بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۰، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۰

شمارهٔ پیاپی: ۲۶

نشانی:

تهران ــ صندوق پستی ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵

iranmath@ims.ir

http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی‌ـترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری، وکاربردهای ریاضیات در علومِ دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت ادیتورِ «TEX-پارسی» یا «فارسی‌تک» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه شده‌ــبا ذکر نشانیِ کاملِ آن‌ــلازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کاررفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک، و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارایه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۰، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۰
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۱)
شمارهٔ پیاپی: ۲۶

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات وکتابخانه‌هاکه تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: رنه توم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۶(بهار ۱۳۸۰)، صص. ۱ تا ۱۵

تعمیم مسألهٔ هفده شتر و حل کارای رده‌ای از مسائل برنامه‌ریزی صحیح

علی وحیدیان کامیاد

چکیده

موضوع مورد بحث قسمت‌کردن یک عدد صحیح به نسبت‌هایی از اعداد گویا است به طوری که عددی که به هر نسبت تعلق می‌گیرد یک عدد صحیح باشد. مسألهٔ هفده شتر و راه حل آن در اینجا مورد بررسی و تعمیم قرار می‌گیرد. ما در اینجا ضمن بررسی راه حل پیشنهادی اولیه به تعمیم مسألهٔ هفده شتر و راه حل آن می‌پردازیم. سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از راه حل پیشنهادی ردهٔ خاصی از مسایل برنامه‌ریزی صحیح را به طور کارا حل کرد.

۱. بیان مسأله

آمده است که هفده شتر میان سه کس مشترک بود. آنان به خدمت حضرت امیرالمؤمنین (ع) آمدند و عرض کردند که ثلث شتران از یکی است و تسع آن از یکی و نصف آن از یکی. می‌خواهیم شما این شتران را به این طریق تقسیم کنید بی کسر. حضرت یک شتر طلبید از خود و آن را به هفده افزود تا هجده شد. سپس ثلث آن را که شش باشد به صاحب ثلث داد و نصف آن را که نه باشد به صاحب نصف داد و تسع آن را که دو باشد به صاحب تسع داد. یکی باقی ماند که شتر خود بود، ضبط نمود. [مرجع ۱]

۲. بررسی مسأله

در این راه حل مشاهده می‌شود که دقیقاً تمام ۱۷ شتر بین سه نفر تقسیم شده است و نیز هر نفر از سهم خود راضی است، زیرا که به هر نفر کمی بیشتر از سهم واقعی وی تعلق گرفته است. همان طور که مشاهده می‌شود جمع سهم‌ها عبارت است از:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

توجه داریم که اگر جمع شتران ۱۸ عدد باشد با توجه به اینکه کل سهم سه نفر $\frac{۱۷}{۱۸}$ واحد است، سهم سه نفر از ۱۸ شتر عبارت است از $۱۷ = ۱۸ \times \frac{۱۷}{۱۸}$. در نتیجه اگر به تعداد شترها یکی اضافه شود همان ۱۷ شتر نصیب سه نفر می‌شود و نیز سهم هر یک ۹، ۶ و ۲ نفر شتر می‌شود:

$$\frac{۱}{۲} \times ۱۸ = ۹\ ,\ \frac{۱}{۳} \times ۱۸ = ۶\ ,\ \frac{۱}{۹} \times ۱۸ = ۲\ ,\ ۲ + ۶ + ۹ = ۱۷$$

نکته جالب توجه این است که در راه حل یاد شده تساوی‌های زیر ملاحظه می‌شود:

$$\frac{۹}{(\frac{۱}{۲})} = \frac{۶}{(\frac{۱}{۳})} = \frac{۲}{(\frac{۱}{۹})} = ۱۸$$

پس سهم هر یک از افراد به نسبت حقشان با هم برابر است. در این حالت گوییم که «عدالت کاملاً رعایت شده است» و جواب‌های به دست آمده را «کاملاً عادلانه» می‌نامیم.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که اگر تعداد شترها به جای ۱۷ شتر، عدد دلخواه دیگری می‌بود فرضاً ۱۹، راه حل چگونه است؟ آیا تعداد شتر به هر اندازه باشد مسأله تقسیم شترها جواب دارد؟ و اگر جواب دارد، آیا جواب منحصربه‌فرد است؟ و اگر چندین جواب دارد آنگاه عادلانه‌ترین جواب کدام است؟ مسألهٔ دیگر آن است که راه حل کلی برای این‌گونه مسائل چیست؟ و مدل ریاضی مسألهٔ یاد شده در بالا چگونه مطرح می‌شود؟ در این مقاله سعی می‌کنیم به تمام مطالبی که در بالا اشاره کردیم، پاسخ دهیم.

۳. تعمیم مسألهٔ هفده شتر

T شتر را بین k فرد به نسبت‌های گویای $r_۱, r_۲, \ldots, r_k$ (که مجموع نسبت‌هاکمتر از ۱ است) قسمت کنید به طوری که سهم هر فرد تعداد صحیحی از شترها باشد و نیز سهم افراد به ترتیب از اعداد $T \times r_۱$، $T \times r_۲$، ...، $T \times r_k$ یعنی از سهمی که حق هر فرد است کمتر نباشد، در حالی که عدالت نیز رعایت شود، بدین معنی که اگر L_i سهم فرد iام باشدآنگاه داشته باشیم:

$$\frac{L_۱}{r_۱} = \frac{L_۲}{r_۲} = \cdots = \frac{L_k}{r_k} \geqslant T.$$

قضیهٔ ۱: (قضیهٔ تعمیم مسأله هفده شتر)

فرض کنید نسبتهای مسألهٔ تعمیم یافته به صورت $r_i = \frac{m_i}{n_i}$، $i = ۱, ۲, \dots, k$ داده شده باشند و $r = \frac{m}{n}$ (که $\sum_{i=۱}^{k} r_i = \sum_{i=۱}^{k} \frac{m_i}{n_i} = \frac{m}{n} < ۱$). با فرض $(m_i, n_i) = ۱$[1] برای $i = ۱, ۲, \dots, k$ و $(m, n) = ۱$ در این صورت شرط لازم برای یک تقسیم عادلانه در مسألهٔ تعمیم یافته آن است که $T \times [m_۱, m_۲, \dots, m_k] \mid m$. نماد [ ] نشان‌دهنده کوچک‌ترین مضرب مشترک بین اعداد است.

برهان: فرض کنید j، $۱ \leqslant j \leqslant k$، یک عدد طبیعی دلخواه باشد، پس داریم:

$$\frac{L_i}{r_i} = \frac{L_j}{r_j}\ ,\ i = ۱, ۲, \dots, k$$

یا

$$L_i = (\frac{r_i}{r_j})L_j\ ,\ i = ۱, ۲, \dots, k$$

حال حاصل‌جمع طرفین را روی همه iها می‌نویسیم:

$$\sum_{i=۱}^{k} L_i = \sum_{i=۱}^{k} r_i \times (\frac{L_j}{r_j})$$

فرض کنیم $\frac{L_j}{r_j}$ مقداری ثابت باشد پس

$$T = (\sum_{i=۱}^{k} r_i) \times \frac{L_j}{r_j}$$

یا

$$T = \frac{m}{n} \times \frac{L_j}{r_j}$$

و یا

$$T \times n \times r_j = m \times L_j$$

با قرار دادن $r_j = \frac{m_j}{n_j}$ در تساوی بالا داریم

$$T \times n \times m_j = m \times L_j \times n_j$$

اما واضح است که $m \mid m \times L_j \times n_j$ (یعنی m عاد می‌کند $m \times L_j \times n_j$ را) در نتیجه

$$m \mid T \times n \times m_j$$

و چون $(m, n) = ۱$ پس $m \mid T \times m_j$ به ازای $j = ۱, ۲, \dots, k$ لذا نتیجه می‌گیریم:

$$m \mid [m_۱, m_۲, \dots, m_k] \times T$$

که منظور از نماد $[m_۱, m_۲, \dots, m_k]$ همان کوچکترین مضرب مشترک اعداد $m_۱, m_۲, \dots, m_k$ می‌باشد.

۱) نماد (.,.) و | به ترتیب برای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه‌مشترک دو عدد و عاد کردن استفاده شده است.

۴. بررسی مسألهٔ تعمیم‌یافته هفده شتر

فرضاً اگر به جای ۱۷ شتر، ۱۹ یا ۲۰ یا ۱۶ (یا تعداد دیگری) شتر داشته باشیم آیا مسألهٔ تقسیم شترها به نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$ به صورت اعداد صحیح جواب دارد؟ و اگر مسأله جواب داشته باشد آیا تنها با اضافه کردن عدد ۱ مسأله حل می‌شود یا اعداد دیگری باید به عدد موردنظر اضافه گردد تا تقسیم امکان‌پذیر باشد؟ در ادامهٔ مطلب نشان خواهیم داد که اولاً بعضی اعداد از جمله ۱۹، به نسبت‌های یاد شده به صورت صحیح قابل تفکیک نیستند و سپس نشان می‌دهیم که بسیاری از این اعداد در صورتی قابل تقسیم هستند که عدد صحیح مشخصی حتی بزرگتر از ۱ به آنها اضافه شود و در حقیقت عدد اضافه شده تأثیری در تفکیک نهایی نخواهد داشت.

در مسألهٔ تعمیم‌یافتهٔ هفده شتر به جای عدد ۱۷ می‌توان هر عدد طبیعی دیگر و به جای نسبت‌های یادشده می‌توان نسبت‌هایی دیگر از اعداد گویا را (که مجموعشان کمتر از یک باشد) در نظر گرفت.

مثال ۱. تعداد ۱۹ شتر را بین سه فرد به نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$ تقسیم کنید به طوری که سهم فرد اول از $\frac{۱۹}{۲}$ و سهم فرد دوم و سوم به ترتیب از $\frac{۱۹}{۳}$, $\frac{۱۹}{۹}$ کمتر نباشد.

ملاحظات: چون سهم فرد اول به صورت کسری $۹/۵ = \frac{۱۹}{۲}$ است پس درواقع سهم او اولین عدد صحیح بزرگتر از ۹/۵ یعنی عدد ۱۰ است. به عبارت دیگر

سهم فرد اول $\left\lfloor \frac{۱۹}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰$

سهم فرد دوم $\left\lfloor \frac{۱۹}{۳} \right\rfloor + ۱ = ۶ + ۱ = ۷$

سهم فرد سوم $\left\lfloor \frac{۱۹}{۹} \right\rfloor + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

که نماد $\lfloor\ \rfloor$تابع جزء صحیح را نشان می‌دهد. لذا حداقل سهم سه نفر روی‌هم‌رفته $۲۰ = ۳ + ۷ + ۱۰$ است. پس نتیجه می‌گیریم که ۱۹ شتر قابل تفکیک و قسمت‌کردن به صورت اعداد صحیح با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$ (به شرطی که به هیچ یک از افراد ظلمی واقع نشود) نمی‌باشد.

مثال ۲. ۹۷ شتر را به نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$, $\frac{۱}{۵}$, $\frac{۲}{۱۱}$ بین سه فرد طوری تقسیم کنید که سهم هرکس عدد صحیحی باشد.

حل: روش (اقتباس شده از راه حل امام(ع))

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۱۱} = \frac{۵۵ + ۲۲ + ۲۰}{۱۱۰} = \frac{۹۷}{۱۱۰}$$

ابتدا به ۹۷ شتر، تفاوت مخرج با صورت کسر، یعنی $۱۳ = ۹۷ - ۱۱۰$ شتر اضافه می‌کنیم. حال ۱۱۰

شتر را به نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۲}{۱۱}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سهم فرد اول} \quad ۱۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵۵$$

$$\text{سهم فرد دوم} \quad ۱۱۰ \times \frac{۱}{۵} = ۲۲$$

$$\text{سهم فرد سوم} \quad ۱۱۰ \times \frac{۲}{۱۱} = ۲۰$$

و جمع سهم‌ها $۹۷ = ۲۰ + ۲۲ + ۵۵$ شتر می‌شود و ۱۳ شتر مانده را نیز کنار می‌گذاریم. البته این مسأله جواب‌های دیگری دارد که در حقیقت جواب‌های کامل نیستند. (بدین معنی که همه شترهای موجود را کاملاً تقسیم نمی‌کنند). کافی است دقت کنیم که حداقل سهم افراد باید از اعداد زیر کمتر نباشد

$$\text{سهم فرد اول} \quad n_۱ = \left\lfloor ۹۷ \times \frac{۱}{۲} \right\rfloor + ۱ = ۴۸ + ۱ = ۴۹$$

$$\text{سهم فرد دوم} \quad n_۲ = \left\lfloor ۹۷ \times \frac{۱}{۵} \right\rfloor + ۱ = ۱۹ + ۱ = ۲۰$$

$$\text{سهم فرد سوم} \quad n_۳ = \left\lfloor ۹۷ \times \frac{۲}{۱۱} \right\rfloor + ۱ = ۱۷ + ۱ = ۱۸$$

و لذا مجموع کل سهام عبارت است از $۸۷ = ۱۸ + ۲۰ + ۴۹$ نفر شتر که در این صورت ۱۰ شتر از شترهاباقی می‌ماند. البته همانطور که ملاحظه می‌شود

$$n_۱ = ۴۹ > ۹۷ \times \frac{۱}{۲}$$

$$n_۲ = ۲۰ > ۹۷ \times \frac{۱}{۵}$$

$$n_۳ = ۱۸ > ۹۷ \times \frac{۲}{۱۱}$$

یعنی با اینکه هر کس بیشتر از سهم واقعی خود دریافت کرده اما فقط ۸۷ شتر بین افراد تقسیم شده و ۱۰ شتر باقیمانده است. اگر منظور صرفاً تقسیم شترها باشد می‌توان به نفر اول فرضاً ۵۴، به نفر دوم ۲۱ و به نفر سوم ۱۸ شتر اختصاص داد. در این حالت نیز هر کسی بیشتر از سهم واقعی خود دریافت کرده است، اما این‌گونه جواب‌ها، جواب‌های کاملاً عادلانه‌ای نیستند.

راه حل عملی برای مسألهٔ تعمیم‌یافته هفده شتر

قبل از ارائه یک قضیه کلی، دو مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳: مسألهٔ هفده شتر را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم n_1،n_2، n_3 به ترتیب سهم تعلق گرفته به سه نفر با نسبت‌های $r_1 = \frac{1}{2}$، $r_2 = \frac{1}{3}$ و $r_3 = \frac{1}{9}$ باشد. برای اینکه تقسیم منصفانه و عادلانه باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{n_1}{\frac{1}{2}} = \frac{n_2}{\frac{1}{3}} = \frac{n_3}{\frac{1}{9}}$$

یا

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{r_2}{r_3} = 3 \quad \text{و} \quad \frac{n_1}{n_3} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{9}{2} \quad \text{و} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$$

یا

$$n_3 = \frac{2}{9}n_1 \quad \text{و} \quad n_2 = \frac{2}{3}n_1$$

از طرفی داریم $n_1 + n_2 + n_3 = 17$ و با جایگذاری مقدار برای n_2 و n_3 در تساوی بالا خواهیم داشت:

$$n_1 + \frac{2}{3}n_1 + \frac{2}{9}n_1 = 17$$

و یا

$$\frac{17}{9}n_1 = 17$$

پس

$$n_1 = 9\ ,\ \ n_2 = 6\ ,\ \ n_3 = 2$$

مثال ۴: مثال ۲ را در نظر می‌گیریم و آن را به روش بالا حل می‌کنیم.

$$n_1 + n_2 + n_3 = 97$$

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{11}} = \frac{11}{4} \quad , \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{11}} = \frac{11}{10}$$

یا

$$n_1 = \frac{11}{4}n_3 \quad \text{و} \quad n_2 = \frac{11}{10}n_3$$

با جایگذاری مقادیر n_1 و n_2 در تساوی $n_1 + n_2 + n_3 = 97$ داریم:

$$\frac{11}{4}n_3 + \frac{11}{10}n_3 + n_3 = 97$$

یا

$$(\frac{۱۱}{۴} + \frac{۱۱}{۱۰} + ۱)n_۳ = ۹۷$$

یا

$$\frac{۹۷n_۳}{۲۰} = ۹۷$$

یا

$$n_۳ = ۲۰$$

در نتیجه $n_۱ = \frac{۱۱}{۴} \times ۲۰ = ۵۵$ و $n_۲ = \frac{۱۱}{۱۰} \times ۲۰ = ۲۲$

از طرفی داریم

$$\frac{۵۵}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲۲}{\frac{۱}{۵}} = \frac{۲۰}{\frac{۲}{۱۱}}$$

از تساوی فوق استنباط می‌شود که جواب به‌دست آمده جواب عادلانهٔ مسأله است.
با توجه به مثال‌های فوق و با استفاده از قضیهٔ ۱، مسألهٔ زیر مطرح می‌شود.

مسألهٔ ۱: کوچک‌ترین عدد طبیعی T را بیابید که به k عدد طبیعی فرضاً $L_۱$، $L_۲$، ...، L_k به نسبت‌های اعداد گویای مثبت $r_i = \frac{m_i}{n_i}$، $i = ۱, ۲, \ldots , k$ تقسیم شود، که $\sum_{i=۱}^{k} r_i = r = \frac{m}{n} < ۱$ یعنی

$$T = L_۱ + L_۲ + \cdots + L_k \quad , \quad \frac{L_۱}{r_۱} = \frac{L_۲}{r_۲} = \cdots = \frac{L_k}{r_k}$$

و ثابت کنید که چنانچه عدد T با شرایط گفته شده وجود داشته باشد، چنین تقسیمی منحصر به فرد است.

حل: با استفاده از قضیهٔ (۱) چنانچه کوچک‌ترین عدد T که در شرایط مسألهٔ (۱) صدق کند را با $T_۰$ نشان دهیم، به دست می‌آوریم:

$$T_۰ = min\{T : m|[m_۱, m_۲, \ldots , m_k] \times T\}$$

حال ثابت می‌کنیم که $T_۰$ به شکل منحصر به فردی قابل تقسیم به نسبت‌های یاد شده است. فرض می‌کنیم اعداد $L_۱^۱$، $L_۲^۱$، ...، $L_k^۱$ نیز در شرایط مسأله صدق کنند. پس داریم:

$$L_۱^۱ + L_۲^۱ + \cdots + L_k^۱ = T$$

و

$$\frac{L_۱^۱}{r_۱} = \frac{L_۲^۱}{r_۲} = \cdots = \frac{L_k^۱}{r_k}$$

از روابط فوق و فرض مسأله نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{L_۱^۱}{L_۱} = \frac{L_۲^۱}{L_۲} = \cdots = \frac{L_k^۱}{L_k} = d$$

که فرض کرده‌ایم d نسبت مشترک کسرها باشد. پس

$$L_i^{۱} = d \times L_i \quad , \quad i = ۱, ۲, \ldots, k$$

طرفین تساوی بالا را روی i جمع می‌بندیم

$$\sum_{i=۱}^{k} L_i^{۱} = \sum_{i=۱}^{k} d \times L_i$$

و یا

$$T = d \sum_{i=۱}^{k} L_i = d \times T$$

پس

$$d = ۱$$

و یا

$$L_i^{۱} = L_i \quad , \quad i = ۱, ۲, \ldots, k$$

و بدین صورت منحصر به فرد بودن تقسیم عدد T ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۲: با مفروضات مسألهٔ (۱) همواره داریم:

$$L_i \geqslant r_i \times T \quad , \quad i = ۱, ۲, \ldots, k$$

برهان: فرض کنیم (فرض خلف) عدد طبیعی i بین ۱ و k وجود داشته باشد به طوری که $L_i < r_i \times T$ پس بنا به رابطه $\frac{L_۱}{r_۱} = \frac{L_۲}{r_۲} = \cdots = \frac{L_k}{r_k}$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=۱}^{k} L_j = \sum_{j=۱}^{k} \frac{r_j}{r_i} L_i = \frac{L_i}{r_i} \sum_{j=۱}^{k} r_j$$

و یا

$$T = r \frac{L_i}{r_i} < r \times T$$

پس

$$۱ < r$$

که نتیجه فوق با فرض $r < ۱$ در تناقض است.

مثال ۵: می‌خواهیم ۳۴ شتر را بین سه فرد با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۹}$ قسمت کنیم.

حل: می‌توانیم تقسیم را به صورت زیر انجام دهیم:

$$\text{سهم فرد اول} \qquad ۳۴ \times \frac{۱}{۲} = ۱۷$$
$$\text{سهم فرد دوم} \qquad ۳۴ \times \frac{۱}{۳} = ۱۱\frac{۱}{۳} \approx ۱۲$$
$$\text{سهم فرد سوم} \qquad ۳۴ \times \frac{۱}{۹} = ۳\frac{۷}{۹} \approx ۴$$

کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱۱/۳۳ عدد ۱۲ و کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تراز ۳/۷۷، عدد ۴ است و در نتیجه ۳۳ = ۴ + ۱۲ + ۱۷. چون یک شتر باقی مانده می‌توانیم آن را به هر یک از افراد دوم یا سوم بدهیم. اما با این عمل عدالت رعایت نمی‌شود زیرا اگر فرضاً یک شتر باقی مانده را به فرد دوم دهیم آنگاه سهم فرد اول ۱۷ و سهم فرد دوم ۱۳ و سهم فرد سوم ۴ خواهد بود و در این صورت

$$\frac{۱۷}{\frac{۱}{۲}} \neq \frac{۱۳}{\frac{۱}{۳}} \quad , \quad \frac{۱۳}{\frac{۱}{۳}} \neq \frac{۴}{\frac{۱}{۹}}$$

و همینطور وقتی یک شتر باقی مانده را به فرد سوم بدهیم خواهیم داشت

$$\frac{۱۷}{\frac{۱}{۲}} \neq \frac{۵}{\frac{۱}{۹}} \quad , \quad \frac{۱۲}{\frac{۱}{۳}} \neq \frac{۵}{\frac{۱}{۹}}$$

همانطور که ملاحظه گردید کاملاً عدالت رعایت نمی‌شود.

می‌توان با تعمیم مسألهٔ هفده شتر، ۳۴ شتر را ۲ برابر ۱۷ شتر در نظر بگیریم، لذا سهم هر فرد با توجه به تقسیم عادلانه ۱۷ شتر با نسبت‌های یاد شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{سهم فرد اول} \qquad ۲ \times ۹ = ۱۸$$
$$\text{سهم فرد دوم} \qquad ۲ \times ۶ = ۱۲$$
$$\text{سهم فرد سوم} \qquad ۲ \times ۲ = ۴$$

و جالب اینجا است که فقط بر طبق این نوع تقسیم است که عدالت به خوبی رعایت می‌شود، یعنی

$$\frac{۱۸}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۲}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{\frac{۱}{۹}} = ۳۶$$

حال با استفاده از ایدهٔ مطرح شده در مثال بالا، مثال زیر را حل می‌کنیم.

مثال ۶: عدد ۶۶ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $L_۱$، $L_۲$، $L_۳$ و $L_۴$ به ترتیب سهم تعلق گرفته به افراد با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱}{۱۰}$ باشد. از قضیهٔ ۱ داریم: $L_j = \frac{r_j T}{r}, j = ۱, ۲, ۳, ۴$. از طرفی،

$\frac{۳۳}{۳۵} = \frac{۶۶}{۷۰} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲} = r$. پس $\frac{۱}{r} = \frac{۳۵}{۳۳}$ و داریم:

سهم فرد اول $L_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۶۶ \times \frac{۳۵}{۳۳} = ۳۵$

سهم فرد دوم $L_۲ = \frac{۱}{۵} \times ۶۶ \times \frac{۳۵}{۳۳} = ۱۴$

سهم فرد سوم $L_۳ = \frac{۱}{۷} \times ۶۶ \times \frac{۳۵}{۳۳} = ۱۰$

سهم فرد چهارم $L_۴ = \frac{۱}{۱۰} \times ۶۶ \times \frac{۳۵}{۳۳} = ۷$

لم: اگر مسألهٔ تعمیم یافته دارای جواب باشد آنگاه

$$(۱ - r)T = \sum_{i=۱}^{k} (L_i - (T \times r_i))$$

که L_i سهم فرد iام است و $r = \sum_{i=۱}^{k} r_i$.

برهان: داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} (L_i - (T \times r_i)) = \sum_{i=۱}^{k} L_i - \sum_{i=۱}^{k} T \times r_i = T - T \times \sum_{i=۱}^{k} r_i = T - T \times r = T(۱ - r)$$

این نتیجه را می‌توان چنین توجیه کرد که $T(۱ - r)$ سهم فردی اضافی است.
در زیر تعمیم مسألهٔ هفده شتر به ازای هر تعداد شتر (یا هر عدد طبیعی) ارائه می‌شود.

مسألهٔ تعمیم یافته هفده شتر: تقسیم عدد طبیعی داده شده T، به اعداد صحیح مثبت با نسبت‌های گویای $r_۱$، $r_۲$، ...، r_k که $\sum_{i=۱}^{k} = r < ۱$ را جواب مسألهٔ برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\min Z \sum_{\substack{i,j=۱ \\ i<j}}^{k} \left| \frac{L_i}{r_i} - \frac{L_j}{r_j} \right|$$

$$\begin{array}{ll} s.t & \\ \sum_{i=۱}^{k} L_i = T & (P) \\ L_i \geq r_i \times T & i = ۱, ۲, \cdots, k. \end{array}$$

ملاحظات: واضح است که اگر مسألهٔ (P) جواب داشته باشد و جواب بهینهٔ آن برابر صفر باشد آنگاه

$$Z = ۰ \Leftrightarrow \sum_{\substack{i,j=۱ \\ i<j}}^{k} \left| \frac{L_i}{r_i} - \frac{L_j}{r_j} \right| = ۰$$

و به طور معادل داریم:

$$\frac{L_1}{r_1}=\frac{L_2}{r_2}=\frac{L_3}{r_3}=\cdots=\frac{L_k}{r_k}$$

در نتیجه تقسیم کاملاً عادلانهٔ T به نسبت‌ها و شرایط یاد شده در مسأله دقیقاً انجام می‌پذیرد. (در این حالت طبق نتیجه‌ای که قبلاً داشتیم جواب مسأله یگانه است.) اگر جواب بهینه (P) غیر صفر باشد، آنگاه یک جواب تقریبی برای مسأله به دست می‌آید که البته جوابی کاملاً عادلانه نیست (در این حالت مسأله جواب کاملاً عادلانه ندارد). این جواب را تقریباً عادلانه می‌نامیم. توجه داریم که در این حالت ممکن است جواب یگانه نباشد.

مثال ۷: عدد ۴۰ را به نسبت‌های $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9}$ به صورت عادلانه تقسیم کنید.

