فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۱ تا ۲۰

# حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی، مدل‌سازِ پدیده‌های طبیعی

بیژن ظهوری زنگنه و روح‌اله جهانی‌پور

چکیده

این مقاله، شرحی است از مشاهده، اکتشاف و صورت‌بندی ریاضی حرکت براونی. رابرت براون گیاه شناس اسکاتلندی، برای اولین بار در سال ۱۸۲۸ با مشاهدهٔ این حرکت، متوجه اهمیت آن در مطالعه ذرات معلق میکروسکوپی شد. پس از آن، دامنهٔ کاربرد حرکت براونی از مطالعهٔ ذرات معلق میکروسکوپی بسیار فراتر رفت و اکنون شامل الگوسازی قیمتهای سهام، نوفهٔ حرارتی در مدارهای الکتریکی، برخی حالتهای حدی در سیستمهای صف وموجودی و اختلالات تصادفی در انواع دیگر سیستمهای فیزیکی، زیست شناختی، اقتصادی و مدیریت شده است. دامنهٔ این کاربردها آنقدر فراگیر شده است که داشتن اطلاعاتی هر چند مقدماتی برای هر ریاضی‌دان یا ریاضی‌خوان به‌خصوص در دوره‌های تحقیقاتی لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله یکی از روش‌های ساخت حرکت براونی و همچنین مهمترین ویژگی‌های آن را شرح خواهیم داد. خواهیم دید که حرکت براونی دارای مسیرهای پیوسته ولی هیچ‌جا مشتق‌پذیر است. همچنین دارای خواص مارتینگلی و مارکفی است.

## ۱. مقدمه

حرکت براونی[۱]، نامی است که به حرکت نامنظم گردهٔ گیاهان که در آب معلق هستند داده شده است. رابرت براون گیاه شناس اسکاتلندی، برای اولین بار در سال ۱۸۲۸ با مشاهدهٔ این حرکت، متوجه اهمیت آن در مطالعهٔ ذرات معلق میکروسکوپی شد. پس از آن، دامنهٔ کاربرد حرکت براونی از مطالعه ذرات معلق میکروسکوپی بسیار فراتر رفت و اکنون شامل الگوسازی قیمت‌های سهام، نوفهٔ حرارتی در مدارهای الکتریکی، برخی حالت‌های حدی در سیستمهای صف و موجودی و اختلالات تصادفی در انواع دیگر سیستمهای فیزیکی، زیست شناختی، اقتصادی و مدیریت شده است.

1) Brownian motion

آنچه براون در ابتدا مشاهده نمود این بود که گرده‌های گیاهان روی سطح مایع دارای حرکت‌اند و علاقه‌مند شد تا قانون و علت این حرکت را بیابد، امااز عهدهٔ این کار برنیامد و مسأله بدون پاسخ باقی ماند. سپس در سال ۱۹۰۶ میلادی، اینشتین موفق به حل مسأله شد و علت حرکت را بمباران دانه‌های گرده توسط ملکولهای سطح مایع معرفی نمود. با این حال، اولین الگوی ریاضی حرکت براونی در پایان‌نامهٔ دکتری ریاضی بشیلیه[1] در سال ۱۹۰۰ میلادی در دانشگاه پاریس و برای یک الگوی اقتصادی مطرح شد. بشیلیه توزیع‌های مهم متعددی استخراج کرده بود که همگی به فرآیند حرکت براونی در $\mathbb{R}$ مربوط بودند. «از جمله توزیع مربوط به تغییر بیشینه در طول یک بازهٔ زمانی. بدین منظور، او توزیع‌های متناظر با یک قدم‌زدن تصادفی گسسته را پیدا می‌کرد و سپس حد را هنگامی که طول قدم‌ها به سمت صفر میل می‌کردند به دست می‌آورد. دقیق‌تر بگوییم، آنچه بشیلیه استخراج نمود توزیع‌هایی بودند که برای فرآیند حرکت براونی کارایی داشتند، به فرض آنکه اصلاً چیزی تحت عنوان حرکت براونی وجود داشته باشد، و به فرض این‌که بشود آن را با آن قدم زدن‌های تصادفی تقریب زد.» [۶]

پس ازآن، نوربرت وینر[2] ریاضیدان برجسته و نابغهٔ قرن بیستم [۹]، در سال ۱۹۱۸ الگوی ریاضی این حرکت را به طور کامل بررسی کرد: «توجه کنید که شکی در وجود حرکت براونی نیست: حرکت براونی را می‌شود زیر میکروسکوپ نظاره کرد، ولی هنوز برهانی برای وجود یک فرآیند تصادفی، یک حساب ریاضی، با خواص مطلوب در دست نبود. وینر در سال ۱۹۲۳ فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروزه معمولاً فرآیند وینر نامیده می‌شود به‌دست آورد. بدین منظور، وی از رهیافت دانیل[3] به نظریهٔ اندازه استفاده کرد تا اندازه‌ای با خواص ذیل، برفضای $S$ از توابع پیوسته به‌دست آورد: اگر $x(t,.)$ متغیری تصادفی باشد که با مقدار یک تابع در $S$ در زمان $t$ تعریف شده باشد، فرآیند تصادفی این متغیرهای تصادفی، فرآیندی است با اعضای $S$ به عنوان توابع نمونه‌ای، و با توزیع‌های توأمی که برای فرآیند حرکت براونی داشتیم به عنوان توزیع‌های توأم متغیر تصادفی.» [۶]

ریاضیدانان برای تولید یک نظریهٔ عمیق ریاضی تلاش زیادی می‌کنند، امّا متأسفانه آنچه باقی می‌ماند نتیجهٔ این نظریه به صورت یک مقاله است، همانطور که ۷۵ ریاضیدان در سال ۱۹۶۲ در بیانیه‌ای در مورد تدریس ریاضی اعلام کردند «تفکر ریاضی، تنها استدلال استنتاجی نیست، اثبات صوری صرف هم نیست ، بلکه فرآیندهای ذهنی و فکری که اثبات و چگونگی اثبات را ارائه می‌کنند همانند خود اثبات که نتیجهٔ تفکر ریاضی است، بخشی از تفکر ریاضی محسوب می‌شود. استخراج مفاهیم درست از وضعیت‌های محسوس و ملموس، تعمیم از حالات شهود، استدلال استقرایی، استدلال از طریق تمثیل، زمینه‌های شهودی که برای آشکار کردن یک حدسیه به کار می‌روند همگی سبک و طریقهٔ ریاضی گونهٔ تفکر است.» [۶] خوشبختانه، نوربرت وینر با نوشتن کتابهای توصیفی، مانند «من یک ریاضیدان هستم»، پشت پردهٔ تفکر

1) Bachelie 2) Wiener 3) Daniell, P. J.

و فرآیند به‌وجودآوردن یک نظریه را تا اندازه‌ای بررسی کرده است. بنابراین خوب است داستان حرکت براونی را از زبان نوربرت وینر بشنویم. وینر درانستیتو تکنولوژی ماساچوست (M.I.T.) استخدام شده بود: «ساختمان M.I.T. در ساحل رودخانهٔ چارلز ساخته شده بود و طوری قرار داشت که می‌شد مستقیماً و از پنجره‌های آن، از چشم‌انداز گسترده سرزمین زیبای دور و بر آن لذت برد، به خصوص وجود رودخانه، موجب شادی بود. به نظر می‌رسید که می‌توان از بام تا شام به تماشای ناز و کرشمه‌های عجیب و غریب آب نشست. ولی آن چه در میان این همه زیبایی مرا به طرف خود می‌کشید، ریاضیات و فیزیک بود. آن قانون‌مندی‌های ریاضی، که همهٔ این تودهٔ بی‌نظم و ناآرام آب را هدایت می‌کند، کدام است؟ مگر اهمیت اصلی ریاضیات در این نیست که می‌تواند نظم و ترتیبی را که زیر این هرج و مرج و نابسامانی ظاهر دور و بر ما پنهان شده است، پیدا کند؟ رودخانهٔ چارلز، گاهی ناگهان از موج‌های بلند، با شانه‌های بلند کف، پوشیده می‌شود و گاه چنان چین خوردگی ملایمی دارد که به زحمت می‌توان موج های کوتاه آن را دید. طول موج‌های آن، گاه از دو یا سه بند انگشت تجاوز نمی‌کند و گاه به چند متر می‌رسد. چگونه می‌توان بیان ریاضی همه این پدیده‌هارا داد؟ از چه دستگاهی باید استفاده کنیم تا در تنوع بی‌پایان جزئیات این منظره غرق شویم؟ برایم روشن بود که این مسأله با مسألهٔ میانگین آماری بستگی دارد که با انتگرال لبگ خویشاوند است.» ([۷] صفحهٔ ۴۱)

وینر در کتاب خود به آشنایی با آثار «ویلارد گیبس» اشاره می‌کند: «یکی از بزرگترین دانشمندان آمریکایی است که در واقع رشتهٔ تازه‌ای از دانش را پایه گذاشت، رشته‌ای که در حد فاصل فیزیک و ریاضیات قرار دارد.» ([۷] صفحهٔ ۴۲) «گیبس آثار بسیار جالبی هم در فیزیک و هم در ریاضیات دارد، ولی کارهای اساسی او در زمینه مکانیک آماری، بیش از هر چیز دیگری، برایم جالب بود. همین کارهای او بود که، تا حد زیادی، مسیر خاص زندگی مرا مشخص کرد.» دیدگاه سنتی در فیزیک، که از نیوتون بزرگ سرچشمه می‌گیرد، بستگی خلل‌ناپذیری با تصورهای تعیّن گرایانه دارد و بر طبق آن، معرفت دقیق چگونگی جهان و یا هر قسمت بسته‌ای از آن در یک لحظهٔ معین، شامل معرفت دقیق آن در زمان‌های بعدی هم هست. بنابر تصور اصلی نیوتون، اگر موقعیت و سرعت ذره‌ها را در موج‌های سطح رودخانهٔ چارلز بدانیم، می‌توانیم حرکت این موج‌ها را در همهٔ سده‌های آینده محاسبه کنیم. متأسفانه با وسیله‌های اندازه‌گیری که در اختیار داریم، و همهٔ آن‌ها با دستهای آدمی ساخته شده‌اند، نمی‌توانیم مقادیر مطلقاً دقیق و سرعت همهٔ ذره‌ها را، در لحظهٔ اولین زمان، به دست آوریم. به این ترتیب، فیزیک، که باید عملاً به درد پدیده‌های طبیعت بخورد، ناگزیر مواجه با مشکلی می‌شود: چگونه می‌توان با تکیه براین داده‌های تقریبی مربوط به وضع اولیه، که به کمک وسیله‌های موجود به دست می‌آیند، دربارهٔ واقعیت امر قضاوت کرد؟» ([۷] صفحه ۴۳)

با این ایده وینر فضای نمونه‌ای را فضای توابع پیوسته یا در واقع فضایی که هر عضو آن یک موج باشد در نظر گرفت. متغیر تصادفی از فضای توابع پیوستهٔ $\Omega = C[\circ, T]$ به اعداد حقیقی تعریف شده بود. در اینجا وینر مفهوم مهمی را کشف کرده بود، توابعی که روی فضایی تعریف

می‌شوند که دامنهٔ آن نقطه (در فضای چند بعدی) نیست، بلکه دامنهٔ آن یک فضای بینهایت بعدی است. خود او می‌گوید: «به تعمیم مفهوم احتمال، در مواردی مربوط می‌شود که «حالت‌های ممکن» را نمی‌توان به صورت نقطه‌های یک صفحه یا حوزه‌ای از فضا در نظر گرفت، ولی خصلت منحنی‌هایی را دارند که معرف اشیای متحرکی هستند.» ([۷] صفحه ۴۴) تا آن زمان، تصور یک نقطه در یک فضا، یک نقطه با بعد متناهی بود؛ یعنی نقطه‌ای در صفحه و یا فضای اقلیدسی و یا صفحه مختلط. دیدن یک تابع به عنوان یک نقطه، بسیار نامأنوس بود و ریاضی‌دان‌ها، به حسن و توانایی‌های فضای توابع نمی‌اندیشیدند. مشاهدهٔ وینر از موج رودخانهٔ چارلز و دیدن مسیر منحنی‌ها به عنوان یک نقطه و حرکت موج‌ها به عنوان حرکت نقطه در فضای توابع، بدیع و تازه بود. مشاهده‌ای بسیار ساده و واضح، چیزی که همهٔ مردم بارها دیده‌اند. اکثر مردم هم موج رودخانه و هم دریا را بارها و بارها مشاهده کرده‌اند، اما کمتر کسی با چشم بصیرت به پدیده‌های طبیعی می‌نگرد و به کشف قانون‌مندی‌های حاکم بر آنها، موفق می‌شود. بارها افتادن سیب از درخت و موج رودخانه را مشاهده کرده‌ایم ولی هیچ کس جز نیوتن، از این مشاهدات، به قانون جاذبه پی نبرد و هیچ کس جز وینر، فضای توابع را درک ننمود. «به این ترتیب حرکت براونی موقعیتی را در برابر ما قرار می‌دهد که در آن، ذره‌ها به رسم منحنی‌هایی مشغول‌اند، و این منحنی‌ها، به مجموعه‌ای آماری از منحنی‌هاتعلق دارند. این حرکت، بهترین زمینه برای اندیشه‌های من در مورد به کاربردن انتگرال‌گیری لبگ در فضای منحنی‌ها بود. ضمناً دارای این خصوصیت بود که موضوع آن، از لحاظ فیزیکی، به دنیای واقع مربوط می‌شد و دقیقاً به اندیشه‌های گیبس بستگی داشت. در واقع، در این جا بود که توانستم با به‌کاربردن نظرات خود در تعمیم نظریهٔ انتگرال‌گیری، به موفقیت بزرگی برسم.» خود حرکت براونی، موضوعی نبود که در فیزیک، بدون بررسی باقی مانده باشد ولی در کارهای اساسی و عمیقی که اینشتین و سمولوچوفسکی[1] در این زمینه کرده‌اند، یا به رفتار یک ذره در یک لحظهٔ زمانی ثابت پرداخته‌اند و یا به خصلت های آماری مجموعهٔ بزرگی از ذره‌ها در جریان زمان؛ ولی خاصیت های ریاضی خط سیر ذره های جداگانه، هیچ گاه مورد مطالعه قرار نگرفته بود.» در مورد موضوع اخیر، تقریباً هیچ چیز روشن نبود، البته اگر اظهار نظر عمیق په‌رن[2] فیزیک‌دان فرانسوی را که در کتاب خود به نام «اتم‌ها» آورده است، به حساب نیاوریم. او می‌گوید: «خط سیر به کلی بی‌نظم ذره‌ها، که در اثر حرکت براونی به وجود می‌آید، آدمی را به یاد منحنی‌های پیوسته ریاضی‌دانان می‌اندازد که در هیچ نقطهٔ خود مشتق نداشته باشند.» ([۷]، صفحه ۴۸ و ۴۹)

«با کمال تعجب، و در عین حال خوشحالی، دریافتم که با چنین درکی از حرکت براونی، می‌توان نظریهٔ صوری آن را در حد بالایی از کمال و ظرافت تنظیم کرد. در چارچوب این نظریه توانستم ملاحظه په‌رن را ثابت کنم که، به استثنای چند موردی که احتمال آن در مجموع برابر صفر است، مسیرهای حرکت براونی، منحنی‌های پیوسته‌اند، که در هیچ کجا مشتق ندارند.» ([۷] صفحه ۴۹)

1) Smoluchowski 2) Perrin, J. B.

بدین ترتیب وینر در سال ۱۹۲۳ از خاصیت گاوسی بودن حرکت براونی استفاده می‌کند و حرکت براونی را به صورت یک سری فوریه با پایهٔ دنباله‌های توابع شاودر که ضرایب آن متغیرهای تصادفی گاوسی هستند می‌سازد. حرکت براونی بعدها با اصلاحاتی به وسیله پل لوی[1] در سال ۱۹۴۸ و چیشلسکی[2] در سال ۱۹۶۱ به صورت ساده‌تری ساخته شد (برای مطالعهٔ این روش رجوع کنید به [۳]).

## ۲. تعریف حرکت براونی

حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است، یعنی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی که با مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی اندیس گذاری شده‌است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده‌اند. به زبان دیگر می توان فرآیند تصادفی را یک تابع دو متغیره انگاشت به طوری که به ازای هر زمان ثابت نسبت به متغیر دیگر که از فضای احتمال انتخاب می شود اندازه پذیر است. با ثابت نگه داشتن نقطهٔ نمونه‌ای، مسیرهای فرآیند به عنوان تابعی از زمان به دست می آیند. این فرآیند دارای خاصیت مارکفی، گاوسی، مارتینگلی، با نموهای ایستا و مستقل است. همچنین دارای مسیرهای پیوسته‌ای است که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارند.

**تعریف ۱.۲.** فرآیند تصادفی $\{W(t)\ ,\ t \geq 0\}$ را یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر) گوییم اگر

۱– $W(0) = 0$؛

۲– $W(t) - W(s)$ برای $s \leq t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد؛

۳– متغیرهای تصادفی $W(t_2) - W(t_1)$، $W(t_3) - W(t_2)$، $\ldots$ $W(t_n) - W(t_{n-1})$ برای $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ مستقل باشند (گوییم $W(t)$ دارای نموهای مستقل است).

با تعریف فوق برای $s < t$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(t) - W(s) + W(s))W(s)] \\ &= E[W(t) - W(s)]E[W(s)] + E[(W(s)^2] = 0 + s = s \end{aligned}$$

بنابراین $E[W(t)W(s)] = t \wedge s$ که در آن $t \wedge s =$ می‌نیمم $s, t$.

یادآوری می‌کنیم که در یک فضای احتمال هر خانواده از زیرمیدان‌های سیگمایی را یک فیلتر[3] می‌نامیم. در واقع یک فیلتر نشان دهندهٔ سیر افزایشی میزان اطلاعات با گذشت زمان است. فرض کنیم $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی سازگار[4] با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}$ باشد، به‌این معنی که برای هر $t \geq 0$ متغیر تصادفی $X_t$ نسبت به میدان سیگمایی $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر است. خانواده

1) Levy, P. 2) Ciesielski, Z 3) filter 4) adapted

$\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ را مارتینگل می‌نامیم اگر $E[|X_t|] < \infty$؛ و برای $s < t$ داشته باشیم $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$. درآنچه به حرکت براونی یا همان فرآیند وینر مربوط می‌شود، معمولاً فیلتر استاندارد $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s : s \leq t\})$ را در نظر می‌گیریم. حرکت براونی یک مارتینگل است، زیرا به وضوح $W_t \in \mathcal{F}_t$ و به علاوه به دلیل گاوسی‌بودن $W_t$ داریم $E[|W_t|] < \infty$. همچنین

$$\begin{aligned} E[W_t|\mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + E[W_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[W_t - W_s] + W_s \\ &= 0 + W_s = W_s. \end{aligned}$$

همان طور که در مقدمه نیز ذکر شد، اکنون سؤال اساسی این است که آیا فرآیندی تصادفی با ویژگی‌های بیان شده برای حرکت براونی وجود دارد یا نه؟ در تعریف و بررسی ویژگی‌های حرکت براونی به خواص متغیرهای تصادفی نرمال (گاوسی) نیازمندیم. ابتدا ببینیم این‌ها چه نوع متغیرهای تصادفی‌اند و ویژگی‌های آن‌ها چیست. گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد، یعنی $\Omega$ یک مجموعهٔ ناتهی، $\mathcal{F}$ میدان سیگمایی از زیرمجموعه‌های $\Omega$، و $P$ یک اندازهٔ احتمال روی آن است. متغیر تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}$ را نرمال یا دارای توزیع نرمال $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ می‌نامیم اگر توزیع $X$ دارای چگالی

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}$$

باشد. $\sigma > 0$ و $m$ پارامترهای $X$ نام دارند. بنابراین برای هر زیرمجموعهٔ برل $G$ از خط حقیقی

$$P(X \in G) = \int_G p_X(x)dx.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$E[X] = \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x p_X(x) dx = m,$$

و همچنین

$$Var(X) = E[(X-m)^2] = \int_\mathbb{R} (x-m)^2 p_X(x) dx = \sigma^2.$$

به‌این ترتیب معنای احتمالاتی متغیرهایی که در تابع چگالی متغیر تصادفی نرمال ظاهر می‌شوند روشن می‌گردد. در واقع $m$ میانگین یا امید ریاضی و $\sigma^2$ واریانس یا میزان پراکندگی $X$ حول میانگین است. به طور کلی‌تر بردار تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ بردار تصادفی نرمال چندگانه $\mathcal{N}(m, C)$ نامیده می‌شود اگر توزیع $X$ دارای چگالی $n$ متغیرهٔ

$$p_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k}(x_j - m_j)a_{jk}(x_k - m_k)\}$$

باشد که درآن $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ و $C^{-1} = A = [a_{jk}]$ یک ماتریس متقارن مثبت ـ معین است. در این حالت نیز به راحتی می‌توان نشان داد که $E[X] = m$ و $A^{-1} = C = [c_{jk}]$ ماتریس کوواریانس $X$ است، یعنی برای $1 \leq j, k \leq n$

$$c_{jk} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)].$$

چون ماتریس $C$ نیز متقارن است، پس بهتر است که چگالی $p_X$ را به صورت

$$p_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-m)C^{-1}(x-m)'\}$$

بنویسیم که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $'$ علامت ترانهاده است.

رابطه‌ای دو طرفه بین متغیرهای تصادفی و توابع مشخصهٔ آنها وجود دارد، به این معنی که با دردست داشتن توزیع یک متغیر تصادفی می‌توان تابع مشخصهٔ آن و با داشتن تابع مشخصه می‌توان توزیع آن متغیر و آنچه وابسته به آن است از قبیل چگالی، گشتاورها و مفهوم استقلال را به دست آورد. تابع مشخصهٔ یک متغیر تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x).$$

انتگرال ظاهر شده در این تعریف از نوع لبگ ـ اشتیلیس نسبت به اندازهٔ به وجود آمده از تابع توزیع $X$ است. به عبارت دیگر $\phi_X$ تبدیل فوریهٔ $X$ است. می‌توان تابع مشخصه را برای بردارهای تصادفی نیز تعریف کرد به این ترتیب که تابع مشخصهٔ یک بردار تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ تابعی چون $\phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ است که

$$\phi_X(u_1, \ldots, u_n) = E[\exp(i(u_1 X_1 + \ldots + u_n X_n))] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,u>} dP_X(x)$$

که در آن $< x, u >$ ضرب داخلی دو بردار $x$ و $u$ در فضای $\mathbb{R}^n$، یعنی $< x, u >= \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ و $P_X$ اندازهٔ القایی توسط $X$ روی $\mathbb{R}^n$ است که برای هر زیر مجموعهٔ برل $B$ از خط حقیقی به صورت $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ تعریف می‌شود.

**قضیهٔ ۲.۲.** تابع مشخصهٔ $X$، توزیع $X$ را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و برعکس.

اثبات. به صفحه ۱۸۲ فصل ۹ از[۵] رجوع کنید.

برای مثال اگر $X$ متغیر تصادفی با توزیع $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ باشد، خواهیم داشت

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$$

که در آن

$$dF(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\}dx.$$

بنابراین با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که

$$\phi_X(t) = \exp\{mti - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}.$$

**قضیهٔ ۳.۲.** اگر $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ نرمال $\mathcal{N}(m, C)$ باشد، آن‌گاه

$$\phi_X(u_1, \ldots, u_n) = \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j c_{jk} u_k + i\sum_j u_j m_j\}.$$

این قضیه معمولاً شروع تعریف متغیر تصادفی نرمال است، یعنی متغیر تصادفی $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ نرمال است اگر تابع مشخصهٔ آن به ازای یک ماتریس متقارن نیمه مثبت معین $n \times n$ $C = [c_{jk}]$ و بردار $m \in \mathbb{R}^n$ به صورت فوق باشد. بنابراین تعریف وارون‌پذیر نیست. از این پس تعریف گسترش یافته را مورد استفاده قرار می‌دهیم. صورت دیگری از بیان نرمال بودن یک بردار تصادفی این است که فرض کنیم $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ برای $1 \leq j \leq n$ متغیر تصادفی باشند. بردار تصادفی $X = (X_1, \ldots, X_n)$ نرمال است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ در $\mathbb{R}$ متغیر تصادفی $Y = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ نرمال باشد. استفاده از این بیان معمولاً ساده تر از به کاربردن چگالی احتمال توأم است. به‌علاوه اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ بردار تصادفی $X_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ نرمال باشد و $X_k \to X$ در $\mathcal{L}^2(\Omega)$، یعنی $E(|X_k - X|^2) \to 0$ وقتی $k \to \infty$، در این صورت $X$ دارای توزیع نرمال است.

**تعریف ۴.۲.** فرض کنیم $X = (X_t)_{t \in T}$ یک فرآیند تصادفی با مجموعهٔ اندیس $T$ باشد و برای هر $t \in T$، $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$. اندازه‌های $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ برای $k = 1, 2, \ldots$ روی $\mathbb{R}^{nk}$ به این صورت تعریف می‌شوند :

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(F_1 \times \ldots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \ldots, X_{t_k} \in F_k)$$

که $F_1, \ldots, F_k$ زیر مجموعه‌های برل $\mathbb{R}^n$ هستند.

این اندازه‌ها توزیع‌های متناهی ــ بعد $X$ نام دارند. هر فرآیند تصادفی توزیع‌های متناهی ــ بعد به وجود می‌آورد که بعضی از ویژگی‌های آن را معین می‌کنند. سؤال این است که اگر توزیع‌های متناهی ــ بعد داده شده باشند، آیا فرآیند تصادفی روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ وجود دارد که این‌ها همان توزیع‌های متناهی ــ بعد آن فرآیند باشند. یعنی اگر $\{\nu_{t_1,\ldots,t_k}; k \in \mathbb{N}, t_i \in T\}$ اندازه‌های احتمال روی $\mathbb{R}^{nk}$ باشند، آیا می‌توان فرآیند $(Y_t)_{t \in T}$ را روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ساخت که $\nu_{t_1,\ldots,t_k}$ توزیع‌های متناهی ــ بعد $(Y_t)_{t \in T}$ باشند. قضیهٔ توسیع کلموگرف

حاکی از این است که پاسخ به این سؤال تحت شرایط سازگاری خاصی، مثبت است.

**قضیهٔ ۵.۲.** **(توسیع کلموگرف)** برای هر $k \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_k \in T$ فرض کنیم $\nu_{t_1,\ldots,t_k}$ اندازهٔ احتمال روی $\mathbb{R}^{nk}$ باشد به طوری که

(i) برای هر جایگشت $\sigma$ از $\{1, \ldots, k\}$ و زیرمجموعه‌های برل $F_i$ از $\mathbb{R}^n$، داشته باشیم:

$$\nu_{t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \ldots \times F_k) = \nu_{t_1,\ldots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \ldots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$$

(ii) برای هر $m \in \mathbb{N}$،

$\nu_{t_1,\ldots,t_k}(F_1 \times \ldots \times F_k) = \nu_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1},\ldots,t_{k+m}}(F_1 \times \ldots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \ldots, \times \mathbb{R}^n)$ که تعداد $\mathbb{R}^n$های طرف راست $m$ تا است.

در این صورت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و فرآیند تصادفی $(X_t)_{t\in T}$، $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ وجود دارند که

$$\nu_{t_1,\ldots,t_k}(F_1 \times \ldots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \ldots, X_{t_k} \in F_k)$$

که $t_i \in T$، $k \in \mathbb{N}$ و $F_i$ها زیرمجموعه‌های برل $\mathbb{R}^n$ هستند.

## ۳. ساختن حرکت براونی

حرکت براونی فرآیند تصادفی $(B_t)_{t\geq 0}$ است که برای ساختن آن از قضیهٔ توسیع کلموگرف استفاده می‌کنیم. باید خانوادهٔ $(\nu_{t_1,\ldots,t_k})$ را معین کنیم و نشان دهیم شرط‌های قضیه برقرارند. $x \in \mathbb{R}^n$ را ثابت می‌گیریم و تعریف می‌کنیم

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2t}), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

اگر $0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k$ تعریف می‌کنیم

$$\nu_{t_1,\ldots,t_k}(F_1 \times \ldots \times F_k) = \int_{F_1 \times \ldots \times F_k} p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\ldots p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1\ldots dx_k$$

اگر $t=0$ قرار می‌دهیم $p(0,x,y) = \delta_x(y)$ که $\delta_x$ اندازهٔ جرمی در نقطهٔ $x$ است. این تعریف را طوری توسعه می‌دهیم که شرط (i) برقرار شود، یعنی ابتدا حالت $0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k$ را در نظر می‌گیریم و سپس بقیهٔ حالت‌ها را با جایگشت تعریف می‌کنیم. چون $\int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,y)dy = 1$ شرط (ii) به وضوح برقرار است. لذا فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ و فرآیند تصادفی $(B_t)_{t\geq 0}$ روی $\Omega$ موجود است به طوری که توزیع‌های متناهی ـ بعد $(B_t)$ عبارتند از

$$P^x(B_{t_1} \in F_1, \ldots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \ldots \times F_k} p(t_1,x,x_1)p(t_2-t_1,x_1,x_2)\ldots p(t_k-t_{k-1},x_{k-1},x_k)dx_1\ldots dx_k.$$

این فرآیند، حرکت براونی با نقطهٔ شروع $x$ نام دارد. ملاحظه می‌کنیم که $P^x(B_0 = x) = 1$. حرکت براونی یکتا نیست یعنی چهارتایی‌های متعدد $(B_t, \Omega, \mathcal{F}, P^x)$ وجود دارند که در شرایط بالا صدق می‌کنند. می‌توان حرکت براونی با برگردان پیوسته را انتخاب کرد که به این ترتیب مسیرهای حرکت آن در فضای $C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ قرار می گیرند. در واقع این همان رهیافتی است که وینر به کار برد و خود این فضا را به عنوان فضای احتمالی که حرکت براونی روی آن تعریف می‌شود در نظر گرفت که اهمیت آن در این است که فضای مذکور یک فضای لهستانی، یعنی فضای متریک کامل جدایی‌پذیر است.

اکنون به بعضی از ویژگی‌های حرکت براونی اشاره می‌کنیم. حرکت براونی $(B_t)_{t\geq 0}$ یک فرآیند گاوسی است، یعنی برای هر $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$ بردار تصادفی $Z$ که $Z = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ دارای توزیع نرمال چند گانه است، یعنی بردار $m \in \mathbb{R}^{nk}$ و ماتریس نیمه مثبت ــ معین $C = [c_{jk}] \in \mathbb{R}^{nk\times nk}$ موجودند به طوری که

$$E^x[\exp(i\sum_j u_j Z_j)] = \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k} u_j c_{jk} u_k + i\sum_j u_j m_j\}$$

برای $u = (u_1, \ldots, u_{nk}) \in \mathbb{R}^{nk}$. $E^x$ امید نسبت به احتمال $P^x$ است. به علاوه، در این صورت

$$m = E^x(Z) \quad , \quad c_{jk} = E^x[(Z_j - m_j)(Z_k - m_k)]$$

که $c_{jk}$ ها عناصر ماتریس کوواریانس $Z$ را تشکیل می‌دهند. برای اثبات، کافی است طرف چپ را صریحاً محاسبه کنیم و از توزیع‌های متناهی ـ بعد استفاده نماییم. در این صورت رابطهٔ بالا را با

$$m = E^x(Z) = (x, x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^{nk}$$

$$C = \begin{bmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \ldots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \ldots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \ldots & t_k I_n \end{bmatrix}$$

به دست می‌آوریم. از این رو برای هر $t > 0$، $E^x(B_t) = x$ و $E^x[|B_t - x|^2] = nt$ و

$$E^x[|B_t - x|\,|B_s - x|] = n\min\{s, t\} \qquad s,\, t \geq 0.$$

به علاوه اگر $s \leq t$ آن گاه

$$\begin{aligned} E^x[|B_t - B_s|^2] &= E^x[|B_t - x|^2 - 2|B_t - x|\,|B_s - x| + |B_s - x|^2] \\ &= nt - 2sn + sn = n(t - s). \end{aligned}$$

حرکت براونی $(B_t)_{t\geq 0}$ دارای نموهای مستقل است. کافی است نشان دهیم برای $t_i < t_j$

$$E^x[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|\,|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|] = 0$$

که این به سادگی از خواص فوق نتیجه می‌شود.

آیا مسیرهای حرکت براونی پیوسته‌اند؟ یعنی آیا می‌توان گفت برای هر $\omega \in \Omega$، $t \to B_t(\omega)$ پیوسته است؟ چون در $\sigma$−میدان برل‌های $(\mathbb{R}^n)^{[0,\infty]}$ مجموعهٔ $\{\omega$: $t \to B_t(\omega)$ پیوسته است$\}$ اندازه‌پذیر نیست، نمی‌توان به این سؤال پاسخ داد. بااین حال حرکت براونی برگردان پیوسته دارد. یادآوری می‌کنیم که اگر $(X_t)_{t\in T}$ و $(Y_t)_{t\in T}$ دو فرآیند تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند، می‌گوییم $(Y_t)_{t\in T}$ برگردان $(X_t)_{t\in T}$ است اگر برای هر $t \in T$، $P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$ ، یعنی برای هر $t \in T$، $X_t = Y_t$ a.s.. توزیع‌های احتمال متناهی ــ بعد دو فرآیند تصادفی که برگردان هم هستند، یکسان است ولی ممکن است مسیرهای آنهارفتارهای متفاوتی داشته باشند. گوییم فرآیند تصادفی $(X_t)_{t\in T}$ با $(Y_t)_{t\in T}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ معادل است اگر

$$P(\{\omega \in \Omega \,:\, X_t(\omega) = Y_t(\omega), \qquad \forall t \geq 0\}) = 1.$$

می‌توان نشان داد که معادل بودن دو فرآیند، برگردان بودن آنها را نتیجه می‌دهد ولی برعکس آن در صورتی درست است که هر دو فرآیند a.s. پیوسته باشند. گرچه مسیرهای فرآیند وینر پیوسته نیستند ولی قضیهٔ زیر تضمین می کند که می‌توان یک برگردان پیوسته برای آن انتخاب کرد.

