & & n-1 \\ \mathrm{tr}(A^n) & \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A) \end{vmatrix}$$

(منظور از $tr(B)$ مجموع درایه‌های واقع بر روی قطر اصلی ماتریس B است).

پاسخ:

فرض کنیم $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ چندجمله‌ای مشخصه A بوده و λ_1،...، λ_n مقادیر ویژهٔ A (در حقیقت ریشه‌های $p(x)$) باشند. ابتدا توجه کنیم که $a_n = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n \det(A)$ (به این رابطه در پایان اثبات نیاز خواهیم داشت.)

از آنجا که برای هر i باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - \lambda_i$ برابر با صفر است، با انجام عمل تقسیم بدست می‌آید

$$\frac{p(x)}{x-\lambda_i} = x^{n-1} + (\lambda_i + a_1)x^{n-2} + \cdots + (\lambda_i^{n-1} + a_1\lambda_i^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda_i + a_{n-1})$$

حال توجه کنیم که $p'(x) = \frac{p(x)}{x-\lambda_1} + \cdots + \frac{p(x)}{x-\lambda_n}$. پس با جمع کردن روابط بالا به ازای $i = 1, \cdots, n$ و استفاده از تساوی $\mathrm{tr}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$ بدست می‌آید

$$p'(x) = nx^{n-1} + (\mathrm{tr}(A) + na_1)x^{n-2} + \cdots + (\mathrm{tr}(A^{n-1}) + a_1\mathrm{tr}(A^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}\mathrm{tr}(A) + na_{n-1})$$

از طرفی مشتق p، مستقیماً، طبق رابطه $p'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$ محاسبه می‌شود. پس با مساوی قرار دادن ضرایب $p'(x)$ از دو رابطه اخیر دستگاه زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{cases} a_1 = -\mathrm{tr}(A) \\ a_1\mathrm{tr}(A) + 2a_2 = -\mathrm{tr}(A^2) \\ a_1\mathrm{tr}(A^2) + a_2\mathrm{tr}(A) + 3a_3 = -\mathrm{tr}(A^3) \\ \vdots \\ a_1\mathrm{tr}(A^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}\mathrm{tr}(A) + (n-1)a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A^{n-1}) \\ a_1\mathrm{tr}(A^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}\mathrm{tr}(A) + na_n = -\mathrm{tr}(A^n) \end{cases}$$

توجه کنید که آخرین سطر دستگاه قبل، نه از مساوی قرار دادن ضرایب بلکه بدلیل تساوی $p(\lambda_1) + \cdots + p(\lambda_n) = 0$ حاصل شده است. اکنون با استفاده از دستور کرامر، مقدار a_n از دستگاه بالا را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\mathrm{tr}(A) \\ \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & \cdots & -\mathrm{tr}(A^2) \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & 0 & \cdots & -\mathrm{tr}(A^3) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \mathrm{tr}(A^{n-3}) & \cdots & \cdots & -\mathrm{tr}(A^n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \mathrm{tr}(A^{n-3}) & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}}$$

حال توجه کنید که دترمینان واقع در مخرج کسر بالا برابر با $n!$ است. از طرفی چنانکه در ابتدای برهان متذکر شدیم $a_n = (-1)^n \det(A)$ و با جایگذاری در رابطه بالا اثبات کامل می‌شود.