حل: مسألهٔ برنامه‌ریزی با اعداد صحیح در قضیهٔ ۳ را می‌نویسیم

$$\begin{aligned}&\min\left\{\left|\frac{L_1}{\frac{1}{2}}-\frac{L_2}{\frac{1}{3}}\right|+\left|\frac{L_1}{\frac{1}{2}}-\frac{L_3}{\frac{1}{9}}\right|+\left|\frac{L_2}{\frac{1}{3}}-\frac{L_3}{\frac{1}{9}}\right|\right\}\\&s.t\\&\qquad\textstyle\sum_{i=1}^{3}L_i=40\\&\qquad L_1\geq\frac{40}{2}\\&\qquad L_2\geq\frac{40}{3}\\&\qquad L_3\geq\frac{40}{9}\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $L_1+L_2+L_3=40$ پس

$$\begin{gathered}L_1=40-(L_2+L_3)\leq 40-(\tfrac{40}{3}+\tfrac{40}{9})\approx 22/22\\\Rightarrow 20\leq L_1\leq 22/22\Rightarrow 20\leq L_1\leq 22\\L_2=40-(L_1+L_3)\leq 40-(20+\tfrac{40}{9})\approx 15/55\\\Rightarrow 13/33\leq L_2\leq 15/55\Rightarrow 14\leq L_2\leq 15\\L_3=40-(L_1+L_2)\leq 40-(20+\tfrac{40}{3})\approx 6/66\\\Rightarrow 4/44\leq L_3\leq 6/66\Rightarrow 5\leq L_3\leq 6\end{gathered}$$

پس L_1 می‌تواند یکی از اعداد ۲۰ و ۲۱ و ۲۲، و L_2 می‌تواند یکی از اعداد ۱۴ و ۱۵، و L_3 می‌تواند یکی از اعداد ۵ و ۶ باشد. مسلماً ترکیبی از این اعداد با حاصل جمع ۴۰ که کمترین مقدار تابع هدف یعنی Z را به دست دهد، جواب بهینهٔ مسأله خواهد بود.

واضح است که راه حل ترکیبی برای این مسأله نسبتاً طولانی است. حال قضیهٔ زیر را ارائه و ثابت می‌کنیم و بر پایهٔ آن، روشی کارا برای حل مسألهٔ تعمیم‌یافتهٔ هفده شتر، به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳: می‌خواهیم عدد طبیعی T را به نسبت‌های گویای مثبت r_1، r_2، ...، r_k تقسیم کنیم که

$\sum_{i=1}^{k} r_i < 1$. اگر T به صورت $T = T_1 + T_2$ تفکیک شود، که در آن T_1 و T_2 اعداد صحیح هستند، و هر یک به طور جداگانه به ترتیب با اعداد صحیح L_i^1ها و L_i^2ها به نسبت‌های r_1، r_2، ...، r_k تقسیم شده باشند، آنگاه $L_1^1 + L_1^2$، $L_2^1 + L_2^2$، ...، $L_k^1 + L_k^2$ همان تقسیم T به نسبت‌های گویای مثبت r_1، r_2، ...، r_k است.

برهان: بنا به مفروضات قضیه داریم

$$\begin{gathered} \frac{L_1^1}{r_1} = \frac{L_2^1}{r_2} = \cdots = \frac{L_k^1}{r_k} \\ \frac{L_1^2}{r_1} = \frac{L_2^2}{r_2} = \cdots = \frac{L_k^2}{r_k} \\ L_1^1 + L_2^1 + \cdots + L_k^1 = T_1 \\ L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_k^2 = T_2 \end{gathered}$$

و در نتیجه

$$\frac{L_1^1 + L_1^2}{r_1} = \frac{L_2^1 + L_2^2}{r_2} = \cdots = \frac{L_k^1 + L_k^2}{r_k}$$

با فرض $L_i = L_i^1 + L_i^2$ واضح است که عدد T به نسبت‌های گویای مثبت r_1، r_2، ...، r_k به صورت $L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ تقسیم می‌شود.

توجه: قضیهٔ زیر یک روش تجدید نظر شده برای تقسیم هر عدد طبیعی به نسبت‌های گویا به دست می‌دهد که راه حل عملی و کارا است.

قضیه ۴: فرض کنید $r = \frac{m}{n}$ و T به صورت $T = T_1 + T_2$ تفکیک شده باشد به طوری که $T_1 = am$ و $0 \leq T_2 < m$ (a عددی طبیعی است). در مسألهٔ (P) به جای T اعداد طبیعی T_1 و T_2 را جایگزین کرده و مسائل حاصل را (P_1) و (P_2) می‌نامیم. شرط لازم برای وجود جواب برای مسألهٔ (P) آن است که مسائل (P_1) و (P_2) دارای جواب باشند و جواب مسألهٔ (P) برابر مجموع جواب‌های مسائل (P_1) و (P_2) می‌باشد و مقدار بهینهٔ تابع هدف مسألهٔ (P) همان مقدار بهینه تابع هدف مسألهٔ(P_2) است.

برهان: فرض کنید مسائل (P_1)و (P_2) دارای جواب باشند و L_{1i} و L_{2i} به ترتیب جوابهای دلخواه قابل قبولی از مسائل (P_1) و (P_2) باشند. تعریف می‌کنیم $L_i = L_{1i} + L_{2i}$. لذا داریم

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} (L_{1i} + L_{2i}) = \sum_{i=1}^{k} L_{1i} + \sum_{i=1}^{k} L_{2i} = T_1 + T_2 = T$$
$$L_i = L_{1i} + L_{2i} \geq r_i \times T_1 + r_i \times T_2 = r_i(T_1 + T_2) = r_i \times T \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

یعنی L_i یک جواب قابل قبول از مسألهٔ (P) است. حال فرض کنید L_{1i}^* و L_{2i}^* جواب‌های بهینهٔ مسائل (P_1) و (P_2) با توابع هدف بهینهٔ Z_1^* و Z_2^* باشند. ثابت می‌کنیم که $L_i^1 = L_{1i}^* + L_{2i}^*$ جواب بهینهٔ مسألهٔ (P) می‌باشد. برای این منظور، ابتدا نشان می‌دهیم که مقدار بهینهٔ تابع هدف مسألهٔ (P) یعنی

Z^* با Z_2^* برابر است. چون L_{1i}^* جواب مسألهٔ (P_1) است، بنابر این مقدار T_1 به نسبت عادلانه تقسیم شده است و در نتیجه مقدار تابع هدف مسألهٔ (P_1) صفر است. یعنی $Z_1^* = 0$ و همچنین داریم

$$\frac{L_{11}^*}{r_1} = \frac{L_{12}^*}{r_2} = \cdots = \frac{L_{1k}^*}{r_k}$$

لذا اگر فرض کنید Z' مقدار تابع هدف مسألهٔ (P) در ازای جواب L_i^1 باشد داریم

$$Z^* \leq Z' = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^1}{r_i} - \frac{L_j^1}{r_j}\right| = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^{1*}+L_i^{2*}}{r_i} - \frac{L_j^{1*}+L_j^{2*}}{r_j}\right| = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^{2*}}{r_i} - \frac{L_j^{2*}}{r_j}\right| = Z_2^*$$

از طرفی فرض کنید L_i^* جواب بهینهٔ مسألهٔ (P) باشد. در این صورت با توجه به اینکه $L_i \geqslant L_{1i}$ و $L_i \geqslant L_{2i}$ (زیرا $L_i = L_{1i} + L_{2i}$) فرض می‌کنیم:

$$L_i^* = L_{1i}^* + L_{2i}$$

که به راحتی می‌توان بررسی نمود که L_{2i} جواب مسألهٔ (P_2) است، زیرا L_{2i} تفاضل جواب مسایل (P_1) و (P_2) است. لذا داریم

$$Z^* = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^*}{r_i} - \frac{L_j^*}{r_j}\right| = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^{1*}+L_i^{2}}{r_i} - \frac{L_j^{1*}+L_j^{2}}{r_j}\right| = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} \left|\frac{L_i^{2}}{r_i} - \frac{L_j^{2}}{r_j}\right| \geq Z_2^*$$

بنابراین $Z_2^* = Z^*$. لذا جواب L_i^* را می‌توان همان L_i^1 به عنوان یک جواب بهینهٔ مسألهٔ (P) در نظر گرفت. (زیرا امکان دارد جواب‌های بهینه منحصر به فرد نباشد). در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

مثال ۸: مثال قبل را در نظر می‌گیریم و آن را با استفاده از قضیهٔ فوق که آن را روش تجدید نظر شده در قضیهٔ ۳ می‌نامیم، حل می‌کنیم.

ابتدا تمام مضارب ۱۷ که صورت کسر $\frac{17}{18}$ می‌باشد $(\frac{17}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2})$ را از عدد ۴۰ کسر می‌کنیم و باقی‌مانده آن را در نظر می‌گیریم، یعنی $40 - 34 = 6$. سپس عدد ۳۴ را به نسبت‌های یادشده تقسیم می‌کنیم. با توجه به مثال ۱ داریم:

سهم فرد اول	$2 \times 9 = 18$
سهم فرد دوم	$2 \times 6 = 12$
سهم فرد سوم	$2 \times 2 = 4$

حال عدد باقی مانده یعنی ۶ را به نسبت‌های یادشده در فرض مسأله تقسیم می‌کنیم (با استفاده از قضیهٔ

۴):

$$\min Z = \left\{ \left| \frac{L_۱}{\frac{۱}{۲}} - \frac{L_۲}{\frac{۱}{۳}} \right| + \left| \frac{L_۱}{\frac{۱}{۲}} - \frac{L_۳}{\frac{۱}{۹}} \right| + \left| \frac{L_۲}{\frac{۱}{۳}} - \frac{L_۳}{\frac{۱}{۹}} \right| \right\}$$

$$s.t$$

$$\begin{aligned} & L_۱ + L_۲ + L_۳ = ۶ \\ & L_۱ \geq \frac{۶}{۲} \\ & L_۲ \geq \frac{۶}{۳} \\ & L_۳ \geq \frac{۶}{۹} \end{aligned}$$

لذا خواهیم داشت

$$L_۱ = ۶ - (L_۲ + L_۳) \leq ۶ - (۲ + \tfrac{۲}{۳})$$

$$۳ \leq L_۱ \leq ۳\tfrac{۱}{۳}$$

پس

$$L_۱ = ۳$$

$$L_۲ = ۶ - (L_۱ + L_۳) \leq ۶ - (۳ + \tfrac{۲}{۳})$$

$$۲ \leq L_۲ \leq ۲\tfrac{۱}{۳}$$

پس

$$L_۲ = ۲$$

و بالاخره

$$\frac{۲}{۳} \leq L_۳ \leq ۶ - (L_۱ + L_۲)$$

پس

$$L_۳ = ۱$$

همانطورکه ملاحظه شد مقادیر $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ به صورت منحصر به فرد به ترتیب عبارتند از ۳، ۲ و ۱.
بنابراین خواهیم داشت

سهم فرد اول	$۱۸ + ۳ = ۲۱$
سهم فرد دوم	$۱۲ + ۲ = ۱۴$
سهم فرد سوم	$۴ + ۱ = ۵$

و مسلماً با این روش کمترین مقدار خطای قدر مطلق حاصل می‌شود.

برخی از مثال‌های موجود در مقاله به وسیله یک برنامهٔ کامپیوتری در محیط نرم‌افزار Lingo حل و جوابها جهت مقایسه در جدول صفحهٔ بعد آورده شده‌اند. در برنامهٔ مذکور T نشان‌دهندهٔ عددی است که قرار است تا حد ممکن به طور عادلانه با نسبت‌های گویای $r_۱$، $r_۲$، ...، r_k تقسیم شود. جواب مسأله

توسط متغیرهای $L_۱$، $L_۲$، ...، L_k داده شده‌اند. ضمناً در مثال‌هایی که تقسیم عدد عادلانه است، مقدار بهینهٔ تابع هدف تقریباً صفر است.

حل چند مسأله و مقایسه آنها با یکدیگر

شمارهٔ مسأله	عدد T	نسبت‌ها	سهم‌ها	تابع هدف
مسأله هفده شتر	۱۷	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۳}, r_۳ = \frac{۱}{۹}$	$L_۱ = ۹, L_۲ = ۶, L_۳ = ۲$	$۰/۱۹۹۶ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۱	۱۹	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۳}, r_۳ = \frac{۱}{۹}$	مسأله جواب ندارد	----
مثال ۲	۹۷	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۵}, r_۳ = \frac{۲}{۱۱}$	$L_۱ = ۵۵, L_۲ = ۲۲, L_۳ = ۲۰$	$۰/۵۱۹۲ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۵	۳۴	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۳}, r_۳ = \frac{۱}{۹}$	$L_۱ = ۱۸, L_۲ = ۱۲, L_۳ = ۴$	$۰/۳۱۲۰ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۶	۶۶	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۵}, r_۳ = \frac{۱}{۷}, r_۴ = \frac{۱}{۱۰}$	$L_۱ = ۳۵\ ,\ L_۲ = ۱۴$ $L_۳ = ۱۰\ ,\ L_۴ = ۷$	$۰/۵۹۱۳ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۷ و ۸	۴۰	$r_۱ = \frac{۱}{۲}, r_۲ = \frac{۱}{۳}, r_۳ = \frac{۱}{۹}$	$L_۱ = ۲۱, L_۲ = ۱۴, L_۳ = ۵$	۶

نتیجه‌گیری: در بسیاری از مسائل کاربردی با مسألهٔ افراز یک عدد صحیح به اعداد صحیح کوچکتر به نسبت‌هایی که مجموع آنها از یک کمتر است برخورد می‌کنیم. به عنوان مثال، ماشینی را در نظر بگیرید که چند منظوره است و می‌توان از آن برای تولید K قطعهٔ صنعتی مختلف استفاده کرد. حال در نظر بگیرید که قرار است در یک دورهٔ کاری N روزه این ماشین به روزهایی برای تولید K قطعهٔ مختلف با نسبت‌های گویای مثبت $r_۱$، $r_۲$، ...، r_k اختصاص یابد. باید توجه داشت که بخشی از دورهٔ کاری N روزه جهت تنظیم ماشین برای تولید K قطعه به هدر می‌رود. لذا به طور طبیعی جمع نسبت‌های $r_۱$، $r_۲$، ...، r_k کمتر از واحد است، یعنی $\sum_{i=۱}^{k} r_i < ۱$. در این مقاله افراز عدد صحیحی مانند N به k عدد صحیح کوچکتر به نسبت‌های $r_۱$، $r_۲$، ...، r_k که $\sum_{i=۱}^{k} r_i < ۱$ مورد بررسی قرار گرفته است و راه‌حل‌های کاراتری مبتنی بر مسألهٔ تقسیم هفده شتر ارائه گردیده است.

مراجع

[۱] استاد احمد امین، راه تکامل، انتشارات دارالکتب اسلامیه، تهران ۱۳۴۴.

علی وحیدیان کامیاد

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

پست الکترونیک: kamyad@math.um.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۶(بهار ۱۳۸۰)، صص. ۱۷ تا ۳۰

ترک ریاضیات به قصد فلسفه*

رُنه توم

برندهٔ مدال فیلدز سال ۱۹۵۸، به خاطر ابداع و توسعهٔ نظریهٔ هم مرزی[1] در توپولوژی جبری. این رده‌بندی از خمینه‌ها نظریه هموتوپی را به صورتی بنیادی به کار برد و تبدیل به مثالی جامع از یک نظریه عمومی کُهمولوژی شد.

چکیده

این سخنرانی مروری است بر کارهای نویسنده، از نظریهٔ هموتوپی و جبر همولوژی گرفته تا کتابهای جدید "Esquisse d' une Sémiophysique و Apologie du Logos"، با تأکید بر نقشی که ایده‌های مختلف از بیولوژی در نظریه فاجعه ایفا می‌کند.
دیدگاه اتخاذ شده دیدگاهی است انتقادی نسبت به انجام آزمایش بدون زمینهٔ تئوریک و نیز نسبت به کاربرد نامناسب آمار به عنوان توجیه تفکر قیاسی در علم.

ترک ریاضیات به قصد فلسفه

در آغاز باید بگویم از اینکه دوباره در بارسلونا هستم بسیار خوشحالم. فکر می‌کنم دیدار از بارسلونا همیشه هیجان‌انگیز است و این دیدار چیزی است که آلمانیها آن را یک رویداد خاطره‌آمیز[2] می‌نامند.

صحبت من شرح حوادثی است که پس از کسب جایزهٔ فیلدز بر من گذشته و بالاخره، اینکه چگونه از این رویداد جان سالم به در بردم.

---

*) René Thom, Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 Route de Chartres, F-91440 Bures-Sur-Yvette, France   1) cohordism   2) ein Ereignis

وقتی در آستانهٔ ۳۵ سالگی، (که در آن هنگام حداکثر سن مجاز برای دریافت این مدال محسوب می‌شد) شما مدال فیلدز دریافت می‌کنید، هنگامی که تشریفات کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان را که در آنجا مدال می‌گیرید، پشت سر می‌گذارید، و در حالی که خسته امّا خوشحال هستید دوباره به حال خود رها می‌شوید، در آن هنگام است که با تردیدهایی مواجه می‌شوید. آیا من شایسته کسب این افتخار هستم؟ آیا در میان ریاضیدانان جوانتر افراد شایسته‌تری یافت نمی‌شوند؟ و این فکر در اندیشهٔ شما شکل می‌گیرد: آیا این بالاترین سطح موفقیتی است که من می‌توانستم کسب کنم؟ آیا آنچه بعداً انجام می‌دهم محکوم به کم‌اهمیت تر بودن نیست؟ آیا توانائیهای ریاضی من همیشه در این سطح باقی می‌ماند یا محکوم به افولی اجتناب ناپذیر هستم؟

همهٔ این اندیشه‌ها از همان بهار ۱۹۵۸ در پس ذهن من وجود داشت. کمی قبل از برگزاری کنگره، اثبات حدس شون‌فلایز[1] که به عقیدهٔ من گوهری ناب از عمیق‌ترین ابداع‌گری ریاضی است- توسط بَری مزور[2] مطرح شد. کمی قبل از آن ساختارهای عجیب[3] روی کره توسط میلنُر[4] ارائه شده بود (میلنر بعداً مدال فیلدز دریافت کرد). بر من بیشتر و بیشتر مسلم شد که توانائی‌هایم برای اثباتهای جدی ریاضی با مرور زمان کمتر می‌شود. در آن هنگام بود که نظریه‌های جبری‌تر (مانند هموتوپی، جبر همولوژی، نظریهٔ K و غیره) را که برایم کم‌جاذبه‌تر بودند ترک کردم و به مطالعه تکینی‌های نگاشت‌های مشتق‌پذیر روی آوردم. موضوعی که هَسلِر ویتنی[5] آنرا در سال ۵۲ـ۱۹۵۱ استادانه آغاز کرده بود و به نظر من موضوعی قابل انعطاف‌تر و منسجم‌تر بود.

نظریه تکینی

بعدها سعی کردم کشف کنم که آیا ایدهٔ «عمومیت»[6] یک تکینی (مانند مفهوم کلاسیکِ[7] تیزهٔ نگاشتهای هموار از یک صفحه به روی صفحه دیگر) می‌تواند کاربردهایی در زندگی روزمره داشته باشد یا خیر. بخاطر می‌آورم که در اولین پروازم بر فراز اقیانوس اطلس در سال ۱۹۵۱، در هواپیمای خطوط هوایی فرانسه که مرا به نیویورک و پرینستون می‌آورد، نوسان آرام سطح دریا باعث شد که من به شباهت حرکات امواج با تبدیل یک خم منظم هموار که نمایانگر تصویر یک نگاشت $f : I \to \mathbb{R}^2$ باشد، پی ببرم. خمی که از یک تیزهٔ معمولی عبور می‌کند، یک نقطهٔ مضاعف[8] را که بعداً تجزیه می‌شود به بار می‌آورد و به این ترتیب (با تنش سطحی) یک قطرهٔ منفرد[9] موج اولیه را آزاد می‌کند (پدیده‌ای که به آسانی در یک بستهٔ خطی[10] از خم‌های درجه ۳ قابل مشاهده است). بنابر این من از قبل این ایده را داشتم که مشاهدهٔیک فرایند بسیار

1) Schönflies 2) Barry Mazur 3) exotic 4) Milnor 5) H. Whitney 6) genericity
7) Classic cusp 8) double point 9) isolated 10) binear pencil

ساده و عمومی، می‌تواند به یافتن یک مدل جبری ساده رهنمون شود که قابل تعمیم و ارزیابی باشد.

در دانشگاه استراسبورگ، در سال 60-1959، به کمک یک همکار فیزیکدان مطالعهٔ تکینی‌های خم‌ها و سطوح حاصل از انعکاس و انکسار نور و نیز تغییر شکلشان[1] در هندسه اپتیکی (نوری) را آغاز کردم. بسیار شگفت زده شدم که مشاهده کردم خم‌ها و سطوح، تکینی‌های بیشتری از آنچه نظریهٔ ساده تقاطع[2] برای خم‌های مسطح الزام می‌کند، دارند. تکینی‌های خم‌های مسطح کاملاً شناخته شده‌اند و به آسانی توصیف می‌شوند. با تعجب دریافتم که در خم‌ها و سطوح هندسه نوری ایجاد شده به وسیله وسایل خیلی سادهٔ نوری مانند آینه‌های کروی و عدسی‌های مسطح، تکینیی می‌توان یافت که از دیدگاه نظری نباید وجود داشته باشد. این نقطهٔ تکینی، نقطهٔ نافی[3] نامیده می‌شود و من بعداً درباره آن بحث می‌کنم. چند سال طول کشید تا فهمیدم که این پدیده نتیجهٔ اصل بهینگی فرما[4] می‌باشد. یک مشاهده‌گر که از این اصل آگاه باشد می‌تواند وجود اصل کمال را به آسانی با استفاده از خم‌ها و سطوح هندسه نوری پیش‌بینی کند. در سال ۱۹۶۳، من استراسبورگ را به قصد IHES در بور-سور-ایوِت[5] ترک کردم. آنجا کاملاً آزاد بودم، هیچ مسئولیت آموزشی یا اداری نداشتم. در آن موقع ایده کلیِ مجموعه‌ها و مورفیسم‌های تورقی[6] در ذهنم شکل گرفت. به ویژه از یک سال قبل (این آغاز جنبش ریاضیات جدید بود) جامعه علمی می‌خواست به طور کلی هندسه را از برنامهٔ درسی خارج کند. مخصوصاً نظریهٔ پوشها را، زیرا شرح و تفهیم این نظریه نسبتاً دشوار بود. بنابر این آنها تصمیم گرفتند نظریهٔ پوشها را از برنامهٔ درسی حذف کنند. این تصمیم مرا بسیار خشمگین کرد، لذا مقاله‌ای نوشتم و سعی کردم توضیح دهم که مفهوم پوشها فقط یک حالت خاص از مفهوم کلی تکینی یک نگاشت است، و اگر ما بدانیم چگونه با تکینی‌های عمومی[7] نگاشتها کار کنیم، در این صورت باید در مورد پوشها نیز همین مطلب را بدانیم. با تفکر دربارهٔ این مطلب، من به طور اصولی نظریه تکینی‌ها را توسعه دادم، به ویژه تعمیم نظریه تقاطع به جِرمهای خاص که قبلاً در سال ۱۹۵۶ بررسی کرده بودم.

سپس با بکار بردن صورت‌بندی ویتنی از خاصیت (a,b)، سعی کردم نظریهٔ تقاطع را به فضاهایی تعمیم دهم، که برای ارتباط بین زیرمجموعه‌های متناظر که بعداً ورق[8] نامیده شدند، شامل خاصیتی نظیرِ خاصیت پایداری کلاسیک در نظریه تقاطع برای خمینه‌های هموار بودند.

ولی اصول موضوعه‌ای که تدوین کردم هنوز کافی نبود، و تا حدود سال ۱۹۶۶ که کار مَزِر[9] در این زمینه مطرح شد، کامل نگشت. او توصیف رضایتبخشی از خواص اصلی اشیاء تورق شده و ورق‌ها، به‌ویژه پایداری توپولوژیکی نگاشتهای سرهٔ تقریباً هموار بین خمینه‌ها را ارائه و اثبات نمود. این کار در مقالهٔ من که

1) deformation 2) transversality 3) umbilic point 4) Fermat's principle of optimality
5) Bures-sur-Yvette 6) stratified 7) generic 8) stratum 9) Mather

در سال ۱۹۶۸ در بولتن انجمن ریاضی امریکا چاپ شد به کمال خود رسید و عملاً آخرین کار تحقیقی اکیداً ریاضی من بود. پس از آن من تبدیل به یک فیلسوف شدم.

ریشه‌های نظریه فاجعه[1]

این گذر از ریاضی به مقصد فلسفه به صورت ناگهانی اتفاق نیفتاد. در حدود سال ۶۴ـ۱۹۶۳، در حالیکه مشغول مطالعه جنین شناسی کلاسیک بودم، نظراتم را در مورد کاربرد «واقعی» قضایای تقاطع در زمینه زیست شناسی دنبال کردم. به نوعی، این احساس در من بوجود آمد که به عنوان یک ریاضیدان، کاملاً قابل جایگزینی هستم، به این معنی که هر چیز که من می‌توانستم بیابم مسلماً مدت کوتاهی بعد از من و بدون من قابل حصول بود و در حالت کلی به صورتی بهتر. در نتیجه سعی کردم که از برنامه کلی تولید ریاضی بیرون آیم و به بررسی دقیق کاربرد واقعی نظریهٔ تقاطع در فرم‌های طبیعی متمایل شدم. بنابر این در سال ۶۶ـ۱۹۶۵ شروع به کار روی موضوعی کردم که شش سال بعد به نظریهٔ فاجعه مشهور شد. در ابتدای این کار، ایده‌های کاملاً متفاوت دو زیست شناس نقش اساسی ایفا کرد. یکی از این دو زیست شناس، کنراد. اچ. وَدینگتون[2] بود با مدل بدیع خود در زمینه ژنتیک فراگیر. پهنهٔ ژنتیک فراگیر شبیه چشم‌انداز تپه‌ای است که دره‌های بسیاری از بالای تپه به پایین سرازیر می‌شوند. در این زمینه منظور این بود که توالی اشتقاق سلولی در جنین شناسی توصیف گردد، هر دامنه و سوی این دره سرنوشت مشترک گروهی از سلولها را توصیف می‌کند و هر دره به دو قسمت منشعب می‌شود. شاخه‌ای که دنبال می‌شود متناظر با انتخاب یک سلول در یک نوع اشتقاق سلولی است، سلول دیگر اشتقاق سلولی دیگر را دنبال می‌کند.

زیست شناس دیگر که کمابیش همان نوع ایده را داشت ماکس دلبروک[3] بود. او در مقاله‌ای که فکر می‌کنم در سال ۱۹۴۶ در یک کنگرهٔ CNRS در پاریس ارائه داد، اشتقاق سلولی را با آنچه رژیم پایدار تقسیم هستهٔ سلولهای جنین نامیده می‌شود، مرتبط کرد، یعنی این ایده که در جنینی که به چند هسته تقسیم می‌شود رژیم‌های مجانبی پایدار تقسیم هسته را می‌توان یافت که سرانجام می‌تواند (بطور موضعی) منشعب شود و تولیدمثل‌های غیرجنسی متناظر را بوجود آورد.

در حین تلاش برای به‌کاربردن این مدل در جنین شناسی بود که من سرانجام به لیست مشهورم، که متشکل از هفت فاجعهٔ مقدماتی در فضاـزمان بود، دست یافتم.