**قضیهٔ ۱.۳.** **(قضیهٔ پیوستگی کلموگروف)** اگر فرآیند تصادفی $(X_t)_{t\in T}$ در این شرط صدق کند که برای هر $T > 0$، اعداد ثابت و مثبت $D$، $\alpha$ و $\beta$ موجود باشند که

$$0 \leq s,t \leq T \quad \text{برای} \quad E(|X_t - X_s|^{\alpha}) \leq D|t-s|^{1+\beta} \qquad (*)$$

آن گاه $X$ یک برگردان پیوسته دارد.

برای حرکت براونی $(B_t)_{t\geq 0}$ داریم $E^x[|B_t - B_s|^4] = n(n+2)|t-s|^2$ بنابراین برای $\alpha = 4$ و $D = n(n+2)$ و $\beta = 1$ پیوستگی حرکت براونی ثابت می‌شود.

حرکت براونی دارای ویژگی **پایایی تحت انتقال** است، به این معنی که $\{B_t - B_0 : t \geq 0\}$ مستقل از $B_0$ و دارای توزیع یکسانی با حرکت براونی است که از صفر شروع می‌شود، یعنی $B_0 = 0$ است. همچنین اگر $B_0 = 0$، آن گاه برای هر $t > 0$، $\{B_{st};\, s \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{t^{\frac{1}{2}} B_s;\, s \geq 0\}$. به عبارت دقیق‌تر این دو خانواده از متغیرهای تصادفی دارای توزیع‌های متناهی ــ بعد یکسان هستند. یعنی اگر $s_n < \ldots < s_1$ آن گاه $\{B_{s_1 t}, \ldots, B_{s_n t}\} \stackrel{d}{=} \{t^{\frac{1}{2}} B_{s_1}, \ldots, t^{\frac{1}{2}} B_{s_n}\}$. این حکم، ویژگی **تغییر مقیاس** نامیده می‌شود. چون توزیع‌های متناهی ــ بعد فرآیندهای $\{B_{ts_1}\}_{t\geq 0}, \{t^{\frac{1}{2}} B_{s_1}\}_{t\geq 0}$ یکسان‌اند، این دو فرآیند در فضای بی‌نهایت بعدی نیز هم توزیع‌اند،

یعنی $\{B_{s_1 t}\}_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} \{t^{\frac{1}{2}} B_{s_1 t}\}_{t\geq 0}$.

**نتیجهٔ ۲.۳.** می‌توان با استفاده از قضیهٔ پیوستگی کلموگرف نشان داد که حرکت براونی دارای یک برگردان پیوسته است.

اثبات. بدون از دست دادن عمومیت فرض می‌کنیم $B_0 = 0$. بنابراین

$$E(|B_t - B_s|^4) = E(|B_{t-s}|^4)$$

اما طبق خاصیت تغییر مقیاس $\{B_{t-s}\} \stackrel{d}{=} \{(t-s)^{\frac{1}{2}} B_1\}$. در نتیجه

$$E(|B_{t-s}|^4) = E(|(t-s)^{\frac{1}{2}} B_1|^4) = (t-s)^2 E(|B_1|^4).$$

پس به ازای $C = E(|B_1|^4) < \infty$ داریم $E(|B_t - B_s|^4) = C(t-s)^2$.

اکنون تعمیمی از قضیهٔ پیوستگی کلموگرف را بیان می‌کنیم. بدین منظور از نماد $\mathbb{Q}_2 = \{m2^{-n} : m, n \geq 0\}$ برای نشان دادن مجموعهٔ اعداد گویای دودویی [1] استفاده می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم مقادیر فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ در فضایی متریک با متر $\rho$ اتخاذ شود.

**قضیهٔ ۳.۳.** فرض کنیم $E[\rho(X_s, X_t)^\beta] \leq K|t-s|^{1+\alpha}$ که در آن $\beta > 0$ و $\alpha$. اگر $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$، آن گاه متغیر تصادفی $C(\omega)$ وجود دارد که با احتمال یک برای هر $q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1]$

$$\rho(X_q, X_r) \leq C(\omega)|q - r|^\gamma.$$

در نتیجه با احتمال یک $X_t$ روی $\mathbb{Q}_2 \cap [0, 1]$ به طور یکنواخت پیوسته است و می‌توان با استفاده از چگال بودن اعداد دودویی در بازهٔ $[0, 1]$ آن را به روی $[0, 1]$ توسیع داد. به علاوه رابطهٔ تغییر مقیاس نتیجه می‌دهد که

$$E(|B_t - B_s|^{2m}) = E(((t-s)^{\frac{1}{2}} B_1)^{2m}) = |t-s|^m E(B_1^{2m}) = C_m |t-s|^m.$$

بنابراین اگر $m \to \infty$ آن گاه مسیرهای حرکت براونی، پیوسته و هلدر از مرتبهٔ $\gamma < \frac{1}{2}$ هستند. با مشاهدهٔ $(*)$ پیوستگی یکنواخت مورد نظر از قضیهٔ پیوستگی کلموگرف نتیجه می‌شود.

دراثبات قضیهٔ توسیع، خاصیت نموهای مستقل حرکت براونی به کار برده نمی‌شود و تنها از تغییر مقیاس و خاصیت گشتاوری استفاده می‌کنیم. در آینده، هنگامی که $X_t$ مقادیرش را در فضای متریک $S$ با متر $\rho$ اتخاذ می‌کند، به این نتیجه نیازمندیم.

## ۴. خواص مسیرهای براونی

مسیرهای حرکت براونی دارای خاصیت‌های شگفت‌آوری هستند. آنها با وجود پیوستگی دارای

1) dyadic

رفتار بسیار «بدی» هستند، به این معنی که تقریباً هر مسیر حرکت براونی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست. در جریان اثبات این مطلب، فرض می‌شود که فضای احتمال، کامل است، یعنی تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌های بااندازهٔ صفر آن، اندازه‌پذیر می‌باشند. این فرض از عمومیت مسأله نمی‌کاهد، زیرا هر فضای احتمال را می‌توان در یک فضای احتمال کامل نشاند به این مفهوم که می‌توان میدان سیگمایی آن را به یک میدان سیگمایی بزرگتر و اندازهٔ احتمال آن را به یک اندازهٔ احتمال کامل روی آن میدان سیگمایی بزرگتر توسعه داد.

**قضیهٔ ۱.۴.** تقریباً هر مسیر حرکت براونی هیچ جا مشتق پذیر نیست.

$$P(\{\forall t \geq ٠ \ \limsup_{h\to ٠} |\frac{B(t+h)-B(t)}{h}| = +\infty\}) = ١.$$

در نتیجه تقریباً هر مسیر نمونه‌ای حرکت براونی $B_t$ دارای تغییرات نامتناهی روی هر بازهٔ متناهی است. یادآوری می‌کنیم که تابع $f$ با دامنهٔ $[٠,١]$ را با تغییرات کران‌دار گوییم اگر طول خم آن متناهی باشد، یعنی $\sup\sum_{i=١}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-١})| < \infty$ که در اینجا سوپریمم روی تمام افرازهای به صورت $٠ \leq t_٠ < t_١ < \ldots < t_n = ١$ از بازهٔ $[٠,١]$ گرفته می‌شود. نتیجهٔ معروفی در آنالیز ریاضی تضمین می‌کند که هر تابع با تغییرات کران‌دار تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر است. بنابر قضیهٔ فوق تقریباً هر مسیر حرکت براونی هیچ جا مشتق‌پذیر نیست و در نتیجه با تغییرات کران‌دار نمی‌باشد. بنابراین تقریباً هیچ مسیر حرکت براونی دارای طول متناهی نیست.

می‌دانیم که مسیرهای حرکت براونی پیوسته ولی بد رفتار هستند. آنها هیچ جا مشتق ندارند و دارای طول متناهی نیستند. برای محاسبهٔ طول مسیر حرکت براونی $B(t)$ برای $٠ \leq t \leq ١$، بازهٔ $[٠,١]$ را با $\mathcal{P} = \{٠ = t_٠ < t_١ < \ldots < t_n = ١\}$ افراز می‌کنیم. سپس تعریف می‌کنیم:

$$\triangle(\mathcal{P}) = \max_{١\leq k\leq n} |t_k - t_{k-١}|$$

پس در افراز $\mathcal{P}$ فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی حداکثر $\triangle(\mathcal{P})$ است. در واقع برای محاسبهٔ طول مسیر، باید حد $\sum_{k=١}^{n}|B(t_k,\omega)-B(t_{k-١},\omega)|$ را وقتی $\triangle(\mathcal{P})$ به صفر میل می‌کند، به دست آوریم. حد به دست آمده تقریباً باقطعیت، بی‌نهایت است. پیوستگی مسیرهای حرکت براونی ایجاب می‌کند که اگر $\triangle(\mathcal{P})$ کوچک باشد هر تفاضل $|B(t_k,\omega)-B(t_{k-١},\omega)|$ نیز کوچک است، ولی این تفاضل‌ها آنقدر کوچک نیستند که مجموع را همگرا کنند. اگر هر کدام از این تفاضل‌ها را مثلاً با مجذور کردن آنها کوچکتر کنیم، این شانس وجود دارد که حد، متناهی شود. بنابراین تعریف می‌کنیم $Q(\mathcal{P},\omega) := \sum_{k=١}^{n}|B(t_k,\omega)-B(t_{k-١},\omega)|^٢$ و $Q(\mathcal{P},\omega)$ را تغییرات مجذوری حرکت براونی $\{B(t,\omega) : ٠ \leq t \leq ١\}$ روی افراز $\mathcal{P}$ گوییم. اگر هنگامی که $\triangle \to ٠$، حد وجود داشته باشد، این حد را تغییرات مجذوری $B$ روی $[٠,١]$ می‌گوییم. اگر برای $t > ٠$ بازهٔ $[٠,t]$ را به جای

$[0, 1]$ در نظر بگیریم، تغییرات مجذوری $B$ روی $[0, t]$ تابعی از $t$ و $\omega$ است و در نتیجه تغییرات مجذوری $B$ خود یک فرآیند تصادفی است.

در نظریهٔ انتگرال تصادفی، این فرآیند به عنوان یک فرآیند تصادفی صعودی بسیار مهم است. اگر این فرآیند تصادفی را از یک زیر مارتینگل کم کنیم، حاصل یک مارتینگل خواهد شد. فرآیندهای تصادفی تغییرات مجذوری با زمان تصادفی که خود به‌وسیلهٔ حرکت براونی ساخته می‌شود با استفاده از ابزارهای آنالیز تصادفی به یک حرکت براونی جدید تبدیل می‌شود.

**قضیهٔ ۲.۴.** اگر $\mathcal{P}^{(i)} \subset \mathcal{P}^{(i+1)}$ و $\triangle(\mathcal{P}^{(i)})$ به اندازه کافی سریع به صفر میل کند، آن گاه تقریباً با قطعیت $Q(\mathcal{P}^{(i)}) \to 1$ که مساوی با طول بازه‌ای است که محاسبه روی آن انجام می‌شود.

توجه کنید که اگر به جای بازهٔ $[0, 1]$، بازهٔ $[0, t]$ را جایگزین کنیم، فرآیندی با تغییرات مجذوری مساوی با $t$ به دست خواهیم آورد. این رویکرد به علت سادگی آن انتخاب شده است. برای مطالعهٔ بیشتر می‌توانید به [۲] مراجعه کنید.

## ۵. حرکت براونی و قدم‌زدن تصادفی

حرکت براونی را می‌توان تقریب پیوستهٔ یک قدم زدن تصادفی تصور کرد وقتی که اندازهٔ قدم‌ها تغییر مقیاس یافته، کوچک و کوچکتر شوند و آهنگ گامهای برداشته شده سریع‌تر گردد.

فرض کنیم $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع (iid) با $E(X_n) = 0$ و $Var(X_n) = 1$ باشد. گام برداری تصادفی را با $S_0 = 0$ و $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ برای $n \geq 1$ تعریف می‌کنیم. فرآیند بازمان پیوسته $\{B_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}; \quad t \geq 0\}$ را در نظر می‌گیریم. (در اینجا $[x]$ = جزء صحیح $x$). داریم $B_n \Longrightarrow B$ که در این جا«$\Longrightarrow$» همگرایی ضعیف یا همگرایی در توزیع است. ابتدا همگرایی توزیع های بعد ـ متناهی را بررسی می‌کنیم، یعنی برای هر $k$ و $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$ و اعداد حقیقی $x_1, \ldots, x_k$ نشان می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty} P(\{B_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \ldots, k\}) = P(\{B(t_i) \leq x_i,\ i = 1, \ldots, k\}).$$

بدین منظور قضیهٔ حد مرکزی را به کار می‌بریم. ابتدا توجه کنید که برای هر $t > 0$ داریم

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \sqrt{\frac{[nt]}{n}}.$$

و چون طبق قضیهٔ حد مرکزی $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ پس

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1) \stackrel{d}{=} B(t).$$

همین طور برای $t > s$،

$$B_n(t)-B_n(s)=\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{j=[ns]+1}^{[nt]} X_j) \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]-[ns]} \Longrightarrow \sqrt{(t-s)}\mathcal{N}(0,1)=B(t)-B(s).$$

چون متغیرهای $B_n(t_1), B_n(t_2)-B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k)-B_n(t_{k-1})$ مستقل هستند،

$$P(\{B_n(t_1)\le x_1, B_n(t_2)-B_n(t_1)\le x_2, \ldots, B_n(t_k)-B_n(t_{k-1})\le x_k\})$$

$$=P(B_n(t_1)\le x_1)P(B_n(t_2)-B_n(t_1)\le x_2)\ldots P(B_n(t_k)-B_n(t_{k-1})\le x_k)$$

$$\Longrightarrow P(B(t_1)\le x_1)P(B(t_2)-B(t_1)\le x_2)\ldots P(B(t_k)-B(t_{k-1})\le x_k).$$

بنابراین در $\mathbb{R}^k$ وقتی $n\to\infty$

$$(B_n(t_1), B_n(t_2)-B_n(t_1), \ldots, B_n(t_k)-B_n(t_{k-1}))$$

$$\Longrightarrow (B(t_1), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_k)-B(t_{k-1}))$$

و با به کار بردن نگاشت $(b_1, b_2, \ldots, b_k)\to(b_1, b_1+b_2, \ldots, b_1+b_2+\ldots, b_k)$ از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^k$ همگرایی توزیع $k$ بعدی نتیجه می‌شود.

## ۱.۵ اصل پایایی

در واقع همگرایی $B_n(t)\Longrightarrow B(t)$ قوی‌تر از همگرایی توزیع های بعد ـ متناهی است. اکنون نوع قوی‌تری از همگرایی به نام اصل پایایی یا قضیهٔ حد مرکزی تابعی را معرفی می‌کنیم.

فضای $C[0,\infty)$ را به عنوان یک فضای متریک در نظر می‌گیریم که در آن همگرایی از نوع همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده است. متر معمولی این فضا برای $f, g\in C[0,\infty)$ به وسیلهٔ

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1\wedge \sup_{0\le t\le n}|f(t)-g(t)|)$$

تعریف می‌شود. بنابراین برای $f_n\in C[0,\infty)$ که $n\ge 1$، $\rho(f_n,f_0)\to 0$ اگر و تنها اگر برای هر $k$،

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le t\le k}|f_n(t)-f_0(t)|=0.$$

توجه می‌کنیم که فرآیند $\{B_n(t)\ :\ t \geq 0\}$ که قبلاً تعریف شد، پیوسته نیست. اکنون درصدد آن هستیم که فرآیند را به گونه‌ای تغییر دهیم که مسیرهای تغییر یافته متعلق به $C[0, \infty)$ باشند. با این هدف، برای هر $t \geq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$B_n^c(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}}(nt - [nt])\chi_{[nt]+1}.$$

این تابع پیوسته، از وصل کردن نقاط

$$\{(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sqrt{n}})\ :\ j \geq 0\}$$

در نیم‌صفحهٔ $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ به دست آمده است. یک تعبیر قوی‌تر از $B_n(t) \Longrightarrow B(t)$ این است که برای هر تابع حقیقی مقدار $T : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ که نسبت به فضای متریک $C[0, \infty)$ به عنوان دامنهٔ آن و $\mathbb{R}$ به عنوان برد آن پیوسته باشد، داشته باشیم $T(B_n^{(c)}) \Longrightarrow T(B)$. آنچه اصل پایایی را قدرتمند و انعطاف پذیر می‌کند، قضیهٔ نگاشت پیوسته است. اگر $\psi : C[0, \infty) \to X$ نگاشتی از $C[0, \infty)$ به فضای لهستانی $X$ باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$P(\omega : B(\omega) \in \{f \in C[0, \infty)\ :\text{پیوسته است}\ \psi\ \text{در}\ f\}) = 1$$

آن گاه $\psi(B_n^{(c)}) \Longrightarrow \psi(B)$ به عنوان بردار تصادفی دراین فضا اگر $\psi$ پیوسته باشد، یعنی در هر $f \in C[0, \infty)$ پیوسته باشد، آن گاه شرط فوق خود به خود برقرار است. البته این شرط بیانگر پیوستگی $\psi$ در تمام نقاط نیست و تنها متضمن پیوستگی $\psi$ روی حرکت براونی و با احتمال یک است.

### ۲.۵ خاصیت مارکفی حرکت براونی

کار اساسی که مارکف[1] در سال ۱۹۰۶ انجام داد منجر به پیدایش نظریه‌ای شد که بعد از او به نام خودش نامگذاری شد: فرآیند مارکف. در این نظریه «آینده» مستقل از «گذشته» است به شرط اینکه «حال» را بدانیم. در واقع این اصل، اصل علیت فیزیک کلاسیک است که به دستگاه‌های دینامیکی تصادفی نیز تعمیم داده شده است. یعنی اطلاعات مربوط به حالت دستگاه در زمان حال، کافی است که حالت دستگاه را در آینده تعیین کند. شکل تحلیلی این مطلب را می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عادی $\dot{X}_t = f(t, X_t)$ نشان داد. حالت دستگاه در زمان $t$ فقط به $X_t$ و $t$ و نه مقدار $X_s$ برای $s < t$ بستگی دارد و یکی از نتایج این ویژگی این است که تحت شرایطی روی $f$، خم‌های جواب $X_t$ به وسیلهٔ شرط اولیهٔ $(t_0, C)$ به طور یگانه مشخص می‌شوند:

$$X_t = X_t(t_0, C), \quad t > t_0, \quad X_{t_0} = C.$$

1) A.A. Markov

اطلاعات بیشتر در مورد حالت $X_s$ در زمان $t < s$ برای مشخص کردن جواب ضروری نیست. گوییم دستگاه بی حافظه است. اگر این ایده را به « دستگاه دینامیکی تصادفی» منتقل کنیم، به خاصیت مارکفی می‌رسیم. خاصیت مارکفی می‌گوید که اگر حالت دستگاه در زمان خاص $s$ (حال) داده شده باشد، اطلاعات بیشتر در مورد رفتار دستگاه در زمان $t < s$ (گذشته) هیچ تأثیری روی معلومات ما در مورد رفتار دستگاه برای $s < t$ (آینده) ندارد. حال به بیان یک تعریف دقیق ریاضی از خاصیت مارکفی به عنوان خاصیت یک فرآیند تصادفی می‌پردازیم. گیریم $\{X_t : t \in [t_\circ, T]\}$ یک فرآیند تصادفی باشد که مقادیرش را در فضای اقلیدسی $d$ بعدی $\mathbb{R}^d$ می‌گیرد و مجموعهٔ اندیس آن، بازهٔ $[t_\circ, T]$ باشد. برای منظور ما کافی است که $[t_\circ, T] \subset [\circ, \infty) = \mathbb{R}^+$. بنابراین $\circ \leq t_\circ < \infty$. حالت $T = \infty$ را هم می‌پذیریم. در این حالت بازهٔ ما $[t_\circ, \infty)$ است. برای $\{X_t : t \in [t_\circ, T]\}$ می‌نویسیم $X_t$ و اندیس $t$ را زمان می‌نامیم. فرض کنیم $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ میدان سیگمایی برل $d$ ـ بعدی باشد و فرآیند $X_t$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شود. تابع نمونه‌ای $X_\circ(\omega)$ یک تابع $\mathbb{R}^d-$ مقداری روی بازهٔ $[t_\circ, T]$ است. همیشه می‌توان فضای نمونه‌ای را فضای نمونه‌ای کانونی $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[t_\circ, T]}$ و نیز $\mathcal{F} = (\mathcal{B}_d)^{[t_\circ, T]}$ میدان سیگمایی حاصلضربی تولید شده به وسیلهٔ مجموعه‌های برل $\mathbb{R}^d$ و $X_t(\omega) = \omega(t)$ برای $\omega \in \Omega$ گرفت. $P$ نیز اندازهٔ احتمالی است که طبق قضیهٔ توسیع کلموگرف به طور یگانه به وسیلهٔ توزیع‌های بعد ـ متناهی فرآیند $X_t$ روی $(\Omega, \mathcal{F})$ تعیین می‌شود. اگر اطلاعات بیشتری در مورد فرآیند داشته باشیم فضای نمونه‌ای زیر فضایی از $(\mathbb{R}^d)^{[t_\circ, T]}$ خواهد بود. فرض کنیم برای $t_\circ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq T$، $\mathcal{F}([t_۱, t_۲]) = \mathcal{F}(X_t, t_۱ \leq t \leq t_۲)$ میدان سیگمایی تولید شده توسط متغیرهای تصادفی $X_t$ برای $t_۱ \leq t \leq t_۲$ باشد. به زبان شهودی $\mathcal{F}([t_۱, t_۲])$ شامل «تاریخ» فرآیند $X_t$ از زمان $t_۱$ تا $t_۲$ است. $\mathcal{F}([t_۱, t_۲])$ به وسیلهٔ پیشامدهای استوانه‌ای $\{\omega : X_{s_۱}(\omega) \in B_۱, \ldots, X_{s_n}(\omega) \in B_n\}$ که در آن $B_i \in \mathcal{B}_d$ و $t_۱ \leq s_۱ < \ldots < s_n \leq t_۲$، تولید می‌شود.

اکنون آماده‌ایم که فرآیند مارکف را بطور رسمی تعریف کنیم.

**تعریف ۱.۵.** فرآیند تصادفی $\{X_t : t \in [t_\circ, T]\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ با مجموعه اندیس $[t_\circ, T] \subset [\circ, \infty)$ و فضای حالت $\mathbb{R}^d$ را فرآیند مارکف گوییم هرگاه برای هر $t_\circ \leq s \leq t \leq T$ و هر $B \in \mathcal{B}_d$ رابطهٔ $P(X_t \in B|\mathcal{F}([t_\circ, s])) = P(X_t \in B|X_s)$ برقرار باشد.

چون میدان سیگمایی $\mathcal{F}([t_\circ, s])$ به وسیلهٔ پیشامدهای استوانه‌ای تولید می‌شود، کافی است که برای هر $B \in \mathcal{B}_d$ و افراز $t_۱ < t_۲ < \ldots < t_n < t_{n+۱}$ و نقاط $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_n$ داشته باشیم

$$P(X(t_{n+۱}) \in B|X(t_۱) = x_۱, \ldots, X(t_n) = x_n) = P(X(t_{n+۱}) \in B|X(t_n) = x_n).$$

برای هر فرآیند مارکف یک احتمال انتقال به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$P(s\,,\,x\,;\,t\,,\,B) = P(X(t) \in B|X(s) = x) \qquad (\text{برای هر } s < t)$$

$P(s\,,\,x\,;\,t\,,\,.)$ یک اندازهٔ احتمال روی میدان سیگمایی $\mathcal{B}_d$ است. معمولاً این اندازهٔ احتمال دارای چگالی $p(s,x;t,y)$ است که به آن چگالی انتقال می‌گوییم و در این صورت برای هر $B \in \mathcal{B}_d$

$$P(s,x;t,B) = \int_B p(s,x,t,y)dy.$$

در واقع، احتمال اینکه فرآیند در زمان $t$ در مجموعهٔ $B$ باشد به شرطی که در زمان $s$ در نقطه $x$ باشد برابر است با $P(s,x;t,B)$. در خیلی از موارد $p(s,x;t,y)$ فقط به تفاضل $t-s$ بستگی دارد که در این حالت، فرآیند مارکف را همگن گوییم. در مورد فرآیند وینر یا حرکت براونی به علت استقلال نموها داریم

$$\begin{aligned}
& P(B(t+s) \in A | B(s) = x, B(t_۱) = x_۱, \ldots, B(t_n) = x_n) \\
= \;& P(B(t+s) - B(s) \in A - x | B(s) = x, B(t_۱) = x_۱, \ldots, B(t_n) = x_n) \\
= \;& P(B(t+s) - B(s) \in A - x | B(s) = x) \\
= \;& \int_{A-x} (۲\pi t)^{-d/۲} \exp(-\frac{v^۲}{۲t}) dv \\
= \;& \int_A (۲\pi t)^{-d/۲} \exp(-\frac{|x-y|^۲}{۲t}) dy
\end{aligned}$$

بنابراین چگالی $p(t,x,y) = (۲\pi t)^{-d/۲} \exp(-\frac{|x-y|^۲}{۲t})$ همگن است، یعنی حرکت براونی یک فرآیند مارکف همگن با چگالی $p$ است. $p(t,x,y)$ تابع چگالی توزیع $\mathcal{N}(\circ, tI)$ دربعد $d$ است. برای مطالعات بیشتر در خواص حرکت براونی رجوع کنید به [۸].

### ۳.۵ خواص دیگر حرکت براونی

در این بخش به بعضی از ویژگی‌های دیگر حرکت براونی اشاره می‌کنیم. اول اینکه اگر $B(t)$ حرکت براونی باشد، برای هر $s \geq \circ$، فرآیند تصادفی $\{B_s(t) = B(t+s) - B(s) \,:\, t \geq \circ\}$ نیز یک حرکت براونی استاندارد مستقل از $\{B(u), u \leq s\}$ است، زیرا $B_s(t)$ دارای نموهای مستقل و ایستا با توزیع نرمال با واریانس $t$ است. همچنین $B_s(t)$ نسبت به $t$ پیوسته است. این را ویژگی تفاضلی[۱] می‌نامیم. دوم اینکه قرینهٔ یک حرکت براونی، خود یک حرکت براونی است، زیرا $B(.) \stackrel{d}{=} -B(.)$. این حرکت براونی دارای مسیرهای پیوسته، نموهای مستقل و ایستا با توزیع گاوسی است. این را ویژگی تقارنی[۲] حرکت براونی می نامیم. سوم اینکه $\{B(t), t > \circ\} \stackrel{d}{=} \{tB(\frac{۱}{t}), t > \circ\}$. بنابراین اگر تعریف کنیم

$$B^۱(t) = \begin{cases} tB(\frac{۱}{t}) & t > \circ \text{ اگر} \\ \circ & t = \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

1) Differential Property    2) Symmetry

آن گاه $B^{۱}(.) \overset{d}{=} B(.)$. و چون $B$ فرآیند گاوسی است، $B^{۱}$ نیز فرآیند گاوسی است. $B^{۱}$ دارای میانگین صفراست و مسیرهای پیوسته دارد.

یک ویژگی ساده و در عین حال مهم فرآیند وینر اصل انعکاس است که به محاسبهٔ توزیع ماکزیمم حرکت براونی، یعنی $M(t) = \sup_{۰ \le s \le t} |B(s)|$ ختم می‌شود. اثبات بر اساس استدلال‌های زیراست.

**قضیهٔ ۴.۵.** اگر برای $a > ۰$، $T_a$ اولین زمانی باشد که حرکت براونی به نقطهٔ $a$ می‌رسد، یعنی

$$T_a = \inf\{t : B(t) = a\}$$

و تعریف کنیم

$$B^*(t) = \begin{cases} B(t) & t \le T_a \\ ۲a - B(t) & t > T_a \end{cases},$$

آن گاه $B^*$ نیز یک حرکت براونی است.

در واقع برای به دست آوردن $B^*$، صبر می‌کنیم تا $B$ به ارتفاع $a$ برسد بعد از آن ادامهٔ مسیر حرکت براونی را منعکس می‌کنیم. توجه کنید که $T_a < \infty$، چون $\{B(n)\}$ یک قدم زدن تصادفی با میانگین صفر است و در نتیجه $\liminf_{n\to\infty} B(n) = -\infty$ و $\limsup_{n\to\infty} B(n) = +\infty$. این حقیقت در مورد قدم زدن تصادفی در فصل ۷ مرجع [۴] بررسی شده است. اثبات دقیق اصل را بعداً ارائه می‌کنیم. در این جا می‌خواهیم ببینیم که دلیل درستی این اصل از نظر شهودی چیست. فرض کنیم $t > T_a$ و حرکت براونی تا زمان $T_a$ حرکت کرده باشد. خاصیت تفاضلی می‌گوید که فرآیند تصادفی $\{B(T_a + s) - B(T_a) = B(T_a + s) - a; s \ge ۰\}$ یک حرکت براونی مستقل از حرکت براونی $B$ تا قبل از رسیدن به نقطهٔ $a$ است. توجه کنید که این مطلب نیاز به اثبات دارد، چون $T_a$ یک زمان تعینی نیست بلکه یک زمان تصادفی است. طبق خاصیت تقارن $\{-B(T_a + s) + a, s \ge ۰\}$ نیز یک حرکت براونی است. قرار می‌دهیم $s + T_a = t > T_a$. پس اگر $a + (B(t) - B(T_a)) = B(t)$ یک حرکت براونی باشد، آن گاه باید $a + (B(T_a) - B(t)) = ۲a - B(t) = B^*(t)$ یک حرکت براونی باشد. توجه کنید که در اینجا چون $T_a$ زمان توقف است، $t$ زمان تعینی نیست.

اصل انعکاس کمک می‌کند که توزیع $M(t)$ را به دست آوریم. برای این منظور از این واقعیت استفاده می‌کنیم که برای حرکت براونی استاندارد و $a > ۰$ و $y \ge ۰$ داریم

$$P(B(t) \le a - y, M(t) \ge a) = P(B(t) > a + y).$$

لذا نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

**نتیجهٔ ۵.۵.** برای $a \geq ۰$ $\quad P(M(t) \geq a) = ۲P(B(t) \geq a) = P(|B(t)| \geq a)$

## تشکر و قدردانی

نگارنده‌های این مقاله وظیفهٔ خود می‌دانند که از زحمات سرکار خانم بهناز زرگری دانشجوی دکتری دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف در بازنویسی و ویراستاری دستنوشتهٔ این مقاله و بازخوانی تایپ آن تشکر و قدردانی نمایند.

## مراجع

[1] Breiman, L., *Probability.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[2] Karatzas, I., Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, 1988.

[3] Lamperti, J., *Probability.* Benjamin, Inc. New York, 1966.

[4] Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, Boston, 1992.

[5] Rudin, W., *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1966.

[۶] دوب، جوزف.، ترجمه عطاءالله تقاء، سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی (۱۹۰۰ ـ ۱۹۵۰)، نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲.

[۷] وینر، نوربرت.، ترجمهٔ پرویز شهریاری، من یک ریاضیدانم، انتشارات فاطمی، خرداد ۱۳۶۸.

[۸] ظهوری زنگنه، بیژن.، جهانی‌پور، روح‌الله.، حرکت براونی، نخستین سمینار مهندسی مالی و کارگاه ریاضیات مالی، دانشگاه شهید بهشتی، تابستان ۱۳۸۴.

[۹] ظهوری زنگنه، بیژن.، جهانی‌پور، روح‌الله.، وینر ریاضیدانی برای تمام فصول، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شمارهٔ ۳۳.

بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی شریف، گروه ریاضی
پست الکترونیک: zangeneh@sharif.edu

روح‌الله جهانی‌پور
دانشگاه کاشان، گروه ریاضی
پست الکترونیک: jahanipu@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۲۱ تا ۲۹

# انتخاب اجتماعی و توپولوژی

بنو اکمن

## ترجمهٔ: محمد جلوداری ممقانی

### چکیده

وجود یک الگوی انتخاب اجتماعی روی یک فضای رجحان $P$ نه تنها مسالهای توپولوژیک که مسالهای هموتوپیک است. مؤلف این مسأله را ۵۰ سال پیش، با اصطلاحات دیگری و اندکی بعد با همکاری گانیا و هیلتون حل کرده بود. $P$ باید یک $H-$ فضا باشد که یا انقباضی است یا همارز هموتوپیک با حاصل ضربی از فضاهای ایلنبرگ ـ مک لین روی اعداد گویا.
**کلمههای اساسی**: انتخاب اجتماعی، هم ارزی هموتوپیک، گروههای هموتوپی، فضاها و گروههای میانگین دار، $H-$ فضاها.