در ضمن تا همان سال ۱۹۶۰، نظریه تکینی پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کرده بود، بخشی از این پیشرفت مرهون اثبات مالگرانژ[4] برای قضیه آماده کردن C^{∞} و کاربرد تقاطع در نظریه تورق مجموعه‌ها بود و نیز بعداً

1) The Origins of Catastrophe Theory 2) Conrad H. Waddington 3) Max Delbrück
4) Malgrange

(۶۹ـ۱۹۶۸) مرهون توضیح آرنولد[1] و مکتب او در مسکو درباره نظریهٔ عمومی تکینی‌های نگاشت‌های تحلیلی و رابطهٔ مرموز آن با رده‌بندی گروه‌های لی بود. بنابراین لیست زیست شناختی من، که متشکل از هفت فاجعه مقدماتی بود، در چهارچوبی خیلی بزرگتر قرار گرفت. من طبیعت حقیقی آن را تا چند سال بعد از کشف آن (۷۲ـ۱۹۷۰) نفهمیدم، تا زمانی که فردی نظریه تغییر شکل تخت یک مجموعه تحلیلی را برایم توضیح داد. همچنانکه می‌دانید، اگر یک مجموعه تحلیلی داشته باشیم، یعنی مجموعه‌ای که بوسیله یک مجموعه از معادلات تحلیلی تعریف می‌شود، و یک تغییر شکل یک پارامتره از این معادلات معرفی کنیم، یک خانواده تحلیلی بدست می‌آوریم. دربارهٔ این تغییر شکلهای مجموعه‌های تحلیلی، هندسه جبری‌دانها یک کلاس خیلی مشخص تعریف می‌کنند، که آنها آن را تغییر شکلهای تخت[2] می‌نامند. من حتی اکنون مطمئن نیستم که واقعاً تعریف جبری تغییر شکل تخت را فهمیده‌ام. این تعریف در حقیقت به‌طور طبیعی از نظریه مدولهای تخت در جبر همولوژی سرچشمه می‌گیرد. ولی به بیان ساده یک تغییر شکل تخت عبارتست از یک تغییر شکل که در آن بُعد کلاس بنیادیِ تار عمومی با تغییر پارامتر ناوردا باقی میماند، یعنی ما مجاز نیستیم که بُعد دورهٔ بنیادی[3] خانوادهٔ تحلیلی مختلط را هنگامیکه پارامترها را کمی نوسان می‌دهیم، تغییر دهیم. در نتیجه اگر جرم یک مجموعه تحلیلی در یک نقطه را داشته باشیم، فقط می‌توانیم در جستجوی تغییر شکل‌های یکدست آن باشیم و با نظریه کلی ثابت می‌شود که خانوادهٔ همه تغییرشکلهای یکدست یک جرم داده شده متناظر با یک فضای تحلیلی از تغییرشکلهای یکدست اکمل[4] خود این فضا را می‌توان به یک ساختار تحلیلی مجهز کرد.

در زمان اقامتم در IHES، با الکس گروتندیک[5] همکار بودم، ولی ما هرگز نتوانستیم با هم گفتگو کنیم یا هیچگونه رابطه ریاضی بین خود داشته باشیم. گاهی من برای ایجاد ارتباط تلاش می‌کردم، ولی پس از چند دقیقه گفتگو گروتندیک فوراً به اصطلاحات خود رجوع می‌کرد و مطالب را به روش خود توصیف می‌نمود و من تنبل‌تر از آن بودم که سمینار گروتندیک را تعقیب کنم و اصطلاحات او را یاد بگیرم. در نتیجه ما کم و بیش مستقل از یکدیگر کار می‌کردیم. شاید بدین خاطر، گروتندیگ در نامه‌ای شخصی برایم نوشت که در این مدت من خیلی تنبل بودم. ممکن است او در این ادعا محق بوده باشد. من هرگز نمی‌توانستم مانند او کار کنم: کار کردن در سراسر شب، خوابیدن در ساعت ۳ بامداد (یا عملاً دیرتر)، کار مداوم با ماشین تحریر. من کاملاً از این نوع کار کردن عاجزم.

در آن زمان، گروتندیک از قبل قضیه‌ای کلی درباره تغییر شکل‌های اکمل مجموعه‌های تحلیلی داشت ولی البته این قضیه مانند سایر کارهای گروتندیک نتیجه‌ای بسیار مجرد بود. در این مسأله اثبات می‌شود اگر یک تکینی دلخواه از یک مجموعهٔ تحلیلی را در نظر بگیریم، فضای تغییر شکل اکمل آن نیز یک فضای تحلیلی است، که در حالت کلی مجموعهٔ مناسبی برای استفاده نیست. این مجموعه در حالت کلی با بعد بی‌پایان است و دارای تعداد زیادی نقطهٔ تکینی می‌باشد. اگر نقطهٔ تکینی منفرد باشد، آنگاه

1) Arnold 2) flat deformation 3) fundamental cycle 4) universal 5) Alex Grothendieck

فضای بازشدن[1] یک فضای با بعد باپایان ولی با نقاط تکینی است. در عین اینکه می‌کوشیدم شرحی بر خاستگاه فرمهای طبیعی بیابم، طرح مقدماتی پایدارهای ساختاری و ساخت شناسی را که در اولین کتابم (۱۹۶۷ـ۶۸) به رشتهٔ تحریر درآورم، در ذهن داشتم.

در این طرح، مسأله با بررسی یک محیط طبیعی آغاز می‌شود و یک رابطهٔ هم‌ارزی روی نقاط آن تعریف می‌شود. دو نقطه x, y در این قلمرو هم‌ارز گفته می‌شوند اگر همسایگیهای موضعی U از x و V از y و نگاشت $g : U \to V$ موجود باشد که برای $z \in U$ و $z' = g(z) \in V$، خواص پدیده‌شناسی موضعی آن مجموعه در z و z' یکسان باشد. همسایگی x از نظر پدیده‌شناسی نمی‌تواند از همسایگی y تمیز داده شود. این رابطه، یک رابطهٔ هم ارزی است و می‌توان پرسید کلاسهای هم‌ارزی چیست.

انجام این کار برای هر نوع سیستم طبیعی امری طبیعی است. به یک معنی، شکل هر شیء توسط این نوع کلاس هم‌ارزیِ بین نقاط (یکسانی پدیده‌شناسی) توصیف می‌شود. در زمین شناسی وقتی زمین شناسان یک دّره را برش می‌زنند، درباره رخ‌نمون‌های[2] مواد معدنی صحبت می‌کنند و دو نقطه را که دارای یک رخ‌نمون باشند در یک طبقه قرار می‌دهند. دو رخ‌نمون ممکن است دقیقاً یکی نباشند، ولی با یک تغییر شکل پیوسته به یکدیگر تبدیل شوند. این به نوعی طرح اصلی برای ریخت شناسی توصیفی برای هر سیستم طبیعی است. این مفهوم اصلی معرفی شده در کتاب من بود که از آن، آنچه بعداً نظریهٔ فاجعه نامیده شد سرچشمه گرفت.

این کتاب فوراً منتشر نشد. ابتدا با توسل به ناشر امریکایی بنیامین، چاپ کتاب با اشکال مواجه شد، بدین معنی که ناشر ورشکسته شد و بعدها در سال ۱۹۷۱ـ۷۲ کتاب به ادیسون‌ـوسلی[3] به عنوان ناشر جایگزین سپرده شد. با وجود این تعداد کمی نسخه بی سر و صدا توزیع شد و زیمن[4] در دانشگاه وارویک آن را با علاقه پذیرفت. زیمن کمک زیادی کرد تا اینکه امکان چاپ کتاب به زبان فرانسه در بهار سال ۱۹۷۲ فراهم شد. اندیشه‌های خود او (زیمن) در این موضوع منجر به توسعه عمیق این نظریه شد. در کتاب پایداری ساختاری و شکل‌گیری، من خود را به یک فضای زمینه اکمل، یعنی فضای $\mathbb{R}^3$، یا حداکثر فضاـزمان $\mathbb{R}^4$ محدود کرده بودم. ولی زیمن این نظریه (به قول او«نظریهٔ فاجعه[5]») را در چهارچوب «نظریه کلی سیستمها» قرار داد و به عنوان فضای زمینه، هر فضای موضعاً اقلیدسی را در نظر گرفت.

در حقیقت، در نظریهٔ کلی سیستم، یک سیستم محصور در یک جعبه سیاه بررسی می‌شود، که در زمانهای گسسته (مثلاً در زمانهای صحیح) ورودی‌ها و خروجی‌هایی دارد. فرض کنید اینها بردار هستند. در این صورت توده‌ای از نقاط در یک فضای برداری بدست می‌آید ـ حاصل ضرب فضای برداری ورودی‌ها و فضای برداری خروجی‌ها ـ و برنامه اصلی نظریه کلی سیستمها عبارت است از این که مکانیزم داخل جعبهٔ سیاه، به جای شکستن جعبه و مشاهدهٔ داخل آن، از شکل توده نقاط به‌دست آید. نظریهٔ کلی سیستمها با ملاحظه تناظر بین ورودی‌ها و خروجی‌ها سعی می‌کند با نوعی تغییر این مشخصه‌ها (نامی که

1) unfolding space 2) facies 3) Addison-Wesley 4) Zeeman 5) catastrophe Theory

آنها بکار می‌برند) دریابد درون جعبه سیاه چیست.

این شیوهٔ مشاهده، دیدگاه جدیدی بود که راه را برای آفرینش مدلهای بسیاری باز می‌کرد که می‌توانست در حوزه‌های بسیار متفاوتی از فیزیک (اپتیک هندسی) گرفته تا زیست‌شناسی و علوم انسانی بکار رود. در سال ۱۹۷۴ در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در وَنکوِر[1] زیمن به عنوان سخنران مدعو، یک سخنرانی عالی ارائه کرد که بعداً از او خواسته شد دوباره آنرا تکرار کند. در نتیجه نظریه فاجعه (که من از این به بعد آنرا CT می‌نامم) مانند یک موشک به سرعت اوج گرفت و در سراسر جهان توسط رسانه‌های اصلی منتشر شد. با این حال، این شکوه کوتاه مدت بود و موفقیت کوتاه مدت CT دچار محدودیت‌ها و انتقادهایی از آن سوی اقیانوس اطلس شد.

انتقاد و دفاع از نظریه فاجعه

این تجربه باعث شد بعدها مرا یک فیلسوف علم بنامند. دو انتقاد عمده به CT وارد شد. انتقاد اول به این صورت بود: جهان ما همان است که هست، و اگر یک پدیده در آن شکل عامّ نداشته باشد، به هیچ روشی نمی‌توان با تغییر شکل کوچکی این شکل عام را ایجاد کرد. بنابر این، به عنوان مثال دینامیک‌های کلاسیک به‌وسیله سیستم‌های همیلتونی توصیف می‌شود که عامّ نیست. انتقاد دوم بر اساس عدم کارآیی عملی مدلهای فاجعه است. قضیهٔ باز شدن نقطه‌ای تکین از یک نگاشت هموار به پیش‌بینی کمّی منجر نمی‌شود، بلکه در بهترین حالت یک پیش‌بینی کیفی در همسایگی یک نقطهٔ تکین را به‌دست می‌دهد.

مقابله با انتقاد اول غیرممکن نیست. مثلاً می‌توان لزوم ضمنی ارضاء قیود خاصی را در نظر گرفت (در حالت سیستمهای همیلتونی، قید عبارت است از بازگشت پذیری موضعی خیلی کوچک با بقاء انرژی). امّا انتقاد دوم، از همان ابتدا به نظر من کاملاً بجا بود. از آنجا که مدلهای فاجعه فقط با تقریب یک تغییر هموار مختصات تعریف شده‌اند، ما نمی‌توانیم آنها را برای پیش بینی، همانگونه که قوانین فیزیکی دقیق را بکار می‌بریم، مورد استفاده قرار دهیم. برای من سخت نبود که این کاستی عملی CT را بپذیریم (اگرچه زیمن در پذیرش این مطلب بی‌میل‌تر بود و من متأسفم که او هنوز هم این کاستی را نمی‌پذیرد)، ولی بدون توسل به عبارت راترفورد[2]: «کیفیت چیزی جز کمیت ضعیف نیست». معهذا من باید می‌پذیرفتم که یک مدل بی‌حاصل ممکن است ارزش فکر کردن را داشته باشد، تا جایی که آن مدل به شکل‌بندی سراسری سیستمِ تحت مطالعه کمک کند و این شکل‌بندی از طرق دیگر- مثلاً به کمک تجربه- یا توصیف از طریق تفکر مفهومی که از طریق زبانی بیان می‌شود بسیار مشکل است.

برای آنها که با مدل کلاسیک پیشروی سگها (که کتاب نظریهٔ فاجعهٔ زیمن با آن آغاز می‌شود) آشنا هستند می‌گویم که من هنوز این مدل را که به راحتی به زبان محاوره‌ای قابل توصیف نیست خیلی مفید می‌دانم. ما مجبوریم همواره مقدار زیادی تفسیر و تأویل بکار بریم و آنچه با بیان ریاضی به سادگی بیان می‌شود با زبان معمولی به‌آسانی قابل توصیف نیست. من فکر می‌کنم فایدهٔ اصلی مدلهای نظریهٔ فاجعه

1) Vancouver 2) Rutherford

همین است که از مسأله‌ای که به سادگی قابل شرح نیست، تصویری ارائه می‌دهند.

به هر حال، این مجادله درباره نقش و اهمیت CT که سرانجام در سال ۷۸ـ۱۹۷۷ با نارضایی دانش کلاسیک CT پایان یافت مرا واداشت که بیندیشم که از علم چه انتظاری می‌توان داشت، و اینکه آیا این اصل عمومی علم که هر چیزی باید توجیه تجربی داشته باشدـ این عقیده پیشینیِ «توجیه تجربی» باید پذیرفته شود؟

درست در همان موقع، نظریهٔ فاجعه با نظریهٔ معروف نسبت نظم به بی‌نظمی[1] و به‌طور اساسی با نظریه منسوب به پریگوژین[2] درباره ساختارهای پراکندگی دنبال می‌شد. من از اینکه این نظریه چنین موفقیت اجتماعی عظیمی کسب کرد، کاملاً شگفت زده شدم. در حقیقت آقای پریگوژین بخاطر پدیده‌های برگشت ناپذیر ترمودینامیکی که دربارهٔ آن عملاً هیچ شناختی وجود ندارد، جایزه نوبل را بُرد. هنوز متعجبم که این حقیقت برای افراد مسؤول کمیته نوبل واضح نبود که آنها به نظریه‌ای که وجود نداشت می‌توانستند جایزه داده باشند. به هر حال، حقیقت چنین است که پریگوژین موجب شد که بیشتر دانشمندان از اهمیت برگشت‌ناپذیری در پدیده‌ها و دربارهٔ برگشت‌ناپذیری مرتبط با رویدادهای تکوینی در جهان مورد مطالعه آگاه شوند. این یکی از امتیازات بزرگ برای نظریه پریگوژین است.

با وجود اینـ به حوزهٔ اصلی تفکر من برگردیمـ موفقیت نظریهٔ آشوب[3] هم البته عاملی بود که اشخاص را از نظریهٔ فاجعه دور نگهداشت. CT با دینامیک موضعی نگاشتهای پتانسیل مربوط بود و نگاشتهای پتانسیل یک حالت فوق‌العاده خاص از دینامیک است. شکی نیست که حالتی است بسیار خاص، ولی به یک معنی، شاید تنها حالتی از دینامیک است که قابل پیش بینی است. یعنی اینکه با داشتن اطلاعات اولیه، شخص می‌تواند پیش‌بینی کند مسیر حرکت نقاط به کجا ختم می‌شود؟ این مسأله بصورت کلی فقط برای دینامیکهای حاصل ازگرادیان می‌تواند حل شود. برای دینامیک‌های دیگر، در حالت کلی، سرانجامِ هیچ مسیر با آغاز داده شده، شناخته شده نیست. در آن راستا من فکر می‌کنم بررسی حالت ساده‌ای (که در آن سرانجام هر مسیری کاملاً قابل پیش‌بینی باشد) فوق‌العاده مهم است.

ولی موفقیت نظریه آشوب از سال ۱۹۷۵ شروع شد، به‌خصوص پس از نظریه رول‌ـتَکِنز[4] در سال ۱۹۷۲ و بعدها به‌خاطر نظریهٔ موسوم به تلاطم ضعیف[5] که باعث تعجب زیاد دانشمندان گردید، زیرا انتظار نداشتند تلاطم پدیده‌ای قطعی باشد. باید متذکر شوم که آرنولد در سال ۱۹۶۶ به من گفته بود، او از ضعف نظریه تلاطم لاندائو[6] آگاه بوده و در این باره باید مسلماً موقعیت او را به رسمیت شناخت. ولی بسرعت دانشمندان، نظریه موسوم به جاذبهای عجیب را کشف کردند. سپس مثالهای کلاسیکِ لورِنتز[7]، رُزلر[8] و دیگران مطرح شد.

از نقطه نظر کاربردهای عملی برای توصیف پدیده‌های طبیعی، فکر می‌کنمـ بجز برای پدیده‌های مرتبط

1) order to noise 2) Prigogine 3) chaos 4) Ruelle-Takens 5) weak turbulence
6) Landav 7) Lorentz 8) Rösler

با فیزیک‌ـ مثالهای زیادی نداریم که در آنها نگرش آشوبی[1] معتبر باشد. باید بگویم ثابت شده است ایده‌ای که انتظار میرفت در توضیح حملات صرعی با نوعی روند آشوبناک بسیار مفید باشد، خیلی سست و ناقص است.

مثلاً در بین فیزیولوژیست‌ها، افراد زیادی بوده‌اند که به توضیح آشوبی[2] صرع علاقه‌مند بودند ولی پیش از آن دو مکتب کاملاً متفاوت وجود داشت‌ـ عده‌ای می‌گفتند فیزیولوژیِ نرمال منظم است و این بیماری‌شناسی است که منجر به آشوب می‌شود، درحالیکه معدود فیزیولوژیست‌های دیگر موقعیت متضادی در پیش گرفته و می‌گفتند که جهت برعکس، درست است: حالتِ نرمال آشوبناک است و بسیاری از بیماری‌ها با خلق جاذب بسیار ساده‌ای ظاهر می‌شوند. مثال مشخص همان صرع است. $\alpha-$ریتمِ نرمال EEG فوق‌العاده نوسانی است. (تغییرات جانبی زیادی وجود دارد)، در حالیکه، خاصیت صرعی به‌وسیله یک جاذب تناوبی و فوق‌العاده صلب مشخص می‌شود. بنابر این، این مثال خوبی است که در آن تغییر مفهوم‌های آشوبناک در پدیده‌های واقعی به مسائل نسبتاً مشکلی منجر می‌شود.

بازگشت به منطق ارسطویی

انتقاد دیگر از CT دربارهٔ تمثیل[3] بود. عده‌ای می‌گفتند جنبهٔ بدِ CT این است که منتهی به تفکر مجازی[4] می‌شود درحالیکه دانشمندان واقعی قیاس را نمی‌پذیرند، آنها خودِ واقعیت را مورد آزمایش قرار می‌دهند. من فکر می‌کنم تمایز بین واقعیت و مجاز از نظر فلسفی کمابیش خطاست. در حقیقت، تمثیل تا اندازه‌ای یکی از پدیده‌های عمیق تفکر ماست و اگر بخواهیم تمثیل را بفهمیم، با مسائل فلسفی بسیار اساسی مواجه می‌شویم، که اکنون کمابیش از حوزهٔ مطالعه خارج شده است. ولی، در قرون وسطی با اسکولاستیزم[5] (به‌ویژه ایده‌های نشأت گرفته از ارسطو) مسألهٔ تمثیل به دلیل زیر، یک مسأله اساسی بود. ارسطو آنچه را که نوع[6] نامید به عنوان رده‌ای از محمولات، رده‌ای از صفات که دارای نوعی خاصیت پیوستگی بود تعریف کرد. ارسطو این مفهوم را تقریباً به عنوان یک طرح رده‌بندی‌کننده برای کیفیات یا حتی اشیاء در جهان به‌کار می‌برد. این مطلب او را به این مفهوم که یک نوع می‌تواند یا زیرنوع یک نوع دیگر یا کاملاً غیرقابل توصیف[7] باشد، رهنمون شد. نوع غیرقابل توصیف نمی‌توانست به نوعهای دیگر اضافه شود. در حساب افلاطونی، اعدادی بودند که نمی‌توانستند با یکدیگر جمع شوند.

اگر به‌صورت معمولی فکر کنیم، این نوع استقلال اشیاء مطلبی بسیار مهم است. من از این حقیقت آگاه بودم زیرا قبلاً در سال ۱۹۶۹، مقاله‌ای بر علیه استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها در مدارس ابتدایی و کودکستانها نوشته بودم. مثلاً مربیان جعبه‌ای حاوی مکعبهای بزرگ و کوچک، قرمز و آبی در جلو کودک

---

1) chaosological 2) chaos explanation 3) analogy 4) metaphoric thinking
5) Scholasticism 6) genus 7) uncommunicable

می‌گذاشتند و از کودک می‌خواستند مکعبهای بزرگ یا آبی را از جعبه بیرون آورد. من نمیدانم بچه‌ها چه می‌کردند، ممکن است باهوشترین‌ها آن را انجام می‌دادند، ولی حقیقت این است که، در زبان معمولی، حرف اضافه «یا» نمی‌تواند بین دو صفت که از یک نوع نیستند قرار گیرد. تضاد بین بزرگ و کوچک در نوع کمیت اتفاق می‌افتد، درحالیکه تضاد بین قرمز و آبی در نوع رنگ اتفاق می‌افتد، و این انواع کاملاً نسبت به هم بیگانه‌اند. بنابر این درخواست از کودک که مکعبهای بزرگ یا آبی را از جعبه بیرون آورد کاری است که کاملاً برخلاف ساختار طبیعی ذهن است. ما نمی‌توانیم بگوئیم یک فرد کوتاه یا باهوش است، زیرا این دو کیفیت به یک نوع متعلق نیستند، درحالیکه می‌توانیم بگوئیم یک فرد بلند و باهوش یا کوتاه و باهوش است. وقتی دو نوع کاملاً مستقل هستند، می‌توانیم حرف اضافه «و» را بین آنها قرار دهیم، زیرا به یک معنی، ما مقطع متقاطع آن دو نوع را در فضای مرجع کیفیتها در نظر می‌گیریم. اما نمی‌توانیم «یا» را بکار بریم.

این البته، کاملاً برخلاف منطق معمولی است، که در آن حروف اضافه «یا» و «و» متناظر با اجتماع و اشتراک در تعبیر کلاسیک منطق مرتبهٔ اول در نظر گرفته می‌شود. برای من، منطق مرتبهٔ اول از نقطه‌نظر تفکر معمولی تا حدود زیادی غیر معقول است. هنگامیکه بول[1] در کتابهایش می‌نوشت که مطالبی که می‌نگارد منطق تحقیق دربارهٔ قوانین تفکر است کاملاً در اشتباه بود. او کاملاً در جهتی نادرست نسبت به روشی که ما واقعاً فکر می‌کنیم قرار داشت، زیرا استقلال انواع کیفیات، ساختار بسیار مهمی از تفکر است که اگر کسی برای منطق گزاره‌ای تعبیر نظریه مجموعه‌ها را برگزیند، این ساختار کاملاً ناپدید می‌شود.

بنابر این، این مطلب مرا رهنمون شد که به بررسی منطق قدیمی ارسطو بازگردم و به متافیزیک او توجه کنم. در نتیجه کتابی نوشتم که اخیراً ترجمه اسپانیایی آن منتشر شده است. خوشحالم از اینکه فرصتی دارم که برای آن تبلیغ کنم، من تصادفاً این ترجمه را درست قبل از ترک پاریس دریافت کردم. در این کتاب کوشیده‌ام که به ایده‌های اصلی ارسطو بازگردم و شرح دهم که چه نوع رابطه‌ای بین نگرش او به جهان و دیدگاه من از کاربردهای CT می‌توان دید. به‌طور اساسی دو اشتراک مهم بین دیدگاه ارسطو و من وجود دارد. اول اینکه به‌وضوح نمی‌توانیم هیچ نوع قیاس را در منطق ارسطویی بکار بریم. قیاس زیر را در نظر گیرید: «هر انسانی دوپا است، یک انسانِ یک پا یک انسان است، بنابراین یک انسان یک پا دوپا است.» چه چیزی در این برهان غلط است؟ البته اگر شما یک فرد دارای گرایش منطقی باشید، می‌گویید اولین گام برهان غلط است، زیرا یک انسانِ یک پا دوپا نیست. اما اگر شما کمی فلسفی‌تر باشید، می‌گویید «خوب طبیعی است که بگوییم هر انسانی دوپا است، زیرا به صورت نرمال هر انسانی دوپا است؛ استثناهای خیلی کمی وجود دارد که البته تصادفی است، و وقتی ما از مفهوم انسان صحبت می‌کنیم و می‌گوییم هر انسان دوپا است، این استثناها را در نظر نمی‌گیریم.» من فکر می‌کنم ارسطو دارای این ایده بود که منطق باید بر پایه طبیعت وجودی[2] مفاهیم بنا شود. منطق باید درباره واقعیت خبر دهد. این حقیقت که هر انسان دوپا است وابسته به یک حقیقت اساسی زیست‌شناختی است، یعنی این حقیقت که به زبان مدرن چنین بیان می‌شود، که در ژن هر حیوان مقرر شده است که حیوان به‌طور نرمال تکامل یافته دوپا دارد. این مطلب در

1) Boole 2) ontological nature

متافیزیک ارسطویی با یک مفهوم کاملاً شناخته شده مرتبط است، که ارسطوئیان قدیم در قرون وسطی آنرا صورت ذاتی[1] مفهوم می‌نامیدند. این مفهوم نوعی پایگاه وجودی در واقعیت دارد، که همان صورت ذاتی یا جوهر آن است، بخشی از جوهر انسان این است که او دوپاست.

بنابر این، اگر می‌خواهیم منطق را به صورت طبیعی به کار بریم، به طریقی که در واقعیت بنیان نهاده شده است، مجبور به معرفی این نوع از کیفیت ذاتی[2] که با هر مفهومی مرتبط است هستیم، و باید گاهی به این مفهوم که کیفیت را تبیین می‌کند ارجاع کنیم. اگر این نقطه‌نظر را اتخاذ کنیم، قیاس در بیشتر مواقع شکست می‌خورد. در فیزیک ارسطویی، مفهوم اساسی اینست که در مواجهه با فرآیندها، باید آنهایی را که بیشتر مواقع روی می‌دهد از آنها که بطور اتفاقی واقع می‌شود تمیز داد.

این یک روش بسیار معقول نظرکردن به منطق است، و همچنین یک روش بسیار معقول نظرکردن به خود علم. ما باید جایگاهی برای تصادفهایی که برایشان هیچ توضیح خوبی نداریم قایل شویم. در نقطه‌نظر CT، شخص فرض عمومیت را اختیار می‌کند و هنگامیکه می‌خواهد مورفولوژی را به کمک دینامیک تعبیر کند، همیشه فرض عمومیت را مفروض می‌گیرد. با انتخاب این فرض، شخص به مفهومِ «چیزی که بیشتر مواقع اتفاق می‌افتد» مستمسک می‌شود. البته، عمومیت در چهارچوب دینامیک پتانسیلِ هموار مفهوم خیلی قویتری است. زیرا عمومیت متضمن یک خاصیت «باز» است (برعکس، مثلاً لاغر[3] در فضای توابع). البته، این تمایز برای ارسطو حاصل نشد، ولی این ایده اصلی که فرآیندهای طبیعی عمومی هستند، به مفهومی در فیزیک ارسطویی بنیادی است.

بنابراین من کشف کردم که چیزهائیکه من برای توسعه آنها در CT آن همه وقت صرف کردم قبلاً تا اندازه زیادی نزد ارسطو شناخته شده بود. این بطور اساسی مطالبی است که من در کتابم با عنوان Esquisse d'une sémiaphysique بیان می‌کنم.

توصیف کیفی در مقابل مدل‌سازی دقیق کمی

البته جای انکار نیست که علم جدید یک پیشرفت است. علم جدید به معنی زیر یک پیشرفت است. هنگامیکه ارسطو به پدیده پرتاب سنگ به طور عمودی و رو به بالا می‌نگریست می‌گفت که سنگ در ابتدا دارای نوعی حرکت است که او آن را حرکت «قَسری»[4] (غیرطبیعی) می‌نامید. حرکت رو به بالا برای سنگ یک حرکت طبیعی نیست، زیرا برخلاف طبیعت است. ولی وقتی سنگ به بالاترین نقطهٔ مسیر می‌رسد، شروع به پایین آمدن می‌کند، زیرا می‌خواهد به مرکز زمین که مکان طبیعی سنگ است برسد. بنابراین برای ارسطو، در بالاترین نقطهٔ مسیر سنگ، نوعی فاجعه وجود دارد، سپس حرکت سنگ طبیعتش را تغییر می‌دهد. ممکن است بگویید اکنون کاملاً احمقانه است به این پدیده چنین بنگریم. ابتدا به شما می‌گویم که گفتن این که جاذبه توسط پتانسیل $v = gz$ توصیف می‌شود شاید به هیچ وجه گویاتر از مفهوم ارسطویی

1) substantial form, essence 2) essential quality 3) meager 4) forced

مکان طبیعی نباشد، شاید دقیق‌تر باشد، ولی خیلی گویاتر نیست. نکته دوم این است که موفقیت بزرگ گالیله این بود که کشف کرد که این دو حرکت (صعودی‌ـنزولی) دارای یک معادله $z = v_\circ t - \frac{1}{2}gt^2$ هستند.

بنابراین حرکت نزولی ادامهٔ تحلیلی حرکت صعودی است. البته این یک کشف خیلی بزرگ بود، زیرا همین که ما بدانیم که یک پدیده در مسیر تحولش با یک قانون حاصل از یک تابع تحلیلی هدایت می‌شود، قادر خواهیم بود پیش‌بینی‌های کمی داشته باشیم. در حقیقت دانستن قسمتی از مسیر حرکت، حداقل به‌طور نظری، توسعهٔ تحلیلی همه مسیر را به‌دست می‌دهد. ما یک روش ذاتی برای برون‌یابی[1] داریم و بنابراین امکان پیش‌بینی. من معتقدم هنوز این مطلب درست است که پیش‌بینی اکید در علم وابسته به ادامه تحلیلی است. همینکه از حوزهٔ تحلیلی خارج می‌شویم، ادامهٔ تحلیلی ممکن نیست. در نتیجه روشی دقیق برای برون‌یابی وجود ندارد و هیچ پیش‌بینی کمی دقیقی امکانپذیر نیست. ولی نکتهٔ اصلی این است که توصیف کیفی یک تابع همچنان در ریاضی مفید است. در اولین سال تحصیلی دانشگاه اگر بخواهیم به دانشجویان بیاموزیم چگونه نمودار یک تابع $y = f(x)$ را رسم کنند، ابتدا به آنها می‌گوییم مشتق را محاسبه کنند، صفرهای مشتق را محاسبه کنند، مقدار تابع را در این نقاط محاسبه کنند، قطعات افقی مربوط را رسم کنند و سپس این قطعات را با یک منحنی پیوسته که بین این قطعات به طور یکنواخت صعود یا نزول می‌کند به هم وصل کنند.

این مطلب می‌گوید توصیف کیفی یک شیء ریاضی در هر حال مفید است. این فلسفهٔ اصلی هانری پوآنکاره[2] بود. هنگامیکه در سال ۱۸۸۰، مشخص شد که مسأله ۳ جسم به هیچ روش معقولی قابل حل نیست، پوآنکاره به مطالعهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل در صفحه توجه کرد و دینامیک کیفی را بنیان نهاد. این یک پروژهٔ بسیار بزرگ بود که به نوعی موفقیت ضدگالیله است. ولی در حال حاضر علم هنوز خیلی صلب است؛ هر چیز باید در طرح گالیله‌ای قرار گیرد. این مطلب به‌ویژه متوجه کسانی است که با کامپیوتر کار می‌کنند، زیرا برای آنها هر چیزی باید نهایتاً محاسبه شود. بنابراین هر چیز باید به طور اصولی با روندهای تحلیلی توصیف شود.

ولی تعداد پدیده‌هائی که دارای توصیفهای تحلیلی هستند بسیار کم است. ما مایل نیستیم این مطلب را بپذیریم، زیرا فوراً دربارهٔ فیزیک بنیادی فکر می‌کنیم. فیزیک بنیادی، البته به‌وسیله قوانینی که دارای طبیعت تحلیلی هستند، بیان می‌شود. با وجود این، این قوانین به طور اصولی از آنجا که از فرضیات تقارن بنیادی جهان پیروی می‌کنند، تحلیلی هستند. بنابراین، ما باید فرضیاتی درباره تقارن بنیادی جهان بپذیریم تا قادر باشیم قوانینی به‌دست آوریم که حرکت پدیده‌های بزرگ، مانند مبدأ جهان را با شروع از انفجار بزرگ[3] توضیح داده و سرانجام به سطوح زیرکوانتومی ذرات بسیار کوچک بپردازد.

اغلب فکر می‌کنند از آنجا که انسان هم قوانینی برای پدیده‌های خیلی بزرگ و هم برای پدیده‌های فوق‌العاده کوچک دارد، باید قوانینی مشابه برای پدیده‌های بینابینی نیز داشته باشد. ولی این اعتقاد به احتمال زیاد بی‌پایه است. دلایل خوبی برای این باور وجود دارد که در توصیفهای فیزیکدان‌های نظری،

1) extrapolation 2) Henri Poincare 3) BigBang

پدیده‌هایی نظیر مثلاً ماوراء پایداری هنوز کاملاً غیر قابل پیش‌بینی هستند. یک شیشهٔ پنجره را در نظر بگیرید که عبارت است از یک سیستم در یک وضعیت ماوراء پایدار. بنا بر نظریه مکانیک آماری، پس از مدتی شیشه باید به مؤلفه‌های اصلیش شکسته شود: به توده‌ای از ذرات شیشه. باوجود این، ما هنوز معتقدیم که شیشهٔ مذکور به‌جز در موارد اتفاقی به آسانی نخواهد شکست.

بنابر این تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعی در مقیاس ما هنوز از اصل کلی پیش‌بینی دقیق کمی پیروی نمی‌کنند و این باید ما را مجبور کند که داده‌های ممکن نگرش کیفی را مورد توجه قرار دهیم. به‌این دلیل است که من فکر می‌کنم پس از مدتی دانشمندان حتماً خواهند گفت که CT قادر نیست نتایج عملی به‌دست دهد، ولی با وجوداین ممکن است شناخت کیفی زیادی را به‌دست دهد که به روش‌های دیگر به سادگی قابل حصول نیست. به نظر من پس از این همه افت و خیز منزلتِ CTو بی‌نظمی‌شناسی، می‌توان جامع‌ترین ارزیابی را از این موقعیت به‌دست آورد.

زیستن به عنوان یک فیلسوف

همه مطالب در این کتاب با مفاهیم فلسفی مرتبط است. در نتیجه من به عنوان فیلسوف علم شهرت یافتم. متأسفانه دریافتم که جامعه‌شناسی فیلسوفان با جامعه‌شناسی ریاضی‌دانان کاملاً متفاوت است. ریاضی‌دانان به‌طور کلی جامعه‌ای تشکیل می‌دهند که (شاید به‌خاطر مدال فیلدز) نوعی وحدت جهانی دارد. اگر ما از یک ریاضیدان بخواهیم که ارزش ریاضی آقای x را نسبت به آقای y یا نسبت به آقای z مرتب کند، اساساً یک اتفاق نظر دربارهٔ مفهوم ترتیب وجود دارد. هنگامیکه به فلاسفه نگاه می‌کنیم به‌هیچ‌وجه چنین چیزی نمی‌بینیم.

من فکر می‌کنم فیلسوفان در ملتهای خود زندگی می‌کنند، عملاً هیچ جامعه جهانی از فیلسوفان حتی بین فیلسوفان علم نیز وجود ندارد. در فرانسه، به‌ویژه بسیاری از فیلسوفان فکر می‌کنند که یک فیلسوف خوب باید یک نویسنده خوب باشد و باید دارای سبک باشد. از زمان ژان–پل سارتر[1] ما عادت داشته‌ایم فکر کنیم که یک فیلسوف باید نمایشنامه، رمان و مانند آن بنویسد. در نتیجه کار فلسفی علمی به معنی خاص کلمه در فرانسه، کاری چندان گسترده نیست. من نمی‌خواهم تعمیم زیادی بدهم، امّا مسلماً چیزی نیست که خیلی مهم باشد.

همچنانکه گفتم حتی اکنون خیلی مشکل است که بدانیم در آلمان، ایتالیا یا حتی ایالات متحده، برجسته‌ترین فیلسوفان چه کسانی هستند. البته اشخاص در ایالات متحده موقعیت بهتری برای کسب اعتبار دارند، و این به دلیل امکانات وسیع‌تر برای چاپ مطالب است. این نوع وضعیت جامعه فلسفی چیزی است که نسبتاً مشکل بتوان برای افرادی که خارج از حوزهٔ تخصص اولیهٔ خود مطلب می‌نویسند، پذیرفت. این شاید درسی باشد که باید توسط برندگان مدال فیلدز که ممکن است وسوسه شوند که تخصص اصلی خود را ترک و توجه خود را در زمینه‌های دیگر متمرکز کنند، جدی گرفته شود. آنها نباید انتظار داشته

1) Jean-Paul Sarter

باشند که مسائل را آسان بیابند. همچنانکه گفتم جامعه ریاضی‌دانان اطلاعات زیادی دربارهٔ خود دارند، با این حال در حوزه‌های مربوط به علوم انسانی، شما وضعیت را کاملاً متفاوت می‌بینید.

من به‌طور ویژه به زبان‌شناسی علاقه‌مندم. فکر می‌کنم ایده‌های من جنبه‌های جالبی از نظریه زبان‌شناسی را گشوده است ولی تاکنون، اگرچه توسط متخصصین زبان‌شناسی نادیده گرفته نشده‌ام، کسی هم درواقع اهمیتی برای نظریاتم قائل نیست. آنها می‌گویند اینها موضوعاتی است که مورد علاقه آنها نیست. این شاید جنبه‌ای است که باید رسیدگی شود. فکر می‌کنم ما نیازمند رسیدن به این فرهنگ نسبت به علم هستیم که افراد درک کنند که آنچه در علم مهم است تمیز بین درست و نادرست نیست. این ممکن است برای ریاضی‌دانان عجیب بنماید، ولی من می‌گویم که اگر من امکان گزینش بین یک خطا که دارای توان سامان‌بخشی واقعیت است (چنین چیزی می‌تواند موجود باشد) و یک حقیقت[1] منفرد که به‌خودی خود بی‌معنی است، می‌داشتم، خطا را برمی‌گزیدم و نه حقیقت را. مثالهای زیادی از خطاها وجود دارد که از نظر علمی مهم هستند ومثال‌هایی بسیار زیاد از حقایق در علم وجود دارد که بی‌معنی هستند.[2]

تشکر مترجم: بدینوسیله از جناب آقای دکتر مجتبی منیری که با دقت زایدالوصفی متن ترجمه شده توسط مرا ویرایش کردند صمیمانه سپاسگزارم. همچنین از جناب آقای دکتر محمد اردشیر که بخش «بازگشت به منطق ارسطویی» را مطالعه و پیشنهادهای مفیدی ارائه دادند متشکرم.

مترجم: سید محمد باقر کاشانی
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم پایه
پست الکترونیک: Kashanism@yahoo.com

1) truth

۲) تهیه شده از متن نویسنده و نوار ویدئویی سخنرانی توسط Angel Calsina

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۶ (بهار ۱۳۸۰)، صص. ۳۱ تا ۴۴

آنالیز یک مدل ریاضی برای ژنتیک جمعیت

فرشاد فتاحی

چکیده

در این مقاله با استفاده از معادلهٔ پخش در مسألهٔ مقدار اولیه و مسألهٔ مقدار مرزی‌ـاولیه، و همچنین با استناد به تئوری کلاسیک ژنتیک جمعیت، پدیده‌هایی مانند اثر hair-trigger، اثر آستانه‌ای و اطلاعات کیفی راجع به رفتار عمومی جواب‌های معادلهٔ پخش برای مدل‌های ژنتیکی، بررسی می‌شود. به این منظور، سه حالت عدم غلبه، فوق غلبه و فوق غلبه معکوس ژن‌ها، بر اساس قابلیت زیست ژنوتیپ‌های مختلف، در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر، تعادل‌های $u \equiv 0$ و $u \equiv 1$ مطالعه می‌گردند و نشان داده می‌شود که در عدم غلبه و فوق غلبه، تعادل $u \equiv 0$ به ازای هرگونه آشفتگی و ناپایداریِ به اندازه کافی بزرگ، ناپایدار است و در فوق غلبهٔ معکوس، اثرات آستانه‌ای وجود دارد. همچنین کاربردی دیگر از معادلهٔ پخش در حالت خاص، برای محاسبه فراوانی نسبی ژن با گذشتن زمان در یک جمعیت غیرپویا (بدون پخش) ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: معادلهٔ پخش، ژنتیک جمعیت، اثر hair-trigger، اثر آستانه‌ای.

۱. مقدمه

ژنتیک جمعیت براساس قانون استنتاجی مستقل هاردی در سال ۱۹۰۸ و وینبرگ در سال ۱۹۰۹ پایه‌گذاری شد و به قانون هاردی‌ـوینبرگ[1] مشهور گردید ([۲] و [۶]). بر اساس این قانون، در یک جمعیت بزرگ با آمیزش تصادفی فراوانی ژن‌ها از نسلی به نسل دیگر در غیاب عوامل سیستماتیک (مهاجرت،

1) Hardy-Weinberg

جهش و گزینش)، ثابت است و رابطهٔ ساده‌ای بین فراوانی ژن‌هاو فراوانی ژنوتیپ‌ها برقرار است زیرا بسیاری از نتایج ژنتیک جمعیت و ژنتیک کمّی بر آن استوار است ([۶] و [۱۰]).

اگر در یک جمعیت، شرایط محیط ثابت بماند، مخزن ژن به حالت تعادل در خواهد آمد، به این معنی که فراوانی نسبی ژن‌ها و ژنوتیپ‌ها ثابت خواهد ماند و فقط تغییرات تصادفی مشاهده خواهد شد. فراوانی نسبی ژن‌ها و ژنوتیپ‌ها در جوامع دگرلقاح (غیر همخون) بر اساس قانون هاردی-وینبرگ، به همدیگر مربوط هستند. این ارتباط را همسازش می‌نامند، یعنی تغییر یکی، ایجاد تغییر در دیگری می‌نماید. این تغییرات دوجانبه باعث ایجاد حالتی جدید از تعادل و همسازش می‌شود ([۲] و [۶]).

از طرف دیگر، استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی و معادلهٔ پخش در ژنتیک ریاضی، ابتدا به وسیلهٔ فیشر [۱۱] و کلموگوروف، پتروفسکی و پیسکونوف [۱۲] انجام شد و آنها مسألهٔ ریاضی عدم غلبهٔ ژن‌ها را مدل‌بندی کردند. سپس آرونسون و وینبرگر ([۷]، [۸] و [۹]) موارد دیگر غلبه و عدم غلبه ژن‌ها را بررسی نمودند. در این میان، فالکونر [۱۰] چگونگی تغییر فراوانی ژنها را در حالت‌های مختلف غلبه و عدم غلبه، در اثر گزینش، جهش و سایر موارد مطالعه کرد و این تغییرات را پس از گذشتن یک نسل (و نیز پس از گذشتن t نسل) بررسی نمود، اما مسأله پویایی و پخش جمعیت در زیستگاه را در نگرفت.

هدف این مقاله، استفاده از معادلهٔ پخش در مسألهٔ مقدار اولیهٔ محض (در صفحهٔ $R \times R^+$ و در $R^n \times R^+$) و مسأله مقدار مرزی اولیه (در صفحه $R^+ \times R^+$)، برای مدل‌بندی ریاضی مسأله ژنتیک جمعیت در حالت‌های مختلف غلبه و عدم غلبه ژن‌ها به شکل یک بعدی و چندبعدی است تا بتوان پایداری تعادل‌های مختلف ژنتیکی را بررسی نمود و نحوهٔ تعادل، تثبیت یا حذف یک ژن ویژه را در زیستگاه نشان داد که در بخش‌های سوم، چهارم و پنجم به آنها می‌پردازیم. هدف دیگر مقاله، ارزیابی مطالعات فالکونر [۱۰] و مقایسه آنها با دستاوردهای سایر دانشمندان یاد شده، برای یافتن ارتباط بین آنها و چگونگی استنتاج معادله‌های فالکونر از معادله‌های پخش می‌باشد که در بخش ششم به آن اشاره می‌گردد. در بخش هفتم نیز به تفسیر نتایج به دست آمده خواهیم پرداخت.

۲. معادلهٔ پخش

معادلهٔ پخش (معادلهٔ گرما، انتقال حرارت یا تلگراف) همگن در حالت یک بُعدی (با یک متغیر مکانی) به صورت $k^2 u_{xx} = u_t$ یا $k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ نشان داده می‌شود. همچنین، معادله‌های پخش همگن در حالت دو بعدی و سه بعدی به شکل‌های زیر می‌باشند ([۱]،[۳]،[۵]):

معادلهٔ پخش دو بعدی
$$k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{و} \quad u = u(x, y, t)$$

معادلهٔ پخش سه بعدی
$$k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{و} \quad u = u(x, y, z, t)$$

در معادله‌های فوق، k^2 عبارت از ثابت حرارت یا ثابت پخش است و مقدار آن به طور تجربی تعیین می‌شود

و در هر مورد خاص، از جدول‌های ویژه به دست می‌آید [۴]. اگر پخش، مستقل از زمان t باشد، آنگاه $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ که آن را، معادلهٔ پخش حالت دائمی می‌نامند. معادلهٔ $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ یا $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ را معادلهٔ لاپلاس[1] یا معادلهٔ پتانسیل (حالت سه بعدی) نیز می‌نامند. اغلب، معادلهٔ لاپلاس را حالت دائمی معادلهٔ پخش در نظر می‌گیرند، زیرا در این معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. معادله‌های پخش، سهیموار هستند و خود یا هر یک از شرط‌های مرزی آنها می‌توانند همگن یا ناهمگن باشند. اگر معادلهٔ پخش یک بعدی به صورت $k^2 u_{xx} = u_t + Q(x,t)$ باشد، آن را معادلهٔ پخش ناهمگن می‌نامند. از طرف دیگر، معادله $k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + Q(x)$ نیز یک معادلهٔ پخش ناهمگن، با $Q(x)$ مستقل از زمان است. در حالت دائمی، می‌توان این معادله را به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Q(x)$ یا $\nabla^2 u = Q$ نوشت که آن را معادلهٔ یک بعدی پواسن[2] نیز می‌نامند [۵].

۳ـ مدل‌بندی و آنالیز مسألهٔ ریاضی ژنتیک جمعیت

۱. به وسیله معادلهٔ پخش

در این بخش، به مدل‌بندی ریاضی مسألهٔ ژنتیک جمعیت، نحوه استنتاج مدل اصلی آن و سپس آنالیز مدل می‌پردازیم. ما جمعیتی را با افراد دیپلوئید[3]، در یک زیستگاه یا محیط هموار، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ژن، در یک جایگاه ژنی[4] ویژه و در یک جفت کروموزوم خاص، با دو آلل[5] A و a نشان داده شود. آنگاه جمعیت به سه گروه یا ژنوتیپ[6]، تقسیم می‌شود. افراد موجود در دو گروه از سه گروه فوق را هموزیگوت می‌نامند و با نمادهای aa یا AA نمایش می‌دهند و فقط یک نوع آلل را شامل می‌شوند. اعضای گروه سوم، هتروزیگوت[7] نامیده می‌شوند و دارای ژنوتیپ Aa می‌باشند. این افراد از هر آلل، یکی دارند ([۶]، [۷] و [۸]). فراوانی ژنوتیپ‌های AA، Aa و aa در موقعیت x از زیستگاه و در زمان t را به ترتیب با $\rho_1(x,t)$، $\rho_2(x,t)$، و $\rho_3(x,t)$ نشان می‌دهند. فرض بر آن است که جمعیت دارای آمیزش تصادفی است که در نتیجه، نتاجی با نرخ زاد و ولد r ایجاد می‌شوند و نیز جمعیت یاد شده، با ثابت پخش یک $(k^2 = 1)$ در محیط یا زیستگاه، پخش می‌شود و گسترش می‌یابد. همچنین فرض می‌شود که شایستگی، فقط به ژنوتیپ افراد بستگی داشته، در ارتباط با میزان کُشنده بودن آلل‌های A و a باشد و در این راستا، شایستگی ژنوتیپ‌های AA، Aa و aa به ترتیب با τ_1، τ_2 و τ_3 نشان داده می‌شود که $\tau_1 \leqslant \tau_3$، یعنی قابلیت زیست ژنوتیپ AA حداقل به اندازهٔ قابلیت زیست ژنوتیپ aa می‌باشد. شایستگی‌های فوق با هم متفاوت هستند به طوری که بعضی از ژنوتیپ‌ها واجد قابلیت زیست بیشتر نسبت به سایر ژنوتیپ‌ها می‌باشند. به عبارت دیگر، τ_iها، شرکت نسبی نتاج در نسل بعد را نشان می‌دهند. گاهی شایستگی را

1) Laplace equation 2) Poisson 3) Diploid 4) Locus 5) Allele 6) Genotype
7) Heterozygote

ارزش سازگاری یا ارزش انتخابی نیز می‌نامند. به طورکلی در ژنتیک جمعیت، شایستگی فقط به موفقیت نسبی زایشی افراد اطلاق می‌گردد. به این ترتیب، شایستگی افراد در جامعه دگرلقاح، بستگی کامل و مستقیم به تعداد نتاج تولید شده دارد. ساده‌ترین راه اندازه‌گیری شایستگی (ارزش انتخابی) یک ژنوتیپ، مقایسه تعداد نتاج آن ژنوتیپ با تعداد نتاج سایر ژنوتیپ‌ها است. حدود تغییرات τ_i بین صفر (برای ژن‌های کشنده) و یک (برای موفق‌ترین ژنوتیپ‌ها) تغییر می‌کند. عاملی که سبب کاهش ارزش انتخابی می‌شود، قدرت انتخاب است که به صورت ضریب گزینش (انتخاب) φ_i بیان می‌گردد و عبارت است از کاهش نسبی یک ژنوتیپ خاص در مرحلهٔ گامتی در مقایسه با ژنوتیپ استاندارد یا معمولاً مطلوب‌ترین ژنوتیپ. بین ارزش انتخابی یا شایستگی (τ_i) و ضریب انتخاب φ_i، رابطه $\tau_i = ۱ - \varphi_i$ برقرار می‌باشد. در اغلب موارد، شایستگی یکی از ژنوتیپ‌ها را معادل یک فرض می‌کنند و شایستگی سایر ژنوتیپها را نسبت به آن اندازه می‌گیرند. در این موارد، ارزش انتخابی یک فرد، ممکن است بیشتر از یک بشود ([۲] و [۶]). تولید مثل توسط تقسیم سلولی (تکثیر غیر جنسی) را می‌توان با افزودن مقادیر ثابت به شایستگی‌ها، به مدل یاد شده وارد نمود [۷]. در شرایط ذکر شدهٔ فوق، فراوانی ژنوتیپ‌های مختلف موجود در جمعیت، جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی زیر خواهد بود و به عبارت دیگر، فراوانی‌های ذکر شده در این دستگاه صدق خواهند کرد [۷]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_۱}{\partial t} &= \frac{\partial^۲ \rho_۱}{\partial x^۲} - \tau_۱\rho_۱ + \frac{r}{\rho}(\rho_۱ + \frac{۱}{۲}\rho_۲)^۲ && \text{برای ژنوتیپ AA}\\
\frac{\partial \rho_۲}{\partial t} &= \frac{\partial^۲ \rho_۲}{\partial x^۲} - \tau_۲\rho_۲ + \frac{۲r}{\rho}(\rho_۱ + \frac{۱}{۲}\rho_۲)(\rho_۳ + \frac{۱}{۲}\rho_۲) && \text{برای ژنوتیپ Aa} \qquad (۳\text{ـ}۱)\\
\frac{\partial \rho_۳}{\partial t} &= \frac{\partial^۲ \rho_۳}{\partial x^۲} - \tau_۳\rho_۳ + \frac{r}{\rho}(\rho_۳ + \frac{۱}{۲}\rho_۲)^۲ && \text{برای ژنوتیپ aa}
\end{aligned}$$

در این دستگاه، $\rho(x,t) = \rho_۱(x,t) + \rho_۲(x,t) + \rho_۳(x,t)$ و $[\rho = \rho(x,t)]$.
فالکونر [۱۰] نشان داده است اگر فراوانی ژنوتیپ‌های AA، Aaو aa را در والدین به ترتیب با I، H و B نمایش دهیم، می‌توان فراوانی هر ژنوتیپ را درکل نتاج مشخص نمود که به این منظور، فراوانی‌های مربوط به هر نوع آمیزش (تلاقی) را با هم جمع می‌کنیم. بنابراین، فراوانی در کل نتاج، برای ژنوتیپ‌های AA، Aa و aa به ترتیب عبارت از $(I + ۱/۲H)^۲$، $(I + ۱/۲H)$ $۲(B + ۱/۲H)$ و $(B + ۱/۲H)^۲$ خواهد بود [۶]. حال اگر به جای I، H و B به ترتیب $\rho_۱$، $\rho_۲$ ، $\rho_۳$ را قرار دهیم. مفهوم مؤلفه‌های غیر خطی دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی ۱ـ۳، روشن خواهد شد.