## مقدمه

این مقاله بیشتر یک مقالهٔ مروری تاریخی است. موضوع آن کاربرد غیر منتظرهٔ اخیر توپولوژی جبری در زمینهی دیگری از تفکر بشری موسوم به الگوی «انتخاب اجتماعی» در اقتصاد است. نگاه کنید به [C] که در آن برهانهای قضیهها، مبتنی بر استدلالهای توپولوژیکیاند. روشن شده است که قضیهٔ توپولوژیک اصلی در مقالهای که اینجانب ۵۰ سال پیش نگاشتهام، البته با نامی متفاوت («فضاهای میانگیندار») اثبات شده است، در آنجا مسألهی وجودی با استفاده از گروههای هموتوپی به «گروههای میانگین دار» تقلیل یافته است. در اینجا خلاصهای از مباحث مذکور، همراه با خاطراتی شخصی از زمینهٔ تاریخی بحث ارائه خواهد شد. در مقالهای جدیدتر (۱۹۶۲، همراه با تودو گانیا و پ.جی.هیلتون) ویژگیهای بیشتری از میانگینها بررسی شده است. نتایج این

مطالعات به نوبه‌ی خود می‌توانند ویژگی‌های جدیدی از الگوهای انتخاب اجتماعی را معرفی کنند.

## ۱ الگوی جدید انتخاب اجتماعی

**۱.۱.** اصطلاح انتخاب اجتماعی مدتی مدید است که در الگوهای اقتصاد ریاضی ظاهر می‌شود. (رجوع کنید به تذکر ۳.۱). در اینجا به روایت جدیدی از آن که چند سال بیشتر سابقه ندارد اشاره می‌کنیم. انتخاب اجتماعی الگویی برای تصمیم سازی در اقتصاد، علوم اجتماعی، علوم سیاسی و ...، است که به مسایل توپولوژیک و حتی هموتوپیک منجر می‌شود.

مجموعه‌ای چون $P$ را که اعضای آن «رجحان» نام دارند در نظر می‌گیریم. این مجموعه یک ساختار توپولوژیک دارد (که معمولاً با یک متریک مشخص می‌شود). این امری طبیعی است زیرا رجحان‌ها اعداد، حقیقی یا مختلط، زیرمجموعه‌هایی از فضاهای عددی، بردارها، پیکربندی‌ها و غیره‌اند. به‌علاوه جامعه‌ای مرکب از $n$ بنگاه به شماره‌های ۱، ۲، ...، $n$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $p_j \in P$ رجحان بنگاه $j$ام باشد عضو $(p_1, \ldots, p_n)$ متعلق به $P^n$ ، حاصلضرب توپولوژیک $n$ نسخهٔ $P$، را « رخ‌نمون (پروفایل) » جامعه می‌نامیم. انتخاب اجتماعی تابعی چون

$$F : P^n \longrightarrow P$$

است که به هر رخ‌نمون متعلق به $P^n$ یک رجحان اجتماعی متعلق به $P$ نسبت می‌دهد. این تابع باید در شرایط زیر صدق کند

الف ـ پیوستگی

ب ـ همانی

پ ـ همسانی

شرط (الف) شرطی طبیعی است: تغییرات کوچک در رخ‌نمون باید به تغییرات کوچک در برآمد منجر شوند.

شرط (ب) به این معناست که

$$F(p, p, \ldots, p) = p$$

به ازای هر $p \in P$. به عبارت دیگر هرگاه نگاشت $\Delta$ با $\Delta(p) = (p, \ldots, p)$ داده شود آنگاه ترکیب

$$P \xrightarrow{\Delta} P^n \xrightarrow{F} P$$

نگاشت همانی $P$ است. زیر فضای $\Delta(P)$ از $P^n$ را قطر $P^n$ می‌نامیم.

شرط (پ) به این معنا است که $F$ تحت تمام جایگشتهای اندیس‌های ۱، ۲، ...، $n$ ، یعنی تحت گروه متقارن $\Sigma_n$، ناورداست (یعنی تمام بنگاه‌ها از حق انتخاب یکسان برخوردارند.)

**۲.۱.** روشن است که وجود نگاشت $F$ مبتنی بر ویژگی‌های فضای $P$ ، یک مسأله‌ی توپولوژیک است. این مسأله حتی مسأله‌ای هموتوپیکی است: در واقع به دنبال تابعی از حاصلضرب متقارن

$P^n/\Sigma_n$ (تمام اعضای $P^n$ را که تحت جایگشت‌های اندیس‌ها هم ارزند، یکی گرفته‌ایم) به $P$ هستیم. این تابع روی قطر که بخشی از $P^n/\Sigma_n$ است داده شده است و باید به سراسر $P^n/\Sigma_n$ توسعه یابد. اما ویژگی توسعه یک تابع فقط به نوع هموتوپی فضاهای مربوط بستگی دارد ــ از حالت‌های نامتعارف اجتناب کرده و فرض می‌کنیم $P$ همواره یک «چند وجهی» یعنی یک مجتمع سلولی است، و نیز همبند است.

من مسألهٔ وجود تابعی چون $F$ از $P^n$ به $P$ با ویژگی‌های (الف)، (ب)، (پ) را پنجاه سال قبل در یکی از مقاله‌های خود [E] البته با اصطلاحات متفاوت، مورد بررسی قرار داده‌ام، آن موقع با اصطلاح انتخاب اجتماعی آشنا نبودم. از طرف دیگر روشن است که گروه اقتصادیِ پژوهش کننده در مفهوم جدید انتخاب اجتماعی، متشکل از خانم چیچلینسکی و همکاران وی (نگاه کنید به[C]) از وجود این مقالهٔ قدیمی اطلاعی نداشتند. من از این موضوع از طریق مقالهٔ هروات [H] که در ۲۰۰۱ منتشرشد، آگاه شدم، در این مقاله نوشته شده است «قضیه اساسی ...را ب.اکمن در سال ۱۹۵۴ اثبات کرده است.»

**۱.۳. تذکر.** در مقالهٔ مشهوری از آرو (برای مثال نگاه کنید به [K-S]) اصطلاح انتخاب اجتماعی در معنای دیگری به‌کار گرفته شده است (به این علت است که می‌گوییم «الگوی جدید انتخاب اجتماعی»). در آنجا تابع انتخاب اجتماعی $\sigma$ از $P^n$ به $P$ باید در شرط (ب) و شرایط دیگری صدق کند، اما لازم نیست که در شرط (پ) صدق کند. از اصول آرو نتیجه می‌شود که $\sigma$ لزوماً افکنش به روی یک نسخه، مثلاً نسخهٔ $k$ام در $P^n$ است، یعنی $\sigma(p_1,\ldots,p_n)=p_k$ به‌ازای تمام اعضای $P^n$: بنگاه شماره‌ی $k$ یک دیکتاتور است. در الگوی جدید این وضع به علت وجود شرط (پ) نمی‌تواند رخ دهد. به‌علاوه در [K-S] مجموعه‌ی رجحان‌ها یک فضای توپولوژیک نیست، اما شامل پیش ترتیب های مجموعه‌ی معینی چون $X$ است.

## ۲ فضاهای میانگین‌دار

**۱.۲.** مقاله‌ای که من در ۱۹۵۴ منتشر کردم در بارهٔ «فضاهای میانگین‌دار» است. میانگین یا $n-$ میانگین، یا میانگین تعمیم یافته در فضای همبند $P$ درست مانند تابع انتخاب اجتماعی $F$ در بالاست.

مثال‌های مقدماتی $n-$ میانگین‌ها عبارتند از میانگین حسابی $n$ عدد متعلق به بازه‌ای از اعداد حقیقی، و میانگین هندسی.

میانگین تعمیم یافته تاریخی طولانی دارد. کولموگورف این مفهوم را در ۱۹۳۰ طی مقاله‌ای [K] دربارهٔ میانگین‌های شبه حسابی معرفی کرد و مؤلفین مختلف مطالعهٔ آنها را در ارتباط با مسایل هندسی و حسابی ادامه دادند. یک مرحلهٔ مهم در این رابطه تز دکتری آومان (۱۹۳۳) تحت نظارتِ کاراتئودوری بود. در مقاله‌ی دیگری (۱۹۳۵) آومان شرایط (الف)، (ب) و (پ) فوق را اساساً برای زیر مجموعه‌های فضاهای عددی فرمولبندی کرد. وی در ۱۹۴۳ اظهار می‌دارد که

مسألهٔ وجود $n-$ میانگین برای فضاهای دلخواه یک مسألهٔ توپولوژیک است، وی این مسأله را فقط در چند حالت خاص حل می‌کند. بنابراین مسأله در زمانی که من تصمیم به بررسی آن از راه توپولوژی جبری با تأکید به روش جبری گرفتم حل نشده و مشهور بود.

**۲.۲**. در این‌جا شاید بیان خاطره‌ای تاریخی خالی از لطف نباشد. خاطر نشان می‌کنم که دورهٔ ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۴ نه تنها برای توپولوژی و جبر بلکه برای سایر شاخه های ریاضی نیز بسیار مهم بود. در این دوره رسته‌ها و فانکتورها که در ویراست اول ایلنبرگ و مک لین به عنوان زبانی برای فرمولبندی طبیعی بودن به‌کار رفته بودند به ابزارهای ریاضی تبدیل شدند. اکنون اما،ایلنبرگ و مک لین فانکتورها را از مدول‌ها به مدول‌ها یا به گروههای آبلی به‌کار می‌بردند (کتاب آنها در ۱۹۵٦ منتشر شد ؛ رسته‌های بسیار کلی‌تر در ضمیمه‌ای که د.بوشسباوم تهیه کرده ذکر شده است). کتاب «مبانی توپولوژی جبری» ایلنبرگ و استینراد (۱۹۵۲) در مورد فانکتورها از فضاها به گروه‌های آبلی است، اما رسته‌ها و فانکتورها در فصل ۴ آن ارائه شده‌اند.

**۳.۲**. برای تبدیل $n-$ میانگین از یک فضا به $n-$ میانگین در یک گروه، من فانکتورها را از فضاها به گروه‌ها به‌کار برده‌ام (توابع پیوسته به همریختی‌ها). روشن است که این وقتی موجه است که فانکتورها حاصلضرب‌ها را حفظ کنند، بنابراین توان $P^n$ از $n$ نسخهٔ $P$ تبدیل می‌شود به حاصلضرب مستقیم $n$ نسخهٔ گروه متناظر با آن.

هرگروه هموتوپی $\pi_i$ از این ویژگی برخوردار است. نخست چند ویژگی $\pi_i(P)$ را یاد آوری می‌کنیم . اعضای $\pi_i(P)$ رده‌های هموتوپی نگاشت‌های $i-$ کرهٔ $S^i$ به $P$ هستند. (در واقع باید نقطهٔ مبنایی در $S^i$ و در $P$ انتخاب کنیم که بوسیله تمام نگاشت‌ها و هموتوپی‌ها حفظ شود. با این حال ساختار $\pi_i(P)$ برای فضاهای کمانی — همبند مستقل از انتخاب نقطهٔ مبنا است). عمل ترکیب اعضای گروه شبیه عمل ترکیب اعضای گروه بنیادی (حالت $i = ۱$) است و این گروه لزوماً آبلی نیست، اما به‌ازای $i \geq ۲$ آبلی است. ترکیب با نگاشتی چون $P \longrightarrow P'$ به نگاشتی القایی چون $\pi_i(P) \longrightarrow \pi_i(P')$ منجر می‌شود که یک همریختی است، با دیگر ترکیب‌های نگاشت‌ها سازگار است و طوری است که نگاشت همانی، یکریختی همانی را القا می‌کند — یعنی $\pi_i$ در واقع یک فانکتور است. به‌علاوه نگاشت‌هایی از $S^i$ به یک فضای حاصلضرب توپولوژیک به وسیلهٔ نگاشتهایی از $S^i$ به مؤلفه‌های این حاصلضرب تعیین می‌شوند، یعنی $\pi_i$ حاصلضرب‌ها را حفظ می‌کند.

در این زمینه اشاره می‌کنم که فضایی که در آن $\pi_i$ها به‌ازای $i \geq ۲$ صفر می‌شوند، غیرکروی (aspherical) نامیده می‌شود. به علاوه اگر این فضا ساده ـ همبند نیز باشد آنگاه قضیه‌ای معروف از وایتهد بیان می‌کند که فضا انقباضی است (یعنی می‌تواند در توی خودش به طور پیوسته به یک نقطه فرو بریزد)، این حکم برای فضاهای مورد نظر ما یعنی چند وجهی‌های همبند برقرار است.

**۴.۲**. بنابراین گذر از فضاهای $P$ با یک $n-$ میانگین به گروه‌های هموتوپی $\pi_i(P)$ این فضاها، به گروه‌هایی می‌انجامد که $n-$ میانگین‌هایی به مفهوم مذکور در بخش بعدی دارند. این عبور

می‌تواند در یک چشم برهم زدن و با استفاده از مفهوم فانکتور انجام پذیرد. با این حال، در مقالهٔ قدیمی‌ام ترجیح داده‌ام همه چیز را با محاسبهٔ صریح ثابت کنم ــ به نظر می‌رسد که زمان استفاده از مفهوم فانکتور در آن مقاله نرسیده بود!

**گزارهٔ ۱.** یک $n-$ میانگین در فضای $P$ یک $n-$ میانگین همریخت در هر گروه هموتوپی $\pi_i(P)$ ، $i = ۱, ۲, \ldots$ القا می‌کند.

## ۳ گروه‌های میانگین‌دار

**۱.۳.** گروه دلخواه $G$، آبلی یا غیر آبلی، با عمل ترکیب جمعی و عضو خنثای $\circ$ را در نظر می‌گیریم. یک $n-$ میانگین در $G$ تابعی است چون

$$f : G^n \longrightarrow G$$

به طوری که (الف) $f$ همریختی است و شرایط (ب) و (پ) سابق به‌ازای $n \geq ۲$ ای برقرارند. این شرایط $G$ را به شدت محدود می‌کنند.
نخست توجه می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in G$

$$f(x, \circ, \ldots, \circ) = f(\circ, x, \circ, \ldots, \circ) = \ldots = f(\circ, \circ, \ldots, x)$$

و این مقدار مشترک را با $g(x)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

و

$$g(x) + g(y) = f(x, \circ, \ldots, \circ) + f(\circ, y, \ldots, \circ) = f(x, y, \circ, \ldots, \circ)$$

بنابراین $g(x) + g(y) = g(y) + g(x)$. به‌علاوه داریم

$$ng(x) = g(nx) = f(x, x, \ldots, x) = x$$

بنابراین $x + y = y + x$، یعنی $G$ آبلی است. بنابراین ضرب $n$ در $G$ یک همریختی $G$ است؛ چون بنا به مطالب بالا $g$ وارون خودش است نتیجه می‌گیریم که ضرب در $n$ یک خودریختی $G$ است.

**قضیهٔ ۲.** هرگاه گروه $G$ یک $n-$ میانگین به‌ازای $n \geq ۲$ ای بپذیرد آنگاه آبلی است، ضرب در $n$ یک خودریختی $G$ است، و $G$ به‌طور یکتا بر $n$ بخش‌پذیر است.

**۲.۳.** می‌توانیم خود ریختی $g$ را با $n^{-۱}$ نشان دهیم. چون

$$nf(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ng(x_۱ + \ldots + x_n) = x_۱ + \ldots + x_n$$

داریم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n^{-1}(x_1 + \ldots + x_n).$$

بنابراین روی $G$ فقط یک $n-$ میانگین، «میانگین حسابی» وجود دارد.
برعکس هرگاه گروه آبلی $G$ بر $n$ بخش پذیر باشد آنگاه یک (و فقط یک ) $n-$ میانگین می‌پذیرد.
**۳.۳.** از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که هرگاه $G$ با متناهی ـ مولد باشد و یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه مرتبهٔ هر عضو آن باید نسبت به $n$ اول باشد، به ویژه رتبهٔ هیچ عضو $G$ بینهایت نیست .
هرگاه $G$ با متناهی ـ مولد باشد و به‌ازای هر $n$ یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه $G = 0$.

## ۴ کاربرد در فضاهای توپولوژیک

**۱.۴.** با به کار بردن قضیه‌های مربوط به گروه‌ها در مورد فضای توپولوژیک میانگین‌دار نتیجه می‌شود که فضای $P$ با یک $n-$ میانگین به‌ازای $n \geq 2$ ای، دارای گروه بنیادی آبلی است و تمام گروه‌های هموتوپی $\pi_i(P)$ آن به‌صورت یکتا بر $n$ بخش‌پذیرند. برای مثال، هرگاه $P = S^k$، $k \geq 1$، آنگاه با توجه به $\pi_k(S^k) = Z$ ملاحظه می‌کنیم که کرهٔ $S^k$ ، $n-$ میانگینی به‌ازای $n \geq 2$ نمی‌پذیرد.

**۲.۴.** فرض کنید $P$ یک چند وجهی (مجتمع سلولی) باشد که گروه‌های هموتوپی آن صحیح و متناهی — مولداند. فرض کنید که $P$ به‌ازای هر $n$، $n-$ میانگین می‌پذیرد. چون $\pi_1(P)$ آبلی است پس با $H_1(P)$، اولین گروه همولوژی $P$ با ضرایب صحیح، یکریخت است، چون این گروه متناهی — مولد و بر هر $n$ بخش پذیر است برابر است با $\{0\}$. بنابر قضیهٔ هورویچ $H_2 = \pi_2$، متناهی — مولد است و بر تمام $n$ ها بخش پذیر است و لذا برابر است با $0$ و غیره. بنابراین تمام $\pi_i(P)$ها صفرند، و بنابر قضیهٔ وایتهد $P$ انقباض پذیر است.

**قضیهٔ ۳.** هرگاه تمام گروه‌های همولوژی یک چند وجهی که به‌ازای هر $n$، $n-$ میانگین می‌پذیرند متناهی ـ مولد باشند آنگاه آن چند وجهی انقباض پذیر است.
این قضیه به‌ویژه در مورد چند وجهی‌های متناهی (متشکل از تعدادی متناهی سلول) به‌کار می‌رود.
برعکس هر فضای انقباض پذیر $P$، $n-$ میانگین‌هایی به‌ازای هر $n$ می‌پذیرد زیرا $P$ هم ارز هموتوپی با یک نقطه است.

**۳.۴.** در حالت مورد نظر ما، تعمیم سِر از قضیهٔ هورویچ به پیمانهٔ خانواده‌ای چون $C$ از گروه‌های آبلی حاکی است که گزارهٔ «تمام گروه‌های هموتوپی به‌طور یکتا بر $n$ بخش پذیرند» معادل همین گزاره در مورد تمام گروه‌های همولوژی (با ضرایب صحیح) است . من قبلاً از قضیهٔ سِر آگاه بودم اما مستقیماً ثابت کردم که گروه‌های همولوژی بر $n$ بخش پذیرند، شاید باز فکر می‌کردم که استفاده از تعمیم‌های جدید مقاله را بسیار مشکل خواهد کرد.

بنابراین، مثلاً یک خمینهٔ بستهٔ جهت پذیر نمی‌تواند هیچ $n-$ میانگینی به‌ازای $n \geq ۲$ بپذیرد، زیرا در بعد بالا گروه همولوژی آن دوری نا متناهی است.

## ۵ فضاهای انقباض‌ناپذیر میانگین‌دار، $H-$ فضاها

**۱.۵ .** بحث گروه‌های میانگین‌دار در بخش ۳ به نتایج بیشتری می‌انجامد. بیشتر این نتایج در یک مقالهٔ بعدی (۱۹۶۲) مشترک با گانیا و هیلتون آمده‌اند [EGH].
می‌توان به روش زیر یک چند وجهی انقباض‌ناپذیر (نامتناهی) ساخت که به ازای هر $n$، $n-$ میانگین‌پذیر است . قرار می‌دهیم $P = K(Q,k)$ که در آن $K(Q,k)$ فضای ایلنبرگ ـ مک لین با ویژگی

$$\pi_i(P) = \begin{cases} \circ & i \neq k \\ Q & i = k \end{cases}$$

به ازای عدد صحیح و مثبت دلخواه $k \geq ۱$ است. این فضا را می‌توان با استفاده از سلول‌ها ساخت (با یک $k$ ـ کره آغاز و از استوانه‌های نگاشتی استفاده می‌کنیم)، هرگاه $k$ فرد باشد این فضا متناهی بعد است . چون گروه هموتوپی یک حاصلضرب توپولوژیکی برابراست با حاصلضرب مستقیم گروه‌های هموتوپی عوامل ضرب، داریم $P^n = K(Q,k)$. به ازای هر دو فضای $K(G_۱,k)$ و $K(G_۲,k)$ رده‌های هموتوپی نگاشت‌ها در یک تناظر دوسویی با همریختی‌های $G_۱ \longrightarrow G_۲$ قرار دارند. گروه $Q$ بر تمام $n$ ها بخش پذیر است. بنابراین $n-$ میانگین $Q^n \longrightarrow Q$ یک ردهٔ هموتوپی از نگاشت‌های $P^n \longrightarrow P$ را تعریف می‌کند. می‌توانیم نگاشتی را در نظر بگیریم که روی قطر $\Delta(P)$ همانی است، این نگاشت به‌طور هموتوپیک $\Sigma_n$ ـ ناورداست. بنابر لمی از گروتندیک در مورد کوهمولوژی با ضرایب گویا (ردهٔ هموتوپی نگاشت‌ها از یک فضا به $K(Q,k)$ یک گروه کوهمولوژی از این نوع تشکیل می‌دهد) می‌توانیم نگاشتی به‌دست آوریم که اکیداً $\Sigma_n-$ ناورداست.

**قضیهٔ ۴ .** $K(Q,k)$ به ازای هر $n$، $n-$ میانگین دارد.

**۲.۵ .** پیداست که این مثال برای هر فضای انقباض ناپذیری که به‌ازای هر $n$، $n-$ میانگین می‌پذیرد جنبهٔ اساسی دارد. نخست نشان می‌دهیم [EGH] که چنین فضایی یک $H-$ فضاست، کافی است نشان دهیم که این فضا برای $n \geq ۲$ای یک $n-$ میانگین دارد.
خاطر نشان می‌کنیم که یک $H-$ فضا فضایی چون $X$ است که یک ضرب پیوسته $\mu : X * X \longrightarrow X$ روی آن تعریف شده‌است که تا حد هموتوپی دارای عضو خنثی دو طرفه‌ای چون $e \in X$ است. این به آن معنا است که دو نگاشت $\mu(e,p), \mu(p,e)$ ، $p \in X$ با تابع همانی هموتوپیک‌اند.

فرض کنید $F : P^n \longrightarrow P$ یک $n-$ میانگین به‌ازای یک $n$، $n \geq ۲$، باشد و $e \in P$. نگاشت $\phi : P \longrightarrow P$ با تعریف $\phi(p) = F(p,e,\ldots,e)$ به‌ازای هر $p \in P$ در هر گروه هموتوپی $P$ دقیقاً همومرفیسمی را القا می‌کند که در بخش ۱.۳ ، $g$ نامیده شد، که یک خودریختی است. بنابراین $\phi$ در

تمام گروه‌های هموتوپی یکریختی‌هایی و از این رو بنابر قضیهٔ وایتهد یک هم‌ارزی هموتوپی القا می‌کند. فرض کنید $\psi$ وارون $\phi$ باشد، بنابراین $\psi\phi$ و $\phi\psi$ هر دو با تابع همانی $P$ هموتوپیک هستند. اکنون به‌ازای $p, q \in P$ قرار می‌دهیم

$$\mu(p,q) = \psi F(p,q,e,\ldots,e)$$

در این صورت به ازای هر $p \in P$ داریم $\mu(p,e) = \psi F(p,e,\ldots,e) = \psi\phi(p)$. این نگاشت با تابع همانی $P$ هموتوپیک است، و همین استدلال در مورد $\mu(e,p)$ نیز درست است.

**قضیهٔ ۵.** هرگاه $P$ به‌ازای $n \geq ۲$ای یک $n-$ میانگین بپذیرد آنگاه یک $H$ ـ فضاست.

**۳.۵.** با استفاده از قضیهٔ براودر [B] می‌توانیم نتیجه‌ای بسیار قوی از قضیهٔ فوق به‌دست آوریم. هرگاه $P$ یک چندوجهی متناهی (حتی قدری کلی‌تر) و یک $H-$ فضا باشد آنگاه بنابر قضیهٔ براودر $P$ یا انقباضی است یا در شرایط قضیهٔ دوگان پوانکاره مانند یک خمینهٔ جهت پذیر صدق می‌کند. بنابراین یک گروه همولوژی $H_k(P)$، $k \geq ۱$ دوری نامتناهی است و از این رو روی $P$ هیچ $n-$ میانگینی با شرط$n \geq ۲$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

**قضیهٔ ٦.** هرگاه یک چند وجهی متناهی به ازای $n \geq ۲$ای یک $n-$میانگین بپذیرد آنگاه انقباض پذیر است و بنابراین تمام $n-$ میانگین‌های آن وجود دارند. توجه کنید که این قضیه بسیار قوی‌تر از قضیهٔ ۳ در مورد چند وجهی‌هاست.

**۴.۵.** در مورد چند وجهی‌های (نامتناهی) غیر انقباضی $P$ که به‌ازای هر $n$، $n-$ میانگین دارند ویژگی $H-$ فضا آن‌ها را کاملاً توصیف می‌کند. با استفاده از روش‌های استادانه‌تری که اساساً از هوپف و سِر هستند و این واقعیت که تمام گروه‌های هموتوپی $P$ فضاهای برداری روی $Q$ هستند می‌توان ثابت کرد:

**قضیهٔ ۷.** هرگاه $P$ (غیر انقباضی) به ازای هر $n$، $n-$ میانگین داشته باشد نوع آن هموتوپی یک حاصلضرب توپولوژیک از فضاهای ایلنبرگ ـ مک لین $K(Q, k_\nu)$ است.

اکنون می‌توانیم نتایج جالبی در مورد الگوی انتخاب اجتماعی بیان کنیم. فضای رجحان $P$ را به‌صورت حاصلضرب موجود در قضیهٔ ۷ و تابع انتخاب اجتماعی $F$ را با تعداد دلخواه$n$ بنگاه انتخاب می‌کنیم. در این صورت به ازای هر عدد ثابت $d > ۰$ پروفایل‌های $(p_۱,\ldots,p_n)$ وجود دارند که فاصلهٔ بین $F(p_۱,\ldots,p_n)$ و $p_j$ به‌ازای هر $j$ بزرگتر از $d$ است. [فرض بر این است که توپولوژی با یک متریک مناسب داده شده است.] این بدان معنا است که هیچ بنگاهی علیرغم میل خودش به‌طور تقریبی چیزی را که می‌خواهد به‌دست نمی‌آورد! مگر اینکه آنها در مورد راه حلی تدبیری بیندیشند.

حقیقت فوق ناشی از ساخت $P$ است که با کره‌ها آغاز می‌شود، و این‌ها هیچ $n-$ میانگینی را به‌ازای

۲ $\geq n$ نمی‌پذیرند. راه‌های دقیقی برای تبیین این نتایج وجود دارد. می‌خواستم نشان دهم که بجز در حالت انقباضی یا هیچ تابع انتخاب اجتماعی روی $P$ نمی‌تواند وجود داشته باشد، یا اگر به‌ازای هر $n$ وجود داشته باشد پیشامدهای غیرمنتظره رخ خواهد داد.

**۵.۵ تذکر.** مایلم مقالهٔ جدید شموئل واینبرگر [W] را درمورد ویژگی‌های توپولوژیک الگوی انتخاب اجتماعی معرفی کنم. واینبرگ از مقالات [E] و [EGH] در مورد میانگین‌های تعمیم یافته اطلاعی نداشت، این مقالات شامل تمام نتایج توپولوژیک [W]اند ـ بجز قضیهٔ ۷ ـ. ما از این موضوع اطلاع داشتیم ولی اهمیت کافی برای آن قایل نشدیم! در [W] اهمیت این قضیه به زیبایی بیان شده است و چند نکتهٔ تازه در مورد ویژگی‌های مختلف الگوی انتخاب اجتماعی وجود دارد.

**سپاسگزاری**

مترجم از آقای سیامک کاظمی (مرکز نشر دانشگاهی) برای ویرایش متن ترجمه بسیار سپاسگزار است.

## مراجع

[B] W. Browder, On torsion in H-space, *Ann. Math.* (2) 74(1961), 24-51

[C] G. Chichinisky, Intersecting families of sets and the topology of cones in economics, *Bull. AMS* 29(1993), 189-207

[E] B. Eckmann, Räume mit Mittelbildungen, Comment. *Math. Helv.* 28(1954), 329-340.

[EGH] B. Eckmann, T. Ganea, P.J. Hilton, Generalized means, *Studies in Mathematical Analysis*, Stanford University Press (1962), 82-92

[H] C.D. Horvath, On the topological social choice problem, *Soc. Choice Welfare* 18(2001), 227-250

[K-S] Alan P. Kirman and Dieter Sondermann, Arrow's Theorem, many agents, and invisible dictators, *CORE Discussion Paper* 7142 (1971/72)

[K] A. Kolmogorov, Sur la notion de moyenne, Rendiconti Acad.dei Lincei 12(1930), 388-391

[W] S. Weinberger, On the topological social choice model, preprint 2003, to appear *in Soc. Choice Welfare*

---

مترجم: محمد جلوداری ممقانی

دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ اقتصاد

پست الکترونیک j_mamaghani@atu.ac.ir

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۳۱ تا ۴۲

# آشنایی با الگوریتم تقلیل مبنا در شبکه‌های صحیح و بعضی کاربردهای آن

حمید اسمعیلی و ابراهیم نصیرالاسلامی

چکیده

در این مقاله به معرفی الگوریتم تقلیل مبنا برای شبکه‌های صحیح و بعضی کاربردهای آن می‌پردازیم. یک مبنای تقلیل یافته برای یک شبکه، درواقع، یک پایهٔ تقریباً متعامد شامل بردارهای تقریباً کوتاه است. یک شبکه لزوماً یک پایهٔ متعامد ندارد در حالی که دارای یک پایهٔ تقلیل یافته است. در این مقاله یک الگوریتم چند جمله‌ای زمانی برای محاسبه یک چنین پایه‌ای معرفی شده است. این الگوریتم که به الگوریتم تقلیل مبنا مشهور است توسط لِنسترا، لِنسترا و لُواش در سال ۱۹۸۲ ارائه شده است.

## مقدمه

یک شبکه (صحیح) در $Z^m$ عبارت از مجموعهٔ همه ترکیبهای خطی ستونهای یک ماتریس صحیح $m \times n$ مانند $A$ است. در این حالت مجموعهٔ ستونهای ماتریس $A$ را یک مجموعهٔ مولد برای شبکه می‌گوییم. فرض کنید $L(A)$ شبکهٔ تولید شده توسط ماتریس $A$ باشد. در این صورت $L(A) = \{y \in Z^m \mid y = Ax,\ x \in Z^n\}$. بنابراین حل دستگاه معادلات دیوفانتی

$$Ax = b, \quad x \in Z^n, \tag{۱}$$

بر حسب شبکه عبارت است از حل «مسألهٔ وجودی»:
تعیین کنید آیا $b \in L(A)$. در این صورت یک نمایش از $b$ به صورت یک ترکیب خطی صحیح از ستونهای ماتریس $A$ ارائه کنید.

یک تعمیم طبیعی مسألهٔ (۱) عبارت است از «مسألهٔ نزدیکترین بردار»:

$$\min\{\parallel b-y \parallel \ \mid y\in L(A)\}. \qquad (۲)$$

با فرض $b=\circ$ در مسألهٔ بالا و حذف حالت بدیهی $y=\circ$ «مسألهٔ کوتاهترین بردار» به دست می‌آید:

$$\min\{\parallel y \parallel \ \mid y\in L(A), \quad y\neq \circ\}. \qquad (۳)$$

یک تعمیم دیگر مسألهٔ (۱) که دارای کاربردهای زیادی در طراحی ICها و مسائل برنامه‌ریزی صحیح است عبارت است از حل یک دستگاه معادلات دیوفانتی خطی با کران بالا و پایین روی متغیرها:

$$Ax=b, \quad \circ\leq x\leq u, \quad x\in Z^n, \qquad (۴)$$

که در آن $u\in Z^n$. یک حالت خاص مسأله (۴) متناظر با $m=۱$ است. فرض کنید $a,u\in Z^n$ و $a_\circ\in Z$ مفروض باشند. مسأله عبارت است از یافتن بردار صحیح $x\in Z^n$ به طوری که

$$a^Tx=a_\circ, \quad \circ\leq x\leq u, \quad x\in Z^n. \qquad (۵)$$

اختلاف اساسی میان مسائل فوق مربوط به پیچیدگی محاسباتی آنها است. یک الگوریتم چند جمله‌ای زمانی برای حل مسألهٔ (۱) وجود دارد در حالی که سایر مسائل NP یا NP-hard هستند. یک الگوریتم مبتنی بر روند تقلیل مبنا برای حل مسألهٔ (۴) وجود دارد که متکی بر یافتن یک نمایش مناسب برای شبکه $L(A)$ است [۱]. این الگوریتم ابتدا بردارهای کوتاه (از نظر اندازه) صادق در معادلهٔ دیوفانتی را تعیین می‌کند و سپس با استفاده از ترکیبهای خطی صحیح آنها برداری به دست می‌دهد که در محدودیتهای کران روی متغیرها صدق می‌کند یا نشان می‌دهد که چنین برداری وجود ندارد.

مسألهٔ (۵) اغلب به عنوان یک زیر مسأله در طراحی ICها برای پردازش سیگنالهای ویدیویی بروز می‌کند. همچنین مسایلی وجود دارند که از نوع مسألهٔ (۱) یا تعمیمی از آن هستند، مانند مسألهٔ فروبنیوس که اخیراً توسط کارنیوجولس، یوربانیاک، وایسمنتل و وُلسی [۴] در نظر گرفته شده است. نمونه‌های مسألهٔ (۴) که مربوط به پردازش سیگنالهای ویدیویی می‌شوند برای حل با روش شاخه و کران در برنامه‌ریزی صحیح، به واسطهٔ طبیعت داده‌ها، خیلی سخت هستند به این معنی که اندازهٔ درخت جستجو به سرعت بزرگ می‌شود. برای تشریح ساختار این چنین مسائلی به طور مختصر منشأ مسأله را بررسی می‌کنیم.