دستگاه ۱ـ۳ یک مسألهٔ مقدار اولیه است که برای حل آن، با لحاظ کردن شرایطی، این دستگاه را به یک دستگاه ساده‌تر، تبدیل می‌نماییم و در واقع سه معادله را به یک معادله با همان ویژگی‌ها، کاهش می‌دهیم [۷]. شرایطی وجود دارد که دستگاه ۱ـ۳ را به معادلهٔ پخش نیمه‌خطی یک‌بعدی، یا مدل اصلی مسأله ژنتیک جمعیت در حالت یک بُعدی (معادلهٔ ۶ـ۳) همگرا می‌کند ولی، مسألهٔ مقدار اولیه تغییر نمی‌کند و

$f(u)$ یا تابع واداشته در معادله یاد شده نیز بدین شکل تعریف می‌گردد:

$$f(u) = u(1-u)\{[\tau_1 - \tau_2][1-u] - [\tau_3 - \tau_2]u\} = \qquad (۳\text{ـ}۲)$$
$$u(1-u)\{(\tau_1 - \tau_2) - [\tau_1 - 2\tau_2 + \tau_3]u\}$$

به منظور بررسی این شرایط، متغیرهای مستقل جدید را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\sigma = \sigma(x,t) = \frac{1}{\rho^2}(\rho_2^2 - 4\rho_1\rho_3) \quad \text{و} \quad \mu = \mu(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(\log \rho) \quad \text{و}$$
$$V = V(x,t) = \frac{1}{\rho}(\rho_3 + \frac{1}{2}\rho_2)$$

در این فرمول‌ها V عبارت از فراوانی نسبی آلل a(در موقعیت x از زیستگاه و در زمان t) در جمعیت، σ عبارت از انحراف دستگاه از تعادل هاردی‌ـوینبرگ و μ عبارت از انحراف دستگاه از تعادل هاردی‌ـوینبرگ وμ عبارت از انحراف دستگاه از فراوانی یکنواخت جمعیت می‌باشد[۷]. با توجه به متغیرهای فوق، دستگاه ۱ـ۳ به این صورت در خواهد آمد[۷]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - f(V) = 2\mu\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{4}\{[\tau_1 - \tau_2]V - [\tau_1 - \tau_3][1-V]\}\sigma \qquad (۳\text{ـ}۳ \text{ الف})$$

(۳ـ۳ ب)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - 2\mu\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \{r - [\tau_1 - \tau_3][1-2V] + \frac{\tau^*}{4}\sigma\}\sigma = 4\tau^* V^2(1-V)^2 - 8\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu^2 + \frac{\tau^*}{4}\sigma + (\tau_2 - \tau_3)V^2 + [\tau_2 - \tau_1][1-V]^2\right\} \qquad (۳\text{ـ}۳ \text{ ج})$$

در این معادله‌ها، f به وسیله رابطهٔ (۲ـ۳) تعریف می‌شود و $\tau^* = \tau_1 - 2\tau_2 + \tau_3$. مقادیر اولیه برای دستگاه یاد شده، در R از این قرارند: $\mu(x,0) = \mu_0(x),\ \sigma(x,0) = \sigma_0(x),\ V(x,0) = V_0(x)$ و به عنوان مثال $V_0(x) = \frac{\gamma_3(x) + 1/2\gamma_2(x)}{\gamma_1(x)+\gamma_2(x)+\gamma_3(x)}$ که در آن $\rho_j(x,0) = \gamma_j(x)$ و $j = 1, 2, 3$. در این حالت، در صفحهٔ $R \times R^+$، $V \in [0,1]$ و $\sigma \in [-1,1]$؛ همچنین μ نیز در نوار باریکی از $R \times [0,T]$ محصور است [۷]. برای ایجاد ارتباط بین معادلهٔ پخش نیمه‌خطی یک‌بُعدی و دستگاه ۱ـ۳، باید شرایطی را تعیین کرد تا سمت راست معادله ۳ـ۳ الف، نسبت به f، قابل صرف نظرکردن باشد. در ژنتیک جمعیت به طور ضمنی فرض می‌شود که $\sigma \equiv \mu \equiv 0$ [۶]. اما معادلهٔ ۳ـ۳ ج نشان می‌دهد که با این فرض، $\frac{\partial V}{\partial x} \equiv 0$، آنگاه هیچ تغییر خاصی وجود نداشته، در نتیجه هیچگونه پخشی رخ نخواهد داد. از این رو فرض می‌کنیم که $\frac{\partial V}{\partial x}$ و μ در ابتدا کوچک باشند. اگر $|\tau_3 - \tau_2| + |\tau_1 - \tau_2| = \varepsilon$ باشد و اگر فرض شود که r بسیار بزرگ و ε بسیار کوچک باشد، آنگاه اگر ε/r به اندازه کافی کوچک باشد و $\frac{1}{\varepsilon} >> t >> \frac{1}{r}$،

در این صورت به ازای زمان‌هایی که در مقایسه با r^{-1} بزرگ ولی در مقایسه با ε^{-1} کوچک باشد، خطای ایجاد شده در اثر جایگزین نمودن معادلهٔ ۶ـ۳ به جای دستگاه ۱ـ۳، در مقایسه با تأثیر تابع f، کوچک و جزئی خواهد بود. بنابراین انتظار داریم که فراوانی نسبی (آلل a)، $u(x,t)=\frac{\rho_2+\frac{1}{2}\rho_2}{\rho_1+\rho_2+\rho_3}$، نزدیک به جواب معادلهٔ پخش نیمه‌خطی یک‌بُعدی (با همان مقادیر اولیه) باشد که در آن، f به وسیلهٔ رابطهٔ ۲ـ۳ تعریف شده است [۷]. نشان داده می‌شود که هر گونه انحراف از قانون هاردی‌ـوینبرگ، در طی زمان $r^{-1}\log(r\varepsilon^{-1})$، میرا خواهد شد. در ادامه، سه حالت را در نظر می‌گیریم ([۷] و [۸]):

(a) عدم غلبه:

اگر $\tau_1>\tau_2>\tau_3$، آنگاه قابلیت زیست ژنوتیپ هتروزیگوت، در بین قابلیت زیست ژنوتیپ‌های هموزیگوت قرار می‌گیرد که این حالت را عدم غلبه می‌نامند. ویژگی‌های تابع $f(u)$ در معادله ۲ـ۳، به ازای $u\in(0,1)$، $f'(0)>0$ و $f(u)>0$ است. این موردی است که پیشتر، در مطالعات فیشر [۱۱] و کلموگوروف، پتروفسکی و پیسکونوف [۱۲] در نظر گرفته شده بود.

(b) فوق غلبه:

اگر $\tau_2>\tau_1\geqslant\tau_3$، آنگاه قابلیت زیست ژنوتیپ هتروزیگوت از قابلیت زیست ژنوتیپ‌های هموزیگوت، بیشتر خواهد بود. در این حالت، ویژگی‌های تابع f در فاصلهٔ $(0,a)$ عبارتند از $f'(0)>0$، $f'(1)>0$ و $f(u)>0$ و به ازای بعضی از مقادیر $\alpha\in(0,1)$، در فاصلهٔ $(\alpha,1)$، $f(u)<0$.

(c) فوق غلبه معکوس:

اگر $\tau_2<\tau_3\leqslant\tau_1$، آنگاه ژنوتیپ هتروزیگوت دارای قابلیت زیست کمتر نسبت به ژنوتیپ‌های هموزیگوت می‌باشد. در این حالت ویژگی‌های تابع f در فاصلهٔ $(0,\alpha)$، $f(u)<0, f'(0)<0$ و به ازای بعضی از مقادیر $\alpha\in(0,1)$، در فاصلهٔ $(\alpha,1)$، $f(u)<0$ و $\int_0^1 f(u)du>0$.

در بررسی یک مدل ژنتیکی، معمولاً با مسائل زیر مواجه می‌شویم: فروانی آلل A در طی زمان چگونه تغییر می‌کند؟ آیا آلل A حذف می‌شود؟ از طرف دیگر، آیا آلل a حذف می‌شود یا اینکه هر دو آلل در تعادل نسبت به هم باقی می‌مانند [۸]؟ به زبان ریاضی، مسأله عبارت از تعیین ماهیت پایداری تعادل‌های $u\equiv 1, u\equiv 0$ وکلیهٔ عوامل مؤثر در آن می‌باشد. اما پیش از آن، اشاره‌ای کوتاه به مسأله‌کوشی[1] می‌گردد تا نحوهٔ به دست آوردن مدل اصلی مسأله ژنتیک جمعیت از طریق مسأله‌کوشی نیز معلوم شود.

قضیه وجود جواب در مورد معادله‌های با مشتق‌های جزیی، به مسأله‌کوشی مربوط می‌شود. این قضیه، شرایطی را ارایه می‌دهد که بر اساس آنها، وجود یا عدم وجود جواب یک معادله با مشتق‌های جزیی حدس زده می‌شود [۱]. مسأله‌کوشی بدین صورت است [۱۴]:

$$u_t=\Delta u+a(x)u^p \quad x\in R^n\ ,t\in(0,T) \qquad (۳ـ۴)$$
$$u(x,0)=\lambda\phi(x) \qquad x\in R^n$$

که $p>1$، $0\underset{\neq}{\leq} a(x)\in C^\alpha(R^n)$، $0\underset{\neq}{\leq}\phi(x)\in C_b(R^n)$ و پارامتر λ مثبت است.

1) Cauchy problem

برای مسألهٔ فوق، مقادیر اولیه‌ای را با عنوان داده‌های کلاس S، در نظر می‌گیریم و به این شکل تعریف می‌کنیم. [۱۴]:

$Class\ S.\ \circ \underset{\neq}{\leq} \phi(\chi) \leq \delta \exp(-\Gamma|\chi|^{۲})$

که $\Gamma > \circ$ و $\delta > \circ$. داده‌های کلاس S، شامل مقادیری است که به اندازهٔ کافی، کوچک باشند [۱۴]. معادلهٔ ۴ـ۳ دارای جواب یکتا به این صورت است: $u(x,t) = u(t,x;\lambda,\phi)$ و در ماکزیمم فاصلهٔ زمانی $[\circ, T^{*})$ تعریف می‌شود که $T^{*} \equiv T^{*}(\lambda,\phi) \in (\circ,\infty)$. در این عبارت، $T^{*}(\lambda,\phi)$ را life span جواب می‌نامند [۱۴]. جواب معادلهٔ ۴ـ۳ از این قرار است ([۱۳] و [۱۴]):

$$u(x,t) = \lambda \int_{R^n} P(t,x,y)\phi(x)dy + \int_{\circ}^{t}\int_{R^n} P(t-s,x,y)a(y)u^{p}(y,s)dy\ ds$$

توان (نمای)P در معادلهٔ ۴ـ۳ عبارت است از: $P = P^{*}(n,m) = ۱ + \frac{۲+m}{n}$. آرونسون و وینبرگر [۸] معادلهٔ ۴ـ۳ را برای عدم غلبه و فوق غلبهٔ ژنها، در حالتی که mدر رابطهٔ فوق مساوی با صفر بود و $p = p^{*} = ۱ + \frac{۲}{n}$، حل نمودند. اکنون به معادلهٔ پخش نیمه‌خطی زیر توجه می‌کنیم [۸]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) \quad \text{و} \quad \Delta = \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial^{۲}}{\partial x_j^{۲}} \tag{۳ـ۵}$$

این معادله، شکل چندبعدی معادلهٔ پخش است که در آن $f(\circ) = f(۱) = \circ$ و تنها جواب‌های $u(x,t)$از آن را در نظر می‌گیریم که در فاصلهٔ [۱ و ۰] باشند. مقایسهٔ معادله‌های ۵ـ۳ و ۴ـ۳ نشان می‌دهد اگر در معادلهٔ ۴ـ۳، $\lambda = ۱$ و $a(x) \equiv ۱$، آنگاه معادلهٔ ۴ـ۳ به معادلهٔ ۵ـ۳ (مدل اصلی مسأله ژنتیک جمعیت در حالت چندبعدی) تبدیل می‌شود، یعنی معادلهٔ ۵ـ۳، حالت خاص معادلهٔ ۴ـ۳ می‌باشد. در معادلهٔ ۵ـ۳، Δ، عملگر لاپلاس در R^n است. شکل یک‌بعدی معادلهٔ پخش (نیمه‌خطی) به این صورت است [۷]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + f(u) \tag{۳ـ۶}$$

بسیاری از نتایجی را که در این مقاله برای آنالیز مدل اصلی و همچنین تابع $f(u)$ به دست می‌آوریم، در شرایط بسیار کلی‌تر نیز معتبر می‌باشند [۹]. بر اساس آنالیز مدل، تعادل $u \equiv \circ$ در شرایطی خاص، با رخ دادن بی‌نظمی‌هایی، ناپایدار می‌باشد. این پدیده را با عنوان اثر hair-trigger بررسی می‌کنند [۸]. نشان داده می‌شود اگر به ازای بعضی از مقادیر $a \in (\circ,۱)$ در فاصلهٔ $(\circ,a)$، $f(u) > \circ$ و $\liminf\limits_{u\to\circ} u^{-(۱+\frac{۲}{n})} f(u) > \circ$ ، آنگاه به ازای جواب‌هایی از $u(x,t)$ در فاصلهٔ $[\circ,۱]$، عبارت $u(x,\circ) \not\equiv \circ$، دلالت بر این موضوع دارد که $\lim\limits_{t\to\infty}\ \inf\ u(x,t) \geqslant a$. در نتیجه اگر f در حالت عدم غلبه یا فوق غلبه مطالعه شود، اثر hair-trigger وجود خواهد داشت [۸]. اگر $f(u) = o(u^{p})$ و $p > ۱ + \frac{۲}{n}$، آنگاه تعادل $u \equiv \circ$ پایدار است و اثر hair-triggerوجود نخواهد داشت. برای مثال، اگر f با رابطهٔ ۲ـ۳ مشخص شده باشد و $\tau_۱ = \tau_۲ > \tau_۳$، آنگاه $f(u) = (\tau_۱ - \tau_۳)u^{۲}(۱-u)$ و آلل A

در جمعیت تثبیت خواهد شد. در این مورد، به ازای $n = ۱, ۲$، اثر hair-trigger وجود خواهد داشت اما به ازای $n \geq ۳$، این اثر وجود ندارد.

بررسی پایداری تعادل‌های مختلف ژنتیکی نشان می‌دهد اگر $u(x,t)$ در فاصلهٔ $[۰, ۱]$، جوابی برای معادلهٔ ۶ـ۳ در $R \times R^{+}$ باشد و اگر $f(u)$ در دستگاه ۱ـ۳ صدق کند و $f'(۰) > ۰$ و در فاصلهٔ $(۰, ۱)$، $f(u) > ۰$ (عدم غلبه ژنها)، آنگاه $u(x,t) \equiv ۰$ یا $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = ۱$، یعنی عدم غلبه در $u \equiv ۱$ پایدار می‌باشد اما در $u \equiv ۰$ به شدت ناپایدار است. از طرف دیگر، اگر $f(u)$ در دستگاه ۱ـ۳ صدق کند و دارای ویژگی‌های فوق غلبه باشد، آنگاه $u(x,t) \equiv ۰$ یا $u(x,t) \equiv ۱$ و یا $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \alpha$. بنابراین در فوق غلبه، هر دو تعادل $u \equiv ۰$ و $u \equiv ۱$، بسیار ناپایدارند ولی تعادل $u \equiv \alpha$ پایدار خواهد بود. در فوق غلبهٔ معکوس، تعادل‌های $u \equiv ۰$ و $u \equiv ۱$ پایدار هستند اما $u \equiv \alpha$ ناپایدار است. این نتیجه‌ها قابل اثبات [۷] و تعمیم به شکل چندبعدی هستند [۸].

۴ـ جواب‌های موج سفری و امواج مسطح در معادلهٔ پخش

در این بخش، برای ادامهٔ آنالیز مدل اصلی، رفتار $u = u(x,t)$ را به عنوان تابعی از زمان، بررسی می‌کنیم. به این منظور، انتقال محورها را به صورت $c > ۰$ و $\xi = x - ct$ نشان می‌دهیم و داریم [۷]:

$$V(\xi,t) \equiv u(\xi + ct, t)$$

و معادله ۶ـ۳ به شکل زیر در خواهد آمد:

$$V_t = V_{\xi\xi} + cV_{\xi} + f(V) \qquad (۴\text{ـ}۱)$$

جواب‌های موج سفری عبارت از جواب‌هایی به شکل $u(x,t) = q(x - ct)$ برای معادلهٔ ۶ـ۳ (با $n = ۱$) می‌باشد و جواب‌های امواج مسطح نیز عبارت از جواب‌هایی به صورت $u(x,t) = q(x.v - ct)$برای معادلهٔ ۵ـ۳ با $V \in R^{n}$ است که در آن، بردارهای واحد و $x.v = \sum_{j=۱}^{n} x_j v_j$ است [۸].

در مورد تابع واداشته $f(u)$، مسألهٔ یافتن جواب‌های موج سفری برای معادلهٔ پخش نیمه‌خطی یک بعدی، همانند مسألهٔ یافتن جواب‌های امواج مسطح برای معادلهٔ پخش نیمه‌خطی چندبعدی است. در ژنتیک جمعیت از جواب‌های موج سفری و امواج مسطح برای بررسی سرعت گسترش و انتشار ناپایداری (آشفتگی) ایجاد شده در تعادل $u \equiv ۰$ با گذشتن زمان، استفاده می‌گردد. با این روش می‌توان چگونگی گسترش ناپایداری در حالت‌های فوق غلبه و عدم غلبه و نیز نحوهٔ تأثیر اثرات آستانه‌ای را در حالت فوق غلبه معکوس بررسی و تثبیت شدن یا حذف یک ژن مفید را در زیستگاه مطالعه کرد. معادلهٔ حالت دایمی عبارت ۱ـ۴، به صورت $q'' + cq' + f(q) = ۰$ است که با دستگاه زیر معادل است:

$$\begin{cases} q' = L \\ L' = -cL - f(q) \end{cases}$$

جواب‌های $L(\xi)$و $q(\xi)$ معادلهٔ $q''+cq'+f(q)=\circ$، خط سیری را در صفحه $q-L$ ایجاد می‌نمایند که معمولاً صفحهٔ فاز نامیده می‌شود. حالا اگر $u(x,t)$ در فاصلهٔ $[\circ,1]$، جوابی برای معادلهٔ ۶ـ۳ باشد و $f(u)$ در شرایط مربوط به حالت‌های فوق غلبه، عدم غلبه و فوق غلبهٔ معکوس در $R\times R^{+}$ صدق نماید، در صورتی که به ازای بعضی از مقادیر $x_\circ$ در فاصله $(x_\circ,\infty)$، $u(x,\circ)\equiv\circ$، آنگاه به ازای هر مقدار از ξ و نیز $C>C^*$، $\lim\limits_{t\to\infty}u(\xi+ct,t)=\circ$. بنابراین در هر یک از سه حالت یاد شده، C^* مثبت با این ویژگی وجود دارد که، اگر ناپایداری (آشفتگی) در معادلهٔ پخش حالت یک بعدی برای مسألهٔ مقدار اولیه محض وجود داشته باشد، این ناپایداری و آشفتگی، با سرعت مجانبی، انتشار می‌یابد [۷]. اگر در حالت چندبعدی هم، $u\in[\circ,1]$ جوابی برای معادلهٔ ۵ـ۳ در $R^n\times R^{+}$ باشد و $C>C^*$، آنگاه در ناحیهٔ $|x|\geq ct$ ، اگر $t\to\infty$، آنگاه $u(x,t)\to 0$. از طرف دیگر، اگر $u(x,\circ)$ طوری باشد که:

$$\lim_{t\to\infty}\inf u(x,t)\geq a>\circ \qquad (۴\text{ـ}۲)$$

آنگاه در ناحیهٔ $ct\leq|x|$، به شرط آنکه $c\in[\circ,c^*]$، $\lim\limits_{t\to\infty}\inf u(x,t)\geq\alpha$. معادلهٔ (۲ـ۴) با $\alpha=1$، مربوط به موارد فوق غلبه و عدم غلبه می‌شود که پیشتر در بخش سوم به آنها اشاره گردید. اما در حالت فوق غلبهٔ معکوس، اثرات آستانه‌ای[1] وجود دارد یعنی به ازای بعضی مقادیر غیرصفر، اگر $t\to\infty$، آنگاه $u(x,t)\to\circ$؛ در حالیکه به ازای سایر مقادیر، اگر $t\to\infty$ ، آنگاه $u(x,t)\to 1$ [۸]. این نتایج، قابل تعمیم به جواب‌های مسألهٔ مقدار مرزی‌ـاولیه نیز می‌باشند [۷]. بنابراین، معادله‌های ۶ـ۳ و ۵ـ۳ به ترتیب دارای جواب‌های موج سفری و امواج مسطح با سرعت مجانبی C^* هستند ([۷] و [۸]). به عبارت دیگر، در تعادل $u\equiv\circ$ اگر $f(u)$ واجد ویژگی‌های فوق غلبه یا عدم غلبه باشد، اگر $t\to\infty$، آنگاه آشفتگی و ناپایداریِ به اندازه کافی بزرگ، با سرعت مجانبی C^* انتشار خواهد یافت. اما در فوق غلبه معکوس، اثرات آستانه‌ای وجود دارند به طوری که آشفتگی و ناپایداری، ممکن است هرگز انتشار نیابد [۸]. در خصوص سرعت مجانبی ذکر شده، می‌توان دقیق‌تر اظهار داشت که، اگر βمقداری ثابت باشد به نحوی که در حالت‌های عدم غلبه و فوق غلبه معکوس، $\beta\in(\circ,1)$ و در فوق غلبه، $\beta\in(\circ,\alpha)$ و اگر:

$$\bar{\mathrm{x}}(t)=\max\{x:u(x,t)=\beta\}$$

$$\underline{\mathrm{x}}(t)=\min\{x>\circ:u(x,t)=\beta\}$$

آنگاه $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{\mathrm{x}}/t=\lim\limits_{t\to\infty}\underline{\mathrm{x}}/t=c^*$ و C^*، سرعت مجانبی است [۷]. اگر در فوق غلبه معکوس نیز، $t\to\infty$ و همزمان $u\to 1$، آنگاه آشفتگی (ناپایداری) با سرعت مجانبی C^* انتشار خواهد یافت [۸]، که برای رخ‌دادن آن لازم است شرایط اولیهٔ مسأله، از بعضی مقادیر آستانه‌ای، فزونی یابد [۷]. همچنین در فوق غلبهٔ معکوس، تعادل $u\equiv\circ$ در صورتی پایدار خواهد بود که آشفتگی و ناپایداری خیلی بزرگ نباشد؛ امااین تعادل به ازای بعضی اثرات آستانه‌ای، ناپایدار خواهد بود [۸]. به عبارت دیگر، در فوق غلبهٔ معکوس،

1) Threshold effects

آلل سودمند A حذف خواهد شد مگر اینکه آلل یاد شده، از ابتدا با فراوانی آللی کافی، در زیستگاهی وسیع وجود داشته باشد [۸].

۵ـ اثر آستانه‌ای در آنالیز مسأله مقدار مرزی‌ـاولیهٔ معادلهٔ پخش

در ادامهٔ آنالیز مدل اصلی، مسألهٔ مقدار مرزی‌ـاولیهٔ زیر را در نظر می‌گیریم (حالت یک بعدی):

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(u) && \text{در } R^+ \times R^+ \\ u(x,\circ) &= \circ && \text{در } R^+ \\ u(\circ,t) &= \Psi(t) && \text{در } R^+ \end{aligned} \qquad (۵\text{ـ}۱)$$

مسألهٔ فوق، از نوع ناهمگن با شرط مرزی ناهمگن است ([۵] و [۷]). در اینجا شرط اولیه $u(x,\circ)=\circ$ به این معنی است که فراوانی آلل A در موقعیت x از زیستگاه و در زمان $t=\circ$، صفر می‌باشد. همچنین، شرط مرزی $u(\circ,t)=\psi(t)$ به این مفهوم است که فراوانی آلل A در موقعیت $x=\circ$ و در زمان t، به صورت تابعی از زمان تعیین می‌گردد، بنابراین مقادیر $\psi(t)$ در فاصلهٔ $[\circ,۱]$ قرار خواهند گرفت [۷]. می‌توان نشان داد که در این مسألهٔ مقدار مرزی‌ـاولیه نیز، اثر آستانه‌ای وجود دارد [۷]. اگر $u(x,t)$در فاصلهٔ $[\circ,۱]$ جوابی برای مسأله ۱ـ۵ و $f(u)$ دارای ویژگی‌های عدم غلبه باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty}\ \lim_{t\to\infty}\ \inf\ u(x,t) = ۱$$

بنابراین اگر $\psi(t)\not\equiv\circ$، آنگاه فراوانی آلل A $[u(x,t)]$ پس از گذشتن زمان طولانی، در همهٔ نقاط x از زیستگاه، به واحد نزدیک می‌شود و این موضوع به چگونگی رفتار $\psi(t)$ ارتباط ندارد. با همین روش می‌توان نشان داد اگر $f(u)$ دارای ویژگی‌های فوق غلبه باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty}\ \lim_{t\to\infty}\ \inf\ u(x,t) = \lim_{x\to\infty}\ \lim_{t\to\infty}\ \sup\ u(x,t) = \alpha \text{ و } \alpha\in(\circ,۱)$$

به عبارت دیگر، در فوق غلبه، فراوانی آلل A پس از طی زمان بسیار، در همهٔ نقاط xاز زیستگاه، به مقدار α نزدیک خواهد شد. همچنین، اگر $u(x,t)\in[\circ,۱]$ را به عنوان جوابی برای مسأله ۱ـ۵ در نظر بگیریم و $f(u)$ نیز واجد ویژگی‌های فوق غلبهٔ معکوس باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to\infty}\ \limsup_{t\to\infty}\ u(x,t) = \circ$$

یعنی در فوق غلبه معکوس، اثر آستانه‌ای وجود دارد و فراوانی آلل A پس از گذشتن زمان طولانی، در همهٔ نقاط x از زیستگاه به صفر نزدیک خواهد شد [۷].

۶ـ بررسی مدل ژنتیکی:

۲. در جمعیت بدون پخش

معادله‌های ۵ـ۳ و ۶ـ۳ را می‌توان به عنوان مدل‌های ساده و ایده‌آل برای برخی ویژگی‌های کیفی فرآیندهای ژنتیکی، به جای یک مدل کمّی، در نظر گرفت. بنابراین بررسی ارتباط بین ویژگی‌های تابع $f(u)$ و نحوهٔ رفتار جواب‌های معادله‌های ۵ـ۳ و ۶ـ۳، جالب خواهد بود [۷]. فرض می‌کنیم که در معادله‌های ۵ـ۳ و ۶ـ۳، $\Delta u = 0$، به این معنی که فراوانی آلل A نسبت به موقعیت x_j تغییر ننماید؛ یعنی جمعیت را در حالت غیرپویا (بدون پخش) در نظر می‌گیریم، در نتیجه معادله‌های ذکر شده به معادلهٔ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} = f(u) \qquad (۶\text{ـ}۱)$$

تبدیل خواهند شد. در این حالت، فراوانی آلل A فقط با گذشتن زمان تغییر می‌کند و این تغییر در همهٔ موقعیت‌های x_j محیط یا زیستگاه، به یک اندازه و ثابت می‌باشد. همانگونه که پیشتر ذکر گردید، $f(u) = O(u^p)$ را که در آن $p = 1 + \frac{2}{n}$ می‌توان برای توصیف تابع $f(u)$در معادله‌های ۵ـ۳ و ۶ـ۳، در نظر گرفت. فالکونر [۱۰]، تغییر فراوانی ژن را پس از یک نسل گزینش، در شرایط مختلف از غلبه و عدم غلبه آلل‌های A و a بررسی نموده و تغییر فراوانی ژن را پس از یک نسل انتخاب، $\Delta\theta = \theta_1 - \theta$(۶ـ۲) به دست آورده است که در آن Δ تغییر فراوانی آلل و θ فراوانی اولیه آلل a می‌باشد. بنابراین، برای محاسبهٔ فراوانی نسبی ژن با گذشتن زمان و به دست آوردن تابع $\theta = \theta(t)$، حد معادلهٔ ۲ـ۶ را، که تبدیل به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خواهد شد، در نظر می‌گیریم ([۲] و [۸]):

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta) \quad \text{و} \quad f(\theta) = O(\theta^p) \qquad (۶\text{ـ}۳)$$

معادله‌های تفاوتی $\Delta\theta$ که توسط فالکونر [۱۰] برای حالت‌های مختلف تغییر فراوانی ژن مطالعه شده‌اند، حداکثر از درجهٔ سوم هستند، یعنی در این معادله‌ها $p = 2$ و حداکثر ۳ می‌باشد. همچنین این دانشمند نمودارهایی را ارایه کرده است که محور افقی آنها عبارت از مقادیر مختلف فراوانی اولیهٔ ژن θ، و محور قائم آنها عبارت از تغییر فراوانی ژن $\Delta\theta$ می‌باشد (مشابه با صفحهٔ فاز [۳]) و برای عدم غلبهٔ ژنها، نمودار درجه سوم را به دست آورده [۱۰] مقایسهٔ معادلهٔ ۳ـ۶ با معادله‌های ۱ـ۶، ۵ـ۳ و ۶ـ۳ نشان می‌دهد که معادلهٔ ۳ـ۶ معادل با رابطهٔ ۱ـ۶ می‌باشد و با بیان بهتر، معادلهٔ ۳ـ۶، حالت خاص معادله‌های ۵ـ۳ و ۳ـ۶ است که در آنها $\Delta u = 0$ (Δ: عملگر لاپلاس). اگر در معادلهٔ ۳ـ۶، $p = 2$، نمودار سهمی و اگر $p = 3$، نمودار درجهٔ سوم حاصل خواهد شد. ذکر این نکته لازم است که در تابع‌های ارایه شده توسط فالکونر [۱۰] که اساساً به شکل $f(\theta) = O(\theta^p)$ هستند، انتخاب در هر جهت (سمت)، با علامت‌های مثبت و منفی برای ضریب گزینش (یعنی $\varphi\pm$) مشخص می‌گردد. همانگونه که در بخش سوم نیز اشاره گردید، بین φ_i و τ_i رابطه $\tau_i = 1 - \varphi_i$ برقرار است. مقدار φ_i بین صفر و یک متغیر است؛ مؤلفه $\varphi+$ به معنای گزینش به نفع یک آلل خاص می‌باشد، یعنی علامت منفی برای φ، نشان‌دهنده انتخاب در جهت

مخالف و به سود آلل است. در این راستا، در حالتی که غلبه کامل باشد و گزینش علیه آلل a انجام شود خواهیم داشت:

$$f(\theta) = O(\theta^p) = \frac{-\varphi\theta^{۲}(۱-\theta)}{۱-\varphi\theta^{۲}} \quad \text{و} \quad \varphi \in [۰, ۱] \qquad (۶\text{-}۴)$$

همچنین در حالتی که گزینش علیه ژنوتیپ‌های AA و aaانجام شود و ضریب گزینش به ترتیب برابر با $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ باشد، در صورت عدم وقوع جهش، می‌توان نوشت:

$$f(\theta) = O(\theta^p) = \frac{\theta(۱-\theta)[\varphi_۱ - (\varphi_۱+\varphi_۲)\theta]}{۱-\varphi_۱(۱-۲\theta)-(\varphi_۱+\varphi_۲)\theta^{۲}}$$

فالکونر [۱۰] با فرض اینکه ضریب گزینش (φ) کوچک باشد، مخرج رابطهٔ ۴ـ۶ را برابر واحد در نظرگرفته است. بنابراین:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\varphi\ \theta^{۲}(۱-\theta)}{۱-\varphi\ \theta^{۲}} \approx -\varphi\ \theta^{۲}(۱-\theta) \quad \text{و} \quad p = ۳ \qquad (۶\text{-}۵)$$

اکنون برای مشخص شدن جواب $\theta = \theta(t)$ معادلهٔ دیفرانسیل معمولی و مرتبهٔ اول ۵ـ۶، باید آن را حل کرد ولی جواب، فقط تابع متغیر زمان خواهد بود، درحالیکه جواب معادله‌های ۵ـ۳ و ۶ـ۳ به صورت $u = u(x,t)$ می‌باشد([۷]، [۸] و [۱۴]).

بحث:

جمعبندی نتایج حاصل نشان می‌دهد که معادله‌های فالکونر، حالت خاص معادله‌های پخش یک‌بعدی و چندبعدی هستند و معادله‌های پخش در ژنتیک جمعیت، حالت خاصی از مسألهٔ کوشی (معادله ۴ـ۳) می‌باشند. بنابراین، مدلبندی ریاضی مسألهٔ ژنتیک جمعیت به وسیله معادلهٔ پخش، اطلاعات دقیقتری را نسبت به معادله‌های فالکونر ارایه خواهد داد و اعتبار نتایج افزایش خواهد یافت، زیرا پخش شدن جمعیت در زیستگاه را نیز در مدل، لحاظ می‌نماید.

از طرف دیگر، معلوم شد که در عدم غلبه و فوق غلبه ژنها، اثر hair-trigger وجود دارد یعنی رخ‌دادن بی‌نظمی باعث ناپایدار شدن تعادل $u \equiv ۰$ می‌گردد. این مطلب را می‌توان اینگونه تفسیر نمود که در عدم غلبه ژنها، تعادل $u \equiv ۰$ به شدت ناپایدار است و جواب‌های موج سفری و امواج مسطح نیز نشان می‌دهند که آشفتگی، با گذشتن زمان بسیار طولانی، به سرعت گسترش خواهد یافت. بنابراین فراوانی ژن به حد میانگین و تعادل خواهد رسید. به عبارت دیگر، نتاج ایجاد شده، زنده می‌مانند و پدیدهٔ تفرق ژنها به سرعت ادامه خواهد یافت. اما تعادل $u \equiv ۱$ در عدم غلبهٔ ژنها پایدار است؛ در نتیجه یک ژن خاص، در جمعیت تثبیت خواهد شد.

در فوق غلبهٔ ژنها، چون هر دو تعادل $u \equiv ۰$ و $u \equiv ۱$ بسیار ناپایدار هستند، بر اساس جواب‌های موج سفری و امواج مسطح، آشفتگی با گذشتن زمان بسیار زیاد، به سرعت گسترش می‌یابد و فراوانی ژن

به حد تعادل و مقدار میانگین می‌رسد، یعنی یک آلل ویژه، تثبیت نخواهد شد. فوق غلبه باعث چند شکلی می‌شود که عبارت است از تفاوت‌های قابل مشاهدهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ ژنهای واجد فراوانیِ در حد میانگین. جایگاه‌های ژنی چند شکل، موجب تنوع صفت‌های کمّی می‌گردند.

در فوق غلبهٔ معکوس ژنها، تعادل‌های $u \equiv \circ$ و $u \equiv ۱$ پایداراند و با توجه به جواب‌های موج سفری و امواج مسطح، چون با گذشتن زمان زیاد، گاهی u به صفر و گاهی به یک نزدیک می‌شود، یعنی به دلیل وجود اثرات آستانه‌ای، ناپایداری ممکن است گسترش نیابد و در نتیجه یک آلل خاص و حتی نامطلوب، در جمعیت تثبیت خواهد شد و امکان دارد آلل سودمند A از جمعیت حذف شود؛ زیرا در این حالت شایستگی و قابلیت زیست ژنوتیپ هتروزیگوت، کمتر از سایر ژنوتیپ‌ها است و نتاج ایجاد شده آنقدر زنده نمی‌مانند تا پدیده تفرق ژنها ادامه یابد.

لازم به ذکر است که مسایل دیگری را از ژنتیک جمعیت مانند مهاجرت، جهش و تثبیت، می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ پخش مطالعه کرد و تأثیر آنها را بر فراوانیهای آللی و فراوانیهای شرطی آللی، برای هر موقعیت و زمان در جمعیت‌های ژنتیکی پویا و واجد پخش در زیستگاه خود، بررسی نمود. بنابراین همکاری بیشتر محققان آنالیز ریاضی و ژنتیک، می‌تواند نتایج متنوع و کاربردی دیگری را هم ارایه نماید.

سپاسگزاری:

بدینوسیله از سردبیر بزرگوار مجله فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی جناب آقای دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری به خاطر پیگیری مداوم وضعیت مقاله اینجانب و همچنین از داوران محترم که زحمت بررسی و اصلاح مقاله را متقبل گردیده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

[۱] افشارنژاد، ز. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مقدماتی. تهران [پروین؛ معین]، چاپ اول، ۵۵۹ ص (۱۳۷۳)

[۲] اهدایی، ب. اصلاح نبات. انتشارات بارثاوا مشهد، ۴۵۶ ص(۱۳۷۳).

[۳] بابایی، ع ا و میامئی، ا. معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها. (تألیف جرج ف. سیمونز). انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۵۲۹ ص (۱۳۶۹).

[۴] بهزاد، م؛ کاظمی، س و کافی، ع. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (تألیف جرج توماس و راس فینی). جلد دوم. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۴۱۳ ص (۱۳۷۰).

[۵] حاجی جمشیدی، ف. ریاضیات مهندسی (جلد دوم) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی. انتشارات دماوند، ۴۰۸ ص (۱۳۷۰).

[6] Akin, E. Geometry of Population Genetics. Springer, (1979).

[7] Aronson, D. G. and H. F. Weinberger. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and never pulse propagation, in "Partial Differential Equations and Related Topics", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 446(1975) PP. 5-49, Springer, New York.

[8] Aronson, D.G. and H.F. Weinberger. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. Advances in Mathematics. 30(1978) 33-76.

[9] Aronson, D. G. and H. F. Weinberger. Asymptotic properties of nonlinear diffusion, (in preparation).

[10] Falconer, D.S. Introduction to Quantitative Genetics. Longman, U.S.A (1985). Fisher, R. A. The advance of advantageous genes, Ann. of Eugenics. 7(1937) 355-369.

[11] Fisher, R. A. The advance of advantageous genes, Ann. of Eugenics. 7(1937) 355-369.

[12] Kolmogoroff, A., Petrovsky, I. and Piscounoff, N. Étude de 1'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matiére et son application a un probléme biologique, Bull. Univ. Moscow, Ser. Internat., Sec. A. 1(1937) 1-25.

[13] Pinsky, R.G.Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in R^n. Journal of Differential Equations. 133 (1997) 152-177.

[14] Pinsky, R.G. The behavior of the life span for solutions to $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in R^n. Journal of Differential Equations. 147 (1998) 30-57.

فرشاد فتاحی

کرمانشاه ـ فرهنگیان فاز یک، خیابان فرهمند، مجتمع مسکونی آزادی، بلوک ۱۰ غربی، طبقه چهارم، شماره ۱۰۳۲،
کد پستی ۶۷۱۴۷.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۶(بهار ۱۳۸۰)، صص. ۴۵ تا ۵۲

قضیهٔ دوجمله‌ای: مفهومی گسترده در ریاضیات دوران اسلامی

محمد یادگاری

چکیده

نمونه‌ای از قضیهٔ بسط دوجمله‌ای را که روش محاسبه و به توان رسانیدن مجموع دو مقدار را تا قوّهٔ هفتم نشان می‌دهد در نوشته‌های زنجانی (۱۲۶۲ میلادی) می‌توان به‌دست آورد. با اینکه قضیهٔ فوق توسط کرجی (۱۰۲۹ میلادی) کشف و مورد استفادهٔ چندین ریاضیدان پس از او قرارگرفته است، تشریح آن توسط زنجانی نمایانگر آن است که قضیهٔ دو جمله‌ای اهمیت بسزایی در ریاضیات قرون وسطی داشته است. شرحی که زنجانی در مورد این قضیه به زبان عربی نوشته در اینجا ترجمه شده است.

جدول ضرایب دو جمله‌ای، قاعده تشکیل آن: $\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ و بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$ برای اعداد صحیح n، در نوشته‌ای ازکرجی به‌دست آمده است، که توسط سَمَوأل (۱۱۷۵ میلادی) در الباهر [الباهر فی علم‌الحساب] گزارش گردیده است. رشدی راشد معتقد است که این اولین کتاب شناخته شده در مورد قضیهٔ دو جمله‌ای می‌باشد [راشد، ۱۹۷۲، ۳].

تعدادی از ریاضیدانان مسلمان قضیهٔ دو جمله‌ای را بعد از آنکه توسط کرجی کشف شد، به دست آوردند. در زمرهٔ آنها عمر خیام نیشابوری (۱۱۳۱ میلادی)، زنجانی (۱۲۶۲ میلادی)، طوسی (۱۲۷۴ میلادی)، ابن‌البناء (۱۳۲۱ میلادی)، (به علاوه غیاث‌الدین جمشید کاشانی (۱۴۲۷ میلادی) [۱۱])[۱]، ابن

۱) مطالبی ازکتاب [۱۱] توسط مترجمین برای تکمیل تاریخ موضوع به مقاله افزوده شده است.

زُرَیق، که در پایان قرن چهاردهم میلادی زندگی می‌کرد و محمد باقر یزدی که در ابتدای سدهٔ هفدهم میلادی می‌زیست [۱۱]) می‌باشند.

عمر خیام نیشابوری ادعا کرد قاعده‌ای برای بسط $(a+b)^n$ کشف کرده است که برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم، پنجم، ششم و بالاتر به کار می‌رود. او ادعا کرد:

«من کتابی برای تشریح صحت این قواعد که برای حصول مقادیر مورد نیاز بود، تصنیف نموده‌ام و همچنین قواعدی برای حل اینگونه مسائل گرد آورده‌ام- نیز به استخراج ضلع از مربع مربع، مربع مکعب و مکعب مکعب، و غیره اشاره کرده‌ام- که جملگی تازه‌اند. این اثبات‌ها حسابی هستند...».
[کثیر[۱]، ۱۹۶۲، ۷۳۷]

عمر خیام نیشابوری به کتاب «مشکلات الحساب» [مسایلی در حساب] که هنوز مفقود است، اشاره می‌کند. به هر حال قواعدش برای بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ تا $n=۱۲$ توسط طوسی (کسی که بیشترین تأثیر را از عمر خیام نیشابوری گرفته است) درکتابی به نام «جوامع‌الحساب» [یوشکویچ[۲]، ۱۹۷۰، ۳۲۶] آورده شده است. (برای نخستین بار در سال ۱۹۴۸، پاول لوکی، مورخ ریاضی آلمانی، وجود دستور دوجمله‌ای را برای توان‌های طبیعی، در «مفتاح‌الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی کشف کرد و نام او را در دنیای غرب پرآوازه ساخت. محمد باقر زین‌العابدین یزدی، درکتاب «عُیون‌الحساب» خود، نه تنها مثلث حسابی را آورده است، بلکه دستوری کاملاً مشابه آنچه امروز می‌دانیم، برای بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$، برای هر عدد طبیعی n آورده است، بدون اینکه نیاز به تنظیم مثلث حسابی تا سطر مورد نظر باشد [۱۱]).

در یک دست نوشتهٔ عربی در ریاضیات که توسط زنجانی نوشته شده است، من به صفحه‌ای برخورد کردم که در آن بسط قضیهٔ دو جمله‌ای مجموع دو مقدار تا توان هفتم را توضیح داده است.

زنجانی را مورخان به عنوان فقیه می‌شناسند، ولی کارهایش در ریاضیات، مورد غفلت واقع شده است. این کار را باید به عنوان مثالی بررسی کرد که کاربرد وسیع قضیه دو جمله‌ای را در دایره ریاضیات اسلامی روشن می‌کند. روشن است که زنجانی متأثر ازکرجی می‌باشد. بررسی کارهای زنجانی پرتوی بر دانش ریاضیات پدید آمده در دو قرن (ازکرجی تا الزنجانی) می‌افکند.

1) Kasir 2) Youschkevitch

رونوشت از ترجمه‌ای نقل قول (پاورقی ۲۵b) قسطاس‌المعادله فی علم‌الجبر و المقابله. متن اصلی در کتابخانه احمد III (شماره ۳۴۵۷) توپکاپی سرای، استانبول یافت می‌شود. این متن با اجازهٔ موزهٔ توپکاپی سرای ارائه شده است.

کتاب زنجانی معروف به «قسطاس المعادله فی علم الجبر و المقابله» (ترازوی معادله(ها) در علم جبر و مقابله) با شماره ۶۹۶A.H (۱۲۹۷ A.D) به ثبت رسیده است. نویسنده خودش را در مقدمهٔ کتاب معرفی کرده و ذکر می‌کند که ریاضیات را در دوران جوانی مطالعه نموده است و بخشی از زندگیش را صرف علوم و نوشتن نظرات اساسی‌اش در قالب چندین مقاله نموده است.

او ادعا می‌کند که کارهایش برای متعلمین شناخته شده است، چنانکه بعضی از متعلمین کارهای او را دزدیده و به نام خود قلمداد کرده‌اند.

قابل فهم است که زنجانی تنها بخشی از زندگی‌اش را صرف مطالعه ریاضیات نموده است. در زندگی‌نامه‌های مختصری که توسط خوانساری، بغدادی و دیگران نوشته شده است، عزالدین عبدالوهاب بن

ابراهیم بن محمد جرجانی زنجانی خزرجی (وفات: ۶۶۰ هجری/۱۲۶۲ میلادی) به عنوان یک فقیه، عالم صرف و نحو، زبان شناس، عالم اشتقاق و همچنین وی را فردی واقف به علوم و دانش زمان خود معرفی شده است. از وی اطلاعات زیادی جز اینکه وی مقیم تبریز بوده و در موصل زندگی می‌کرده و همچنین در بغداد دار فانی را وداع گفته است، در دست نیست. اوکتاب‌های زیادی در زمینهٔ زبان، شعر و در علم صرف و نحو به رشته تحریر در آورده است. زنجانی نیز خودش را به عنوان یک ریاضیدان بالیاقت در «قسطاس المعادلة» خود شناسانده است. علاوه بر این متن، مقاله دومی در مورد ریاضیات با عنوان «عمده‌الحساب» شماره (۳۱۴۵) در تعدادی از کتابخانه‌های استانبول [کراتی[1] ۱۹۶۲، ۷۳۷] موجود است. زنجانی به کارهای ریاضی دیگری همچون «کتاب البرهان» ارجاع داده است که در حال حاضر هیچ اطلاعی از آن در دسترس نیست.

متن منحصر به فرد «قسطاس المعادله» در کتابخانه III احمد (شماره ۳۴۵۷) در توپکاپی سرای در استانبول [کراتی، ۷۳۷،۱۹۶۲] به وسیله دکتر مارتین لوی[2] [۱] یافت شده بود. این کتاب دستنویس مفصلی است که در بیشتر بخش‌ها دارای بیست و یک خط در یک صفحه می‌باشد. این کتاب به ده فصل تقسیم می‌شود که به بررسی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، کسرها و توان‌ها و غیره می‌پردازد. کلّ شماره ورق‌ها ۲۳۲ [۴۶۴ صفحه] می‌باشد.

همان طوری که در آن دوره درکارهای علمی مرسوم بود، هیچ نماد ریاضی در متون دیده نمی‌شد، و به طور کامل از حروف برای این منظور استفاده می‌شد. اعداد هیچ نقشی نداشتند، و هنوز علائم نقطه‌گذاری مرسوم نشده بود.

زنجانی در پیروی از سبک گذشتگان خود، خوارزمی و ابوکامل، در متن، مجهول را «شیء» مربع چیزی را «مال» و مکعب را به عنوان «کعب» آورده است. x^4 «مال مال» گفته می‌شود. به طریق مشابه، «مالِ کعب» عبارت است از x^5، «کعب کعب» x^6 است و «مال مالِ کعب» x^7 است. برای راحتی، من از اصطلاحات امروزی استفاده خواهم کرد.

در این کتاب با موضوعات مورد نظر به شکلی منظم برخورد شده است: یعنی، نویسنده از تعاریف، قضایا، و تعمیم‌ها استفاده می‌کند. هیچیک از مسائل مورد بحث را به طور صوری ثابت نمی‌کند. زنجانی در شروع کتاب به این مسأله اذعان نموده و از متعلمین در خواست نموده است که از این موضوع به‌هیچ‌وجه نگران نباشند. به اعتقاد او، جای اثبات در علم هندسه است، و از خداوند متعال می‌خواهد که به او توفیق نگاشتن کتاب دیگری را عطا کند تا در آن اثبات هندسی و جبری مسائل خود را به دست دهد.

بحث قضیهٔ دو جمله‌ای در پایان فصل ۶ آغاز می‌شود. در دید اول، به نظر می‌رسد که زنجانی سعی در توصیف چگونگی پیدا کردن ریشه‌های جبری دارد. امّا، با نگاهی عمیق‌تر واضح است که برعکس، نویسنده از قضیهٔ دوجمله‌ای در استخراج جذر یک چندجمله‌ای استفاده نموده است، شیوه‌ای که نخستین بار توسط کرجی تشریح گردیده است [راشد ۱۹۸۰، ۲۴۱].

1) Karatay 2) Martin Levey

یک مطالعهٔ تطبیقی در فصل ۶ کتاب زنجانی و «کتاب الباهر» (صفحه ۷۱ـ۱۶۳ از متن عربی، صفحه ۲۸ـ۳۶ از ترجمه فرانسوی) نشان می‌دهد که زنجانی به خوبی بر کارهای گذشتگان خود: کرجی و سَمَوأل واقف بوده است. به عنوان نمونه در بعضی موارد، زنجانی دقیقاً همان کلمات و مثال‌ها را مورد استفاده قرار می‌دهد. شیوهٔ پیدا کردن ریشهٔ مربع یک چندجمله‌ای در «الباهر» (صفحه ۶۳ـ۶۴ در متن عربی، و در صفحه ۲۹ از ترجمه فرانسوی) گزارش شده است، و بنابر این در اینجا آنها را تکرار نخواهیم کرد.

زنجانی در سطر ۴ از صفحه ۲۵b یک توضیح تفضیلی از قضیهٔ دو جمله‌ای را داده است. او می‌نویسد:

> «این فصل را با بحث در بسط عبارات جبری به پایان می‌رسانیم. این موضوع ما را به تجزیهٔ چنین عبارتی در حالتی که نیاز داریم، قادر می‌سازد».

بنابراین او به بسط $(a+b)^{۷}$ تا $n = ۷$ اقدام کرده است. برای مطابقت با کار الکرجی، ترجمهٔ عبارت زنجانی را برای بسط $(a+b)^{۷}$ را در زیر می‌آوریم:

> [سطر ۱۴، از صفحه ۲۵b] توان هفتم مجموع مساوی است با توان هفتم هر یک از جملات به‌علاوهٔ هفت برابر حاصل‌ضرب هر یک از آنها در توان ششم دیگری به‌علاوهٔ بیست و یک بار حاصل‌ضرب مربع هر یک از جملات در توان پنجم از دیگری به‌علاوهٔ حاصل‌ضرب مکعب هر جمله در توان چهارم دیگری به تعداد سی و پنج بار [۲].

زنجانی فصل را با تعمیمی از قضیّه، برای چندجمله‌ای‌ها خاتمه داده است، و نوشته است:

> [خط ۱۷، صفحه ۲۵b؛ تصویر این قسمت را در صفحهٔ مقابل ببینید] ما خودمان را به بسط شامل دو جمله محدود می‌کنیم، چرا که آنهایی که شامل سه جمله، چهار یا بیشترند، چیزی بیش از حالت‌های خاص دو جمله‌ای نیستند. آیا نمی‌بینید که اگر خواسته باشید بسط مکعبی از سه جمله را بیابید، می‌بایستی شما دو جمله را، یک جمله بگیرید؟ یعنی دو جمله را با هم بگیرید و سپس آن را به توان سه برسانید. همچنین خود جمله سوم آن را نیز به توان سوم برسانید. جملهٔ سوم را سه بار در مربع مجموع دو جملهٔ اول از سه جمله ضرب کنید. مجموع این عبارات جواب نهایی مسألهٔ اولیه می‌باشد. روش‌های مشابه را برای تمام توان‌های دیگر به کار ببرید.

برداشت زنجانی از این موضوع مشابه روش کرجی می‌باشد. به عنوان مثال، ترجمه فرانسوی راشد از بسط کرجی برای $(a+b)^5$ به صورت زیر داده شده است:

> «... توان پنجم مجموع برابر است با مجموع توان‌های پنجم هر کدام از آنها به‌علاوهٔ پنج بار مربع مربع هر کدام در دیگری به‌علاوه ده بار مکعب هر کدام در مربع دیگری».

زنجانی هیچ اثباتی برای قضیه دوجمله‌ای ارائه نداده است، در صورتی که کرجی از «صورتی از استقراء ریاضی که کمی قدیمی است» برای اثبات بسط $(a+b)^{۳}$ و $(a+b)^{۴}$ استفاده نموده است [راشد، ۱۹۷۰، ۲۴۳].

سَمَوأل، توضیحات کرجی را در مورد آنچه که امروز به مثلث خیام-پاسکال معروف است، نشان می‌دهد. گرچه زنجانی هیچگاه به چنین مثلثی اشاره نکرده است، ولی روش او در بررسی قضیهٔ دو جمله‌ای نشان می‌دهد که از وجود آن به خوبی آگاه بوده است.

(سَمَوأل درکتاب «الباهر» مطالبی از رسالهٔ کرجی را در مورد بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ برای حالت‌های $n = ۳, ۴, ۵$ به صورت زیر تشریح می‌کند:

«حالا اصولی را می‌آوریم که به کمک آنها می‌توان تعداد جمله‌ها را برای جمله‌هایی در جمله‌های دیگر، وقتی یک عدد به دو قسمت بخش شده باشد، پیدا کرد. کرجی می‌گوید: اگر تو این را می‌خواهی، به عنوان اساس کار، واحد را زیر واحد بگذار، بعد واحد را به ستون بعد منتقل کن، واحدی را که زیر واحد اول قرار دارد، به آن اضافه کن، می‌شود دو، این دو را زیر واحد بگذار و بعد دوباره یک واحد زیر آن قرار بده، به دست می‌آید؛ واحد، دو، واحد. این به تو نشان می‌دهد که مربع هر عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است که: هرکدام از عددها را باید یک بار در خودش ضرب کنی، زیرا در هر دو طرف، واحد و واحد داری، و یک عدد را در عدد دیگر باید دو بار ضرب کنی، زیرا در وسط، دو داری. در مجموع، مربع این عدد را به دست می‌آوری. بعد دوباره واحد را به ستون بعد منتقل کن، واحد را به دو اضافه کن، سه به‌دست می‌آوری، آن را زیر واحد بنویس. دو را به واحد که زیر آن است، اضافه کن، سه به دست می‌آوری. آن را زیر سه بنویس. در ستون دوم به دست می‌آوری: واحد، سه، سه، واحد. از اینجا می‌توانی مکعب هر عدد را، وقتی به صورت مجموع دو عدد باشد، به این ترتیب به دست آوری: هرکدام از عددها را مکعب کن و هر عدد را در مربع دیگری سه بار ضرب کن.