در یکی از مراحل طراحی ICها برای پردازش سیگنالهای ویدیویی لازم است که یک جریان داده به پردازشگرها نسبت داده شود. یک جریان داده یک مجموعه تکراری از اعمال حسابی است

که شامل محاسبهٔ تعداد تکرارها و مدت تکرار است. یک جریان داده را می‌توان به مثابهٔ مجموعه‌ای از حلقه‌های تو در تو در نظر گرفت. حلقهٔ بیرونی دارای یک شمارشگر $i_0$ با شرط $0 \le i_0 \le I_0$ است. حلقه بعدی دارای یک شمارشگر $i_1$ با شرط $0 \le i_1 \le I_1$ است و به همین ترتیب برای حلقه‌های دیگر. دوره تناوب متناظر با یک حلقه عبارت است از بازهٔ زمانی میان دو تکرار متوالی آن حلقه. وقتی که یک تخصیص از جریانها به پردازشگرها انجام می‌شود مسألهٔ کشف تصادم بروز می‌کند: بررسی این که آیا زمانی وجود دارد که اعمال دو جریان مختلف با هم انجام شوند. اگر چنین زمانی وجود داشته باشد آنگاه آن جریانها نباید به یک پردازشگر تخصیص داده شوند. یک جریان داده دلخواه مانند $f$ در نظر بگیرید. فرض کنید $i_f = (i_{f_0}, i_{f_1}, \ldots, i_{f_m})^T$ بردار شمارشگر برای این جریان باشد. این بردار در کرانهای بالا و پایین $0 \le i_f \le I_f$ صدق می‌کند. فرض کنید $P_f$ بردار دورهٔ تناوب و $S_f$ زمان شروع جریان باشد. لحظه‌ای از زمان که اجرای $i_f$ از جریان داده $f$ شروع می‌شود با $t(i_f) = S_f + P_f^T i_f$ مشخص می‌شود. بنابراین مسألهٔ تعیین تصادم را می‌توان به صورت زیر فرمولبندی کرد:

با مفروض بودن جریانهای داده $f$ و $g$، بردارهای شمارشگر $i_f$ و $i_g$ را بیابید به طوری که

$$S_f + P_f^T i_f = S_g + P_g^T i_g, \quad 0 \le i_f \le I_f, \quad 0 \le i_g \le I_g.$$

یک روش طبیعی برای حل مسألهٔ (۵) عبارت از تبدیل آن به یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی صحیح و حل آن با روش‌های برنامه‌ریزی صحیح است. برای این منظور یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی صحیح با قیدهای (۵) و یک تابع هدف، مثلاً $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ را در نظر بگیرید که هدف آن کمینه‌سازی است:

$$\min\ e^T x \quad s.t. \quad a^T x = a_0, \quad 0 \le x \le u, \quad x \in Z^n, \qquad (۶)$$

که در آن $e$ یک بردار $n$ بعدی است که همهٔ درایه‌های آن ۱ هستند. توجه داریم که هر جواب بهینه، در صورت وجود، برای (۶) یک جواب شدنی برای (۵) است. صورت استاندارد مسألهٔ (۶) به قرار زیر است:

$$\min\ e^T x \quad s.t. \quad a^T x = a_0, \quad x + s = u, \quad x, s \ge 0 \quad x, s \in Z^n, \qquad (۷)$$

که در آن $s$ بردار متغیرهای لنگی برای قیدهای $x \le u$ است. توجه داریم که اکنون تعداد متغیرها برابر با $2n$ و تعداد قیدها برابر با $n + 1$ است.

مسألهٔ برنامه‌ریزی صحیح (۷) را می‌توان با هر یک از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی صحیح مانند الگوریتم صفحه برشی یا الگوریتم شاخه و کران [۱۴،۱۲،٦] حل کرد. همچنین با تبدیل هر یک از متغیرهای صحیح $x_j$ به صورت دودویی می‌توان از الگوریتم جمعی بالاش [۱۲،٦] نیز برای حل (۷) استفاده کرد. برای این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که چون $0 \le x_j \le u_j$ پس

$x_j \in \{\circ, \text{۱}, \ldots, u_j\}$. فرض کنید $\delta_{kj}$ یک متغیر دودویی باشد، یعنی $\delta_{kj} = \circ, \text{۱}$. در این صورت $x_j \in \{\circ, \text{۱}, \ldots, u_j\}$ اگر و تنها اگر

$$x_j = \sum_{k=\circ}^{t_j} \text{۲}^k \delta_{kj}, \quad \delta_{kj} = \circ, \text{۱}, \quad k = \circ, \text{۱}, \ldots, t_j,$$

که در آن عدد صحیح $t_j$ چنان است که $\text{۲}^{t_j} \leq u_j < \text{۲}^{t_j+\text{۱}}$. اگر $u_j$ یک عدد بزرگ باشد آنگاه تعداد متغیرهای دودویی $\delta_{kj}$ای که باید به مسأله اضافه کرد زیاد است و این باعث بزرگ شدن بیشتر مسأله می‌شود.

روش صفحه برشی، به دلیل خطاهای گرد کردن، عموماً یک روش همگرا نیست و بنابراین به ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۴،۱۲،٦]. روش بالاش نیز به دلیل بزرگ بودن مسألهٔ دودویی متناظر عموماً کارا نیست [۱۲،٦]. بنابراین برای حل مسألهٔ (۷) از روش شاخه و کران استفاده می‌کنیم. در حل یک مسأله شدنی بودن، مانند مسألهٔ (۵)، با روش شاخه و کران دو مشکل اساسی وجود دارد. اول، به واسطه اندازهٔ کران‌های بالا روی متغیرها، درخت جستجو ممکن است خیلی بزرگ باشد. دوم، ممکن است خطاهای گرد کردن رخ دهند. به علاوه، اندازهٔ درخت جستجو نسبت به تابع هدف مورد استفاده حساس است و نیز زمان حل مسأله بستگی به تابع هدف انتخاب شده دارد. بنابراین یک مشکل دیگر، انتخاب بهترین تابع هدف است. همچنین یک تابع هدف مفهومی به مسأله القا می‌کند که طبیعی نیست.

خطاهای گرد کردن کراراً برای نمونه‌های مربوط به مسألهٔ تعیین تصادم رخ می‌دهند چون ضریب بعضی از متغیرها خیلی بزرگ هستند. مشخصه‌های خاص این نمونه‌ها ــ مانند بزرگ بودن بعضی از ضرایب، کوچک بودن بعضی از ضرایب دیگر، و نیز یک مقدار خیلی بزرگ برای $a_\circ$ ــ مربوط به اختلاف دورهٔ تناوب حلقه‌های تو در تو است. این اختلاف را می‌توان با یک تصویر تلویزیونی شرح داد. یک چنین تصویری شامل ٦۲۵ سطر است و هر سطر از ۷۲۰ پیکسل (نقطه نورانی) تشکیل شده است. در هر ثانیه ۲۵ تصویر روی صفحه تلویزیون نمایش داده می‌شود. بنابراین زمان میان نمایش دو تصویر $\text{۴}\circ ms$ است. زمان میان فعال شدن دو سطر و زمان میان فعال شدن دو پیکسل، به ترتیب، برابر با $\text{٦۴}\mu s$ و $\text{۷۴}ns$ است. چون باید نرخ خروجی سیگنالها برابر با نرخ ورودی آنها باشد پس اختلافهای بزرگی در دوره‌های تناوب به دست می‌آید هر گاه جریان داده متناظر با اعمالی باشد که باید برای تمام صفحه نمایش، سطرها و پیکسل‌ها، تکرار شوند. به واسطهٔ این اختلاف بزرگ در اندازهٔ ضرایب اغلب ملاحظه می‌شود که الگوریتم‌های مبتنی بر روش شاخه و کران با جوابی خاتمه می‌یابد که مثلاً متغیر $x_j$ دارای مقدار ۴/۹۹۹۹۹۹ است، چون سخت‌افزار توانایی پذیرش دقت بالاتر را ندارد. اگر مقدار $x_j$ را به ۵/۰ گرد کنیم آنگاه یک بردار $x$ به دست می‌آوریم که در معادلهٔ دیوفانتی صدق نمی‌کند و در نتیجه الگوریتم با یک جواب نشدنی خاتمه می‌یابد.

برای رفع این نواقص در [۱] الگوریتمی ارائه شده است که مبتنی بر الگوریتم تقلیل مبنا ــ تهیه

شده توسط لِنسترا، لِنسترا و لُواش [۹] است. انگیزهٔ استفاده از الگوریتم تقلیل مبنا دو چیز است: اول، تقلیل مبنا این امکان را فراهم می‌سازد که صرفاً با اعداد صحیح کار کنیم و بنابراین از مشکلات گرد کردن دوری کنیم. دوم، تقلیل مبنا بردارهای کوتاه و تقریباً متعامد متعلق به شبکهٔ تعریف شده توسط یک پایه را به دست می‌دهد. با مفروض بودن کرانها روی متغیرها، می‌توانیم مسأله (۵) را به عنوان بررسی اینکه آیا یک بردار کوتاه صادق در یک معادلهٔ دیوفانتی داده شده وجود دارد یا نه در نظر بگیریم. یافتن مبنای آغازین برای شبکه شامل تمام بردارهای صادق در مسأله نسبتاً آسان است. این مبنای آغازین «خوب» نیست به این معنی که شامل بردارهای خیلی دراز است. به هر حال، این مبنا مفید است چون به کمک آن می‌توان خواص ساختاری مبنای تقلیل یافته را که از به کار بردن الگوریتم تقلیل مبنا روی این مبنا به دست می‌آید ثابت کرد. لازم به ذکر است که تقلیل مبنا باعث تغییر شبکه نمی‌شود بلکه فقط توصیف دیگری از آن را به دست می‌دهد.

مسألهٔ فروبنیوس به صورت زیر تعریف می‌شود: اعداد صحیح و نامنفی $a_1,\dots,a_n$ که بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها، $gcd(a_1,\dots,a_n)=1$ است مفروضند. مطلوب است بزرگترین عدد صحیح $a_0$ که به صورت یک ترکیب خطی صحیح و نامنفی از اعداد $a_1,\dots,a_n$ نیست. به $a_0$ عدد فروبنیوس می‌گویند. نمونه‌های این مسأله در [۴] برای حل با روش شاخه و کران در برنامه‌ریزی خطی سخت هستند.

## تقلیل مبنا در شبکه‌ها

یک شبکه در $R^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف ۱.** یک مجموعه مانند $L$ در $R^n$ را یک شبکه می‌گوییم هر گاه یک مبنای $\{b_1,\dots,b_k\}$ برای $L$ وجود داشته باشد به طوری که

$$L=\{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j b_j \mid \alpha_j\in Z,\ 1\le j\le k\}. \qquad (8)$$

فرض کنید $A$ یک ماتریس $n\times n$ نامنفرد و $L$ شبکه تولید شده توسط ستونهای $A$ باشد. اگر $B$ یک ماتریس نامنفرد دیگری باشد که ستونهایش $L$ را تولید می‌کند آنگاه $|\det A|=|\det B|$. بنابراین این عدد مستقل از انتخاب یک مبنا برای $L$ است. این عدد را دترمینان $L$ می‌گوییم و با $\det L$ نشان می‌دهیم. $\det L$ برابر است با حجم متوازی‌السطوح

$$\{\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_n b_n \mid 0\le\lambda_j\le 1,\quad j=1,\dots,n\},$$

که در آن $b_{۱}, \ldots, b_n$ یک پایه برای $L$ است. بنابراین نامساوی معروف هادامارد را داریم:

$$\det L \leq \prod_{j=۱}^{n} \parallel b_j \parallel .$$

واضح است که تساوی در رابطهٔ فوق تنها وقتی اتفاق می‌افتد که بردارهای $b_{۱}, \ldots, b_n$ متعامد باشند. هر شبکه‌ای دارای یک مبنای متعامد نیست. یک قضیهٔ کلاسیک از هرمیت بیان می‌کند که به ازای هر $n$ عدد $c(n)$ وجود دارد به طوری که هر شبکهٔ $n$ بعدی مانند $L$ دارای یک مبنای $b_{۱}, \ldots, b_n$ است که

$$\prod_{j=۱}^{n} \parallel b_j \parallel \leq c(n) \det L.$$

یک چنین مبنایی را می‌توان به عنوان تقریبی از یک مبنای متعامد در نظر گرفت. هرمیت نشان داد که می‌توان $c(n)$ را به صورت

$$c(n) = \left(\frac{۴}{۳}\right)^{n(n-۱)/۴}$$

در نظر گرفت. مینکوفسکی این مطلب را با نشان دادن این که

$$c(n) = \frac{۲^n}{V_n} \simeq \left(\frac{۲n}{\pi e}\right)^{n/۲},$$

ثابت کرد، که در آن $V_n$ حجم گوی واحد در $R^n$ است. به هر حال برای این انتخاب از $c(n)$ الگوریتم چند جمله‌ای شناخته نشده است که یک مبنای صادق در قضیهٔ هرمیت را به دست دهد.

با انتخاب $c(n) = ۲^{n(n-۱)/۴}$ لِنسترا، لِنسترا و لُواش [۹] یک الگوریتم چند جمله‌ای ارائه دادند که یک چنین مبنایی را به دست می‌دهد (هر گاه یک مبنا برای شبکه در دست باشد). برای این منظور آنها از روند متعامد سازی گرام ــ اشمیت استفاده کردند.

روند متعامدسازی گرام ــ اشمیت یک الگوریتم برای به دست آوردن بردارهای متعامد $b_j^*$، $۱ \leq j \leq n$، از بردارهای مستقل خطی $b_j$، $۱ \leq j \leq n$، است. فرض کنید $B = (b_{۱}, \ldots, b_n)$ و $B^* = (b_{۱}^*, \ldots, b_n^*)$، به ترتیب، ماتریس‌هایی با ستون‌های $b_j$ و $b_j^*$ باشند. بردارهای $b_j^*$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b_j^* = b_j - \sum_{k=۱}^{j-۱} \mu_{kj} b_k^*, \quad j = ۱, \ldots, n, \tag{۹}$$

که در آن

$$\mu_{kj} = b_k^{*T} b_j / b_k^{*T} b_k^*, \quad k = ۱, \ldots, j-۱. \tag{۱۰}$$

**قضیهٔ ۱.** [۱۲]

۱ — روند متعامدسازی گرام ـ اشمیت یک مبنای متعامد $b_1^*, \dots, b_n^*$ برای $R^n$ به دست می‌دهد.

۲ — $b_k^*$ مؤلفهٔ $b_k$ عمود بر فضای تولید شده توسط $b_1^*, \dots, b_{k-1}^*$ است.

۳ — $|\det B| = |\det B^*| = \prod_{j=1}^n \| b_j^* \|$

فرض کنید $B = (b_1, \dots, b_n)$ یک مبنا برای $L$ و $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ مبنای حاصل از به کار بستن روند گرام ـ اشمیت بر $B$ باشد. توجه داریم که $B^*$ لزوماً یک پایه برای $L$ نیست چون اعداد $\mu_{kj}$ لزوماً صحیح نیستند. یک مبنای «تقریباً متعامد» به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف ۲.** فرض کنید $B$ یک مبنا برای $L$ و $B^*$ مبنای حاصل از به کار بستن روند گرام ـ اشمیت بر $B$ باشد. مبنای $B$ را تقلیل یافته می‌گوییم هر گاه

$$|\mu_{kj}| \le \frac{1}{2}, \qquad 1 \le k < j \le n, \tag{11}$$

و

$$\| b_{j+1}^* + \mu_{j,j+1} b_j^* \|^2 \ge \frac{3}{4} \| b_j^* \|^2, \qquad j = 1, \dots, n-1. \tag{12}$$

توجه داریم که بردار $b_j^*$ تصویر بردار $b_j$ به توی مکمل عمودی فضای تولید شده توسط بردارهای $b_1, \dots, b_{j-1}$ است. همچنین بردار $b_{j+1}^* + \mu_{j,j+1} b_j^*$ تصویر بردار $b_{j+1}$ به توی مکمل عمودی فضای تولید شده توسط بردارهای $b_1, \dots, b_{j-1}$ می‌باشد. عدد ثابت $\frac{3}{4}$ در (۱۲) دلخواه است و می‌توان آنرا با هر عدد ثابت $\alpha$، $1 > \alpha > \frac{1}{4}$، عوض کرد.

**قضیهٔ ۲.** [۱۲] فرض کنید $B$ یک مبنای تقلیل یافته برای $L$ باشد. در این صورت داریم:

۱ — $\| b_j^* \| \le \sqrt{2} \| b_{j+1}^* \|$،

۲ — $\| b_1 \| \le 2^{(n-1)/4} (\det L)^{1/n}$،

۳ — $\| b_1 \| \le 2^{(n-1)/2} \min\{\| y \| \mid y \in L,\ y \ne 0\}$،

۴ — $\prod_{j=1}^{n} \| b_j \| \le 2^{n(n-1)/4} \det L$.

در [۱۴،۹،۴] یک الگوریتم چند جمله‌ای زمانی برای به دست آوردن یک مبنای تقلیل یافته برای شبکه‌ای که یک پایه برای آن معلوم است ارائه شده است. الگوریتم شامل یک دنباله از تقلیل اندازه‌ها و تعویض‌ها است که به صورت زیر توصیف می‌شوند.

**تقلیل اندازه:** اگر به ازای یک جفت اندیس $k$ و $j$ با شرط $1 \le k < j \le n$ روابط (۱۱) برقرار نیست آنگاه $b_j$ را با $b_j - \hat{\mu}_{kj} b_k$ عوض کنید که در آن $\hat{\mu}_{kj} = \left[\mu_{kj} + \frac{1}{2}\right]$ نزدیکترین عدد صحیح به $\mu_{kj}$ است ($[\alpha]$ نشان دهندهٔ جزء صحیح $\alpha$ است).

**تعویض:** اگر شرایط (۱۲) به ازای بعضی اندیس‌های $j$، $1 \leq j < n$، برقرار نیست آنگاه بردارهای $b_j$ و $b_{j+1}$ را جا به جا کنید.

بنابراین الگوریتم تقلیل مبنا را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

**الگوریتم تقلیل مبنا**

۱ــ یک مبنای $B$ برای $L$ بیابید.

۲ــ $B^*$، مبنای حاصل از به کار بستن روند گرام ـ اشمیت بر $B$ را به دست آورید.

۳ــ به ازای $j = 2, \ldots, n$ و $k = j - 1, \ldots, 1$ بردار $b_j$ را با بردار $b_j - \hat{\mu}_{kj} b_k$ عوض کنید که در آن $\hat{\mu}_{kj}$ نزدیکترین عدد صحیح به $\mu_{kj}$ است.

۴ــ اگر به ازای برخی $j$ها داشته باشیم:

$$\| b_{j+1}^* + \mu_{j,j+1} b_j^* \|^2 < \frac{3}{4} \| b_j^* \|^2,$$

آنگاه $b_j$ را با $b_{j+1}$ جا به جا کنید و به قدم (۱) بروید.

**توجه ۱:** در نماد ماتریسی داریم $B = B^* V$ که در آن $V$ ماتریسی بالا مثلثی یکه است. در قدم (۲) ماتریس $V$ را با اعمال ستونی مقدماتی صحیح به یک ماتریس بالا مثلثی یکه مانند $W$ تبدیل می‌کنیم که قدر مطلق عناصر غیر قطری آن حداکثر $\frac{1}{2}$ است. در این صورت ستونهای ماتریس $B^* W$ بردارهای خروجی قدم (۲) هستند.

**توجه ۲:** فرض کنید در قدم (۳) بردارهای $b_j$ و $b_{j+1}$ جا به جا شده باشند. همچنین فرض کنید $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n$ مبنای به دست آمده پس از انجام قدم (۳) و $\tilde{b}_1^*, \ldots, \tilde{b}_n^*$ مبنای حاصل از به کار بستن روند گرام ـ اشمیت روی آن باشد. در این صورت $\tilde{b}_i = b_i$، به ازای $i \neq j, j+1$، $\tilde{b}_j = b_{j+1}$ و $\tilde{b}_{j+1} = b_j$. بنابراین $\tilde{b}_i^* = b_i^*$، به ازای $i \neq j, j+1$، و

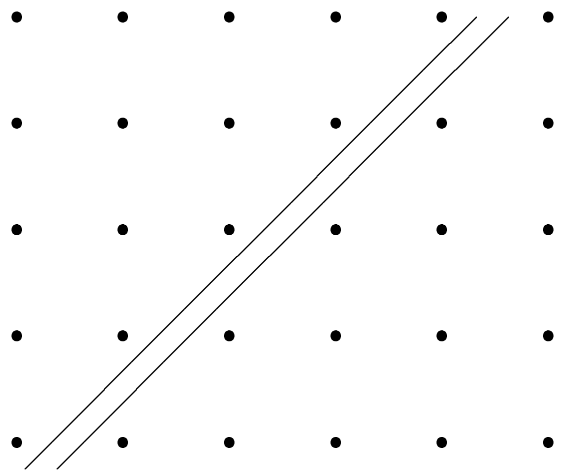
$$\begin{aligned}
\tilde{b}_j = b_{j+1} &= \mu_{1,j+1} b_1^* + \cdots + \mu_{j-1,j+1} b_{j-1}^* + \mu_{j,j+1} b_j^* + b_{j+1}^* \\
&= \mu_{1,j+1} \tilde{b}_1^* + \cdots + \mu_{j-1,j+1} \tilde{b}_{j-1}^* + \mu_{j,j+1} b_j^* + b_{j+1}^*,
\end{aligned}$$

که در آن $|\mu_{k,j+1}| \leq \frac{1}{2}$. چون $\mu_{j,j+1} b_j^* + b_{j+1}^*$ به بردارهای $b_1, \ldots, b_{j-1}$ عمود است پس

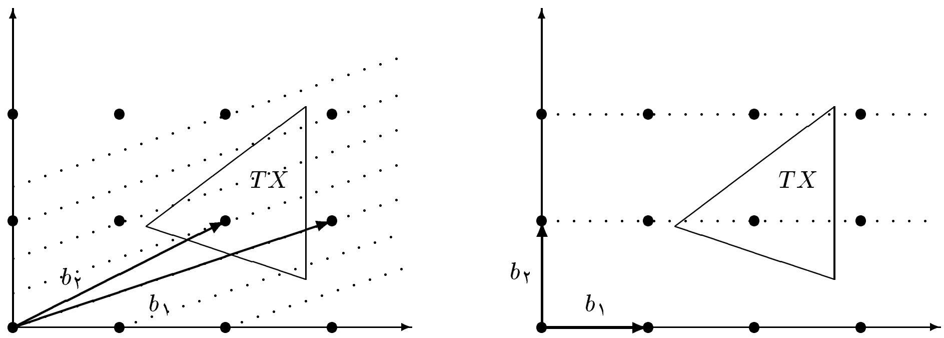
$$\tilde{b}_j^* = \mu_{j,j+1} b_j^* + b_{j+1}^*.$$

در نتیجه با جا به جا کردن $b_j$ و $b_{j+1}$ دترمینان ماتریس $B_i^T B_i$، که در آن $B_i = (b_1, \ldots, b_i)$، در یک مقدار ثابت $\beta$ با $\beta < \frac{3}{4}$ ضرب می‌شود.

**قضیهٔ ۳.** [۱۴،۹] الگوریتم تقلیل مبنا یک مبنای تقلیل یافته برای $L$ را در یک زمان چند جمله‌ای به دست می‌دهد.



**شکل ۱** یک جسم محدب لاغر در $Z^۲$




**شکل ۲** الف) مبنای متعامد ب) مبنای نامتعامد

تقلیل مبنا در برنامه‌ریزی صحیح توسط لِنسترا [۱۰] معرفی شد. لِنسترا نشان داد که هر گاه $n$ یک عدد ثابت باشد مسألهٔ تعیین‌شدنی بودن دستگاه نامعادلات دیوفانتی $Ax \leq b$، $x \in Z^n$، را می‌توان در یک زمان چند جمله‌ای حل کرد. حل‌پذیری این مسأله به‌طور چند جمله‌ای برای $n = ۱,۲$،

قبلاً ثابت شده بود. ایدهٔ الگوریتم لِنسترا را می‌توان با درنظرگرفتن یک جسم دو بعدی محدب شرح داد. فرض کنید این جسم لاغر باشد (شکل ۱ را ببینید). اگر این جسم را در یک جهت به دلخواه گسترش دهیم، مانند شکل ۱، آنگاه درخت جستجو در روش شاخه و کران قبل از تعیین عدم وجود یک جواب شدنی، به دلخواه بزرگ می‌شود. بنابراین، حتی اگر $n = 2$، آنگاه یک الگوریتم مبتنی بر روش شاخه و کران ممکن است یک تعداد نمایی تکرار، بر حسب بعد مسأله، انجام دهد.

آنچه که لِنسترا مشاهده کرد عبارت است از:
فرض کنید با یک جسم محدب $X$ در $R^n$ شروع کنیم و شبکهٔ تحت بررسی شبکه $Z^n$ باشد. مسأله عبارت است از تعیین اینکه آیا برداری مانند $x$ در $X \cap Z^n$ وجود دارد. این مسأله را مسألهٔ $\mathrm{P}$ می‌نامیم. از مبنای استاندارد $b_j = e_j$، $j = 1, \ldots, n$، برای $Z^n$ استفاده می‌کنیم که در آن $e_j$ ستون $j$ام ماتریس همانی مرتبهٔ $n$ است. برای این که یک جسم محدب لاغر نداشته باشیم یک تبدیل خطی $T$ روی $X$ به کار می‌بریم به طوری که آن را «منظم» کند. در این صورت مسألهٔ $\mathrm{P}$ هم‌ارز با مسألهٔ تعیین وجود یک بردار $x$ در $TX \cap TZ^n$ است. جسم جدید $TX$ دارای یک شکل منظم است ولی بردارهای مبنا، $Te_j$، لزوماً متعامد نیستند. بنابراین از نقطه نظر شاخه کردن هنوز مشکلاتی وجود دارد. این را می‌توان به عنوان انتقال مشکل مسأله از جسم محدب به شبکه در نظر گرفت و این همان چیزی است که سودمندی تقلیل مبنا را نشان می‌دهد. با به کار بردن الگوریتم تقلیل مبنا روی بردارهای مبنای $Te_j$ یک مبنای جدید $b_j$، $n, \ldots, 1 = j$، به دست می‌آوریم که همان شبکه، $TZ^n$، را تولید می‌کند در حالی که شامل بردارهای کوتاه و تقریباً متعامد است. به علاوه، می‌توان نشان داد که فاصله $d$ میان هر دو ابر صفحه متوالی $H + kb_n$ و $H + (k + 1)b_n$، که در آن $k \in Z$ و $H$ فضای تولید شده توسط بردارهای $b_1, \ldots, b_{n-1}$ است، خیلی کوچک نیست. این به آن معنی است که اگر روی این ابرصفحه‌ها انشعاب دهیم آنگاه تعداد آنها نمی‌تواند بسیار زیاد باشد. هر انشعاب در یک سطح معینی از درخت جستجو متناظر با یک زیر مسأله، با یک بعد کمتر از مسألهٔ ماقبل آن است. شکل ۲ نشان می‌دهد که چطور فاصله میان ابر صفحه‌های $H + kb_n$ افزایش می‌یابد هر گاه از یک مبنای متعامد به جای یک مبنای نامتعامد استفاده کنیم.

برای مسألهٔ برنامه‌ریزی صحیح $\mathrm{P}$، لُواش و اِسکارف [۱۱] الگوریتمی ارائه می‌کنند که، همانند الگوریتم لِنسترا، از شاخه کردن با این ابرصفحه‌ها استفاده می‌کند. به جای استفاده از $T$ برای تبدیل جسم محدب و بردارهای مبنای آغازین، و سپس به کار بستن الگوریتم تقلیل مبنا، الگوریتم آنها یک مبنای «تقلیل یافته» لُواش ـ اسکارف تولید می‌کند به این معنی که پهنای جسم محدب در نظر گرفته شده در جهت‌های مستقل متفاوت است. تعریف لُواش و اسکارف از یک مبنای تقلیل یافته تعمیمی از تعریف ارائه شده در [۹] است. در [۲] نشان داده شده است که الگوریتم لُواش ـ اسکارف می‌تواند بعضی برنامه‌های خطی صحیح در طراحی شبکه را حل کند در حالی که این مسایل را با روش شاخه و کران نمی‌توان حل کرد.

برنامه‌ریزی صحیح تنها زمینهٔ کاربرد الگوریتم تقلیل مبنا نیست. یک کاربرد جالب برای آن در تجزیهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب گویا است. در [۹] یک الگوریتم چند جمله‌ای زمانی، مبتنی بر الگوریتم تقلیل مبنا، برای یافتن یک تجزیه به عوامل تحویل ناپذیر یک چند جمله‌ای یک متغیره با ضرایب گویا ارائه شده است.

در رمزنگاری از تقلیل مبنا برای حل مسألهٔ مجموع زیر مجموعه‌ها در ارتباط با سیستم‌های رمزی معینی استفاده می‌شود ([۵،۸،۱۳] را ببینید). یک کاربرد جالب تقلیل مبنا در رمزنگاری در [۳] ارائه شده است. در [۳] از تقلیل مبنا برای یافتن جوابهای صحیح کوچک یک چند جمله‌ای یک متغیره در پیمانه $N$ و جوابهای صحیح یک چند جمله‌ای دو متغیره استفاده شده است که دارای کاربردهایی در بعضی طرحهای رمزنگاری است.

در محاسبات مربوط به بزرگترین مقسوم علیه مشترک تعمیم یافته از الگوریتم تقلیل مبنا استفاده می‌شود [۷]. در این گونه مسایل هدف یافتن یک بردار کوتاه صحیح مانند $x$ است به طوری که $a^T x = a_\circ$ با $a_\circ = gcd(a^T)$.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله با الگوریتم تقلیل مبنا و بعضی کاربردهای آن آشنا شدیم. این الگوریتم یک مبنای تقلیل یافته شامل بردارهای تقریباً کوتاه و متعامد برای یک شبکه صحیح را به دست می‌دهد. انگیزهٔ استفاده از الگوریتم تقلیل مبنا دو چیز است: اولاً، تقلیل مبنا این امکان را فراهم می‌سازد که صرفاً با اعداد صحیح کار کنیم و بنابراین از مشکلات گرد کردن دوری کنیم. ثانیاً، تقلیل مبنا بردارهای کوتاه و تقریباً متعامد متعلق به شبکه تعریف شده توسط یک پایه را به دست می‌دهد. لازم به ذکر است که تقلیل مبنا باعث تغییر شبکه نمی‌شود بلکه فقط توصیف دیگری از آن را به دست می‌دهد.

## مراجع


[1] K. Aardal, C. Hurkens, A. K. Lenstra, Solving a linear Diophantine equation with lower and upper bounds on the variables, *Lecture Notes in Computer Science* 1412, 1998, 229-242.

[2] W. Cook, T. Rutherford, H. E. Scarf, D. Shallcross, An implementation of the generalized basis reduction algorithm for integer programming, *ORSA journal on Computing 5*, 1993, 206-212.

[3] D. Coppersmith, Small solution to polynomial equations and low exponent RSA vulnerability, *J. Cryptology 10*, 1997, 233-260.

[4] G. Cornuejols, R. Urbaniak, R. Weismantel, L. Wolsey, Decomposition of integer programs and of generating sets, *Lecture Notes in Computer Science* 1284, 1997, 92-103.

[5] M. J. Coster, A. Joux, B. A. LaMacchia, A. M. odlyzko, C. P. Schnorr, Improved low-density subset sum algorithms, *Computational Complexity 2*, 1992, 111-128.

[6] , R. S. Garfinkel, G. L. Nemhauser, *Integer programming*, John Wiley ans Sons, 1972.

[7] G. Havas, B. S. Majewski, K. R. Matthews, Extended gcd and Hermite normal form algorithms via lattice basis reduction, *Working paper, Department of Mathematics*, The University of Queensland, Australia, 1996.

[8] J. C. Lagarias, A. M. Odlyzko, Solving low-density subset sum problems, *J. Association for Computing Machinery 32*, 1985, 229-246.

[9] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients, *Mathematische Annalen 261*, 1982, 515-534.

[10] H. W. Lenstra, Integer programming with a fixed number of variables, *Mathematics of Operations Research 8*, 1983, 538-548.

[11] L. Lovász, H. E. Scarf, The generalized basis reduction algorithm, *Mathematics of Operations Research 17*, 1992, 751-764.

[12] G. L. Nemhauser, L. Wolsey, *Integer and combinatorial optimization*, Jhon Wiley and Sons, 1988.

[13] C. P. Schnorr, M. Euchner, Lattice basis reduction: improved practical algorithms and solving subset sum problems, *Mathematical Programming 6*, 1995, 181-199.

[14] A. Schrijver, *Theory of integer and linear programming*, John Wiley and Sons, 1986.

حمید اسمعیلی
دانشگاه بوعلی‌سینا همدان، گروه ریاضی
پست الکترونیک: esmaeili47@yahoo.com

ابراهیم نصیرالاسلامی
دانشگاه بوعلی‌سینا همدان، گروه ریاضی
پست الکترونیک: nasiroleslami@basu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۴۳ تا ۷۵

# چگونه ریاضی بنویسیم

پاول هالموس

ترجمهٔ حسن نجومی

## مقدمه

این نوشته، شخصی است و عنوان آن گمراه‌کننده است؛ شاید «چگونه من ریاضی می‌نویسم» عنوان صادقانه‌تری برای این مقاله باشد. این کار به همراه یک کمیته در انجمن ریاضی آمریکا، که مدت کوتاهی عضو آن بودم، آغاز شد ولی به سرعت به صورت یک پروژهٔ شخصی درآمد. برای تحت کنترل در آوردن این پروژه، از تنی چند از دوستانم خواهش کردم مقالهٔ مرا بخوانند و آن را نقد و بررسی کنند. نقدهای آنان بسیار خوب، صادقانه و سازنده، و در عین حال متناقض با هم بود. یکی عقیده داشت تعداد مثال‌های شهودی کافی نیست، دیگری عقیده داشت که نیازی به مثالهای شهودی بیش از آنچه در مقاله وجود دارد، نیست. یا اینکه بنا بر عقیدهٔ یکی برای جلوگیری از خسته‌کردن خواننده با اثباتهای طولانی، بهتر است از روش‌های مؤثر و متداول، مانند شکستن اثبات به تعدادی لم استفاده شود، اما برای دیگری ارائهٔاثبات به صورت رشته‌ای طولانی از لم‌ها، شیوه‌ای خسته‌کننده و خاص مبتدیان بود.

در یک مورد بیشتر افراد طرف مشورت من هم عقیده بودند: نگارش چنین مقاله‌ای مورد استقبال قرار نخواهد گرفت. یکی از نقادان عقیده داشت که هر ریاضیدانی پس از پایان نگارش دومین مقاله‌اش متقاعد شده است که شیوهٔ مقاله‌نویسی را می‌داند و شنیدن توصیه‌ای در این مورد را تحمل نخواهد کرد. عقیدهٔ دیگری این بود که اکثر افراد احساس می‌کنند که اگر راحت گذاشته شوند می‌توانند توصیف کنندگانی تراز اول باشند. حتی افرادی که دربارهٔتوانایی ریاضی خود بسیار فروتن هستند، اگر توانایی‌شان در خوب نوشتن زیر سؤال رود، عصبانی می‌شوند. یکی دیگر از مشاوران من با لحنی بسیار تند به من هشدار داد که از آنجا که در بحثهای فنی نمی‌توان فعالیت‌های عمیق

فکری را نشان داد، اگر مورد تمسخر همکاران مغرورترمان قرار گیرم، نباید تعجب کنم.

مشاوران من همگی ریاضیدانان شناخته شده‌ای هستند و تمجید من از آنها در اینجا بر مقام علمی آنها چیزی نمی‌افزاید، اما ممکن است برداشت یا دریافت نادرست یا ناکامل من از توصیه‌های آنها موجب رنجش و آزردگی خاطرشان شود؛ به این دلیل تصمیم گرفتم برخلاف رسم متداول در مجامع علمی، گفته‌های آنان را بدون ذکر نامشان نقل کنم و از ایشان بدون ذکر نامشان تشکّر کنم. در اینجا تأکید می‌کنم که خودداری از آوردن نام آنان از سپاسگزاری من نمی‌کاهد. بدون یاری آنها، این مقاله، دارای نواقص بیشتری بود.

## ۱ هیچ دستورالعملی برای آنکه چگونه باید نوشت وجود ندارد

فکر می‌کنم بتوانم بیان کنم که چگونه باید نوشت، اما نمی‌دانم چه کسی حاضر به شنیدن آن خواهد بود. توانایی ایجاد ارتباط مؤثر با دیگران و روشن بودن بیان، به عقیدهٔ من، خصوصیتی ذاتی است و در هر حال این ویژگی چنان زود به دست می‌آید و در فرد تثبیت می‌شود که زمانی که شخص ایده‌های مرا در مورد نگارش و ایجاد ارتباط با دیگران می‌خواند به احتمال زیاد تأثیری بر او نخواهند داشت. فهم چیزی نیست که بتوان آموخت. بعضی از افراد از بدو تولد آن را دارند و برخی ندارند. همینطور نحوهٔ نگارش مؤثر را نمی‌توان آموزش داد؛ عده‌ای توانایی آن را دارند و عده‌ای ندارند و نمی‌توان نسخه‌ای برای خوب نوشتن به افراد تجویز کرد.

پس چرا ادامه دهیم؟ یک دلیل کوچک امیدی است به اینکه آنچه در بالا بیان کردم کاملاً درست نباشد. و به هر حال من علاقه دارم شانس خود را در انجام کاری که شاید نتوان آن را انجام داد آزمایش کنم. دلیل عملی‌تر برای ادامهٔ این بحث آن است که در هر هنری که به استعداد ذاتی نیاز دارد، حتی آنهایی که این استعداد ذاتی را دارند از ابتدا همهٔ دانش لازم را ندارند. نوشته‌هایی مانند این مقاله می‌تواند «یادآور» موارد مختلف برای افرادی باشند که می‌خواهند و توانایی آن را دارند که نویسندگان آینده و توسعه دهندگان روشهایی باشند که نویسندگان گذشته آنها را مفید تشخیص داده‌اند.

مسألهٔاساسی در نگارش ریاضی همان است که در نگارش زیست شناسی، نگارش یک داستان یانگارش هر چیز دیگر وجود دارد: انتقال اندیشه. برای این که این کار را به خوبی و به روشنی انجام دهید، باید چیزی برای گفتن داشته باشید، و همچنین باید کسی را داشته باشید که آن را برای او بیان کنید؛ باید مطلبی که قصد گفتن آن را دارید سازمان دهید و باید ترتیبی برای بیان مطالب خود در نظر بگیرید؛ باید مطلبتان را بنویسید و دوباره و چند باره بنویسید و باید تمایل داشته باشید که سخت به جزئیات مکانیکی مانند املای کلمات، نمادگذاری و نقطه‌گذاری فکر کنید. همهٔ

مجموعهٔ‌مطالبی که در این باره می‌توان گفت همین است.

## ۲ چیزی بیان کنید

ممکن است پافشاری بر این مطلب که برای آن که چیزی را خوب بیان کنید باید چیزی برای گفتن داشته باشید، طنزآمیز و غیرلازم به نظر بیاید؛ اما چنین نیست. بسیاری از بدنویسی‌ها، چه در ریاضیات و چه در زمینه‌های دیگر، ناشی از نادیده گرفتن این اولین اصل نگارش است. همانطور که یک دنباله به دو صورت ممکن است حد نداشته باشد، یا هیچ نقطهٔ حدی نداشته باشد یا اینکه بیش از یک نقطهٔ حدی داشته باشد، در دو حالت ممکن است یک نوشته بدون موضوع باشد: یا هیچ اندیشه‌ای در پس آن نباشد یا آنکه اندیشه‌های بسیاری در آن بیان شده باشند.

بیماری نخست کمتر گریبان‌گیر افراد می‌شود زیرا قلم‌فرسایی دربارهٔ هیچ، به ویژه در ریاضیات، کار دشواری است و نتیجه آن است که خواندن چنین نوشته‌ای هم دشوار خواهد بود. مثالی کلاسیک از این کتابهای بیمار، کتابی نوشتهٔ کارل تیودور هایزل [۵] است. این کتاب پر است از کلماتی با املای صحیح که به طرز صحیح در کنار هم چیده شده‌اند، اما در سی سال گذشته که گاه نظری به این کتاب انداخته‌ام، هنوز نتوانسته‌ام دو صفحهٔ پیاپی از این کتاب را بخوانم و سپس در یک بند چکیده‌ای از مطالب این دو صفحه را بیان کنم. فکر می‌کنم دلیل این مطلب آن است که صفحات این کتاب هیچ چیزی را بیان نمی‌کنند.

بیماری دوم (بیان تعداد زیادی از ایده‌ها) بسیار رایج است. کتابهای بی‌شماری وجود دارند که اصل «داشتن اندیشه‌ای برای بیان» را با بیان تعداد بیش از اندازه‌ای از اندیشه‌ها زیر پا می‌گذارند. آموزگاران ریاضیات مقدماتی در ایالات متحده غالباً از بدی کتاب‌های ریاضیات عمومی شکایت دارند، و از این بابت باید به آنها حق داد. کتاب‌های ریاضیات عمومی خوب نیستند زیرا چیزی به نام ریاضیات عمومی وجود ندارد؛ ریاضیات عمومی یک مطلب نیست، چون تعداد زیادی مطلب است. آنچه امروزه ریاضی عمومی می‌نامیم معجونی است از مقدار کمی منطق ریاضی و نظریهٔ مجموعه‌ها، مقداری نظریهٔ اصولی هیأت‌های مرتب تمام، هندسهٔ تحلیلی و توپولوژی، هم به صورت توپولوژی عمومی (حدود و پیوستگی توابع) و هم به صورت توپولوژی جبری (جهت گذاری در فضاها)، نظریهٔ توابع با متغیر حقیقی و مشتق گیری، عملیات نمادین ترکیبیاتی موسوم به انتگرال گیری صوری، نظریهٔ اندازهٔ مقدماتی در ابعاد پایین، مقداری هندسهٔ دیفرانسیل، اولین قدم‌ها در آنالیز حقیقی توابع مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی، و سپس بسته به سلیقهٔ نویسنده و حجم کتاب، مقداری دستورالعمل در مورد حل معادلات دیفرانسیل، مکانیک مقدماتی، و گزیده‌ای از مطالب ریاضیات کاربردی. نوشتن یک کتاب خوب در مورد هر یک از این زمینه‌ها کاری است مشکل، و نوشتن کتابی خوب که شامل همهٔ آنها باشد، غیرممکن است.

اثر بسیار کوچک و ارزشمند نلسون [۷] در اثبات این مطلب که هر تابع هارمونیک کراندار یک تابع ثابت است، و رسالهٔ عظیم دانفورد و شوارتس در آنالیز تابعی [۳] مثال‌هایی از تألیفات ریاضی هستند که چیزی برای بیان دارند. اثر نلسون کمتر از نیمی از یک صفحه را اشغال می‌کند و اثر دانفورد و شوارتس چهار هزار برابر طولانی‌تر است، اما در هر دو مورد مشخص است که مؤلفین از آنچه که می‌خواهند بیان کنند ایدهٔ بسیار روشنی داشته‌اند. در هر دو مورد موضوعی وجود دارد و به روشنی توضیح داده شده است. مفاهیم در ارتباط نزدیک با یکدیگر هستند و چیزی برای گفتن وجود دارد.

داشتن مطلبی برای بیان، مهمترین عنصر در یک نگارش خوب است و اهمیت این مطلب تا آنجا است که اگر مطلبی که بیان می‌شود به اندازهٔ کافی مهم باشد، اثر نگارش یافته شانس این را دارد که در زمرهٔ آثار جاودانه درآید حتی اگر سازمان بندی کاملاً محکمی نداشته باشد و نگارش مطالب روان نباشد. اثبات بیرکهوف برای قضیهٔ ارگودیک [۱] دارای بالاترین درجه گیج کنندگی است و «نامهٔ آخر» اثر وانزتی [۹] خیلی پیچیده و دارای کمبود است، اما هر کس که این دو نوشته را خوانده باشد بدون شک از اینکه آنها نوشته شده‌اند خوشحال است. با این حال رعایت تنها این اصل اول به ندرت ممکن است و هرگز نیز نتیجهٔ رضایتبخشی به دست نمی‌دهد.

## ۳ مخاطبی برای بیان مطالبتان داشته باشید

اصل دوم نگارش خوب آن است که نویسنده مخاطب را در نظر داشته باشد. پس از آنکه مصمم شدید چیزی بنویسید، از خود بپرسید که با چه کسانی می‌خواهید ارتباط برقرار کنید. آیا نوشتهٔ شما یک یادداشت روزانه است که توسط خودتان خوانده خواهد شد، نامه‌ای به یک دوست است، گزارش یک تحقیق است که متخصصین خواهند خواند، یا یک کتاب درسی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس است؟ مسائلی که نویسنده با آنها درگیر است در همهٔ این حالات کم و بیش مشابهند، تفاوت‌ها در میزان انگیزه‌ای است که نوشته باید در خواننده ایجاد کند، و این که نوشته تا چه میزان باید جدیت داشته باشد و تا چه میزان باید در جزئیات وارد شود، و هر مطلب چند بار باید تکرار شود. هر نوشته‌ای تأثیرپذیر از مخاطب آن است و با مشخص بودن مخاطب، مسأله‌ای که نویسنده با آن مواجه است برقراری ارتباط به بهترین صورت ممکن با اوست.

ناشرین ۲۵ سال را یک عمر قابل انتظار برای کتابهای ریاضی می‌دانند و عمر متوسط مقالات ریاضی به طور تقریبی پنج سال است. (البته مقالاتی وجود دارند که پس از گذشت ۵۰ سال هنوز زنده و قابل استفاده‌اند، و کتابهایی وجود دارند که کمتر از پنج سال دوام آورده اند). بدون شک هر نوشتهٔ ریاضی دارای عمر محدودی است و روزی فراموش خواهد شد. با این وجود اگر می‌خواهید در حال حاضر با مخاطبین خود ارتباط برقرار کنید، باید با این فرض که نوشتهٔ شما ممکن است تا سالیان بعد خوانده شود، بنویسید. علاقهٔ من آن است که مخاطبانم را نه تنها به صورتی مبهم و در مقیاس بزرگ (به عنوان مثال توپولوژیستهای حرفه‌ای یا دانشجویان سال دوّم فوق لیسانس)، بلکه

همچنین به صورتی بسیار مشخص تعیین کنم. این مطلب به من کمک می‌کند که خواننده را در ذهنم داشته باشم و در هنگام نوشتن همواره تصور کنم که در حال صحبت با او هستم، این شخص ممکن است کسی که دربارهٔ موضوع نوشته دو سال پیش با او بحث کرده‌ام، یا یکی از همکارانم که با ایده‌های من موافق نیست و در صدد قانع کردن او هستم، باشد. به عنوان مثال، در این مقاله هدف من انتقال ایده‌هایم به دانشجویان ریاضی که قصد دارند کار نوشتن رساله را شروع کنند، بوده است. در همین ضمن یک همکار ریاضیدان که ممکن است روشهای متفاوتی داشته باشد و نظرات مرا نپذیرد، را در نظر داشته‌ام. البته امیدوارم او نظرات مرا بپذیرد و به کار گیرد و در عین حال اگر زمانی متوجّه شود که من در نوشتن این مطالب او را در نظر داشته‌ام، رنجیده خاطر نشود.

مخاطب قراردادن دستهٔ کاملاً معیّن و کوچکی از افراد دارای مزایا و معایبی است. یک مزیت مهم آن است که خصوصیات فکری مخاطبان برای نویسنده مشخص و روشن است و این مطلب نوشتن را ساده‌تر می‌کند. یک اشکال آن است که با در نظر گرفتن دستهٔ کوچک و مشخص از مخاطبان، نویسنده وسوسه خواهد شد که اصطلاحات و عبارات و احیاناً جملات طنزآمیز نه چندان مناسب را به کار برد.

منظور من از این اشکال کاملاً واضح است و با دقت در نگارش می‌توان از آن جلوگیری کرد. اما امتیاز داشتن مخاطبان معیّن و کاملاً مشخص شایستهٔ تأکید بیشتری است. به عهدهٔ نویسنده است که مشکلات خواننده را از قبل پیش‌بینی کند و از بروز آنها جلوگیری کند. در حین نگارش، باید همواره در تلاش یافتن کلماتی در نوشته‌اش باشد که ممکن است خواننده را گمراه کند یا او را از گمراهی و اشتباه خارج کنند. در صفحات بعد مثال‌هایی از این موارد را ارائه خواهم داد، اما در این قسمت تأکید می‌کنم که در نظر داشتن دستهٔ مشخصی از خوانندگان در هنگام نگارش نه تنها به مورد فوق کمک می کند، بلکه ضروری است.

شاید بیان این واقعیت ضروری نباشد، اما بازگو کردن آن زیانی نخواهد داشت. افرادی که نوشته‌ای را می‌خوانند ممکن است دارای ویژگی‌های کاملاً متفاوت با خوانندگانی که نویسنده هنگام نگارش، آنها را در نظر داشته است، باشند و هیچگونه تضمینی وجود ندارد که اهداف نویسنده همواره کامل و بدون نقص باشند. با این وجود به نظر من داشتن یک هدف خاص و مشخص و تیر را به جایی دیگر زدن بهتر از آن است که هیچ هدف مشخص و معینی در نظر نباشد زیرا در حالت اخیر هیچگونه شانسی برای رسیدن به هدف وجود ندارد، زیرا هدفی وجود ندارد. آماده باشید، هدفی را نشانه بگیرید و به سوی آن شلیک کنید و امیدوار باشید که تیر شما به یک هدف اصابت کند و این هدف ممکن است آنکه در ابتدا در نظر داشته‌اید نباشد، اما به هر حال بهتر از آن است که هدفی نداشته باشید.

## ۴ ابتدا سازمان‌بندی کنید

نقش و تأثیر عمدهٔ یک نویسنده آن است که مطالب را چنان سازمان‌بندی و مرتب کند که مقاومت را در خواننده به حداقل رسانده و بینش و درک خواننده را حداکثر کند؛ او را همواره در مسیر اصلی جریان مورد بحث نگاهدارد و از ذکر مطالب غیر ضروری که خواننده را از مسیر اصلی منحرف می‌سازند، خودداری کند. می‌توان پرسید که نهایتاً مزایای یک کتاب بر دسته‌ای از مقالات که برای چاپ آماده شده‌اند چیست. پاسخ عبارت است از: نظم و ترتیب مؤثر و لذت بخش برای خواننده، تأکید کردن در نقاطی که تأکید لازم است، مشخص کردن ارتباط‌ها بین مفاهیم گوناگون، و توضیح مثال‌ها و مثال‌های نقضی که نظریهٔمورد بحث را روشنتر می‌کند. در یک جمله می‌توان گفت که مزیّت یک کتاب در سازمان‌بندی آن است.

کاشف یک نظریه، که به احتمال قوی توصیف کنندهٔآن نیز هست، در جریان کشف مرتباً در نقاط مختلف و به صورت تصادفی با موانع بسیار برخورد کرده است و آنچه در ابتدا از نظریهٔ ابداع شده در نظر اوست نامرتّب‌تر وبی‌نظم‌تر از آن است که بیان آن تأثیری در خواننده داشته باشد. اگر هیچگونه راهی برای نظم و ترتیب دادن، مستحکم ساختن، و حذف موارد غیر ضروری از نظریهٔ ابداع شده وجود نداشت، هر شخصی که قصد مطالعهٔ آن نظریه را داشت می‌بایست خود از ابتدا همه چیز را شروع کند و راه را از ابتدا بپیماید. اگر چنین می‌بود، دیگر «ایستادن بر شانه‌های غول‌های دانش برای دیدن افق‌های دورتر» معنایی نداشت و فرصتی باقی نمی‌ماند که نسل جدید بر دانش نسل قبل چیزی بیفزاید.

پس از آن که برایتان مشخص شد چه چیزی را می‌خواهید بیان کنید و برای چه کسی می‌خواهید بیان کنید، مرحلهٔ بعد به دست آوردن یک طرح کلی برای مقاله است. تجربهٔ من آن است که این کار در اغلب موارد امکان پذیر نیست. یک طرح کلی ایده‌آل آن است که در آن به هر بحث مقدماتی کلی بدون هر لم و قضیه و نتیجه و هر اثبات که در نوشته خواهد آمد، اشاره شود و این موارد به ترتیبی ذکر شوند که هم توالی منطقی آنها صحیح باشد و هم از دید روانشناسانه برای خواننده قابل هضم باشند. در یک سازمان‌بندی ایده‌آل برای هر چیز جایی وجود دارد و هر چیز در جای خودش قرار دارد. بدین ترتیب توجه خواننده همواره به مطلب نوشته شده خواهد بود زیرا در ابتدا به او گفته شده است چه انتظاری از نوشته داشته باشد. در عین حال در جریان مطالعهٔ نوشته، خواننده ممکن است با موارد اعجاب‌انگیزی که برای او لذت بخش هستند روبرو شود؛ مواردی که از تعاریف اولّیه قابل پیش بینی نیستند. در یک سازمان‌بندی ایده‌آل بخشهای مختلف در تناسب کامل با یکدیگر هستند و ارتباط عمیق با یکدیگر دارند؛ لم‌ها دقیقاً در نقاطی قرار دارند که به وجود آنها نیاز است و ارتباط بین قضایا کاملاً روشن و مشخص است. یک طرح مناسب قضایا و ارتباط آنها را با موضوع نشان می‌دهد.

در اینجا من تفاوتی کوچک و شاید غیر لازم بین سازمان‌دهی و ترتیب موضوعات قائل می‌شوم. سازمان دهی یک موضوع به معنای تصمیم‌گیری است در مورد اینکه بخش‌های اصلی و فرعی کدام‌ها هستند و چه مطالبی تحت کدام یک خواهد آمد، و کدام‌ها ارتباط دهنده هستند. نمودار سازمان‌دهی یک نوشته یک درخت (گراف جهت‌دار بدون دور) است. در اکثر موارد راههای متعدد برای سازمان‌دهی نوشته وجود دارد و غالباً به طرق گوناگون می‌توان نتیجهٔ حاصل از یک سازمان دهی را به صورت یک ترتیب خطی نظم داد. سازمان‌دهی مهم‌تر از ترتیب موضوعی است، اما ترتیب موضوعی اغلب تأثیر روانشناسانه دارد.

یک بار زمانی که درسی را از کتابی تدریس می‌کردم، مشکلی برایم به وجود آمد که باعث شد نویسندهٔ کتاب را بسیار تحسین کنم. در ابتدای کتاب یک بخش وجود داشت که مورد علاقهٔ من نبود و بدون بیان آن در کلاس از آن گذشتم. سه بخش بعد به قسمتی در انتهای آن بخش حذف شده نیاز پیدا کردم، امّا با ارائهٔ یک اثبات متفاوت مشکل برطرف شد. همین مورد چند بار در بخش‌های بعدی تکرار شد، امّا هر بار با کمی خلاقیت و بیان مفاهیم موردی و شیوه‌های خارج از کتاب توانستم «سوراخ ایجاد شده در کشتی را تعمیر کنم». امّا موردی که در فصل بعد پیش آمد نیاز به قسمتی از آن بخش حذف شده نبود، بلکه این واقعیت بود که نتایج آن بخش قابل به کارگیری در دو موقعیت به ظاهر کاملاً متفاوت بودند. در اینجا «وصله‌کردن» دیگر امکان‌پذیر نبود و نظم و ترتیب در ارائهٔ آن درس پس از این مورد کاملاً به هم ریخت. علت این مسأله سازمان‌دهی بسیار مستحکم کتاب بود؛ هر چیز دقیقاً در جایی قرار داشت که به وجود آن نیاز بود و مطالب طوری هماهنگ با هم ارائه شده بودند که خواندن و درک آنها برای خواننده ساده باشد. در عین حال ریسمان‌هایی که مطالب و بخش‌ها را به هم پیوند داده بودند در معرض دید قرار نداشتند و تنها هنگامی که شخص در صدد بر هم زدن و تغییر ساختمان کتاب برمی‌آمد، قابل مشاهده می‌شدند.

حتی نویسندگانی که هیچگونه سازماندهی در کارشان ندارند طرحی کلی، هر چند خام، برای کاری که در نظر دارند آماده می‌کنند، حتی اگر این طرح کلی نوشته نشود و تنها در فکر نویسنده باشد. موضوع نوشته خود به تنهایی یک طرح کلی شامل فقط یک عنوان است. اگر شما بدانید که تصمیم به نوشتن دربارهٔ نظریهٔ اندازه را دارید، در این صورت «نظریه اندازه» یک طرح کلی دو کلمه‌ای برای شماست، و این چیزی است که بر مبنای آن می‌توان کاری انجام داد. داشتن فصل های نامعین و آزمایشی کار خوبی است. به عنوان مثال ممکن است با خود بگویید که از مجموعه‌ها، سپس اندازه‌ها، سپس توابع و پس از آن از انتگرال‌ها صحبت خواهید کرد. در این مرحله ممکن است تصمیماتی بگیرید وممکن است بعد ها تصمیمتان را عوض کنید. به عنوان مثال ممکن است تصمیم بگیرید از احتمال سخن به میان نیاورید امّا مفهوم اندازهٔ هار را در بحث خود بگنجانید.

چنین احساس می‌شود که تهیهٔ یک طرح کلی ممکن است سال‌ها یا حداقل هفته‌ها به طول بینجامد. برای من معمولاً فاصلهٔ زمانی زیادی وجود دارد بین لحظهٔ خوشایندی که به فکر نگارش یک کتاب می‌افتم، و لحظهٔ دردآوری که می‌نشینم و نوشتن آن را شروع می‌کنم. در فاصلهٔ زمانی

بین این دو لحظه، ضمن آنکه وظایف روزانه‌ام را انجام می‌دهم همواره در رویای پروژهٔ جدیدی که قصد انجام آن را دارم هستم، هر موقع که ایده‌ای در این مورد به ذهنم می‌رسد آن را روی تکه‌ای کاغذ یادداشت می‌کنم و این تکه‌های کاغذ را در یک پوشه بدون آنکه نظمی به آنها بدهم قرار می‌دهم. «ایده‌ای» که یادداشت می‌کنم ممکن است شاخه‌ای از ریاضیات باشد که احساس کرده‌ام باید اضافه شود، ممکن است یک نمادگذاری باشد، ممکن است یک برهان باشد، ممکن است که عبارت مناسب توصیفی باشد، یا ممکن است یک عبارت کوتاه پر معنی باشد به این امید که بیهوده نباشد و برا نگیزندهٔ مطلبی که در نظر دارم بیان کنم باشد یا آن را تأکید کند یا مثالی برای آن باشد. زمانی که سرانجام لحظهٔ دردآور شروع نوشتن فرا می‌رسد حداقل این پوشه را دارم و پس و پیش کردن تکه‌های کاغذی که یادداشت هایم را روی آنها نوشته‌ام و تنظیم آنها می‌تواند کمک بزرگی به تهیهٔ طرح کلی نوشته باشد.

در سازمان‌دهی یک نوشته این سؤال که چه مطالبی ذکر شوند و این سؤال که چه مطالبی باید حذف شوند به یک اندازه اهمیت دارند. وجود جزئیات بیش از حدّ لازم همان اندازه مأیوس‌کننده و زیان‌آور است که مطلب به طور کلی و بدون هیچگونه جزئیاتی بیان شود. آوردن جزئیات بسیار و بیش از حد، آنطور که در رسم قدیمی دروس آنالیز فرانسوی و مکتب بورباکی متداول است، برای نویسنده‌ای که همهٔ آن جزئیات را می‌فهمد رضایت‌بخش است و برای دانشجوی ضعیف و درمانده‌ای که هیچیک از آن جزئیات را درک نمی‌کند نیز وجود و عدم وجود آن جزئیات تفاوتی نمی‌کند. اما برای بسیاری از خوانندگانی که قصد مطالعهٔ جدی ریاضی را دارند وجود جزئیات بیش از حد نه تنها بلا استفاده است، بلکه زیان بار نیز هست. قلب ریاضیات را مثال‌ها و مسائل شهودی تشکیل می‌دهند و نظریه‌های عظیم و کلی غالباً نتایج تفکر روی ایده‌ها و بینش‌های کوچک اما عمیق بوده‌اند. این ایده‌ها خود ناشی از مثال‌های خاص شهودی هستند. بهترین روش سازماندهی نوشته آن است که مطالب را در اطراف مثال‌ها و مثال‌های نقض مهم و اساسی سازمان دهید. بررسی این نکته که آیا یک قضیه می‌تواند مطلبی بیش از آنچه در ابتدا مورد نظر بوده است بیان کند را در اغلب موارد می‌توان به عهدهٔ خواننده گذاشت. آنچه که خواننده به آن نیاز دارد راهنمایی یک شخص با تجربه است در این که یک قضیه چه چیزهایی را اثبات نمی‌کند، مثال‌های نقض مناسب کدام‌ها هستند، و از نقطهٔ فعلی به کدام سمت باید حرکت کرد.

## ۵ دربارهٔ الفبا فکر کنید

یک طرح کلی و نقشه‌ای برای سازمان دهی مقاله، ممکن است خوب نباشد امّا به هر حال بهترین چیزی است که تا آن لحظه قابل حصول بوده است، شما تقریباً آماده نوشتن هستید. تنها توصیهٔ دیگر من آن است که قبل از شروع نوشتن یکی دو ساعت را صرف تفکر در مورد الفبایی که به‌کار خواهید برد کنید. این کار از بسیاری از دردسرهای بعدی جلوگیری خواهد کرد.

حروفی که برای نمادگذاری مفاهیم مورد بحث استفاده خواهید کرد ارزش آن را دارند که با دقّت و با فکر طراحی و انتخاب شوند. یک نمادگذاری خوب و هماهنگ می‌تواند کمک بسیار بزرگی به نویسنده باشد و من نویسندگان مقالات و به ویژه نویسندگان کتاب‌ها را ترغیب می‌کنم که طراحی نمادگذاری را در ابتدای کارشان انجام دهند. کاری که خود انجام می‌دهم آن است که جداول بزرگ با تعداد زیادی حروف به شکل‌های مختلف و با اندازه‌های بزرگ و کوچک تهیه می‌کنم و سعی می‌کنم همهٔ فضاها، گروه‌ها، بردارها، نگاشت‌ها، نقاط، رویه‌ها، اندازه‌ها، و همهٔ موجودات دیگری را که دیر یا زود معرفی خواهند شد از قبل پیش‌بینی کنم و نمادی به هر یک اختصاص دهم. نمادگذاری بد یک توصیف خوب را به یک نوشتهٔ بد تبدیل می‌کند و یک توصیف بد را به یک نوشتهٔ بدتر.

تصمیمات غیر اصولی در مورد نمادگذاری در حین نگارش تقریباً همیشه یک نمادگذاری بد را نتیجه خواهند داد. نمادگذاری خوب دارای هماهنگی الفبایی و بدون عناصر ناموزون است. به عنوان مثال $ax+by$ یا $a_1x_1+a_2x_2$ بهتر از $ax_1+bx_2$ است. به عنوان مثالی دیگر اگر نماد $\sum$ را به عنوان یک مجموعهٔ اندیس تعریف کرده‌اید، باید مطمئن باشید که عبارتی مانند $\sum a_k$ در نوشتهٔ شما نباشد. در همین مورد ممکن است بسیاری از خوانندگان توجه نکنند شما در بالای یک صفحه از $\in> | z |$ صحبت کرده و در پایین همان صفحه از $\in$ در $z \in U$ ($z$ عضو $U$) استفاده کرده‌اید، اما این نا هماهنگی احساس ناخوشایندی در خواننده ایجاد می‌کنند. در این مورد خاص درمان بسیار ساده است و هر روز نیز متداولتر می‌شود: از علامت $\in$ برای تعلّق مجموعه‌ای و از $\varepsilon$ به‌عنوان حرف استفاده کنید.

تعداد حروف الفبا که در دسترس ریاضیات است به واقع بی‌نهایت است (بعنوان مثال $x', x'', x''', \cdots$)، اما در عمل تنها بخش متناهی کوچکی از آن قابل استفاده است. یک دلیل این مطلب آن است که توانایی انسان در متمایز ساختن علائم بسیار محدودتر از توانایی او در خلق علائم جدید است؛ علت دیگر عادت ناخوشایند تثبیت کردن حروف است. فکر می‌کنم هنگامی که برخی از متخصصان آنالیز پای بند به رسوم قدیمی از «فضای xyz» صحبت می‌کنند منظورشان فضای سه بعدی اقلیدسی است همراه با این قرار داد که هر نقطه در فضای فوق همواره با $(x, y, z)$ نمایش داده خواهد شد. این ناخوشایند است زیرا حروف x و y و z را تثبیت می‌کند بدین معنا که دیگر نمی‌توان از این حروف برای بیان مفهومی دیگر استفاده کرد، و همچنین اگر x و y و z برای منظورهای دیگر به‌کار رفته باشند، نمایش مختصات نقطه با حروف دیگر مثلاً $(a, b, c)$ ناممکن است.

صورت‌های جدید این رسم قدیمی نیز وجود دارند و همان اشکالات را در بردارند. به عنوان نمونه از ماتریس‌هایی «با خاصیت L» صحبت می‌شود و این ضمن آنکه حرف L را تثبیت می‌کند و استفاده از آن را در موردی دیگر ناممکن می‌سازد، گویا و مشخص کننده نیست. حروف سرهم شده و غیر مفید دیگری نیز به کار می‌روند مانند «کمپلکس‌های CW» و «گروههای CCR». مورد دیگری که شاید بتوان از آن بعنوان آخرین حد استفاده از حروف بصورتی غیر قابل استفاده نام برد اثر لفشتز است [٦]، که در آن $X_i^p$ یک زنجیر $p$ بعدی (با زیرنویس یک اندیس) و $X_p^i$ یک

دوگان ــ زنجیر $p$ بعدی (با بالانویس یک اندیس) است. سؤالی که پیش می‌آید آن است که بعنوان مثال $X^{۲}_{۳}$ چیست؟ به مرور زمان در نوشته‌های ریاضی تعداد بیشتری از علائم تثبیت می‌شوند. نمونه‌های استاندارد البته اعداد ۰, ۱, ۲, $\cdots$ هستند (چه کسی جرأت نوشتن « فرض کنید ٦ یک گروه است » را دارد؟!). تعدادی از حروف تقریباً تثبیت شده هستند. برای بسیاری از خوانندگان خوشایند نیست اگر "$n$" به عنوان یک عدد مختلط، "$\in$" به عنوان یک عدد صحیح، یا "$z$" به عنوان یک فضای توپولوژیک به‌کار برده شود (صحبت از «دنبالهٔ $n_e$ وقتی که $e$ به بینهایت میل می‌کند، به صفر همگراست» کابوسی برای یک ریاضیدان است).