واحد ستون سوم را به ستون چهارم منتقل کن؛ سپس واحد را به سه که زیر آن است، اضافه کن، چهار را به دست می‌آوری، آن را زیر بنویس؛ بعد سه را به سه اضافه کن، شش به دست می‌آوری، آن را زیر چهار بنویس؛ بعد دومین سه را به واحد اضافه کن، چهار به دست می‌آوری، آن را زیر شش بنویس. در ستون چهارم، به دست می‌آوری: واحد، چهار، شش، چهار، واحد. از اینجا می‌دانی، مربع مربع هر عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هرکدام از عددها را مربع مربع می‌کنی، زیرا در انتها واحد داری؛ سپس هر عدد را در مکعب دیگری، چهار بار ضرب می‌کنی، زیرا به دو انتها، یعنی واحدها، چهار چسبیده است؛ بعد مربع یکی را در مربع دیگری، شش بار ضرب می‌کنی، زیرا در وسط شش داری ...».

سپس به همین ترتیب، شرح $(a+b)^۵$ داده می‌شود و در آخر نتیجه می‌گیرد:

«از این راه می‌توان، مربع، مکعب، و هر توان دیگری را که بخواهیم، معلوم کرد».

در پایان جدول ضریب‌های دوجمله‌ای $(a+b)^n$ برای $n = ۱$ تا $n = ۱۲$، به ترتیبی که در جدول (۱) می‌بینید، داده شده است [۱۱]).

جدول (۱)

ملاحظات

۱) فتوکپی کتاب، را دکتر مارتین لوی به اینجانب داده است. به هر حال، به جز نام و تاریخ تألیف کتاب، اطلاعات دیگری از نویسنده برای من قابل دسترسی نبود. دکتر فؤاد سزگین اسم نویسنده این کتاب را استخراج نمود، به این جهت از ایشان کمال تشکر را دارم. همچنین از دکتر جرّج صلیبا از دانشگاه کلمبیا به خاطر راهنمایی در مورد قسمتی از این تحقیق، کمال تشکر را دارم.

۲) $(a+b)^۷ = a^۷ + ۷a^۶b + ۲۱a^۵b^۲ + ۳۵a^۴b^۳ + ۳۵a^۳b^۴ + ۲۱a^۲b^۵ + ۷ab^۶ + b^۷$

مراجع

[1] A. Ahmad And R. Rashed, "*Al-Bahir en algebre d'As Samaw'al.*" Damascus: Univ. of Damascus Press 1972.

[2] A. Anbuda, "*Al-Tūsī*", In Dictionary of Scientific Biography, New York: Scribners (1970)508-517.

[3] F.E. Karatay "*Arapca Yazmalar Katalogu*" Istanbul: Topkapi Sarayi Muzesi kutuphansi(1962) P.737.

[4] D.S. Kasir "*The Algebra of Omar Khayyam*", New York: Teacher's College, Columbia University (1931).

[5] R. Rashed, "*al-Karaji*" In Dictionary of Scientific Biography, New York: Scribners (1970) 240-246.

[6] R. Rashed, "*L'induction Mathematique*" al-Karaji, al-Samaw'al, Archives for History of Exact Sciences 9(1972)1-21.

[7] G. Sarton, "*Introduction to the History of Science*", Baltimore: Williams & Wilkins. see Vol. II (1931), PP. 998-1000, on Ibn al-Banna; Vol. III (1948), p. 1526, on Ibn Zurayq.

[8] A.P. Youschkevitch, "*al-Khayyami.*", In Dictionary of Scientific Biography, New York: Scribners (1948) 323-334.

[9] M. Yadegari, "*The Binomail Theorem: A Widespread Concept in Medieval Islamic Mathematics*". Historia Mathematica **7** (1980)401-406.

[۱۰] خوانساری، روضات‌الجنات، ص ۴۶۵؛ برای منابع دیگر دربارهٔ زنجانی، رجوع کنید به عمر رضا کحاله، معجم‌المؤلفین، بیروت، مکتبه‌المثنی، ص ۲۱۶.

[۱۱] پرویز شهریاری، آنالیز ترکیبی و بسط دو جمله‌ای، (چاپ دوم) انتشارات مدرسه، تهران (۱۳۷۹).

ترجمه: مرتضی بیات
زنجان ـ مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان
پست الکترونیک: Bayat@Iasbs.ac.ir

حسین تیموری فعال
زنجان ـ مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان
پست الکترونیک: Tiemoori@Iasbs.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۶ (بهار ۱۳۸۰)، صص. ۵۳ تا ۶۶

معرفی و نقد کتاب

گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰[1]

به کوشش: ژان پل پیه

ارسلان شادمان

این بررسی اجمالی، با نگاهی به شکل ظاهری کتاب و ۱۲ مقاله و چند عنوان جنبی مندرج در آن تهیه شده است. کتاب برای طیف وسیعی از خوانندگان غیر متخصّص نوشته شده است، لذا بررسی ما هم بیشتر ناظر به معرفی است تا نقد. در عرف کتابنامه‌های تحلیلی، نقد هر مقاله را جداگانه به یک متخصص می سپارند و از این رو نقد مقالات این کتاب که توسط برخی از ریاضی‌دانان تراز اول قرن دربارهٔ تاریخ ریاضیات معاصر در یکی از شاخه‌های مهمّ آن نوشته شده است، کاری است که دانش و قلمی تواناتر از بضاعت مرا نیاز دارد. بررسی ما شامل بخش‌های زیر است: الف) ظاهر کتاب، ب) مقاله‌ها، ج) راهنمای ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، د) کتابنامه، ه) نامها، و) عکسها. در آخرین بخش، به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

1) Development of mathematics 1900-1950, Edited by Jean-Paul PIER, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994. ISBN 3-7643-2821-5 (Basel) ISBN 0-8176-2821-5 (Boston)

الف) ظاهر کتاب

کتاب مورد بحث، برخاسته از همایشی است که در ژوئن ۱۹۹۲ به وسیلهٔ انجمن ریاضی لوکزامبورگ[1] در قصر بورگلینستر[2] برگزار شده است. کمیتهٔ علمی همایش، مرکب از دوگا[3]، اِکمَن[4]، ماوهین[5]، پیه[6] و کمیتهٔ محلی مرکب از ۹ نفر است که پیه را نیز در بر دارد. مقدمهٔ کوتاه در نیم صفحه به امضای ژان-پل پیه و به تاریخ آوریل ۱۹۹۳ است که پس از نام و نشان همایش (سمپوزیوم)، به سپاسگزاری از چند مرکز علمی در لوکزامبورگ، پاریس و بلژیک، همچنین از سخنرانان، شرکت کنندگان و یاری‌دهندگان می‌پردازد و اظهار امیدواری می‌کند که این تلاش در درک بهتر جنب و جوش‌های ریاضی نیمهٔ اول قرن مفید باشد و تأثیر آن را بر گسترش‌های پس از آن بنمایاند. مقدمه با این جملهٔ با معنی پایان می‌پذیرد: «اکنون کتاب دربارهٔ خود سخن می‌گوید...».
صرف‌نظر از عکس‌ها، کتاب دربرگیرندهٔ عناوین زیر است:

• فهرست اسامی شرکت کنندگان (بالغ بر ۱۱۰ نفر).

• فهرست عناوین سخنرانی‌ها (که از این فهرست، ۲ عنوان زیر در کتاب چاپ نشده است: ایزرائیل گلفاند[7]: گسترش آنالیز تابعی از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ و مقایسهٔ آن با نیمهٔ دوم قرن؛ ژاک تیتس[8]: نظریهٔ گروه‌های لیِ نیم ساده: کار اِلی کارتان[9] و هرمان وایل[10]

• راهنمای ۱۹۰۰-۱۹۵۰ (۳۴صفحه) • مقالهٔ دیودونه[11] (۱۱۹ صفحه، ف.(به زبان فرانسه))

• مقالهٔ دوب[12] (۱۳ صفحه)

• مقالهٔ فیکرا[13] (۱۳ صفحه)

• مقالهٔ گیّوم[14] (۱۸۰ صفحه،ف.)

• مقالهٔ هیمَن[15] (۱۶ صفحه)

• مقالهٔ اوزِل[16] (۲۹ صفحه، ف.)

---

1) Luxembourg Mathematical Society 2) Château de Bourglinster 3) Pierre Dugac 4) Beno Eckmann 5) Jean Mawhin 6) Jean-Paul Pier 7) Izrail Gelfand 8) Jacques Tits 9) Elie Cartan 10) Herman Weil 11) Jean Dieudonné 12) Joseph L. Doob 13) Gaetano Fichera 14) Marcel Guillaume 15) Walter K. Hayman 16) Christian Houzel

- مقالهٔ کاهان[1] (۱۵ صفحه، ف.)
- مقالهٔ لیشنرویچ[2] (۱۷ صفحه، ف.)
- مقالهٔ ماوهین (۳۵ صفحه)
- مقالهٔ نایرنبرگ[3] (۳۷ صفحه)
- مقالهٔ پیه (۴۸ صفحه، ف.)
- مقالهٔ ولفگانگ شوارتس[4] (۵۲ صفحه)
- فهرست مجلات (۷ صفحه)
- مراجع (۸۷ صفحه)
- فهرست نامها (۱۵ صفحه).

جلد کتاب ضخیم، سبز رنگ با عکس بزرگی از جلسهٔ انجمن ریاضی مسکو ۱۹۷۵ و نوشتهٔ زیر در پشت جلد است: «این اثر، با مطالعهٔ باریک‌بینانه‌ای به ارائهٔ اسناد معتبر تحول ریاضیات در نیمهٔ اول قرن بیستم می‌پردازد: کتاب برخاسته از همایشی است که به وسیلهٔ انجمن ریاضی لوکزامبورگ سازمان یافت و در ماه ژوئن ۱۹۹۲ در قصر بورگلینستر برگزار شد.

واقعه‌نگاری مشکل پسندانه‌ای (با عنوان راهنمای ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰) وقایع کلیدی گسترش ریاضیات را ثبت می‌کند و طیف وسیعی از مباحث به وسیلهٔ عده‌ای از درخشان‌ترین ریاضی‌دانان قرن ارائه می‌شود. نویسندگان این مباحث دوب، فیکرا، گیوم، هیمن، اوزل، کاهان، لیشنرویچ، ماوهین، نیرنبرگ، پیه و و. شوارتس هستند و مقالهٔ مبسوطی از ژ. دیودونهٔ فقید، تاریخی فوق‌العاده جالب از توپولوژی را ارائه می‌کند. فهرست مفصلی از منابع دست اول و مهمترین منابع دست دوم، به اعتبار این کتاب به عنوان کتاب مرجع می‌افزاید.»

ب) مقاله‌ها

در اینجا مقاله‌ها را به ترتیبی که درکتاب آمده‌اند، به اجمال معرفی می‌کنیم.

۱ـ دیودونه، ژان: تاریخ مختصری از توپولوژی، صفحات ۳۵ تا ۱۵۳.

این مقاله، به زبان فرانسه، مشتمل بر مقدمه و ۲۲ بخش است که برخی از بخش‌ها به زیربخش‌هایی تقسیم شده‌اند. مقدمه، صریحاً با این جمله شروع می‌شود که «در میان بخش‌های ریاضی عصر ما، توپولوژی از نظر من قابل ملاحظه‌ترین گسترش‌ها را داشته است». سپس به بیان این نکته می‌پردازد که تا پایان قرن ۱۸، موضوع‌های مورد بحث در ریاضیات بر مبنای مفاهیم کلاسیک بودند که از ریاضیات یونان سرچشمه می‌گرفتند و ناظر به اشیاء ریاضی و روابط دقیق بین آنها بودند، حال آن که توپولوژی از مباحث ریاضی جدیدی که ناظر به وضعیت و دگردیسی اشیاء غیر صُلب هستند، سر برآورد. بررسی

1) Jean-Pierre Kahane 2) André Lichnerowicz 3) Louis Nirenberg 4) Wolfgang Schwarz

علمی این موضوعات پیش از ۱۸۰۰ آغاز نشده بود. این بررسی در یک فرآیند طولانی و پیچیده و مشکل که دربرگیرندهٔ تعداد چشمگیری از مفاهیم بود رخ داد. از نیمهٔ دوم قرن بیستم، پیروزی‌هایی که به اتکای مفاهیم توپولوژیک حاصل شد، در همهٔ بخش‌های ریاضی حتی فیزیک نظری، نشان دادند که این مفاهیم جدید، برخاسته از شهود فضایی، چه بُرد وسیع و غیرقابل انتظاری دارند. در همین مقدمه، نتیجه‌گیری می‌کند که «ناچارم خود را به خطوط اصلی تاریخ فوق‌العاده پیچیده‌ای محدود کنم که از افق‌های ریاضی متنوعی می‌آیند و با همدیگر تلاقی می‌کنند.» سپس تکیه می‌کند بر این که روشهای اثبات، از صورت قضایا مهمترند و به همین دلیل سعی می‌کند در این تاریخچه با فرازهایی ساده اثبات‌های مهم را بیاورد و فقط مفاهیم مقدماتی نظریهٔ مجموعه‌ها و جبر را دانسته فرض کند. اما در نظریه‌های جدید، به دلیل پیچیدگی فنی بی‌حد، ناچار است از این اصل درگذرد و فقط به بیان نتایج تکان دهنده بپردازد. بخش‌های مقاله و برخی زیربخش‌های مهم آن به قرار زیرند:

۱. سهم ریمان مشتمل بر کلیات، خمینه‌ها، رویه‌های ریمان، فضاهای تابعی؛

۲. مفاهیم توپولوژیک در $\mathbb{R}^n$؛

۳. فضاهای متریک و توپولوژیک؛

۴. همسانریختی و بُعد؛

۵. تحول توپولوژی عمومی(کمتر از یک صفحه)؛

۶. ماقبل تاریخ توپولوژیِ جبری از ریمان تا پوانکاره؛

۷. ایده‌های پوانکاره و دخالت جبر (۶ صفحه)، که در آن پایه‌گذاری برای همهٔ مفاهیم مانستگی[1] را می‌بینید؛

۸. شروع مانستگی مشتمل بر مانسته‌جایی[2]، نگاشت‌های سادکی[3]، مفهوم درجه، ناوردایی، دوگانیِ آلکساندِر[4] و مانستگی نسبی[5]، مانستگی حاصلضرب؛

۹. کاربردهای مانستگی، مشتمل بر نقاط ثابت و دستور لفشتس[6]، مانستگی خمینه‌های جبری، نظریهٔ مورس[7]؛

۱۰. تشکیل ساز و برگ‌های جبری مشتمل بر رسته‌ها و تابعگون‌ها[8]، زنجیرها و هم‌زنجیرها[9]،دنباله‌های دقیق[10]، تابعگون‌های Tor و Ext، عملگرهای بوکشتاین[11]، دنباله‌های طیفی[12]؛

1) homology 2) homotopy 3) simplicial 4) Alexander duality 5) relative homology 6) Lefschetz formula 7) Morse theory 8) categories and functors 9) chains and cochains 10) exact sequences 11) Bockstein operators 12) spectral sequences

۱۱. نظریه‌های گوناگون مانستگی مشتمل بر مانستگی تکین[۱]، مانستگی ویتوریس[۲] و مانستگی چک[۳]، همانستگی‌ها[۴]، یکسانی‌ها[۵] و اصل موضوع‌سازی[۶]، همانستگی بافه‌ها[۷]؛

۱۲. ضرب‌ها و هم‌ضرب‌ها[۸] مشتمل بر حاصل‌ضرب‌های خارجی[۹]، حاصل‌ضرب کاپ[۱۰] و جبر همانستگی، حاصل‌ضرب کپ[۱۱] و دوگانی‌ها، H_فضاها[۱۲] و جبرهای هوپف[۱۳]؛

۱۳. ساختمان‌های توپولوژیک[۱۴] مشتمل بر انقباض[۱۵] و دسته گل[۱۶]، الحاق[۱۷] و آویز[۱۸]، چسباندن[۱۹] یک فضا، مجتمع‌های CW [۲۰]؛

۱۴. چهرهٔ جبری مانسته‌جایی، مشتمل بر انواع مانسته‌جایی، فضاهای نخ‌های بسته و گروه‌های مانسته‌جایی، مانسته‌جایی نسبی و دنبالهٔ دقیق مانسته‌جایی، آویزه و فضاهای نخ‌های بسته، حاصل‌ضرب‌های وایتهد[۲۱]، تعویض نقطهٔ پایه[۲۲]، نخستین محاسبات، دنبالهٔ گروه‌های مانسته‌جایی یک فضا؛

۱۵. نخستین روابط بین مانسته‌جایی و مانستگی مشتمل بر همریختی‌های هورویچ[۲۳]، هم‌ارزی ضعیف مانسته‌جایی، موانع (که در آن توجه خواننده را به هم‌ارزی بین وجود مانسته‌جایی بین دو نگاشت پیوسته و وجود یک توسیع پیوسته برای یک نگاشت پیوستهٔ مناسب جلب می‌کند و خاطرنشان می‌سازد که بنا بر قضیه‌ای از آیلنبرگ[۲۴]، می‌توان به کمک همانستگی و گروه‌های مانسته‌جایی، محک‌هایی برای وجود فوق به دست داد (یعنی موانع راه را تشخیص داد)، گروه‌های مانسته‌جایی و مانستگی گروه‌ها_ اینجاست که اشاره می‌شود به آن که ساختن گروه‌های $H^n(\Pi; G)$ نخستین دخالت جبر مانستگی در نظریه‌ای غیر از توپولوژی است، و از آن پس دخالت‌های مشابه در نظریه‌های متعددی ظاهر شده‌اند: مانستگی جبرها

1) singular homology 2) Vietoris homology 3) Čech homology 4) cohomologies 5) identifications 6) axiomatization 7) sheaf cohomology 8) products and coproducts 9) exterior products 10) cup-product 11) cap-product 12) H-spaces 13) Hopf algebras 14) topological constructions 15) contraction 16) bouquet 17) Jonction 18) suspension 19) attaching 20) CW-complexes 21) Whithead products 22) basepoint 23) Hurewicz homomorphism 24) Eilenberg

توسط هوشیلد[۱]، مانستگی جبرهای لی، مانستگی گروه‌های متناهی و جدیدتر از آنها مانستگی دوره‌ای[۲] توسط آلن کُن[۳] در C^*ـجبرها، مانستگی اشتراک در خمینه‌های برگبندی شده و غیره؛

۱۶. تاربندی‌ها[۴] مشتمل بر فضاهای تاری[۵]، پوشش‌ها یا فضاهای پوششی[۶] با مثال‌های متعدد و جالب (از جمله پندارهٔ پوانکاره که هنوز اثبات یا رد نشده است: هر خمینهٔ فشردهٔ همبند ساده[۷] و سه‌بعدی همسانریخت با کرهٔ سه‌بعدی $\mathbb{S}^3$ است)، بالابری مانسته‌جایی‌ها و مفهوم تاربندی، دنبالهٔ دقیق مانسته‌جاییِ تاربندی‌ها، فضاهای تاری اصلی[۸] و فضاهای تاری برداری[۹]، نگاره‌های وارون فضاهای تاری و رده‌بندی فضاهای تاری اصلی، رده‌های سرشتنمایی (که در یک صفحه به رده‌های پونتریاگین[۱۰]، چرن[۱۱]، شتیفل‌ـویتنی[۱۲] و حجره‌های شوبرت[۱۳] ارائه شده توسط شارل ارسمن[۱۴] اشاره می‌کند)، دنبالهٔ طیفی فضاهای تاری؛

۱۷. کاربردهایی از تاربندی‌ها، مشتمل بر برج پوستنیکوف[۱۵]، گروه‌های مانسته‌جایی کره‌ها (که با اشاره به کار ژ.پ. سِرّ[۱۶] در ۱۹۵۱ مربوط به تعیین گروه‌های مانسته‌جایی مرتبه mکرهٔ nبعدی شروع می‌شود)، توپولوژی گروههای لی، جبر ستینراد[۱۷]، همانستگی فضاهای آیلنبرگ و مک‌ـلاین[۱۸]، محاسباتی در گروه‌های مانسته‌جایی و موضعی‌سازی[۱۹]؛

۱۸. مانستگی و همانستگی تعمیم یافته، مشتمل بر گروه‌های گروتندیک[۲۰]، Kـتئوری[۲۱] به منزلهٔ همانستگی تعمیم‌یافته، طیف‌ها و همانستگی تعمیم‌یافته؛

۱۹. توپولوژی هندسی خمینه‌های هموار، مشتمل بر کارهای رنه‌توم[۲۲] (در جواب به این پرسش ستینراد که یک خمینهٔ هموار $n-1$بعدی چه وقت کرانهٔ یک خمینهٔ هموار nبعدی است و ابداع کوبوردیسم[۲۳]، که هرچند از ابزارهای توپولوژی جبری موجود استفاده می‌کند، اما بهتر است با عنوان توپولوژی هندسی مشخص

---

1) Hochschild 2) cyclic homology 3) Alain Connes 4) fibrations 5) fiber spaces 6) covering spaces 7) simply connected 8) principal fiber spaces 9) vector fiber spaces 10) Pontrjagin classes 11) Chern classes 12) Stiefel-Whitney classes 13) Schubert cells 14) Charles Ehresmann 15) Postnikov tour 16) Jean Pirrre Serre 17) Steenrod algebra 18) Eilenberg-McLane spaces 19) localization 20) Grothendieck groups 21) K-theory 22) René Thom 23) cobordism

شود زیرا رایحهٔ هندسی در آن غلبه دارد)، حضور دسته‌ها و hـکوبوردیسم با اشاره به این که چسباندن nـحجره‌ها چگونه نظریهٔ مورس را توجیه می‌کند و در ادامهٔ کارهای سمَیل[۱] چه نتایج غیر مترقبه‌ای را به دنبال داشته است: اول اینکه هر خمینهٔ فشردهٔ هموار بدون کرانه با بعد $n \geq ۵$ که از حیث مانسته‌جایی همنوع S_n باشد، درواقع با S_n همسانریخت است، که تعمیم پندارهٔ پوانکاره است، و دوم، هر خمینهٔ فشردهٔ هموار با بعد $n \geq ۶$ و دارای کرانهٔ همبند و همبند سادهٔ ∂M، نه تنها همسانریخت بلکه هموارریخت[۲] با D_n است، و از این قبیل...، مسألهٔ فروبریها[۳]؛

۲۰. نظریهٔ عمومی خمینه‌ها مشتمل بر رسته‌های متنوع خمینه‌ها، توپولوژی هندسی در ماورای خمینه‌ها؛ خمینه‌های بینهایت بعدی[۴] که به خمینه‌های بر پایهٔ فضای نمونهٔ باناخ E به جای فضای نمونهٔ $\mathbb{R}^n$ می‌پردازد، و به ویژه در حالت $E = l^۲$ خمینه‌های هیلبرتی[۵] به دست می‌آیند. هر چند این فضاها با پدیده‌های آسیب‌گونه‌ای درگیرند، اما از ۱۹۶۷ به این سو، نتایج هندسی جالبی به‌دست آمده و به‌ویژه در ارتباط با زیرفضاهای بستهٔ $l^۲$ و مثلث‌بندی[۶] توانسته‌اند گزاره‌های قاطعی را ثابت کنند، و موفق شده‌اند به جای $l^۲$ از $[۰,۱]^\infty$ استفاده نموده و به مانسته‌جایی ساده[۷] بپردازند که اساساً بر مفاهیم ترکیبیاتی متکی است و بعد با پیچیدگی‌های بیشتری توام می‌شود که از حوصلهٔ این سطور خارج است؛

۲۱. سرانجام در آخرین بخش این مقالهٔ مبسوط، خمینه‌های با بعد کوچک مطرح شده است که به خمینه‌های nـبعدی با $n \leq ۳$، و خمینه‌های ۴ بعدی می‌پردازد و نشان می‌دهد که چگونه در تضاد با حالت $n \geq ۵$ هستند و چه پیشرفت‌هایی در زمینهٔ آنها به تفکیک حاصل شده است و به ویژه در بعد $n \leq ۳$ چندجمله‌ای‌های جونز[۸] و آلکساندر هر چند متفاوت‌اند اما هر دو از یک چندجمله‌ای ۳ متغیره با تغییر متغیرهای مناسب به دست می‌آیند، و در بعد ۴ نتیجهٔ مطلوب فریدمان[۹] اثبات پندارهٔ پوانکاره برای $n = ۴$ است که در ۱۹۸۲ حاصل شده است.

مقاله با فهرست موضوعی ختم می‌شود و متاسفانه فهرست مراجع ندارد (شاید به آن علت که در سال آخر حیات مجال افزودن آن برای نویسندهٔ گرانقدر نمانده باشد).

۲ـ دوب جوزف، ال.: توسعهٔ دقت در احتمال ریاضی(۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰) صفحات ۱۵۷ تا ۱۶۹

در این مقالهٔ ۱۳ صفحه‌ای، که به زبان انگلیسی است، احتمال‌دان معروف از دانشگاه ایلینویز، با سبکی شیوا ولی غیررسمی به تاریخچهٔ ورود دقت در احتمال ریاضی می‌پردازد. مقاله ۱۳ بخش دارد که نیمی از حجم آن را بخش‌های ۶ (گسترش نظریهٔ اندازه) و ۸ (تک‌نگاری ۱۹۳۳ کولموگوروف[۱۰]) پر کرده‌اند و

---

1) Smale   2) diffeomorphic   3) immersions   4) infinite dimensional manifolds
5) hilbertian manifolds   6) triangulation   7) simple homotopy   8) Jones polynomials
9) Freedman   10) Kolmogorov

سایر بخش‌ها در یک صفحه یا کمتر نوشته شده‌اند. نقل‌قول‌های جالبی از پلانک[۱]، پوانکاره[۲]، هرمیت[۳]، لاپلاس[۴]، ویل[۵]، باور[۶]، مازورکیویچ[۷]، میزس[۸]، پیرسن[۹]، اوسپنسکی[۱۰]، کاچ[۱۱]، پروتر[۱۲] در مقدمه (بخش ۱)، قانون اعداد بزرگ (بخش ۳)، احتمال چیست (بخش ۴)، مقاومت احتمال‌دانان در پذیرش نظریهٔ اندازه (بخش ۱۱) آورده است، بخش اخیر عملاً به نقل قولی از کاچ به عنوان شاهدی بر توجیه عنوان بخش، محدود می‌شود و آن قول این است:

«این که چه مقدار از نظریهٔ اندازه در نظریهٔ احتمال ضروری است مسأله‌ای سلیقه‌ای است. شخصاً ترجیح می‌دهم هر چه ممکن است کمتر از آن استفاده شود زیرا قویاً معتقدم که نظریهٔ احتمال بیش از آنچه به نظریهٔ اندازه وابسته باشد، به آنالیز و فیزیک و آمار مربوط است».

در طول مقاله، با روانی تمام از کارهای بنیانگذاران مهمی چون بورل[۱۳]، لبگ[۱۴]، دانیل[۱۵]، رادُن[۱۶]، فرشه[۱۷]، نیکودیم[۱۸]، مارکوف[۱۹] و برنشتاین[۲۰]، ریس[۲۱]، فیشر[۲۲]، لِوی[۲۳] و حتی خود دوب، هر چند بر سبیل اشاره یا به اختصار، نام می‌برد.