توصیه‌ای که در این باره می‌توان کرد آن است که شما به تثبیت بیشتر حروف نیفزایید. دربارهٔ مجموعهٔ حروفی که بکار خواهید برد فکر کنید. این کار مشکل و پر زحمتی است امّا ارزشش را دارد و ممانعت از بروز بسیاری از مشکلات در آینده باعث صرفه‌جویی در وقت شما خواهد شد. ابتدا در این باره ساعتی فکر کنید وسپس شروع به نوشتن کنید.

## ٦ به روش مارپیچی بنویسید

بهترین طریق، و شاید تنها راه نگارش شیوهٔ مارپیچی است. براساس این روش فصلهای کتاب به ترتیب ۱ و ۲ و ۱ و ۲ و ۳ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و $\cdots$ نوشته می‌شوند. در ابتدا فکر می‌کنید می‌دانید فصل اول را چگونه باید نوشت؛ امّا پس از انجام آن و کار روی فصل دوم، در می‌یابید که اگر فصل اول را به گونه‌ای دیگر می‌نوشتید فصل دوم بهتر از کار در می‌آمد. چاره‌ای جز بازگشت به عقب و دوباره نویسی فصل اول نیست تا بتوانید فصل دوم را بهتر بنویسید. سپس نوشتن فصل سوم را شروع کنید. می‌دانید که چه اتفاق خواهد افتاد! فصل سوم نقاط ضعف فصلهای اول و دوم را آشکار خواهد کرد و چاره‌ای جز بازگشت به عقب و دوباره‌نویسی فصل‌های اول و دوم نیست؛ و به همین ترتیب برای فصل‌های بعد. این ایده اغلب اجتناب ناپذیراست و در اینجا بیان می‌شود تا افرادی که در آینده قصد نویسندگی دارند بدانند که با چه مسائلی دست به گریبان خواهند بود، و بدانند که این پدیده نه تنها برای فصل‌ها، بلکه برای بخش‌ها، پاراگراف‌ها، جملات و حتی کلمات اتفاق خواهد افتاد.

نخستین گام در فرآیند نوشتن، دوباره نوشتن، و چند بار نوشتن عبارت است از «نوشتن». پس از مشخص شدن موضوع، مخاطبان و طرح کلی (و الفبا را فراموش نکنید) شروع به نوشتن کنید و اجازه ندهید هیچ چیز شما را متوقف کند. هیچ محرکی برای نوشتن یک کتاب خوب بهتر از یک محرک برای نوشتن یک کتاب بد نیست. زمانی که شما نمونهٔ اولیهٔ بصورت مارپیچی نوشته شده را مبتنی بر یک موضوع، و هدف‌گیری شده روی مخاطبانی خاص، و سازمان‌دهی شده توسط یک طرح کلی که تا حد امکان شامل جزئیات باشد، را داشته باشید نیمی از کار نوشتن کتاب شما پایان یافته است.

روش مارپیچی در بر دارنده بخش عمده، ولی نه همهٔ بازنویسی یک کتاب است. توصیهٔ من آن است که در اوّلین نگارش هر فصل هر چه در دلتان است بنویسید، سریع بنویسید همهٔ قوانین را زیر پا بگذارید، مهم نیست که نوشتهٔ شما همراه با تنفر، غرور یا جملات نامناسب باشد، یا اینکه ابهام‌آمیز باشد؛ حتی اگر لازم است طنزآمیز بنویسید. فقط به نوشتن ادامه دهید. با این حال وقتی که تصمیم به دوباره‌نویسی می‌کنید، نوشتهٔ خود را ویرایش نکنید بلکه واقعاً آن را دوباره بنویسید. این وسوسه وجود دارد که با یک قلم قرمز موارد اضافه و حذف و جابجایی را مشخص کنید، اما بنابر تجارب من این کار به اشتباهات ویران کننده خواهد انجامید. علیرغم بی‌حوصلگی و عدم تحمل زیاد، و تعصبی که هر شخص نسبت به کاری که انجام داده است دارد، باید گفت که قلم قرمز در این مورد سلاحی بیش از حد ناتوان است. شما در مقابل خود نوشته‌ای دارید که برای هر شخص غیر از خود شما ذره‌ای قابل تحمل نیست، بنابراین باید بی رحمانه با نوشتهٔ خود رفتار کنید و هر تغییر لازم، هر چند وسیع و کلی را در آن اعمال کنید. این تغییر می‌تواند حذف یک بخش عمده از آنچه نوشته‌اید باشد. منظور از بازنویسی آن است که هر کلمه را دوباره بنویسید.

منظور من آن نیست که به عنوان مثال در یک کتاب با ده فصل، فصل اول باید ده مرتبه نوشته شود، امّا به عقیدهٔ من سه یا چهار بار لازم است. محتمل است که فصل اول یک بار بلافاصله پس از نگارش فصل دوم، و حداقل یک بار دیگر مثلاً پس از نگارش فصل چهارم، به دوباره‌نویسی نیاز داشته باشد. اگر خوش شانس باشید تنها یک بار نوشتن فصل نهم لازم خواهد بود.

توصیف شیوهٔ نگارش خود من می‌تواند بیانگر میزان دوباره‌نویسی که در نظر دارم باشد. پس از آن‌که یک بار نوشتن کتابم را به روش مارپیچی به پایان می‌رسانم، تمام کتاب را دوباره می‌نویسم و اجزای کمک‌کننده به خواننده، مانند فهرست پیش نیازها، مقدمهٔ کتاب، فهرست کلمات کلیدی و فهرست موضوعی را اضافه می‌کنم. تهیهٔ اینها کاری مکانیکی است اما بهر حال اجتناب ناپذیر است. سپس دوباره کتاب را می‌نویسم، این بار با ماشین‌تحریر، و سعی می‌کنم حاصل کار به قدر کافی تمیز و زیبا باشد به طوری که یک ماشین‌نویس بدون اطلاعات تخصصی در ریاضیات بتواند این «نگارش سوم» کتاب را برای تهیهٔ متن نهایی چاپ کتاب بدون زحمت به کار برد. میزان عمل دوباره‌نویسی در این ویرایش سوم کتاب حداقل است و تغییراتی که انجام می‌شوند در حد یک کلمه یا حداکثر یک جمله هستند. این نگارش سوم اولین نگارش کتابم است که دیگران خواهند دید. از دوستانم تقاضا می‌کنم آن را بخوانند، همسرم آن را می‌خواند، دانشجویانم ممکن است قسمت‌هایی از آن را بخوانند، و بهتر از همه یک دانشجوی خوب و ورزیدهٔ سال سوم آن را به عنوان یک کار دانشجویی که دستمزد خوبی برای آن پرداخت می‌شود، می‌خواند و از او می‌خواهم که در انتقادش از کتاب، ملاحظه‌گر نباشد. اگر خوش‌شانس باشم، تغییرات لازم در این نگارش سوم را می‌توانم با قلم قرمز مشخص کنم، و اگر بد شانس باشم ممکن است لازم شود مثلاً یک سوم صفحات دوباره ماشین‌نویسی شوند. ویرایش یافتهٔ نگارش سوم صورت نهایی کتاب است که چاپ خواهد شد، البته پس از آن که چند بار آن را می‌خوانم اثبات‌ها را دوباره‌خوانی می‌کنم و اشتباهات آن را برطرف

می‌کنم. حدوداً دو سال پس از شروع به نگارش کتاب (دو سال «کاری» که ممکن است بسیار بیشتر از دو سال تقویمی باشد) شکل نهایی آن به ناشر فرستاده می‌شود. از اینجا به بعد مشکلات از انواع دیگر ظاهر خواهند شد که داستان دیگری است.

ارشمیدس به ما می‌آموزد که اگر یک کمیت کوچک به تعداد دفعات کافی به خودش اضافه شود یک کمیت بزرگ حاصل خواهد شد. اما هنگامی که موضوع بر سر انجام کاری بزرگ؛ به ویژه نوشتن یک کتاب است، به عقیدهٔ من عکس گفتهٔ ارشمیدس نیز درست است؛ تنها راه نوشتن یک کتاب بزرگ آن است که هر روز کار خود را «با پر کردن پمپ از آب برای روز بعد» متوقف کنید. از خود بپرسید که فردا چه مطلبی را شروع خواهید کرد، و محتوا و عنوان بخش بعد چه باید باشد. توصیهٔ من آن است که یک عنوان کوتاه برای هر بخش، قبل یا بعد از آن که نوشته شد، انتخاب کنید حتی اگر نخواهید آن را در نگارش نهایی چاپ کنید. هدف از این کار آزمودن میزان خوب نوشته شدن آن بخش است؛ اگر نمی‌توانید یک عنوان برای بخشی که نوشته‌اید یا خواهید نوشت پیدا کنید، علت ممکن است فقدان یک موضوع واحد باشد. گاهی من اولین جملهٔ نگارش فردا را امروز می‌نویسم، و نویسندگانی هستند که امروز را با تجدید نظر و دوباره‌نویسی آخرین صفحهٔ نوشته شدهٔ دیروز آغاز می‌کنند. در هر حال هر جلسهٔ کاری را «با یک ضرب قوی» خاتمه دهید و به ضمیر ناخودآگاه مطلبی بدهید که تا نشست بعدی از آن تغذیه کند. روش فوق برای غلبه بر اینرسی طبیعی انسان علیه انجام کار خلاق بسیار مؤثر است.

## ۷ همواره کار خود را سازمان دهید

چه طرح سازمان‌دهی اولیهٔ شما خوب و با جزئیات کافی باشد، و چه نباشد، عمل بسیار مهم سازمان‌دهی مطالب با شروع نوشتن پایان نمی‌یابد؛ بلکه در تمام مدت نوشتن کتاب و حتی بعد از آن ادامه می‌یابد.

این فعالیت باید به موازات نگارش به روش مارپیچی انجام گیرد؛ این مطلبی است که اغلب (و شاید همیشه) در مورد نگارش ریاضی صدق می‌کند. طریقهٔ عمل بدین ترتیب است: با آنچه به عنوان مفهوم پایه‌ای انتخاب کرده‌اید، به عنوان مثال فضای برداری، شروع کنید و دربارهٔ آن تا آن حد که می‌توانید بنویسید: از نظر شهودی برای آن ایجاد انگیزه کنید، آن را تعریف کنید، و مثالها و مثالهای نقضی در مورد آن ارائه کنید. این مطالب بخش اول را تشکیل خواهند داد. در بخش دوم اولین مفهوم مرتبط با مفهوم پایه‌ای، که مطالعهٔ آن را در نظر دارید، معرفی کنید، مانند وابستگی خطی، در این مورد تا آن حد که می‌توانید خوب بنویسید: از نظر شهودی برای آن ایجاد انگیزه کنید، تعریف آن را ارائه دهید و مثال‌ها و مثال‌های نقضی در مورد آن بیان کنید. پس از اتمام نگارش بخش دوم، و نکتهٔ مهم اینجا است، بخش اول را تا آن حد که می‌توانید از دیدگاه بخش دوم بازبینی کنید. به عنوان مثال از مثال‌هایی که برای مجموعه‌های مستقل خطی و وابستهٔ خطی در بخش دوم ارائه داده‌اید کدام‌ها از مثال‌هایی که در بخش اول در مورد فضاهای برداری ارائه داده‌اید

قابل استخراج هستند؟ (در اینجا دلیل روشن دیگری بر لزوم نگارش به روش مارپیچی را ملاحظه می‌کنید: مثال‌های مجموعه‌های مستقل و وابستهٔ خطی که در بخش دوم ارائه داده‌اید ممکن است از فضاهای برداری مهمی باشند و شما فراموش کرده باشید آن فضاهای برداری را در بخش اول به عنوان مثال بیان کنید). در بخش سوم مفهوم دیگری را معرفی کنید (همین قسمت، یعنی انتخاب این مفهوم دیگر، نیازمند برنامه‌ریزی دقیق است و بسیاری از اوقات به یک تجدید نظر اساسی در طرح کلی نوشته می‌انجامد، و این خود تأیید دیگری است بر لزوم نگارش به شیوهٔ مارپیچی) و به همان روش بخشهای قبلی آن را توصیف کنید. سپس بخشهای اول و دوم را از دیدگاه بخش سوم بازبینی کنید. این شیوه عملی است و معجزه‌آمیز عمل می‌کند. انجام این روش ساده و لذّتبخش است. نتیجهٔ کار نوشته‌ای است که به راحتی می‌توان آن را خواند و چهارچوب مستحکم نوشته به خواننده کمک بسیار خواهد کرد، حتی اگر او به این چهارچوب و اتصال‌های آن توجه نکند و زحمت دریافت این که چگونه بخش‌های مختلف نوشته یکدیگر را پشتیبانی می‌کنند، را به خود ندهد.

حوادث کوچک و بزرگ خلق شده توسط رمان‌نویس، و سرنخ‌هایی که نویسندهٔ داستان‌های کارآگاهی در داستانهای خود به خواننده می‌دهد، همگی دارای نظایری در نوشته‌های ریاضی هستند. به عنوان مثالی برای روشن کردن این مطلب، بخش عمده‌ای از نظریهٔ فضاهای متریک به عنوان قسمتی از یک کتاب در زمینهٔ توپولوژی عمومی در قالب عبارات توصیفی غیر خودنمایانه، نکات حاشیه‌ای، و مثال‌های روشن سازنده قابل بیان است. چنین سازمان‌دهی در خواننده بینش و انگیزش اساسی‌تری ایجاد می‌کند تا یک کلی‌گویی انعطاف‌ناپذیر که کوشش قابل توجهی برای آن انجام نگرفته باشد. نمونه‌ای از «سرنخ‌دهی» در نوشتهٔ ریاضی تکرار یک کلمه چند بار قبل از تعریف رسمی و کامل آن است به طوری که در هر بار تکرار جزئیات بیشتری راجع به آن کلمه بیان شود. بدین‌ترتیب به طریقی ضمنی و در عین حال بسیار مؤثر و سطح بالا، خواننده به‌تدریج برای دریافت تعریف رسمی آماده می‌شود. این روش برای خواننده بسیار سودمند است و کار رسمی نویسنده را نیز ساده‌تر می‌کند، البته در مقابل تفکر و تلاش بیشتری را در نگارش‌های غیررسمی اولیه می‌طلبد که البته ارزشش را دارد. اگر حاصل هشت ساعت کار شما پنج دقیقه صرفه‌جویی در وقت خواننده باشد، در واقع باعث صرفه‌جویی ۸۰ ساعت برای هر ۱۰۰۰ خواننده که نوشتهٔ شما را بخوانند شده‌اید؛ و در راهروهای دانشکده‌های ریاضی دانشگاه‌ها از شما به نیکی یاد خواهند کرد. اما به یاد داشته باشید که برای استفادهٔ مؤثر از موارد ذکر شده در بالا، سازمان‌دهی به روش مارپیچی اجتناب‌ناپذیر است.

آخرین نکته، که از نظر سازماندهی بسیار مهم است و شایسته است در اینجا یادآوری شود، نظم و ترتیب صحیح و منطقی مفاهیم ریاضی در نوشته است. در این مورد یک ریاضیدان نمی‌تواند به دیگری چیز زیادی بیاموزد؛ در اینجا تنها این هشدار را می‌توانم بدهم که با افزایش حجم کار مورد نظر، پیچیدگی آن به نسبتی وحشت‌آور افزایش می‌یابد. در مرحله‌ای از نگارش یک کتاب ۳۰۰ صفحه‌ای، من تعداد ۱۰۰۰ برگ کاغذ گرد آورده بودم که روی هر یک از آنها یک عبارت ریاضی، یک قضیه، یک لم، و یا حتی یک عبارت توصیفی کوچک، یا اثبات یک مطلب نوشته شده بود. برگه‌ها به طریقی نامنظم شماره‌گذاری شده بودند و کاری که می‌بایست انجام دهم آن بود که

روی هر برگ شماره‌های برگه‌هایی که منطقاً می‌بایست قبل از آن برگ قرار گیرند بنویسم و سپس برگه‌ها را در یک ترتیب خطی چنان مرتب کنم که ترتیب منطقی در هیچ نقطه‌ای بهم نریزد. واضح است که چنین مسأله‌ای دارای تعداد شمارش‌ناپذیر راه حل است و مسأله‌ای که نویسنده با آن مواجه است انتخاب یک راه حل است که برای خواننده تا حد امکان مؤثر و لذّتبخش باشد.

## ۸ نگارش خوبی از نظر ادبی داشته باشید

آنچه تا اینجا بیان کرده‌ایم دربارهٔ جنبه‌های کلی و فراگیر نگارش بوده است. زمان آن رسیده است که دربارهٔ جنبه‌های نگارش صحبت کنیم. چه اشکال عمده‌ای پیش خواهد آمد اگر نویسندهٔ کلمهٔ "continuous" را اشتباهاً "continous" بنویسد؟ امکان ندارد این اشتباه باعث گمراهی خواننده شود، و این مزیّت را هم دارد که کلمهٔ نوشته شده یک حرف کوتاه‌تر است. پس چرا پیشگیری از چنین اشتباهاتی لازم است؟ پاسخی که احتمالاً همه، حتی آزاداندیش‌ترین زبانشناسان جدید، با آن موافقند، آن است که چنین اشتباهاتی عدم تمرکز فکری و در نتیجه اتلاف وقت را برای خواننده به همراه دارند، و «صرفه‌جویی‌های» فوق نمی‌توانند این زیان را جبران کنند. مثال تصادفی بالا شاید قانع‌کننده نباشد، امّا اکثر افراد حتماً موافقند که کتابی که در سراسر آن از این «اصطلاحات املایی» استفاده شده باشند، به عنوان نمونه "izi" به جای "easy" کتابی مؤثر برای تدریس ریاضیات نخواهد بود. صرف نظر از ارزشهای احتمالی این «اصطلاحات املایی»، کلماتی که براساس استانداردهای پذیرفته شده در لغت‌نامه‌ها، اشتباه نوشته شده باشند نکات منفی یک کتاب محسوب می‌شوند زیرا تأخیر و عدم تمرکز برای خواننده ایجاد می‌کنند و احتمالاً باعث سردرگمی و خشم او خواهند شد.

علت بیان مسأله املای صحیح کلمات این نیست که این مسأله خطری متداول یا جدی برای اکثر نویسندگان است، بلکه هدف تأکید روی نکته‌ای بسیار مهم‌تر است. علاقه دارم از این مطلب دفاع کنم که مهم است کتابهای ریاضی (و همچنین مقالات، نامه‌ها، و جزوه‌های کلاسی) دارای نگارش ادبی صحیح و خوب مطابق با استانداردهای متداول و پذیرفته‌شدهٔ عمومی، برای زبانی که نگارش به آن زبان صورت می‌گیرد، باشند. منظورم نگارش خودنمایانه یا سنگین، یا بیش از حد رسمی و دارای شاخ و برگ زیاد، و یا مملو از اصطلاحات تخصصی نیست. منظورم آن است که باید کاملاً عاری از موارد نامطلوب، و مانند موسیقی متن یک فیلم سینمایی باشد تا خواننده بتواند جلو رود بدون آنکه آگاهانه یا ناآگاهانه با موانعی که ناشی از نگارش ادبی نادرست، و نه از محتوای مطلب هستند، مواجه شود.

شیوهٔ خوب نگارش از نظر ادبی شامل رعایت قواعد دستوری، انتخاب صحیح کلمات، علامت گذاری صحیح، و شاید مهمتر از همه، نگارش با معنا است. کلمات "that" و "which" متفاوتند، و "less" و "fewer" معانی یکسانی ندارند. یک نویسنده خوب ریاضی با چنین نکاتی آشنایی دارد. ممکن است خواننده متوجه اشتباهاتی از این نوع نشود اما وجود چنین اشتباهاتی در صدها صفحه در

مجموع اثر مخرب قابل توجهی به کار می‌آورد که مطمئناً هیچ نویسنده‌ای تمایل به ایجاد آن ندارد. روی میز کار من در کنار اثر دانفورد و شوارتس [۳]، اثر فاولر دربارهٔ کاربرد صحیح زبان [۴] و لغت‌نامه‌های روجت [۸] و وبستر [۱۰] قرار دارند و روی میز کار هر نویسنده‌ای باید قرار داشته باشند. احتمال آن که فراموش کردن یک کاما یک اثبات صحیح را به یک اثبات نادرست تبدیل کند بسیار کم است، اما بروز این اشتباهات جزئی به صورت مداوم در مجموع اثر منفی قابل توجهی در بر خواهد داشت.

زبان، اگر خوب به کار رود، ابزار قوی و زیبایی برای انتقال دقیق، روشن و جالب توجه اطلاعات است و آشنایی با این ابزار برای یک نویسندهٔ توصیف گر همان قدر اهمیت دارد که شناخت ابزار جراحی برای یک جراح. می‌توان گفته‌های اقلیدس را با نگارش غیرصحیح توضیح داد، همان گونه که برداشتن آپاندیس یک بیمار با یک چاقوی جیبی زنگ زده امکان‌پذیر است، اما قربانی (در مورد اول خواننده و در مورد دوم بیمار) مسلماً انتظار داشته است با او بهتر رفتار شود.

همهٔ ریاضیدانان و حتی دانشجویان سال اول می‌دانند که ریاضیات زبانی خاص خود دارد، و نویسندهٔ مطالب ریاضی علاوه بر آشنایی عمیق با زبان محاوره‌ای، باید تسلط کامل بر قواعد دستوری و لغات زبان ریاضی نیز داشته باشد. درس رسمی خاص «زبان ریاضی» وجود ندارد، و محاوره تنها راه یادگیری این زبان نخواهد بود؛ با این حال مجموعه‌ای از قواعد در مورد کاربرد صحیح زبان ریاضی را می‌توان آموخت؛ اگر چه مسلماً لغت نامهٔ ریاضی مشابه با لغت‌نامه‌های فوئر، رجت و وبستر (Fowler، Roget و Webster) نمی‌تواند موجود باشد.

## ۹ صداقت بهترین روش عمل است

واضح است که هدف از کاربرد صحیح زبان ریاضی آن است که فهم مطالب برای خواننده ساده‌تر، و احیاناً لذت بخش‌تر باشد. شیوهٔ نگارش و استفاده از زبان ریاضی باید خوب باشد، نه به مفهوم بیان عبارات مشکل و بیش از حد تخصصی بلکه به مفهوم کاملاً عاری از نکات نامطلوب و کاملاً روان. هدف نویسنده باید هموارساختن راهی باشد که خواننده خواهد پیمود، پیش بینی مشکلات او، و جلوگیری از آنها. آنچه مورد نظر است وضوح در بیان مطالب است نه پیچیدگی، و کمک به فهم مطالب از سوی خواننده نه سردرگم ساختن او.

تأکیدی که روی مطالب بیان شده در پاراگراف قبل انجام گرفت، اگر چه ضروری به نظر می‌آید، امّا ممکن است خواننده را دچار سوءتفاهم کند. خود را ناچار می‌بینم بلافاصله در صدد رفع این سوءتفاهم احتمالی برآیم. منظور من از جلوگیری از پیچیدگی و ایجاد سردرگمی برای خواننده، فقدان استحکام و دقّت ریاضی مطالب نیست و عقیده دارم که این اهداف آشتی پذیرند. به عبارت دیگر می‌توان استحکام و دقت ریاضی را در بیان مطالب حفظ کرد بدون آن که پیچیدگی در کار باشد یا سردرگمی برای خواننده ایجاد شود. منظور من این نیست که به نویسندگان جوان توصیه کنم

به طرز ماهرانه با بی‌صداقتی از روی مشکلات عبور کنند. به عنوان نمونه، گاهی اوقات راهی بهتر از انجام عملیات و محاسبات سنگین برای دست‌یابی به یک نتیجه وجود ندارد. در چنین مواردی انجام عملیات فوق وظیفهٔ نویسنده است و بهترین کاری که می‌تواند انجام دهد هم‌دردی با خواننده است با بیان عباراتی مانند: «متأسفانه تنها اثبات شناخته شده شامل عملیات سنگین و طولانی زیر است.»

در اینجا نمونه‌هایی از مواردی که به نظر من نویسنده صداقت کامل را ندارد می‌آورم. در یک نقطهٔ بخصوص پس از اثبات مغرورانهٔ گزارهٔ $p$، با هیجان بیان می‌کنید که «با این حال توجه کنید که از $p$ نمی‌توان $q$ را نتیجه گرفت» و سپس با خوشحالی به مطالب دیگر می‌پردازید. ممکن است انگیزه‌های شما صحیح و خوب باشند، با این حال با این شیوهٔ بیان، خواننده احساس می‌کند که فریب خورده است. اگر او همه چیز را دربارهٔ مطلب مورد نظر می‌دانست دیگر نوشتهٔ شما را مطالعه نمی‌کرد. برای او «از $p$ نمی‌توان $q$ را نتیجه گرفت» به طور واضح محقق نیست. آیا این مطلب واضح است؟ (در این صورت ذکر کنید که این مطلب واضح است.) آیا مثال نقضی در این مورد بعداً ارائه خواهد شد؟ (در این صورت وعدهٔ آن را اکنون بدهید.) آیا این مطلب در کتابها و مقالات ریاضی اثبات شده است اما برای کتاب حاضر نیازی به ارائهٔ اثبات آن نیست؟ (در این صورت یک مرجع به خواننده معرفی کنید.) و یا (البته امیدوارم اینطور نباشد) خود شما دقیقاً نمی‌دانید که آیا از $p$ می‌توان $q$ را نتیجه گرفت یا نه (در این صورت به این مطلب در همین نقطه اعتراف کنید). سعی کنید در همهٔ موارد اعتماد خواننده را به خود جلب کنید.

به کار بردن عباراتی مانند «بدیهی است» یا «می‌توان به سهولت دید» هیچگونه اشکالی ندارد، مشروط بر آنکه قواعدی در به کار بردن آنها رعایت شوند. مسلماً موقعی که نوشته‌اید مطلبی «واضح است» فکر می‌کرده‌اید چنین است. یک ماه یا دو ماه یا شش ماه بعد نوشتهٔ خود را دوباره می‌خوانید. آیا هنوز فکر می‌کنید آن مطلب «واضح است»؟ (همانطور که میوه‌های کال با گذشت زمان می‌رسند، گذشت چند ماه باعث بهبود کیفیت نوشته می‌شود.) آیا هنگامی که آن مطلب را برای دوستتان یا در یک سمینار بیان کردید به عنوان یک مطلب «بدیهی» مورد قبول قرار گرفت؟ (یا اینکه شخصی آن را مورد سؤال قرار داد و اطمینان دادن شما هم نتوانست او را قانع کند و همراه با نارضایتی شما را ترک کرد؟ اطمینان دادن شما چگونه بود؟ آیا واقعاً مطلب را توضیح دادید یا با ایجاد ترس حرف خود را تحمیل کردید؟) پاسخهای بدیهی به این سؤالات ادبی از جمله قواعدی هستند که در به کار بردن کلمهٔ «بدیهی» باید مراعات شوند. قاعدهٔ اصلی دیگری وجود دارد، که همه می‌دانند و زیر پا گذاشتن آن متداول‌ترین منشأ اشتباهات ریاضی است: مطمئن باشید مطلبی که «بدیهی» عنوان کرده‌اید واقعاً درست است.

نیاز به گفتن نیست که هدف شما پنهان کردن حقایق از خواننده نیست؛ برعکس شما می‌نویسید که از حقایق پرده بردارید. مطلبی که سعی دارم بیان کنم آن است که باید موقعیت و وضعیت همه چیز را بیان کنید؛ آیا ثابت شده است یا ثابت نشده است، آیا آن را ثابت خواهید کرد یا نخواهید کرد. روی نکاتی که واقعاً مهم هستند تأکید کنید و بیش از حد برای نکات ساده و پیش پا افتاده اهمیت

قائل نشوید. دلایل بسیار خوبی برای آنکه گاه گاهی عبارت «بدیهی» را در نوشتهٔ خود به کار برید وجود دارند، امّا در هر مورد بیان کنید که عبارت به کار رفته بدیهی است تا آن عبارت در زاویهٔ دید صحیح برای خواننده قرار گیرد، حتی اگر این عمل خوانندهای را عصبانی کند. یک دلیل خوب این کار آن است که توسط آن به خواننده می‌گویید که شما مطلب را چگونه می‌بینید. البته واضح است که قواعد مربوط را باید مراعات کنید. به خواننده با دیدهٔ تحقیر ننگرید. تظاهر و ادعای بی‌مورد و پنهان کردن مطالب ممکن است در ابتدا برای خواننده مشخص نشود، امّا اکثر خوانندگان در حین مطالعهٔ کتاب خیلی زود احساس می‌کنند اشکالی در کار است؛ و نه حقایق و نه خودشان را ملامت خواهند کرد، بلکه به حق نویسنده را ملامت می‌کنند. صداقت کامل راه گشا به سوی حداکثر وضوح و روشنی در بیان مطالب است.

## ۱۰ از عبارات غیرمرتبط و نکات پیش پا افتادهٔ غیرضروری اجتناب کنید

گاهی یک گزاره چنان بدیهی است که حتی نیاز به بیان بدیهی بودن آن نیست، با این حال عبارتی که آن را بیان می‌کند خوب نیست از این جهت که ایجاد سردرگمی و انحراف برای خواننده می‌کند. به عنوان مثال به این عبارت توجه کنید: «اگر $R$ یک حلقهٔ نیمهٔ سادهٔ جابجایی یکدار باشد و $X$ و $Y$ در $R$ باشند، آنگاه $X^۲ - Y^۲ = (X - Y)(X + Y)$.» خوانندهٔ آگاه و دقیق از خودش خواهد پرسید که چه ارتباطی بین نیمه‌ساده‌بودن و وجود عنصر واحد حلقه با مطلبی که برای او همواره بدیهی بوده است وجود دارد. در نظر گرفتن فرضیاتی که ارتباطی با مطلب ندارند، تأکید نادرست در جایی که به تأکید نیازی نیست، و عدم تأکید در جایی که تأکید لازم است، از مواردی هستند که اوضاع را برای خواننده آشفته می‌کنند.

مورد دیگری که به اندازهٔ فرضیات غیرمرتبط تمرکز خواننده را به هم زده و باعث اتلاف وقت او می‌شود، بیان صریح موارد پیش پا افتاده در جایی است که به آنها نیازی نیست و حذف موارد فوق در جایی است که به آنها نیاز می‌باشد، و عدم توانایی نویسنده در جلب اعتماد خواننده را به همراه دارد. «هر عدد مختلط را می‌توان به صورت حاصلضرب یک عدد غیرمنفی و یک عدد مختلط با قدر مطلق یک نوشت.» این یک گزارهٔ درست است، امّا اگر بلافاصله پس از این مطلب (چه برای بار اوّل باشد یا اینکه به عنوان یادآوری ذکر شود تا سپس احیاناً تعمیمی از آن استخراج گردد) بیان نشود که عدد صفر (مورد پیش پا افتاده) یک مورد استثناء برای این گزاره است، خواننده احساس فریب خوردگی و عدم امنیت خواهد کرد. نکتهٔ مورد نظر من این نیست که مورد بحث قرار ندادن موارد پیش پا افتاده به طور جداگانه ممکن است به اشتباهات ریاضی بینجامد، و منظورم فقط این نیست که اشتباهات ریاضی مرتکب نشوید، بلکه این است که پافشاری بر توضیحاتی که قانوناً درست هستند امّا به اندازهٔ کافی صریح و روشن نیستند چه از نظر توصیفی و چه از نظر روانی (عبارت به طریقی که بیان شده است درست است. دیگر چه می‌خواهید؟) گمراه‌کننده و نامطلوب است، و ممکن است از نظر محتوای ریاضی نیز مطلوب نباشد. به عنوان مثال اگر نویسنده قصد بیان و بحث

این قضیه را دارد که تحت مفروضات مناسب، هر تبدیل خطی ترکیب یک تجانس و یک دوران است، آنگاه اغماض او در بیان اینکه تبدیل خطی صفر استثنایی در حالت یک بعدی برای این قضیه است، به عدم درک صحیح خواننده از رفتار تبدیلات خطی تکین در حالت کلی، خواهد انجامید.

در اینجا لازم است چند نکته را در مورد نحوهٔ نگارش صورت قضایا بیان کنم. در بیان صورت قضایا بیش از هر جای دیگر باید از عبارت نامربوط اجتناب کرد.

اولین سؤال این است که قضیه کجا باید بیان شود و پاسخ من این است: صحیح نیست که برای تفنّن و بدون آنکه خواننده را از هدفی که به سوی آن در حرکت هستید آگاه سازید، جلو روید و سپس ناگهان به او اطلاع دهید «و به این ترتیب ثابت کردیم که ...» اگر خواننده بداند که چه چیزی در حال اثبات شدن است توجه بیشتری به اثبات خواهد کرد و اگر از ابتدا این فرضیات را بداند، درک عمیق‌تری از این که از هر یک از فرضیات در کجا استفاده شده است خواهد داشت. (روش ارائهٔ اثبات قبل از بیان صورت قضیه اغلب به یک قضیهٔ «معلّق» می‌انجامد که به نظر من ناپسند است. منظورم چیزی شبیه این است. «بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که: قضیهٔ ۲. ...» شروع صورت قضیه از خط بعدی و با مقداری تورفتگی، که در واقع نوعی علامت‌گذاری نامرئی است، یک جدایی در جمله پدید می‌آورد که تمرکز خواننده را به هم می‌زند، و حتی پس از آنکه خواننده مجدداً تمرکز خود را به دست آورد و متوجه شود که چه حیله‌ای انجام شده است، هنوز جدایی بین صورت قضیه و نقطهٔ بیان نام رسمی آن باقی می‌ماند که برای خواننده ناراحت کننده است.

معنی گفته‌های بالا این نیست که قبل از صورت قضیه نباید عبارات توصیفی و آشناکننده، تعاریف مقدماتی، و انگیزه‌های مفید قرار گیرد. باید ابتدا این‌ها، سپس صورت قضیه، و در انتها اثبات قضیه را بیان کرد. صورت قضیه باید تا حد امکان تنها از یک جمله تشکیل یافته باشد و یک مطلب ساده را بیان کند، یا با فرض آنکه تعدادی فرضیات عمومی قبلاً بیان شده‌اند و هنوز معتبرند، تنها از یک عبارت خبری کوتاه تشکیل شده باشد. صورت قضیه محل بحث و گفتگو نیست: عباراتی از قبل «بدون از دست دادن کلیت می‌توانم فرض کنیم که ...» «یا علاوه بر این از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که ...» به صورت قضیه تعلّق ندارند.

در حالت ایده‌آل صورت یک قضیه نه تنها شامل فقط یک جمله است، بلکه از یک جملهٔ «کوتاه» تشکیل شده است. درک و هضم قضایایی که صورت آنها حدود یک صفحه (یا بیشتر!) را می‌پوشاند، مشکل است، مشکل‌تر از آنچه باید باشد، و نشانگر آن هستند که نویسنده به طور کامل و عمیق دربارهٔ مطلب مورد بحث نیاندیشیده است و آن را آن طور که باید سازمان نداده است. فهرستی از هشت فرض (حتی اگر به دقت شماره‌گذاری شده باشند) و شش حکم را نمی‌توان قضیه نامید، بلکه باید یک نظریه دانست که بد توضیح داده شده است؛ آیا همهٔ فرض ها برای هر یک از حکم ها لازمند؟ اگر پاسخ منفی است، آنگاه علت بد بودن این طرز بیان واضح است؛ و اگر پاسخ مثبت است، در این صورت مجموعهٔ فرضها احتمالاً بیانگر یک مفهوم کلی است که ارزش نام

گذاری و مطالعه و بررسی جداگانه را دارد.

## ۱۱ تکرار کنید و تکرار نکنید

یکی از قواعد مهم شیوهٔ نگارش خوب ریاضی تکرار مطالب است و قاعده‌ای دیگر تکرار نکردن مطالب است.

در ابتدا منظور من از تکرار این نیست که یک مطلب چند بار، و هر بار با یک بیان متفاوت ارائه گردد، بلکه، در توضیح و توصیف موضوعی دقیق مانند ریاضیات، منظور تکرار کلمه به کلمهٔ یک جمله یا حتی چند جمله می‌باشد. اگر در فصل اول مطلبی را تعریف، یا بیان یا ثابت کرده‌اید و می‌خواهید در فصل دوم تعمیمی از مطالب فصل اول ارائه کنید، کمک بزرگی به خواننده خواهد بود اگر در فصل دوم تا حد امکان عبارات فصل اول را با همان ترتیب تکرار کنید و در نقاط لازم تفاوت‌ها و تعمیم‌ها را با تأکید اعلام کنید. توجه کنید که بیان تفاوت‌ها به تنهایی کافی نیست؛ باید تفاوت‌ها را اعلام و تأکید کنید. کافی نیست که در یک تعریف شش ویژگی ذکر شود و در نقطه‌ای دیگر که تعمیمی از آن تعریف است پنج ویژگی و صورت ضعیفتری از ویژگی ششم آورده شود. این کاری است که در سیر بحث به طور طبیعی انجام می‌گیرد. آنچه به خواننده در درک مطالب کمک می‌کند همراه کردن عباراتی است مانند «توجه کنید که پنج ویژگی اول در تعاریف $p$ و $q$ مشابهند؛ آنچه $p$ را از $q$ متمایز می‌سازد ضعیف تر ساختن ویژگی ششم است.»

اغلب برای امکان انجام این گونه تأکیدها در فصل دوم ناچارید به فصل اول بازگردید و آنچه فکر می‌کرده‌اید به قدر کافی خوب نوشته شده است را دوباره بنویسید؛ این بار با این هدف که موازی بودن مطالب و تکرار آنها در دو فصل اول و دوم به منظور تأکید تفاوت‌ها، تأمین گردد. این دلیل روشن دیگری برای اجتناب‌ناپذیربودن نگارش به روش مارپیچی است، و جنبهٔ دیگری از آن چیزی است که سازمان‌دهی مطالب می‌نامیم.

پاراگراف‌های بالا نوع مهمی از تکرارهای خوب یا تکرارهای مطلوب ریاضی، را توضیح می‌دهند. دو نوع دیگر تکرار مطالب ریاضی وجود دارد که مطلوب نیستند.

اغلب تصور می‌شود که تکرار یک مطلب با کلماتی کاملاً یکسان، و هر بار با تغییرات بسیار جزئی، ابزار مفیدی در تدریس است زیرا این عمل باعث تثبیت مطالب در ذهن می‌شود. من با این عقیده مخالفم. بار دوم که شما مطلبی را بیان می‌کنید حتی کم توجه‌ترین خوانندگان به یاد خواهند آورد که بار اولی وجود داشته است، هر چند مبهم و غیر کامل، و از خود خواهند پرسید که آیا آنچه اکنون در حال یادگیری آن هستند دقیقاً آن چیزی است که قبلاً با آن مواجه شده اند، یا آنکه مطالب مشابهند امّا تفاوتهایی دارند. (برای کمک به خواننده بگویید: «مطلب حاضر دقیقاً همان مطلبی است که یک بار قبلاً در صفحهٔ ۳ بیان شده است») ابهام فوق که در خواننده ایجاد می‌شود، حتی در خفیفترین شکل آن، نامطلوب است. هر چیزی که ترس غیرلازم ایجاد کند، بی‌دلیل ذهن

خواننده را مشغول کند، یا به هر صورت دیگری تمرکز خواننده را به هم ریزد و او را منحرف کند نامطلوب است. (یکی از نگرانی‌هایی که اکثر نویسندگان دارند پیدایش چند تعریف غیر یکسان برای یک مفهوم در ضمن نگارش مطالب است). سازمان دهی خوب و بویژه روش مارپیچی سازمان‌دهی که قبلاً بحث شد، جایگزین مناسبی برای تکرار است و بهتر عمل می‌کند.

از دیگر تکرارهای نامطلوب می‌توان با انجام این توصیهٔ کوتاه و غیردقیق جلوگیری کرد: هرگز یک اثبات را تکرار نکنید. اگر تعدادی از مراحل در اثبات قضیهٔ ۲ بسیار شبیه به بخش‌هایی از اثبات قضیهٔ ۱ است، این نشانه‌ای است از اینکه مطلبی ممکن است کاملاً درک نشده باشد. علائمی دیگر برای همین مشکل عبارتند از «با روش‌هایی (یا ابزار یا ترفندهایی) که در اثبات قضیهٔ ۱ به کار رفته‌اند . . .» یا در وخیمترین حالت این مشکل «اثبات قضیهٔ ۱ را ببینید.» در صورت بروز چنین مواردی به احتمال زیاد یک لم وجود دارد که ارزش دارد آن را پیدا، فرمول‌بندی و ثابت کنید، لمی که از آن قضیهٔ ۱ و قضیهٔ ۲ هر دو به صورتی ساده‌تر و روشن‌تر نتیجه می‌شوند.

## ۱۲ «ما» ی ویرایشی آنقدرها هم بد نیست

جنبه‌ای از شیوهٔ بیان و توصیف مطالب که اغلب نویسندگان تازه‌کار را آزار می‌دهد استفاده از «ما» به جای «من» یا سوم شخص مفرد است. در چنین مواردی عقل سلیم مهمترین تعیین‌کننده است. به دلیل ارزش‌هایی که در آن می‌بینم، توصیه‌ام در این مورد را در اینجا بیان می‌کنم.

از آنجا که بهترین شیوهٔ توصیف و نگارش آن است که دارای کمترین پیچیدگی باشد، من استفاده از ضمیر سوم شخص مفرد را ترجیح می‌دهم، نه به این معنا که سوم شخص مفرد عملاً در جملات بسیار زیاد استفاده شود، بلکه به این معنا که از کاربرد اول شخص، چه مفرد و چه جمع، تا حد امکان اجتناب شود. جملاتی مانند «بدین ترتیب ثابت شده است که . . .» بسیار نامطلوبند. مثالهایی از انواع مطلوب عبارتند از: «از آنجا که $p$، بنابراین $q$.» یا «این نتیجه می‌دهد $p$.» یا «با اعمال $p$ در مورد $q$ به دست می‌آید $r$.» بخش عمده‌ای (آیا همه ؟) از نگارش ریاضی باید بیان حقایق باشد؛ و برای انتقال حقایق به دیگران جملات کوتاه خبری بهترین وسیله هستند.

یک ابزار مؤثر، که صرفه‌جویی در وقت را نیز به همراه دارد، جملهٔ امری است: «برای یافتن $p$، $q$ را در $r$ ضرب کنید.» یا «با $p$ داده شده، $q$ را برابر با $r$ قرار دهید.» (به دو نکتهٔ خارج از بحث اصلی دربارهٔ «داده شده» توجه کنید: (۱) موقعی که کلمه‌ای هیچ معنایی ندارد آن را به کار نبرید. به عنوان مثال در «برای هر $p$ داده شده، یک $q$ وجود دارد.» عبارت «داده شده» هیچ معنایی ندارد و حذف آن از محتوای مطلب نمی‌کاهد. (۲) به یاد داشته باشید که «داده شده» را همیشه باید همراه با فعل معلوم به کار برد و در مقابل وسوسهٔ به‌کاربردن «داده شده» بدون فعل معلوم مقاومت کنید. برای نمونه به جای «برای $p$ داده شده، یک $q$ وجود دارد» بنویسید: «برای $p$ داده شده، $q$ را بیابید».)

هیچ اشکالی در استفاده از «ما»ی ویرایشی وجود ندارد مشروط بر آن که از آن استفادهٔ نادرست نکنید. از «ما» به جای نویسنده و خواننده، یا سخنران و شنوندگان استفاده کنید. بنابراین بیان «با استفاده از لم ۲ می‌توانیم قضیهٔ ۱ را تعمیم دهیم» یا «لم ۳ روشی برای اثبات قضیه ۴ در اختیار ما می‌گذارد» خوب است، در حالی که بیان «کار ما روی این نتیجه در سال ۱۹۶۹ انجام گرفت» مطلوب نیست (مگر آن که این سخن از جانب چند نویسنده باشد که مشترکاً مطلبی را نوشته‌اند.)

استفاده از «من» و به‌خصوص استفادهٔ بیش از حد از آن، به دلیل به همراه‌داشتن احساس خودبینی در نویسنده و همچنین ایجاد حالت موعظه، باعث روی گرداندن خواننده از اثر می‌شود و به این دلیل تمایل دارم تا حد امکان از آن اجتناب کنم. واضح است که در یادداشتهای کوتاه، در شرح شخصی از وقایع، و شاید در نوشته‌هایی مانند این مقاله، کاربرد «من» موّجه است.

## ۱۳ کلمات را صحیح به کار برید

کوچکترین اجزای اطلاعات، پس از موضوع اصلی، فصلهای اصلی، پاراگراف‌ها، جملات و کلمات هستند. آنچه اکنون در نظر دارم بیان کنم مطلب واضح و بدیهی «کلمات را صحیح به کار برید» نیست. نکته‌ای که می‌خواهم تأکید کنم نیاز به تفکر دربارهٔ کلمات کوچک مورد استفاده در مکالمهٔ روزمره و منطق عمومی، و استفاده دقیق از آنهاست؛ به ویژه کلمات و اصطلاحات فنّی ریاضی که می‌توانند اثر عمیقی بر معنای ریاضی عبارات داشته باشند.

قاعدهٔ کلی، استفادهٔ صحیح از کلمات ریاضی و منطقی است. البته در این مورد نیز، مانند آنچه دربارهٔ نگارش جملات بیان گردید، تأکید بر آن نیست که نوشته حالت پیچیده داشته باشد: پیشنهاد من انباشته‌کردن نوشته از کلمات و اصطلاحات فنی همراه با توجه به کوچکترین جزئیات و اختلافات بین آنها نیست. دقیقاً برعکس تأکید من بر نگارشی چنان هنرمندانه و بادقت است که نوشتهٔ حاصل نه تنها صحیح باشد، بلکه بدون پیچیدگی، صحیح باشد.

به عنوان نمونه «ثابت کنید یک عدد مختلط حاصلضرب یک عدد غیر منفی و یک عدد با قدر مطلق یک است.» من دانشجویانی داشته‌ام که این اثبات را ارائه کرده‌اند: «عدد مختلط $-۴i$ را در نظر بگیرید. این عدد حاصلضرب ۴، که یک عدد غیر منفی، و $-i$، که یک عدد با قدر مطلق یک است، می‌باشد؛ و اثبات کامل است.» نکته آن است که در مکالمهٔ روزمره «یک» ممکن است معنای سور وجودی یا سور عمومی را دارا باشد. می‌توان نتیجه گرفت که: هیچگاه "any" را در نگارش ریاضی به کار نبرید. به جای آن از «هر» (each) یا «هر کدام» (every) استفاده کنید، یا آن که تغییر شکل کلی در جمله بدهید.

می‌توان عبارت فوق را به این صورت بازنویسی کرد «همه متغیرهای مستقل در مجموعهٔ اعداد مختلط تغییر می‌کنند»، و سپس عبارتی مانند زیر را نوشت:

$$\forall z\ \exists p\ \exists u\ \ [(p = |p|) \wedge (|u| = ۱) \wedge (z = pu)]$$

من این روش را توصیه نمی‌کنم. استفاده از نمادگذاری منطق صوری در مباحث منطق ریاضی ضروری است، اما برای انتقال ایده‌ها بین انسان‌ها زبانی نامناسب و مشکل‌آفرین است. نویسنده باید افکارش را با این نمادها «رمزنگاری» کند (من قبول نمی‌کنم شخصی وجود داشته باشد که به زبان $\forall$ و $\exists$ و $\wedge$ یا نمادهای مشابه فکر کند)، و خواننده باید نوشتهٔ نویسنده را «رمزگشایی» کند؛ هردوی این مراحل اتلاف وقت و موانعی برای درک صحیح مطالب هستند. ارائهٔ نمادین مطالب، چه آن‌گونه که متخصص منطق ریاضی به کار می‌برد، و چه $\epsilon$ و $\delta$ که مورد استفادهٔ متخصص آنالیز کلاسیک است، چیزی است که ماشین‌ها می‌توانند بنویسند، و عدهٔ معدودی غیر از ماشین‌ها می‌توانند بخوانند.

این میزان بحث دربارهٔ «یک» (any) کافی است. آزاردهندگان دیگر، که البته درجهٔ آزاردهندگی آنها کمتر است، عبارات «جایی که» (where)، «معادل» (equivalent)، و «اگر ... آنگاه ...» (if ... , then ...) هستند. «جایی که» یا «که در آن» غالباً نشانهٔ مطلبی است که به‌قدر کافی روی آن فکر نشده‌است و پس از نگارش قسمت اصلی نویسنده متوجه اهمیت آن شده و آن را به انتهای جمله اضافه کرده است بدون آن‌که زحمت دوباره‌نویسی جمله را به خود بدهد: «اگر $n$ به‌قدر کافی بزرگ باشد،آنگاه $|a_n| < \epsilon$، که در آن $\epsilon$ یک عدد مثبت از پیش تعیین شده‌است». در این مورد هم بیماری و هم درمان آن کاملاً روشن هستند. «معادل بودن» برای قضایا از نظر منطقی بی‌معنی است (منظور من از یک «قضیه» یک واقعیت ریاضی است که به اثبات رسیده است. یک عبارت با معنا ممکن است نادرست باشد، اما یک قضیه نمی‌تواند نادرست باشد. «یک قضیهٔ نادرست» عبارتی در تناقض با خود است). چه منظوری از بیان این مطلب می‌توان داشت که «تمامیت $L^2$ معادل است با قضیهٔ نمایش تابعک‌های خطی روی $L^2$»؟ منظور آن است که اثبات‌های هردو مطلب نسبتاً مشکل هستند اما پس از آن‌که هریک از آن‌ها به اثبات رسید، دیگری را با صرف کار کمتری می‌توان اثبات کرد. کلمهٔ «معادل» که دارای یک معنای دقیق منطقی است برای بیان این منظور مناسب نیست. در مورد «اگر ... آنگاه ...» غالبا یک اهمال از طرف نویسندگانی که سریع می‌نویسند انجام‌می‌گیرد و تأسف و ناراحتی افرادی را که آهسته می‌خوانند باعث می‌شود. در جملهٔ «اگر $p$ آنگاه اگر $q$ آنگاه $r$» از نظر منطقی اشکالی وجود ندارد ($(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$) اما از نظر روانی سنگ کوچکی است که سر راه خواننده قرار داده شده است و با پا گذاشتن روی آن خواننده تعادل خود را از دست خواهد داد. غالباً برای رفع این اشکال لازم است تغییر شکل کلی در جمله بدهید. این که این جمله چگونه باید تغییر کند بستگی به موردی دارد که نویسنده با آن مواجه است. تصحیح این جمله می‌تواند «اگر $p$ و $q$ آنگاه $r$» یا «در صورتی که $p$،

فرض $q$ نتیجه $r$ را دارد.» یا جملهٔ دیگری باشد.

## ۱۴ اصطلاحات فنی را صحیح به‌کار برید

نمونه‌هایی از متون ریاضی که تا اینجا ذکر شده‌اند، از نظر منطقی مورد بررسی قرار گرفتند. برای نشان دادن امکانات مختلف استفادهٔ غیرپیچیده از زبان دقیقی که یک ریاضی‌دان فعال هر روز به‌کار می‌برد، به‌طور خلاصه به سه مورد اشاره می‌کنم: «نگاشت»، «دنباله»، و «تعلق داشتن».

من به آن مکتب فکری تعلق دارم که عقیده دارد اختلاف بین «نگاشت» و «مقدار نگاشت» آن‌قدر زیاد است که همواره باید تمایز بین آن‌ها روشن باشد. نیازی به این که مطلب را بیش از اندازه شاخ و برگ دهید نیست؛ تنها از بیان جملاتی مانند «تابع $z^۲ + ۱$ زوج است.» اجتناب کنید. اگر مطلب را این‌طور بیان کنید: «تابع $f$ تعریف شده با ضابطه $f(z) = z^۲ + ۱$ زوج است.» یا «تابع $z \mapsto z^۲ + ۱$ زوج است.» فقط عبارتتان کمی طولانی‌تر می‌شود، ولی در مقابل، این طرز بیان در مواردی مانع از بروز اشتباهات جدی از جانب خواننده (و نویسنده) می‌شود و هم‌چنین خواندن روان‌تری را امکان‌پذیر می‌کند.

«دنباله» بنا بر تعریف نگاشتی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. یک نویسنده با بیان «اجتماع دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر یک مجموعهٔ اندازه پذیر است.» توجه خواننده را به سمتی که نباید، جلب می‌کند. ترتیب مجموعه‌ها در این گزاره کاملاً بی‌تأثیر است، و کلمهٔ «دنباله» کاملاً نامناسب به‌کار رفته است. عبارت صحیح چنین است: «اجتماع تعداد شمارش پذیری از مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است.» (یا اگر تأکید متفاوتی مورد نظر باشد «اجتماع تعداد شمارش پذیر نامتناهی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است»). موضوع در قضیهٔ «حد یک دنباله از نگاشت‌های اندازه‌پذیر یک نگاشت اندازه‌پذیر است.» کاملاً متفاوت است؛ در این مورد از کلمهٔ «دنباله» به‌طور صحیح استفاده شده است. اگر خواننده معنای «دنباله» را کاملاً درک کرده باشد، استفادهٔ نادرست کلمه «دنباله» از جانب نویسنده تمرکز فکری خواننده را به‌هم می‌ریزد و سرعت خواندن او را کاهش می‌دهد؛ و اگر خواننده مفهوم «دنباله» را کاملاً درک نکرده‌باشد، استفادهٔ نادرست کلمه «دنباله» از جانب نویسنده درک نهایی و کامل خواننده از مطالب را به‌طور جدی به تعویق می‌اندازد.

«تعلق‌داشتن» و «شامل‌بودن» را بسیاری از افراد به صورت مترادف به‌کار می‌برند، همان‌هایی که همواره به دانشجویان خود گوشزد می‌کنند که $\in$ و $\subset$ معانی کاملاً متفاوتی دارند. بعید است که استفاده از «تعلق‌داشتن» و «شامل‌بودن» به جای یکدیگر اشکال و سردرگمی جدی پدید آورد. با این وجود من چند سال پیش آزمایشی را آغازکردم و هنوز در حال انجام آن هستم: همواره در همه جا به صورت اصولی، چه در گفته‌هایم و چه‌در نوشته‌هایم، همواره «تعلق‌داشتن» را برای $\in$ و «شامل‌بودن» را برای $\subset$ به‌کار برده‌ام. ادعا نمی‌کنم چیزی را به این ترتیب ثابت کرده‌ام اما به‌عنوان

گزارش نتیجهٔ این آزمایش می‌توانم بیان کنم که (۱) عادت به این کار بسیار ساده است، (۲) هیچ ضرری ندارد، و (۳) فکر نمی‌کنم کسی به آن توجه داشته باشد اما تصور می‌کنم این نوع هماهنگی در استفاده از کلمات راحتی خیال خواننده یا شنونده را به دنبال دارد.

هماهنگی و استفادهٔ یکسان از کلمات مزیّت بسیار بزرگی است و مراعات نکردن آن اشتباه بسیار بزرگی در نگارش و توصیف مطالب است. هماهنگی در همهٔ موارد لازم و مهم است؛ در زبان به‌کار رفته، در نمادگذاری، در مراجع، در کاربرد شکل‌های گوناگون حروف چاپی، و غیره. فقدان این هماهنگی ممکن است باعث هر چیزی، از یک سردرگمی کوچک تا درک نادرست اطلاعات از جانب خواننده یا شنونده شود.

توصیه‌های من در مورد استفاده از کلمات به این موارد خلاصه می‌شود: (۱) از به‌کار بردن کلمات و اصطلاحات فنی، به‌ویژه از اختراع کردن اصطلاحات فنی جدید، تا حد امکان خودداری کنید، (۲) اگر لازم است کلمهٔ جدیدی اختراع کنید دربارهٔ آن بسیار فکر کنید و با افراد گوناگون مشورت کنید تا کلمهٔ به‌دست آمده تا حد امکان مناسب باشد، و (۳) از کلمات و اصطلاحات موجود به‌درستی و با هماهنگی استفاده کنید ضمن آن‌که نوشتهٔ شما تا حد امکان حالت پیچیده نداشته باشد.

## ۱۵ در مقابل استفادهٔ بیش از حد از نمادها و علائم مقاومت کنید

آنچه در مورد کلمات بیان شد در مورد واحدهای کوچک‌تر نگارش ریاضی، یعنی علائم ریاضی نیز صادق است. بهترین نمادگذاری آن است که اصلاً نمادی به کار نبرید. هر وقت می‌توانید از به‌کاربردن علائم و الفبای پیچیده اجتناب کنید. در زمان تهیهٔ یک توصیف ریاضی بهتر است برای خود مجسم کنید که آن توصیف به صورت شفاهی ارائه خواهد شد. برای خود مجسم کنید که در حال توضیح مطلب برای دوستتان ضمن قدم‌زدن در جنگل هستید و قلم و کاغذی در دسترس ندارید. به نمادها و علائم تنها زمانی که واقعاً به آنها نیاز دارید، روی آورید.

به عنوان نتیجه‌ای از این اصل کلی که «استفادهٔ هر چه کمتر از نمادها متن بهتری را نتیجه می‌دهد»، و مشابه با اصل «حذف فرضیات غیرلازم و غیرمرتبط»، آن است که باید از به‌کاربردن علائم غیرضروری و غیرمرتبط اجتناب کرد. به عنوان نمونه در عبارت «روی فضای فشرده، هر نگاشت حقیقی پیوستهٔ $f$ کراندار است.» نماد «$f$» چه تأثیری بر میزان روشنی این عبارت دارد؟ به عنوان مثالی دیگر در عبارت «اگر $0 \le \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n} = p \le 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$» نماد «$p$» چه نقشی دارد؟ جواب در هر دو مورد یکسان است: هیچ. اما دلایل وجود نمادهای غیر ضروری ممکن است متفاوت باشند. در مورد اول وجود «$f$» ناشی از یک عادت روانی است، در حالیکه در مورد دوم وجود «$p$» احتمالاً به این دلیل است که از آن در اثبات استفاده خواهد شد. از بین بردن عادت روانی ساده است، اما اصلاح مورد دیگر مشکل تر است زیرا کار بیشتری را از جانب

نویسنده می‌طلبد. بدون وجود «$p$» در عبارت بالا، اثبات حداقل نیم خط طولانی تر خواهد شد و با چیزی مانند این شروع خواهد شد: «قرار دهید $p = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n}$.» تکرار لازم در این مورد (تکرار $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n}$) ارزشش را دارد زیرا هم گزاره و هم اثبات آن سرراست‌تر و طبیعی‌تر جلوه خواهند کرد.

یک روش نمایشی برای بیان «حروف اضافی را به کار نبرید» این است که «هیچ حرفی را تنها یک بار به کار نبرید.» مطلبی که مورد نظر من است آن چیزی است که منطق‌دانها با بیان «هیچ متغیری را آزاد نگذارید» در نظر دارند. در مثال بالا در مورد نگاشتهای پیوسته، «$f$» یک متغیر آزاد است. بهترین طریقهٔ رفع این شکل آن است که «$f$» را حذف کنید. روش دیگری که گاهی اوقات ارجحیت دارد، تبدیل متغیر از صورت آزاد به صورت وابسته است. برای انجام این کار اکثر ریاضیدان‌ها مثال بالا را به این شکل تغییر می‌دهند: «اگر $f$ یک نگاشت پیوستهٔ حقیقی روی یک فضای فشرده باشد، آنگاه $f$ کراندار است.» بعضی از منطق‌دان‌ها عقیده دارند که در این جمله نیز $f$، که دوبار به‌کار رفته است، یک متغیر آزاد است و از نظر فنّی حق با آنهاست. برای وابسته کردن این نماد، لازم است که عبارت «برای هر $f$» را در محل مناسبی به جمله وارد کنید امّا روش مرسوم در بین ریاضیدان‌ها برای رفع این شکل آن است که (به‌طور ضمنی) به این قرارداد (ضمنی) اشاره می‌کنند که «هر گزاره شامل همهٔ سورهای عمومی لازم برای تبدیل همهٔ متغیرهای آزاد به متغیرهای وابسته است.»

قاعدهٔ «آزاد نگذاشتن یک متغیر در یک جمله»، مانند اکثر قواعد دیگری که بیان کرده‌ام، گاهی بهتر است نادیده گرفته شود، به هر حال، جمله، یک واحد دلخواه در نگارش است. اگر بخواهید در یک جمله یک «$f$» آزاد و معلّق داشته باشید تا بتوانید مثلاً در جمله‌ای دیگر از همان پاراگراف به «$f$» اشاره کنید، نباید مورد ملامت شدید قرار گیرید. قاعدهٔ بیان شده در مورد عدم استفاده از متغیر آزاد، در اصل قاعدهٔ خوبی است و اگر چه می‌توان گاهی آن را نادیده گرفت، امّا نباید کاملاً زیر پا گذاشته شود.

موارد دیگری از کاربرد منطقی نمادها وجود دارند که ممکن است سردرگمی کامل، و یا در بهترین حالت، گمراهی و سردرگمی موقتی در خواننده ایجاد کنند، مگر آنکه موضوع به دقت شکافته شود. برای مثال، فرض کنید در جایی از یک نوشته رابطهٔ زیر را ارائه داده باشید که با (*) مشخص شده است:

$$(*) \qquad \int_0^1 |\, f(x)\,|^2\, dx < \infty,$$

که ممکن است ضمن اثبات یک قضیه در مورد «$f$» خاصی باشد. اگر مدتی بعد به تابع دیگر «$g$» که همین ویژگی را دارد برخورد کردید، از بیان «$g$ نیز در (*) صدق می‌کند» دوری کنید. این گفته چه از نظر منطقی و چه از نظر الفبایی بی‌معنی است. می‌توانید بگویید «(*) معتبر خواهد ماند اگر در آن $g$ را جایگزین $f$ کنیم»، یا بهتر آن است که نامی به ویژگی (*) بدهید (که در مورد خاص بالا نام متداولی وجود دارد) و سپس بیان کنید «$g$ نیز به $L^2[0,1]$ تعلق دارد.»

دربارهٔ «نامساوی (*)» یا «معادلهٔ (۷)» یا «فرمول (iii)» چه می‌توان گفت؟ آیا همهٔ نامساویها و معادلات و فرمولها باید برچسب گذاری شوند؟ به نظر من نه، و دلیل من آن است که همانطور که فرضیات غیر مرتبط نباید ذکر شوند و مفاهیم غیر مرتبط نباید آورده شوند، بدون دلیل نیز نباید نام‌گذاری و شماره‌گذاری و برچسب گذاری انجام گیرد، زیرا بخشی از توجه خواننده به برچسب یا شماره جلب خواهد شد و بخشی از انرژی فکری او صرف این مسأله می‌شود که برچسب گذاری یا شماره‌گذاری به چه دلیل انجام گرفته است. اگر دلیلی برای شماره‌گذاری وجود داشته باشد، انرژی فکری و زمان صرف شده از طرف خواننده تلف شده تلقی نخواهد شد و او به طور ضمنی برای اشاره به مطلب کنونی در آینده آماده شده است. اگر هیچ دلیلی برای برچسب‌گذاری وجود نداشته باشد، انرژی و زمان صرف شده از طرف خواننده تلف شده است.

پرهیز در استفاده از برچسب‌ها خوب است مشروط بر آنکه در این کار افراط نشود. به شما توصیه نمی‌کنم کاری را که دیکسون یک بار انجام داد [۲] انجام دهید. وی در صفحهٔ ۸۹ می‌نویسد: «آنگاه ... (۱) را داریم ...» امّا صفحهٔ ۸۹ آغاز یک فصل جدید است و هیچ فرمولی در آن نمایش داده نشده است، چه رسد به اینکه دارای فرمولی با شمارهٔ (۱) باشد. فرمول شماره (۱) در پشت صفحهٔ ۸۹ در صفحهٔ ۹۰ آمده است و هرگز فکر نمی‌کردم باید آن را آنجا پیدا کنم. این جمله پنج دقیقه سردرگمی و درماندگی برای من به بار آورد. پس از آنکه از موضوع سر در آوردم احساس فریب خوردگی و ناتوانی فکری کردم، و هرگز دیکسون را نبخشیده‌ام.

یکی از مواردی که غالباً در آن نمادگذاری خام و حساب نشده استفاده می‌شود در استقرای ریاضی است. در مواردی این امر اجتناب ناپذیر است، امّا به نظر من در بیشتر موارد نشان دادن اینکه چگونه حالت $n = ۲$ از حالت $n = ۱$ نتیجه می‌شود و سپس بیان بی دردسر «و به همین ترتیب برای $n$ های بزرگتر» به اندازهٔ انجام عملیات جزئی استحکام دارد، ضمن آنکه بسیار قابل فهم‌تر و قانع کننده‌تر است. به همین ترتیب در اغلب موارد بهترین طریق اثبات یک گزاره دربارهٔ ماتریس‌های $n \times n$ نمایش ماتریس‌های بزرگ با تعداد زیادی $a_{ij}$ و گذاشتن سه نقطه در سطرها و قطرها نیست، بلکه ارائهٔ اثبات برای یک حالت خاص (مثلاً برای ماتریس‌های $۳ \times ۳$) است.

الگو در همهٔ این توصیه‌ها اجتناب از به‌کاربردن نمادها است. نکته آن است که اساس یک اثبات محکم و دقیق ریاضی را تنها به یک طریق می‌توان به یک ماشین غیرهوشمند یاد داد و آن استفاده از نمادهاست؛ اما این روش برای تدریس اثبات یک مطلب به یک انسان، که دارای نگرش هندسی است، و هر روز تجربیات بیشتری کسب می‌کند، و حوصلهٔ محدودی برای توجه به جزئیات تکراری دارد، روش مناسبی نیست. نمونهٔ دیگری از این مطلب اثباتی است که از زنجیری از عبارات ریاضی که توسط علامت تساوی جدا شده‌اند، تشکیل یافته است. نوشتن چنین اثباتی ساده است: نویسنده اولین معادله را می‌نویسد، و با یک جایگزینی طبیعی در آن، معادلهٔ دوم را به دست می‌آورد. سپس تعدادی از جملات را در یک نقطه گرد می‌آورد، تعدادی جایگشت و افزودن‌ها را انجام می‌دهد وسپس یک فاکتور مشترک پدید آمده را حذف می‌کند. با انجام چنین عملیاتی معادلات را به طور

پیاپی می‌نویسد تا آخرین معادله را به دست آورد. این شیوهٔ نگارش نیز در واقع «رمزنگاری» است و خواننده نه تنها ناچار به یادگیری در حین مطالعه، بلکه ناچار به «رمزگشایی» برای پیش‌رفتن است. این یک تلاش غیر لازم است. به جای آن، نویسنده می‌تواند با صرف ده دقیقه بیشتر، یک پاراگراف را بطور دقیق بنویسد، و به این ترتیب باعث شود هر یک از خوانندگان حداقل نیم ساعت وقت صرفه‌جویی کرده و سردرگمی زیاد نداشته باشند. پاراگراف باید راهنمایی برای عمل باشد تا خواننده با توجه به آن خود، معادلات را بیابد و بنویسد. این بسیار بهتر از اکتفا به نمایش معادلات به تنهایی است که تنها نتایج عمل را گزارش می‌دهند. به عنوان نمونه، پاراگراف فوق می‌تواند چنین باشد.«برای اثبات ابتدا $q$ را با $p$ جایگزین کنید، سپس جملات را گرد آورده و جایگشتی روی عوامل بدهید، و نهایتاً $r$ را اضافه و کم کنید.»