کلاً مقاله بسیار خواندنی و جالب است. اما فهرست مراجع ندارد.

۳. **فیکِرا**، گائتانو: ویتو ولترا و تولد آنالیز تابعی، صفحات ۱۷۱ تا ۱۸۳.

این مقاله نیز به زبان انگلیسی است و عاری از مقدمه و بخش‌بندی است جز آن که فهرست مراجع مشتمل بر ۹ عنوان است. نویسنده در آغاز اقرار می‌کند که تعیین تاریخ تولد یک علم کار مشکلی است، اما تولد آنالیز تابعی را شاید بتوان به اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ نسبت داد. برخی از مفاهیم و نتایج این رشته از مدت‌ها پیش شناخته شده بودند. مثلاً حساب تغییرات، که یکی از جلوه‌های بارز آنالیز تابعی است، در کارهای نیوتن (مسأله جسم دوار با کمترین مقاومت) سپس در آثار ژاک و ژان برنولی و بعدها در سهم فناناپذیر اویلر و لاگرانژ به چشم می‌خورد. با این همه، اگر بخواهیم سرچشمهٔ یک نظریه را به آثار فردی منسوب کنیم که با وقوف کامل دریافته است که با کارهایش رشتهٔ علمی جدیدی را آغاز می‌کند، در این صورت باید ویتو ولترا (۱۸۶۰ تا ۱۹۴۰) را آغازگر آنالیز تابعی بدانیم. او در مقاله‌ای به تاریخ ۱۸۸۷ توابعی را که به توابع دیگر وابسته‌اند وارد بحث کرد و بعداً اصطلاح ژاک هادامار یعنی تابعک یا تابعی

1) Planck 2) Poincaré 3) Hermite 4) Laplace 5) Ville 6) Bauer 7) Mazurkiewicz 8) Mises 9) Pearson 10) Uspensky 11) Kaç 12) Protter 13) Borel 14) Lebesgue 15) Daniell 16) Radon 17) Fréchet 18) Nikodym 19) Markov 20) Bernstein 21) Riesz 22) Fischer 23) Lévy

(functional) را پذیرفت. در این مقاله، فیکرا از دیودونه گله می‌کند که در کتاب تاریخ آنالیز تابعی، داوری بیرحمانه‌ای نسبت به ولترا روا داشته است، جایی که می‌گوید: «سرانجام باید بگوییم که نخستین توجه به «آنالیز تابعی» در ۱۸۸۷ از آنِ ولترای جوان بود که تحت تأثیر و نفوذ هادامار، به کار وی اهمیت تاریخی مبالغه آمیزی نسبت داده شده است.» اما فیکرا نیز در سطرهای قبل ادعا می‌کند که ریاضی‌دانان زمان ولترا بی‌درنگ افکار او را پیروزمندانه به کار گرفتند، به ویژه هادامار شاگردانش را تشویق کرد تا این افکار را پیش ببرند، افرادی مانند فرشه، گاتو[1] و لوی. در نتیجه هادامار قدر و ارزش والای این افکار را شناخت و شناساند.

به نظر می‌رسد که فقط واژهٔ «مبالغه‌آمیز» دیودونه، گلهٔ فیکرا را برانگیخته باشد، که البته اهمیت چندانی ندارد. اما در بقیهٔ مقاله، فیکرا سعی می‌کند کارهای ریاضی ولترا را در این زمینه شرح دهد که چگونه ولترا از مسائل نظری و عملی به بررسی «تابع خطوط[2]» کشیده شد و آنها را در یک سری درس در سوربن ارائه کرد و در انتشارات گوتیه‌ـویلار پاریس منتشر نمود. از دید فیکرا باید بین دو دیدگاه اختلاف قائل شد، یکی دیدگاه بازنگری که وقایع تاریخی را با ابزارها و بینش زمان نویسندهٔ تاریخ تجزیه و تحلیل می‌کند، دیگر تاریخ، که این وقایع را با ابزارها و بینش زمان وقوع واقعهٔ تاریخی می‌نگرد و ارزیابی می‌کند. با دید تاریخ، هیچیک از دانشمندان برجستهٔ پیش از ولترا که به حساب تغییرات پرداختند، انتگرال‌های مورد بحث را به عنوان تابع خطوط در نظر نگرفتند.

خوانندگان علاقه‌مند به مطالعهٔ مقالهٔ فیکرا، طرح مسائلی را که منجر به معادلات انتگرال ولترا می‌شود، ملاحظه می‌کنند و همچنین بسط و عقب‌افتادگی مکتب ایتالیا را که مورد نقد محقّانه عده‌ای (از جمله لانداو[3]) قرار گرفت، می‌بینند.

تجزیه و تحلیل فیکرا کلاً جالب و خواندنی است.

۴. **گیوم**، مارسل: منطق ریاضی در سال‌های جوانی، صفحات ۱۸۵ تا ۳۶۵

این مقالهٔ مبسوط ۱۸۰ صفحه‌ای به زبان فرانسه، مشتمل است بر ۲ صفحه پیشگفتار، ۵ صفحه فهرست مندرجات، ۴۴ صفحه فهرست مراجع که نزدیک به ۷۰۰ عنوان را با جزئیات در بر می‌گیرد. مثلاً در یکی از عناوین که مربوط به ویتگنشتاین[4] است، علاوه بر مشخصات اصل مقاله به زبان آلمانی (۱۹۲۱) در مجلهٔ آلمانی سالنامهٔ فلسفهٔ طبیعی(۷۸ صفحه)، مشخصات چاپ بعدی آن (۱۹۲۲) با ترجمهٔ انگلیسی و مقدمه‌ای به قلم برتراند راسل[5]، از انتشارات راتلج[6] و کگن پاول[7] (۱۸۹ صفحه) هم‌چنین مشخصات ترجمهٔ دیگر انگلیسی آن توسط پیرز[8] و مک گینس[9]، از انتشارات راتلج و کگن پاول به سال ۱۹۷۱ و ترجمهٔ

1) Gateaux 2) fonctions de lignes 3) Landau 4) Wittgenstein 5) Russel
6) Routledge 7) Kegan Paul 8) Pears 9) McGuinness

فرانسهٔ آن توسط کلوسوفسکی[1] به سال ۱۹۶۱ و به سال ۱۹۸۶ در مجموعهٔ «Tel»، به چشم می‌خورد.

در پیشگفتار، نویسنده به روشنی بیان می‌کند که این متن، تلاشی بیش نیست و در ابتدای کار نه گردانندگان همایش که او را دعوت کرده بودند و نه خود وی گمان نمی‌بردند موضوع مورد بحث که گسترش ریاضیات از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ است، حتی با محدود کردن موضوع به یک رشته، تا این حد «فراکتال[2]» باشد. سپس مخاطبین خود را مشخص می‌کند که از سویی ریاضیدانان دیگری هستند که معمولاً دانش آنها در منطق ناچیز است، و از سوی دیگر انفورماتیک‌دانان‌اند که آنان نیز منطق را فقط از برخی جهات جدید آن می‌شناسند. گیوم هدف خود را می‌گوید که «می‌خواهم به این مخاطبین، ایده‌ای از تاریخ منطق را ارائه کنم و نشان دهم که منطق‌دانان چه کرده‌اند. از این رو، چون نمی‌خواستم برای خود منطق‌دانان بنویسم، ناچار شدم اصطلاحات بکارگرفته راکه منطق‌دانان به طور عادی بکار می‌برند، همراه با توضیحات اضافی دربارهٔ معنای آنها بیاورم و بازگو کنم که سیر و سلوک ایده‌ها چگونه بوده است. به همین دلیل مقاله طولانی شد، در عین حال هنگام انجام دادن این کار متوجه شدم که نگارندهٔ تاریخ منطق از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ اگر بخواهد صادقانه واقعیت‌ها را آنطور که هست بیان کند، صدها صفحه نیاز دارد». وانگهی این متن، بنا بر اقرار متواضعانهٔ نویسنده، پر از مسائلی است که از جو غالب زمان یا حوادث اتفاقی ناشی می‌شوند و بررسی و تحقیق در صحت این رهیافت‌ها مستلزم کارگروه‌هایی است که تعداد افراد آن بیرون از حدّ تصور نویسنده است. گیوم، به درستی ادعا می‌کند که مراجع بسیاری را در اختیار داشته است، و اشاره می‌کند که در مواردی تخصصی نوشته‌های تاریخدانان را می‌توان مطالعه کرد. از سوی دیگر منطق‌دانان اکثراً نسبت به تاریخ حساسیت ویژه‌ای دارند و هر چند نوشته‌ها و یادداشت‌های همراه بازنویسی متون گاهی نادرست‌اند، در مجموع مطالعهٔ مراجع متعددی که در این زمینه نوشته شده‌اند، راهنمای اطمینان‌بخشی را در ارتباط با خطوط کلی تحول این رشته فراهم نموده است.

شخصاً این متن و شیوهٔ تقسیم‌بندی نویسنده را که گاه تاریخی (وقایع‌نگاری) و گاه بر اساس تکوین و پیامدهای یک مفهوم یا مضمون تنظیم شده است پسندیده‌ام. توجه کنیم که نویسنده یکی از چند نفر همکار دیودونه در تألیف کتاب «تاریخ خلاصهٔ تاریخ ریاضیات از ۱۷۰۰ تا ۱۹۰۰» است، تنها اثری از دیودونه که در فهرست مراجع به چشم می‌خورد.

در پسگفتار مقاله که چند سطر بیش نیست، وضعیت منطق در سال‌های حدود ۱۹۵۰ نوشته شده است. نویسنده خواسته است به سرعت این کار را تمام کند تا مقاله طولانی‌تر نشود. کل مقاله تا اندازهٔ زیادی ما را با این وضعیت آشنا می‌کند.

نهایتاً در فهرست مراجع با نگاهی سطحی دیده می‌شود که تارسکی[3] بیش از ۳۷ عنوان را به تنهایی از آن خود کرده است و در برخی دیگر نیز نویسندهٔ مشترک مقاله یا کتاب است. او که در ۱۹۵۴ تئوری مدل‌ها را رسماً بیان می‌کند، پیش از آن در بیش از حدود ۲۰ اثر به بحث دربارهٔ کاربردهای ریاضی و مفاهیم نظری نظریهٔ مدل‌ها پرداخته است و ریشه‌یابی آن به کارهای ۱۹۲۷، ۱۹۲۹ و ۱۹۳۶ و ... برمی‌گردد.

1) Klossowski 2) fractal 3) Tarski

آقای گیوم مقدمهٔ مقاله را با «فقدان نظریهٔ مدل‌ها» شروع می‌کند و آخرین بخش پیش از پسگفتار را به همین موضوع «مفاهیمی از نظریهٔ مدل‌ها» که توسط تارسکی، اندکی پیش از ۱۹۵۰ بنیان‌گذاری شد، اختصاص می‌دهد.

برای آن که نظر مارسل گیوم به درستی درک شود، باید با تسلطی کافی به زبان فرانسه مقالهٔ او را خواند و یا شاید مترجمی توانا و وارد پیدا شود که این مقاله را برای ریاضی‌دانان کشور ما، که غالباً از منطق در حدّی بسیار سطحی و مقدماتی آگاهی داریم، ترجمه و منتشر کند[1].

ج) راهنمای ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰

این راهنما به یک معنی بخش اول کتاب است. زیرا از صفحهٔ ۱ تا صفحهٔ ۳۴ کتاب را به خود اختصاص داده است، البته ۱۸ صفحه (i) تا (xviii) پیش از آن هم وجود دارد. راهنما را چهار نفر اعضای کمیتهٔ علمی همایش تهیه کرده‌اند، و برای تصحیح، تکمیل و تأیید، به نظرِ جمع کثیری از ریاضیدانان برجستهٔ دنیا رسانده‌اند.

عکس پانوشت صفحهٔ ۱ کتاب در همین جا می‌آید تا نام ریاضیدانان مورد مشورت این کمیته هم مشخص باشد*.

راهنما حالت اختصاری اما گویایی دارد. برحسب سال تنظیم شده است، با آغاز از سال ۱۹۰۰، هر سال مؤلفین به ترتیب الفبایی مشخص شده‌اند و کنار نام آنان، عنوان کارهای مهمشان اعم از مقاله یا کتاب می‌آید. بقیهٔ مؤلفه‌های کار، از قبیل ناشر، صفحات و غیره دیده نمی‌شود. برخی عناوین با حروف ایتالیک هستند، شناخت مختصری از کارها می‌نمایاند (به طور ضمنی) که حروف ایتالیک مخصوص کتاب، و حروف رومن برای کار در مقاله یا رساله است. تعداد کتابها در مجموع خیلی کمتر است، در برخی سالها اصلاً کتاب مهمی نبوده است که ذکر شود. جالب است که برای عنوان کتابها (جز کتابهای روسی) زبان اصلی و برای سایر کارها فقط زبان انگلیسی به‌کار رفته است، وانگهی در مورد سایر کارها،

---

۱) چاپ معرفی مقاله‌های ۵ تا ۱۲ به شمارهٔ آینده موکول شد.

*

تلخیص هم صورت گرفته است و عنوان محتوایی بیشتر مطرح است تا عنوان مقاله یا رساله. جز کتاب مبانی هندسهٔ هیلبرت (چاپ سوم ۱۹۹۰)، به ندرت کتابی با چاپ چندم دیده می‌شود. هم چنین به ندرت غلط چاپی توانستم بیابم: در ۱۹۴۲ به جای .P حرف اول نام للنگ از حرف .J استفاده شده است که نام همسر اوست و ربطی به تأسیس توابع چند زیرهمساز (psh) ندارد، این برای من که هر دو را می‌شناسم، جالب توجه بود البته نام هر دو جزء مشاورین راهنما درج شده است منتهی در این مورد نام همسر (سابق) للنگ به نام پدری او یعنی J. FERRAND آمده است. نکات دیگری که برایم جالب بود آن که از آثار بورباکی فقط یک مقاله و کتاب نظریهٔ مجموعه‌ها کتابچهٔ خلاصه (کتاب نتایج) به سال ۱۹۳۹ ذکر شده است. دلیل توجه من به آن این است که این کتاب پس از ۶۰ سال به فارسی ترجمه و همراه سایر کتابچه‌های خلاصهٔ بورباکی در انتشارات دانشگاه تهران منتشر گردید. اما از افراد گروه بورباکی، آثار زیادی به چشم می‌خورد که طبیعی است. نکتهٔ دیگر آن که تأثیر منفی دو جنگ جهانی در فراوانی آثار ریاضی منعکس است.

د) کتابنامه، صفحات ۶۱۷ تا ۷۱۰

این کتابنامه را پیردوگا از اعضای کمیتهٔ علمی تدوین کرده است. با توجه به حجم فراوان آن، نخست مجله‌ها را کدبندی نموده است از ۱ تا ۱۹۷، سپس فهرست را برحسب ترتیب الفبایی نام مؤلفین گنجانده است. متأسفانه ننوشته است هر مرجع در چه صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. در یکی از مقالات هیمَن این کار را کرده بود. دستکم دوست می‌داشتم، برای مقاله‌هایی که فهرست مراجع ارائه نکرده‌اند، مشخص می‌شد این مراجع در آن مقالات بکار رفته‌اند یا خیر. فهرست منحصر به دورهٔ ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ نیست، همانطور که در اکثر مقالات هم چنین بود. به هرحال، منبع خوبی برای عنوان و نشانی دقیق بسیاری از کارهای جالب ریاضی است که در رشد ریاضیات قرن بیستم نقش عمده داشته‌اند. در اختیار داشتن نسخه‌ای از این فهرست ۹۴ صفحه‌ای برای ریاضیدانان ایرانی مفید است.

ه) نامها، صفحات ۷۱۵ تا ۷۲۹

در این ۱۵ صفحه، فهرست الفبایی نام اشخاص با ذکر صفحهٔ مورد ارجاع آمده است، که ذکر نام برنیز، بیرکهاف، بول، برل، براور، کارتان (الی)، کارتان (هانری)، کانتور، چرچ، دانژوا، ارسمن، آیلنبرگ، آینشتاین، فرگه، فریدریکس، گنتسن، گودل، هادامار، هاردی ، هیلبرت، هاسه، هاوسدروف، هوپف (E)، هوپف (H)، کلین، کولموگوروف، لانداو، لبگ، لره، لوی ، لیتلوود، لونهایم، لوکاسیویچ، موستوفسکی، فون‌نویمان، پئانو، پوانکاره، پوست، ریمان، ریس، روسر، راسل، اسکولم، استینراد، تارسکی، وبلن، وینوگرادوف، وَیل، وایل، وایتهد، ویتنی، وینر، زرملو، و غیره را با ارجاعات متعدد می‌توان خاطر نشان ساخت.

و) عکسها

این کتاب، آلبوم جالبی از عکسهای تاریخی و عکس تاریخ‌سازان ریاضی است. روی جلد، عکسی است از انجمن ریاضی مسکو، که خود عکس در صفحهٔ ۷۱۴ کتاب درج شده است. صفحات ۷۱۳

شورای علمی دانشکدهٔ ریاضی و مکانیک مسکو با ذکر نام افراد دیده می‌شود که مانند یک کلاس درس روی نیمکتها در ۶ ردیف نشسته‌اند. نخستین عکس (ص xii) مربوط به دیودونهٔ فقید است که او را در سال ۱۹۸۱ در لوگزامبورگ نشان می‌دهد، عکس دوم (ص xiii) عکس تاریخی شرکت کنندگان همایش است در ۱۹۹۲ در قصر بورگلینستر. سایر عکسها در صفحات داخل مقالات و یا بین آنها پخش شده است و اکثراً سعی شده است که مناسبتهایی داشته باشد. در آخرین مقاله (مقالهٔ ۱۲، ولفگانگ شوارتس)، رسماً آمده است که عکسهای جالب داخل این مقاله را چه کسانی فراهم نموده‌اند. عکسهای این مقاله گاوس، ددکیند، دیریشله، ریمان، لانداو، اردیش، ویرسنیگ، ایوانیچ، سه نفری ویرسینک پینتس ـ شینتسل، سیگل، مونتگومری، توران، هیث ـ براون، هیلدبرانت ، اودلیزکو، فوڑری است،

در مقالهٔ پیه، عکس لبگ، فاتو، کاراتئودوری، فرشه، نیکودیم، ساکس، لوران شوارتس در حال تدریس دیده می‌شود.

در مقالهٔ نایرنبرگ، عکسهای ایزرائیل گلفاند (۱۹۲۲)، ف.ریس، م.ریس، کراسنر همراه با لره (۱۸۸۱) دیده می‌شود.

در مقالهٔ ماوهین، عکسهای پنلووه، باناخ، شاودر دیده می‌شود، در مقالهٔ لیشنروویچ، عکس خود او (۱۹۸۱)، الی کارتان (۱۹۳۵) دیده می‌شود.

در مقالهٔ کاهان، عکسهای اشتاینهاوس، زیگموند، و عکس دسته جمعی جالبی در خانهٔ پدر س. ماندلبرویت در ورشو (۱۹۳۰) دیده می‌شود که ماندلبرویت، دانژوا، هادامار، پدرِ س. ماندلبرویت و پُل منتل را نشان می‌دهد و پیش از مقالهٔ کاهان عکسی از گلفوند آمده است. در مقاله‌های اوزل و هیمن عکسی نیست. اما در مقالهٔ مفصل گیوم، عکس‌های تک‌نفری جالبی از گودل، هیلبرت، لوکاسیویچ، کوراتوفسکی، مازور، تارسکی، وایل، و در پایان عکس سه نفری جالبی از امی نوتر، خانم و آقای دوبری دیده می‌شود که هرچند تاریخ آن مشخص نیست ولی فروغ چشمها و لبخند این زوج جوان گویاست: گویی دو استاد و نویسندهٔ آیندهٔ درس‌های جبر مدرن و نظریهٔ گروه‌ها، نخستین درس، در محضر نوتر چشم به راه آیندهٔ سمینار جبر دانشگاه پاریس هستند. پس از کتابنامهٔ این مقاله، عکسی از نوویکوف به سال ۱۹۶۷ و در صفحهٔ مقابل عکسی از سیرپینسکی چاپ شده است.

در مقالهٔ فیکرا عکسی نیست ولی در مقابل آن، و در واقع پس از مقالهٔ دوب، عکسی از کولموگوروف پای تابلو دیده می‌شود، در داخل مقالهٔ دوب، عکس خود او در حال ایراد سخنرانی در لوکزامبورگ (۱۹۹۲) دیده می‌شود.

سرانجام به مقالهٔ دیودونه می‌رسیم که هر چند حاوی عکس نیست، اما پس از آن و درست قبل از مقالهٔ دوب عکس‌هایی از آلکساندروف و همکارانش در سمینار او (۱۹۷۵) و دو عکس دو نفره، یکی آلکساندروف و تیخونوف و دیگری آلکساندروف و پتروفسکی را می‌توان دید و تحسین کرد.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

این کتاب یکی از منابع ارزندهٔ تاریخ ریاضیات معاصر است و در آن نشانیِ تاریخچه‌های کم و بیش مفصل دیگر را نیز می‌توان یافت. اگر خواهان یکی از مراجع مفید برای فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی باشیم، این نوع کتاب‌ها مفیدند. نوشتن مقالات مروری به این شکل کار ساده‌ای نیست، اما می‌تواند برای کسانی که مایل به نوشتن هستند، سرمشق خوبی باشد. شیوهٔ نگارش و ارائهٔ مقالات خوشبختانه یکی نیست، اما همهٔ آنها برای من آموزنده است، مسلماً برای خوانندگان نیز چنین خواهد بود. این کتاب مقدمه‌ای شده است تا همین کمیته به گردآوری و انتشار جلد دوم کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰ بپردازد که در شمارهٔ آینده قصد معرفی آن را دارم. تجاربی که از این کتاب برای تهیه‌کنندگان حاصل شده است، جلد دوم را متفاوت می‌سازد و در آنجا راحت‌تر می‌توان یک سلسله منبع ارزنده را برای جستجوی فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی معرفی کرد. راهنمای ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، در جلد دوم نظیر ندارد و جای خود را به نوع دیگری از معرفی آثار مهم (منتشر شده در آمریکا و روسیه) داده است. تنها نکتهٔ عام که ممکن است عده‌ای از این کتاب خوششان نیاید، این است که علناً رایحهٔ اروپایی دارد و عمداً نمی‌خواهد همه را به یک سو و یک زبان بکشاند. به نظر من این حق ملتهاست که بخواهند زبان و هویت خود را حفظ کنند، از این رو نکتهٔ مورد بحث برای من نه تنها یک ضعف کتاب نیست بلکه نقطهٔ قدرت آن نیز هست.

سپاسگزاری و پوزش

جلد دوم را انجمن ریاضی ایران تهیه کرد و در اختیارم گذاشت و سپس جلد اول (کتاب حاضر) را از دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف امانت گرفتم. از آقایان دکتر بهزاد و دکتر مهدوی امیری به خاطر فراهم آوردن این امکان سپاسگزارم.

از این که معرفی کتاب تا این حد به درازا کشید، هر چند که در آغاز ادعا کردم و هنوز هم به آن معتقدم که فقط یک بررسی اجمالی صورت گرفته است، از خوانندگان پوزش می‌خواهم. برای جلد دوم سعی خواهم کرد تجاربم را در مورد جلد اول به کار گیرم و شاید موفق شوم در حجم کمتر و معقول‌تری معرفی را به پایان برسانم.

ارسلان شادمان

دانشگاه تهران، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر،

صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۶۴۵۵،

پست الکترونیک: chademan@khayam.ut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شمارهٔ ۲۶(بهار ۱۳۸۰)، صص. ۶۷ تا ۶۹

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسائل شمارهٔ قبل:

حل مسألهٔ ۴۰. تابع g را به صورت $g(x)=(f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x))e^{-x}$ تعریف می‌کنیم. فرض مسأله نتیجه می‌دهد که $ln(\frac{e^b g(b)}{e^a g(a)})=b-a$، یا g(a)=g(b) و در نتیجه $a<c<b$ موجود است که $g'(c)=0$. امّا $g'(x)=(f^{(n+1)}(x)-f(x))e^{-x}$ و لذا $f^{(n+1)}(c)=f(c)$. □

حل مسألهٔ ۴۱. با توجه به اینکه

$$0\leqslant\int_0^1(f(x)-x)^2dx=\int_0^1 f^2(x)dx-2\int_0^1 xf(x)d(x)+\int_0^1 x^2dx,$$

به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 f^2(x)dx\geqslant 2\int_0^1 xf(x)dx-\int_0^1 x^2dx=2\int_0^1 xf(x)dx-\frac{1}{3}.$$

امّا با توجه به فرض داریم

$$\int_0^1\int_x^1 f(t)dtdx\geqslant\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx,$$

یا

$$\int_0^1 tf(t)dt \geqslant \frac{1}{3}.$$

پس

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant 2(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\square$$

حل مسألهٔ ۴۲. قرار می‌دهیم $C = A + wB$ که در آن $w = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. با توجه به اینکه $-w = \bar{w} + 1$ داریم

$$\begin{aligned} C\bar{C} &= (A + wB)(A + \bar{w}B) = A^2 + \bar{w}AB + wBA + B^2 \\ &= AB + \bar{w}AB + wBA = w(BA - AB), \end{aligned}$$

و در نتیجه $\det(C\bar{C}) = w^n \det(BA - AB)$. امّا $\det(C\bar{C}) = \det(C)\det(\bar{C})$ عدد حقیقی است و $\det(BA - AB)$ عدد حقیقی ناصفر، لذا $w^n \in \mathbb{R}$. این نیز نتیجه می‌دهد $3|n$. $\square$

حل مسألهٔ ۴۳. فرض می‌کنیم $J = [a_{ij}]_{n\times n}$ به صورت

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j + 1 \text{ اگر} \\ 0 & : i \neq j + 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. واضح است که رتبهٔ ماتریس J برابر $n - 1$ است و تنها مقدار ویژه‌اش صفر می‌باشد. چون $Y = XJ$، لذا $A = YX^{-1} = XJX^{-1}$ و $B = X^{-1}Y = J$. در نتیجه ماتریس‌های A و B نیز رتبه‌ای برابر $n - 1$ دارند و صفر تنها مقدار ویژهٔ آنها است. $\square$

مسائل جدید

۴۴. فرض کنید A یک ماتریس 3×3ی وارونپذیر با درآیه‌هایی از میدان F باشد. اگر $\det(A) = 1$ و $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{-1}) = 0$، ثابت کنید $A^3 = I$.

۴۵. فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x, y \in [0, 1]$، $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$. ثابت کنید $\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{4}$.

۴۶. فرض کنید R یک حلقه باشد با این ویژگی که برای هر $a \in R$، $a^2 = 0$. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in R$، $abc + abc = 0$.

۴۷. فرض کنید x_1، $\cdots$، x_n اعداد حقیقی باشند و $x_1, \cdots, x_n \geqslant -1$. اگر $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$،

ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$.

تشکر: از آقایان مرتضی بیات و حمید یوسفی که حل مسائل ۳۶، ۳۷، ۳۸ و ۳۹ را ارسال کرده‌اند متشکریم.