یک ترفند آشنای تدریس بد ریاضیات شروع اثبات با عباراتی است مانند «برای $\epsilon$ داده شده، $\delta$ را برابر با $\left(\frac{\epsilon}{۳M^۲+۲}\right)^{۱/۲}$ در نظر بگیرید.» این روش اثبات بازگشتی متداول در آنالیز کلاسیک است. این روش را یک ماشین به سادگی می‌تواند از نظر درستی تحقیق کند و دارای این مزیت مشکوک است که چیزی در انتها کوچک‌تر از $\epsilon$، به‌جای کوچک‌تر از $\left(\frac{\left(۳M^۲+۷\right)\epsilon}{۲۴}\right)^{۱/۳}$ خواهد شد. اما برای انسان، اگر در ابتدا بیان نشود که عبارت فوق از کجا آمده است، چندان قابل درک نیست. واضح است که چگونه باید راه را برای خواننده هموارتر ساخت: اثبات را رو به جلو بنویسید. از ابتدا شروع کنید و سپس عملیات لازم را در زمانهای مناسب انجام دهید تا به عبارت نهایی برسید. هیچیک از این دو روش (اثبات رو به جلو و اثبات بازگشتی) ظریف و چندان زیبا نیستند، اما روش اثبات رو به جلو قابل هضم تر و به یاد ماندنی‌تر است.

## ١٦ از نمادها به طور صحیح استفاده کنید

علائم غیرالفبایی نمی‌توانند آسیب زیادی وارد کنند، اما در مورد آنها نیز بهتر است هماهنگی و یکسان بودن معنا در نقاط مختلفی که به کار می‌روند رعایت شود. استفادهٔ غیرصحیح و ناهماهنگ در یک نقطه ممکن است قابل اغماض باشد اما اثر تعداد زیادی از این موارد روی هم ممکن است آسیب جدی به همراه داشته باشد. بنابراین به عنوان نمونه، بهتر است یک نماد چنان هماهنگ استفاده شود که ترجمهٔ آن به کلمات همواره یکسان باشد. این شیوهٔ خوبی است اگر چه در بعضی از موارد ممکن است امکان‌پذیر نباشد؛ با وجود این بهتر است این هدف همواره مد نظر باشد. به عنوان مثال آیا باید "$\in$" را به صورت عبارت دارای فعل «در [نام مجموعه] است» بخوانیم یا تنها به صورت حرف اضافهٔ «در» ؟ آیا «برای $X \in A$، داریم $X \in B$» صحیح است یا «اگر $X \in A$، آنگاه $X \in B$»؟ من دومی را ترجیح می‌دهم و بسیار متأسف خواهم شد اگر عبارت اول را در جایی مشاهده کنم. عبارت اول را می‌توان به صورت «برای $X$ در $A$، داریم $X \in B$» نوشت که هم از نظر نوشتن و هم از نظر خواندن ساده‌تر است، و همچنین از ناهماهنگی و حتی ایجاد ابهام موقتی

نیز جلوگیری می‌کند. همین مطلب در مورد "$\subset$" نیز صادق است اگر چه ترجمهٔ آن به کلمات طولانی‌تر است، و در مورد $\leq$ با شدت بیشتری درست است. جمله‌ای مانند «هرگاه یک عدد مثبت $\geq$ ۳ باشد، توان دوم آن $\geq$ ۹ است» زیبا نیست.

نه تنها پاراگراف‌ها، جملات، کلمات، حروف و نمادهای ریاضی، بلکه حتی علائم به کار رفته در نگارش معمولی، که ظاهراً نمی‌توانند مضر باشند، ممکن است منشأ ایجاد نقایص در نوشته‌ها و منحرف ساختن خواننده باشند. منظور من علائم نقطه‌گذاری است. ارائهٔ تعدادی مثال در این مورد کافی است. یک معادله، یک نامساوی، یک تعلّق، یا هر عبارت دیگر ریاضی از نظر محتوای اطلاعاتی معادل با عبارتی است که به زبان معمولی نوشته شده باشد؛ بنابراین به همان اندازه تمایز از عبارات دیگر را لازم دارد. به عبارت دیگر نقطه‌گذاری جملات نمادی را همانطور انجام دهید که در مورد عبارات به زبان معمولی عمل می‌کنید. از یک علامت نقطه‌گذاری کوچک مانند نقطه یا کاما بیش از حد استفاده نکنید. بسیار احتمال دارد که خواننده از تعدادی نقطه و کاما بدون توجه بگذرد اما این مسأله سردرگمی، تأخیر، و لزوم بازگشت به عقب را برای خواننده ایجاد خواهد کرد. «فرض کنید $a \in X$. $X$ متعلق به کلاس $C$ است، ...» نقطهٔ بین $a \in X$ و $X$ یک مورد از استفادهٔ بیش از حد از نقطه است. همین طور در مورد «فرض کنید $X$ صفر شود. $X$ متعلق به کلاس $C$ است، ...» یک قاعدهٔ خوب کلی این است: هرگز یک جمله را با یک نماد یا علامت آغاز نکنید. اگر در شروع یک جمله با آنچه یک نماد نمایندهٔ آن است اصرار دارید، کلمهٔ مناسبی را قبل از نماد به کار برید، به‌عنوان مثال برای عبارت بالا: «مجموعهٔ $X$ متعلق به کلاس $C$ است، ...» مناسب‌تر است.

استفادهٔ بیش از حد از کاما به اندازهٔ استفادهٔ بیش از حد از نقطه زیان‌آور است. به جای «برای نگاشت وارون‌پذیر $X$، $X^*$ نیز وارون‌پذیر است» بنویسید: «برای نگاشت وارون‌پذیر $X$، نگاشت الحاقی $X^*$ نیز وارون‌پذیر است». به طرز مشابه به جای «از آنجا که $p \neq 0$، $p \in U$.» بنویسید: «از $p = 0$ نتیجه می‌شود $p \in U$.» حتی به جای عبارت معمولی «اگر آن را دوست ندارید، تحملش کنید.» (یا مشابه‌های ریاضی آن) بهتر است «اگر آن را دوست ندارید، آنگاه تحملش کنید.» را به کار برید که، اگر چه کسل کننده است، اما درک آن ساده‌تر است. توصیه می‌کنم که در متن‌های ریاضی همواره همراه با «اگر»، کلمهٔ «آنگاه» را به کار برید. حضور «آنگاه» هیچگاه سردرگمی ایجاد نمی‌کند، اما نبودن آن ممکن است ایجاد کند.

آخرین نکتهٔ فنی که می‌تواند در نگارش و توصیف مطالب ابزار مفیدی باشد، و باید در اینجا به آن اشاره کرد، به یک معنا حتی از علائم نقطه‌گذاری کوچک‌تر و در واقع نامرئی است، و در عین حال به معنای دیگر بارزترین جنبهٔ صفحهٔ چاپ شده است. آنچه دربارهٔ آن صحبت می‌کنم طرح کلی، ساختار و شکل ظاهری هر صفحه و تمام صفحات است. با کسب تجربه در نگارش، و حتی با خواندن نوشته‌ها با دیدی آگاه و منتقدانه، به مرور احساسی به شما دست می‌دهد که آنچه اکنون در حال نگارش آن هستید، پس از چاپ شدن چگونه به نظر خواهد رسید. اگر تنها شامل جملات به زبان معمولی باشد حالت رسمی یک نوشتهٔ غیر علمی را خواهد داشت و برای خواننده

نامطلوب خواهد بود؛ و اگر انباشته‌ای از عبارات ریاضی و محاسبات باشد، صورت پیچیده و هراس انگیزی خواهد داشت. قانون طلایی «مراعات حد اعتدال» در این مورد نیز راه حل است. نوشته را به بخش‌هایی که بیش از حد کوتاه نباشند تقسیم کنید، عبارات زبان معمولی را به کار برید امّا نه خیلی زیاد، و بین پاراگراف‌ها به تعداد کافی عبارات ریاضی نمایش دهید و به این وسیله به چشم برای کمک به مغز فرصت دهید؛ از نمادها و علائم استفاده کنید، امّا همراه با مقدار کافی عبارات به زبان معمولی تا از غرق شدن فکر در مردابی از علائم جلوگیری به عمل آید.

## ۱۷ هر گونه ارتباط از طریق توصیف انجام می‌گیرد

مطلبی که قبلاً بیان کرده‌ام و تمایل به بیان دوبارهٔ آن برای تأکید بیشتر دارم این است که تفاوتهای بین کتاب ، مقاله، ارائهٔ شفاهی و نامه (و هر وسیلهٔ ارتباطی دیگر که بتوان تصور کرد) کمتر از تشابهات آنهاست.

نقش قضایا و اثبات‌های کشف شده برای نگارش یک مقالهٔ تحقیقی مشابه نقش «برگه‌های کاغذ»ای است که طرح نگارش یک کتاب روی آنها ترسیم شده است؛ و در این مورد نیز بازی یک نفرهٔ پس و پیش کردن موارد برای یافتن بهترین ترکیب مطلوب را باید انجام دهید.

ارائهٔ شفاهی کمی متفاوت است. در ابتدا مانند یک مقالهٔ توصیفی، و به همان روش، آن را می‌نویسید. تفاوت در اینجاست که باید مسائل و مشکلات ارائهٔ شفاهی مطالب را در نظر بگیرید. خوانندهٔ یک کتاب می‌تواند توجهش را از نوشته به جای دیگر معطوف کند و سپس در زمانی تصمیم بگیرد دوباره رشتهٔ مطلب را در دست بگیرد و آن را دنبال کند وهیچ چیز مانند وقت خواننده، از دست نمی‌رود. شنوندهٔ یک سخنرانی نمی‌تواند چنین کند. مدت توجه خواننده کوتاه است و مدت توجه شنونده بسیار کوتاهتر. اگر محاسبات و عملیات اجتناب ناپذیرند، می‌توان آنها را در مقابل خواننده قرار داد. امّا هرگز نباید در یک سخنرانی عملیات و محاسبات سنگین را در مقابل شنونده انجام داد. نیمی از هنر خوب‌نویسی، هنر حذف مطالب تا حد امکان است. در ارائهٔ شفاهی هنر، حذف مطالب دارای اهمیت حیاتی است. البته این اختلافات زیاد نیستند. مطمئناً یک مقالهٔ توصیفی خوب اگر با صدای بلند خوانده شود، یک سخنرانی غیرقابل‌تحمل خواهد بود، اما نه غیرقابل‌تحمل‌تر از بعضی از سخنرانی‌هایی که من شنیده‌ام.

در مورد ارائهٔ شفاهی، به جای شکل ظاهری صفحهٔ چاپ شده، شکل ظاهری تخته سیاه باید مد نظر قرارگیرد، و به جای مخاطب خیالی نویسنده، در مقابل سخنران انسان‌های زنده و واقعی قرار دارند، و اینها اختلاف‌های بزرگی هستند. یک مزیّت تخته سیاه، که صفحهٔ چاپ شده فاقد آن است، فراهم آوردن امکان کامل ساختن تدریجی مفاهیم و روابط است (سخنران‌هایی که از قبل تخته سیاه را آماده و آن را از مطالب پر می‌کنند، غیرعاقلانه عمل می‌کنند و نسبت به شنوندگان نامهربان هستند). وجود افراد واقعی و مشاهدهٔ فوری برداشت و عکس‌العمل آنها، از جنبه‌های با ارزش ارائهٔ شفاهی است که هر نویسنده‌ای آرزوی آن را دارد امّا نمی‌تواند داشته باشد.

مسائل عمده در همهٔ انواع ارتباط‌های توصیفی مشابهند و آنهایی هستند که در این نوشته اشاره کرده‌ام: محتوا، هدف و سازمان‌دهی، همراه با جزئیات بسیار مهم قواعد دستوری و املایی و نمادگذاری، این موارد همراه با مهارت در نمایش و تبلیغ، عناصر اساسی سخنرانی‌های خوب و نوشته‌های خوب هستند.

## ۱۸ از شیوهٔ خود دفاع کنید

ارتباط روان، هماهنگ و مؤثر دارای دشمنانی است که عبارتند از دستیاران ویرایش و نمونه‌خوانها.

یک ویرایش‌گر می‌تواند کمک بزرگی برای نویسنده باشد و اغلب نویسندگان ریاضی غالباً از این کمک بی‌بهره‌اند، زیرا ویرایش‌گر یک کتاب ریاضی باید ریاضیدان باشد، و تعداد این گونه افراد بسیار کم است. یک ویرایش‌گر ایده‌آل، که باید توانایی درک همهٔ جزئیات موضوع را داشته باشد، می‌تواند یک نظر عمیق و در عین حال دور از تعصب، که خود نویسنده فاقد آن است، دربارهٔ کتاب به نویسنده ارائه کند. ویرایش‌گر ایده‌آل ترکیبی از دوست، همسر، دانشجو و دانشجوی خوب سال سوم است که خدمات آنها به نویسنده را قبلاً توضیح دادم. ویرایش‌گران کتاب‌ها و مجلات ریاضی به این حالت ایده‌آل حتی نزدیک نیستند. کار ویرایش‌گری آنها تنها بخش کوچکی از زندگی آنهاست، در حالی که یک ویرایش گر خوب بودن یک کار تمام وقت است. ویرایش‌گر ریاضی ایده‌آل وجود ندارد و ترکیب دوست، همسر، و دانشجو تنها تا حدودی نقش یک ویرایش‌گر ایده‌آل را ایفا می‌کند.

«دستیار ویرایش» یک کارمند تمام‌وقت است که کارش یافتن ناهماهنگی‌ها و تناقض‌ها، لغزش‌های دستوری و اشتباهات املایی در نوشتهٔ شماست؛ اشتباهات در هر مورد که شما اشتباه‌پذیر هستید، به جز توجه به اشتباهات در محتوای ریاضی نوشته. مشکل در این نکته است که دستیار ویرایش خود را «متمّمی» بر نویسنده نمی‌پندارد و غالباً تا سطح یک کاربر مکانیکی ناوارد قواعد مکانیکی پایین می‌آید.
بگذارید چند نمونه بیان کنم.

زمانی من تبدیل‌های «اندازه ـ نگهدار» را مطالعه می‌کردم. (به خط تیره توجه کنید: نقش آن بسیار مهم است و از دو کلمه یک صفت را به وجود آورده است). تعدادی از نگاشتهای مرتبط با موضوع مطالعهٔ من دارای ویژگیی که بتوان این نام را بر آنها اطلاق کرد نبودند، و این موضوع طبیعتاً با اضافه‌کردن پیشوند «غیر» مشخص می‌گردید. در چاپ نهایی نوشته، پس از یک دنبالهٔ طولانی از توصیه‌های به طور اشتباه درک شده، از «تبدیل غیر اندازه ـ نگهدار» صحبت شده بود که بی‌معنا، و به شکلی طنزآمیز بی‌معناست، و مهمتر از اینها گمراه‌کننده و از بین برندهٔ تمرکز است.

یکی از دوستان ریاضیدان نقل می‌کند که در نسخهٔ دست‌نویس کتاب، او چیزی شبیه به «$p$ یا $q$ برقرار است بر حسب آنکه $x$ منفی یا مثبت باشد» را نوشته بود و دستیار ویرایش بر این اساس که

جمله بهتر به نظر خواهد رسید، آن را بدین شکل تغییر داده بود: « $p$ یا $q$ برقرار است برحسب آن که $x$ مثبت یا منفی باشد»! این طنزآمیز است، اگر نگوییم غم‌انگیز، و البته کاملاً اشتباه است.

شکایتی که هر شخصی که من دربارهٔ علامت نقل قول با او بحث کرده‌ام، دارد در مورد ارتباط آن با سایر علائم نقطه‌گذاری است. به نظر می‌رسد ویرایش‌گران یک عقیدهٔ بین‌المللی در مورد نحوهٔ چاپ دارند که براساس آن نقطه یا کاما بعد از علامت نقل قول «زیبا نیست». (همین جا اگر اجازه داده بودم، دستیار ویرایش این عبارت را به «زیبا نیست.» تبدیل می‌کرد) از نظر ریاضیدان منطقی (و حتی بیشتر از نقطه‌نظر منطق‌دان ریاضی) این عقیده معنایی ندارد؛ کاما یا نقطه باید در محلی که منطق موقعیت ایجاب می‌کند قرار گیرد. در اینجا نقطه به داخل علامت نقل قول تعلق دارد. عقاید در این مورد متفاوتند و قاعدهٔ انعطاف‌ناپذیری که در هر دو مورد بتواند به کار رود وجود ندارد.

نتیجه آنکه کتاب‌هایی در مورد «شیوهٔ نگارش» وجود دارند (که البته محتوای آنها غالباً قراردادها در مورد متون چاپی است) و کاربرد مکانیکی آنها توسط دستیاران ویرایش ممکن است زیان‌آور باشد. اگر می‌خواهید نویسنده باشید، باید برای دفاع از شیوهٔ نگارش خود آماده باشید و مجهز به میدان مبارزه بروید.

## ۱۹ توقّف کنید

نبرد با ویرایشگران آخرین کار نویسنده است، اما اکثر نویسندگان آن را به عنوان آخرین کار خود نمی‌دانند. آخرین کار در نظر اکثر نویسندگان، درست قبل از این نبرد است و آن پایان‌دادن به کتاب و متوقف‌ساختن نگارش کتاب است. این تصمیم سختی است.

همیشه کاری انجام نشده باقی می‌ماند؛ چیز بیشتری که باید گفته شود، یا راه بهتری برای بیان یک چیز، و حداقل چیزی که وجود دارد یک احساس ابهام‌آمیز است از این که تکمیل یا بهبود نوشته در یک قدمی ما است، و این که اغماض در این مسأله پشیمانی همیشگی را به همراه خواهد داشت. حتی در نوشتن این مقاله، در اینجا اظهار تأسف می‌کنم که یک یا چند پاراگراف در مورد شیوهٔ صحیح و زیبای نگارش از نظر ادبی را نگنجانده‌ام، یا اینکه با یک لحظه تأمل می‌بینم که نمی‌توانم این نوشته را به پایان ببرم بدون آن که دربارهٔ نام‌گذاری صحیح مفاهیم سخنی گفته باشم (این که چرا «جابجاشونده» (commutator) لغت خوبی است در حالی که «مجموعهٔ کاتگوری اول» عبارت مناسبی نیست.) و یا آنکه از نامگذاری مناسب قضایا صحبت کرده باشم (چرا «قضیهٔ نمودار بسته» نامگذاری مناسبی است در حالی که «قضیهٔ کوشی ـ بونیاکوفسکی ـ شوارتز» نامگذاری خوبی نیست) و همچنین دربارهٔ توصیهٔ متداول «پیروی کردن از یک نمونه» بیان رضایت‌بخشی نداشته‌ام. آنچه در نظر داشتم بیان کنم آن است که شخصی را انتخاب کنید که نگارش او روی شما اثربخش است و می‌توانید از او نگارش را بیاموزید. سپس شیوهٔ نگارش او را اتخاذ کنید و مطابق شخصیت و موضوع خود تغییر دهید.

راه حلی برای این مسأله به جز راه حل واضح و بدیهی آن وجود ندارد، تنها راه توقف، توقف بدون تردید است. می‌توانید این عمل دردآور را کمی به تأخیر اندازید، و باید هم چنین کنید، با مطالعهٔ دوبارهٔ نوشته و غلط‌گیری آن، با بررسی دوبارهٔ آن از ابتدا تا انتها، امّا با این اعمال تمایلی در شما برای توقف و پایان یافته تلقی کردن نگارش کتاب به وجود نخواهد آمد.

پس از نگارش آنچه فکر می‌کنید باید نوشته شود، چند روز صرف مطالعهٔ سریع دست‌نویس کتاب برای یافتن آن اشکال‌هایی کنید که در اولین برخورد با نوشتهٔ شما برای خواننده پیش خواهد آمد. آیا ریاضیات خوبی به کار برده‌اید؟ آیا توصیف مطالب به طرز جالبی صورت گرفته است؟ آیا زبان روشن و گویایی در نوشته وجود دارد؟ آیا نحوهٔ قرارگیری مطالب در کتاب لذّت‌بخش و برای مطالعه آسان است؟ سپس محاسبات و عملیات را بررسی و غلط‌گیری کنید، البته این یک توصیهٔ بدیهی است و هر کس می‌داند چگونه باید آن را انجام دهد. «پروراندن نوشته» را می‌توان به‌سادگی توضیح داد، اما انجام آن همیشه ساده نیست. این به معنای کنارگذاشتن دست‌نویس کتاب و فراموش‌کردن آن برای چند ماه است. پس از آن که این کار را نیز انجام دادید و همهٔ کتاب را با یک دید تازه دوباره خواندید و اشکالات را اصلاح کردید، هر کاری که برای نگارش کتاب توانسته‌اید انجام داده‌اید. دیگر منتظر و امیدوار دستیابی به یک نتیجهٔ دیگر نشوید، و به صیقل‌دادن نوشته ادامه ندهید. زیرا حتی اگر آن یک نتیجه را به دست آورید یا یک گوشهٔ تیز نوشته را با صیقل دادن برطرف کنید، سراب دیگری در پیش روی خود مشاهده خواهید کرد و آروزی دستیابی به آن را خواهید داشت.

به طور خلاصه: از ابتدا شروع کنید و پیش روید تا به انتها برسید، سپس بدون انجام هیچگونه عمل اضافه‌ای توقف کنید.

## سخن پایانی

اینجا پایان توصیه‌های من است، براساس آنچه انجام داده‌ام و می‌دهم، و بیشتر براساس آنچه متأسفم که انجام نداده‌ام، و بیشتر از همه براساس آنچه آرزو داشتم دیگران برای من انجام دهند. شما می‌توانید از بسیاری جهات از گفته‌های من انتقاد کنید، اما از شما می‌خواهم که مقایسهٔ بین توصیه‌های فعلی من و آنچه در گذشته انجام داده‌ام یکی از این انتقادها نباشد. خواهش می‌کنم آن طور که می‌گویم، و نه آن طور که عمل کرده‌ام عمل کنید؛ و خواهید دید که کار شما بهتر خواهد بود و بهتر از گفته‌های من عمل خواهید کرد. پس از آن این مقاله را دوباره بنویسید و برای نسل آینده

بیان کنید که چگونه می‌توان بهتر عمل کرد.

## قدردانی

مترجم از جناب آقای دکتر سیدعباداله محمودیان و دانشجویان درس ریاضی‌نویسی ایشان، به ویژه شادروان آقای دکتر مجتبی لطفعلی‌زاده مهرآبادی، که این ترجمه یادی است از ایشان، و از دست اندرکاران فرهنگ و اندیشه ریاضی برای پذیرش این ترجمه سپاس‌گزار است.

## مراجع

[1] G. D. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. N. A. S.*, **17** (1931), 656-660.

[2] L. E. Dickson, *Modern Algebraic Theories*, Sanborn, Chicago, 1926.

[3] N. Dunford, and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience, New York, 1958.

[4] H. W. Fowler, *Modern English Usage*, Second Edition, Oxford University Press, 1965.

[5] C. T. Heisel, *The Circle Squared beyond Refutation*, Heisel, Cleveland, 1934.

[6] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, A.M.S., New York, 1942.

[7] E. Nelson, A proof of Liouville's Theorem, *Proc. A. M. S.*, **12** (1961), 995.

[8] *Roget's International Thesaurus*, Crowell, New York, 1946.

[9] J. Thurber, and E. Nugent, *The Male Animal*, Random House, New York, 1940.

[10] Webster's New International Dictionary, Merriam, Springfield, 1951.

**مترجم:** حسن نجومی
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
پست الکترونیک nojumi@sina.sharif.edu

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۳ (پاییز ۱۳۸۳) صص. ۷۷ تا ۸۶

# نوربرت وینر ریاضیدانی برای تمام فصول

بیژن ظهوری زنگنه و روح‌اله جهانی‌پور

وینر، ریاضی‌دانی با جامعیت فوق‌العاده و عجیب است. وینر، کار بسیار تأثیرگذاری در حرکت براونی انجام داد. آنالیز هارمونیک را بعد از کارهای پالانچرال[1]، با کاربرد وسیع آن در مهندسی برق توسعه داد و به همراه «پالی[2]»، موفق به اثبات قضیهٔ «پالی ــ وینر» شد. در واقع، در رشتهٔ مخابرات و مهندسی برق، هیچ‌کس به اندازهٔ وینر تأثیرگذار نبوده است. وینر همچنین، واضع نظریهٔ اطلاعات و سیبرنتیک[3] و نظریهٔ تخمین است. اولین کارهای اساسی دربارهٔ رایانه‌های رقمی به‌وسیلهٔ او انجام شد و دستگاه‌های زیست شناختی و عصب‌شناسی را نیز مورد مطالعه قرار داد. علاوه بر این‌ها مطالعاتی در «خداپرستی» نیز داشته است.

نوربرت وینر در سال ۱۸۹۴ میلادی در شهر کلمبیا، ایالت میسوری آمریکا متولد شد و در اواخر زمستان سال ۱۹۶۴، در استکهلم درگذشت. پدر او، لئو وینر، استاد زبان و ادبیات اسلاو در دانشگاه هاروارد بود. لئو فردی پرانرژی، خون‌گرم و سرزنده بود. به‌آسانی خودش را سرگرم می‌کرد و «این می‌توانست هم معرف شادی و هم نشانه‌ای از قهر و خشم او باشد». خصوصیات لئو وینر در دوران کودکی و نوجوانی نوربرت وینر تأثیر عمیقی روی او برجای گذاشت. «طبیعی است که بیست سال زندگی مستقیم در کنار چنین انسانی و احساس‌کردنِ او با پوست و گوشت و استخوان خود، سرمشق و نمونه‌ای برای زندگی من ساخته بود که با آنچه در هم‌سالانم وجود داشت، به‌کلی متفاوت بود»[۵، ص ۱۸]. وینر اگرچه در خود کشش عمیقی نسبت به فعالیت‌های علمی احساس می‌کرد، اما به گفتهٔ خودش، یکی از دلایل روی‌آوردن او به فعالیت‌های علمی، خواست پدرش بود. وینر از همان اوان کودکی، با کنجکاوی به دور و بر خود می‌نگریست و تلاش می‌کرد تا به ماهیت و جوهر آنچه می‌دید و می‌شنید، پی‌ببرد. حدوداً چهار سالش بود که خواندن را آموخت و تقریباً، از همان زمان به مطالعهٔ

1) Plancherel, M.    2) Paley, R.E.A.C.    3) Cybernetics

مطالب علمی رغبت نشان می‌داد [۱]. در هفت سالگی، به مطالعهٔ کتاب‌هایی چون تاریخ طبیعی داروین[1] و کینگزلی[2]، کارهای شارکو[3]، ژانه[4] و غیره پرداخت. این مجموعه که شامل کتاب‌هایی در زمینه‌های مختلف و با قطع‌های گوناگون، حروفی ریز و یکنواخت و غالباً چاپی بد بودند، کتابخانهٔ رنگارنگی را تشکیل می‌دادند. «این کنجکاوی بی‌حد وحصر مرا، تنها می‌شد با علاقهٔ پدر به آموزش منظم من، مقایسه کرد. من چیزی می‌خواندم که به آن علاقه داشتم. پدر هم زبان‌های قدیمی و امروزی و ضمناً ریاضیات را به من یاد می‌داد. نمی‌شود گفت که به این موضوع‌ها هیچ علاقه‌ای نداشتم ولی به آن‌ها به‌صورت ذوقی و تصادفی می‌پرداختم و هیچ توجهی به رضایت پدر نداشتم» [۵، ص ۱۸].

وینر در هفت سالگی، هفت زبان قدیم و جدید را به‌خوبی می‌دانست و در ۹ سالگی وارد دبیرستان شد و بعد از اتمام دبیرستان به کالج تافت[5] در نزدیکی شهر بوستن رفت و سپس در دانشگاه‌های هاروارد و کورنل به تحصیل پرداخت. در چهارده سالگی از کالج تافت درجهٔ لیسانس و در هیجده سالگی از هاروارد درجهٔ دکتری گرفت. «به همان اندازه که به تدریج مستقل می‌شدم، به همان اندازه که با پشت سرگذاشتن سال‌ها، به استقلال و بلوغ نزدیک می‌شدم، روشن‌تر از پیش متوجه می‌شدم که آزادی به‌دست آمده قبل از هر چیز، آزادی اشتباه کردن، و تلخی شکست را آزمودن است» [۵، ص ۲۱].

وینر بعد از گرفتن دکتری خود در فلسفهٔ ریاضی در هاروارد، بورسی برای مسافرت به خارج به‌دست آورد. او ابتدا به دانشگاه کمبریج در کشور انگلستان و سپس گوتینگن در آلمان رفت. در کمبریج، نزد راسل می‌رود. «بهترین معلم و بزرگ‌ترین مربی من در کمبریج، برتراند راسل بود. با راهنمایی او بود که به منطق ریاضی پرداختم و یک رشته از مسأله‌های کاملاً کلی را، مربوط به فلسفهٔ ریاضی و فلسفه دانش به‌طور عام، آموختم. راسل، که در آن زمان بیش از همیشه آدم را به یاد «کلاه دوز مجنون» می‌انداخت، بیش‌تر نظریهٔ نسبیت انیشتین را، که تازه ساخته شده بود، به‌طور درخشانی درس می‌داد. همراه با گروه شاگردان نه‌چندان زیاد او که در منزلش جمع می‌شدند، کارهای او را در زمینهٔ منطق ریاضی می‌آموختم و علاوه بر آن، به درس‌هایی از ریاضیات که به‌وسیلهٔ او ارائه می‌شد، گوش می‌دادم. جالب‌ترین این درس‌ها، ریاضیات عالی بود که آن را گادفری هارولد هاردی اداره می‌کرد. او استاد آکسفورد و بعدهاکمبریج بود و احتمالاً باید او را ممتازترین چهره در میان ریاضی‌دانان انگلیسی این نسل به شمار آورد» [۵، ص ۲۱].

وینر در هاروارد رسالهٔ دکتری خود را در فلسفهٔ ریاضی نوشته بود و برای ادامهٔ تحقیق در فلسفهٔ ریاضی به کمبریج انگلستان نزد راسل رفته بود. اما راسل او را قانع کرد که بدون آشنایی جدی با خود ریاضیات، نمی‌توان به فلسفهٔ ریاضی پرداخت. به همین دلیل راسل برای یادگیری و عمیق شدن در ریاضیات، وینر را به نزد هاردی فرستاد. هاردی کسی بود که در سال‌های بلوغ، استاد نمونهٔ کمبریج شد. او معلم و دانشمندی بی‌نظیر بود، به ریاضی محض علاقهٔ ویژه‌ای داشت

1) Darwin 2) Kingsley 3) Charcot 4) Janet 5) Tuft

و میانهٔ چندانی با ریاضیات کاربردی نداشت [۲]. وینر در کلاس‌های درس هاردی با علاقه شرکت می‌کرد. «من از جلسات درس هاردی، واقعاً لذت می‌بردم. قبلاً هم بارها کوشیده بودم تا در قلمرو ریاضیات عالی نفوذ کنم ولی هربار با احساس نارضایتی، عقب نشسته بودم. همیشه احساس می‌کردم که در رشتهٔ استدلال‌ها، نارسایی وجود دارد و من نمی‌خواستم وانمود کنم که متوجه آن نمی‌شوم. بعدها برایم روشن شد که حق داشتم و این نارسایی‌های منطقی در مبانی ریاضیات، نه تنها من، بلکه معلمانم را هم ناراحت کرده است. ولی هاردی، چنان با پختگی و احتیاط مرا به دهلیزهای پیچ در پیچ ریاضیات عالی وارد کرد که با نزدیک شدن من، همچون اشارهٔ عصای سحرآمیز، همهٔ مانع‌ها عقب می‌نشست و سرانجام فهمیدم که استدلال واقعی ریاضی چیست. همین هاردی بود که مرا واداشت تا با انتگرال لبگ آشنا شوم، آشنایی که مرا به سمت نخستین موفقیت ریاضی‌ام راهنمایی کرد» [۵، ص ۲۲].

کمی بعد، در همان سال تحصیلی یعنی بهار ۱۹۱۴، وینر در آستانهٔ جنگ جهانی اول به گوتینگن آلمان رفت و تحت نظر لاندائو و هیلبرت، به تحقیق پرداخت. «لاندائو در یک خانوادهٔ ثروتمند اروپایی به دنیا آمده بود. خانواده‌ای که بسیاری از مردان نسل‌های متوالی آن، به کار بانک‌داری مشغول بودند. او هم در کودکی از جملهٔ بچه‌های با استعداد و نابغه به حساب می‌آمد. او را در ناز و نعمت تربیت کرده بودند و از همان بچگی عادت کرده بود از همهٔ لذت‌های زندگی و آنچه که می‌توان با پول به‌دست آورد، استفاده کند. این انسان ظریف مینیاتوری، با ذهنی به‌کلی بی‌انضباط و ظاهری زیبا و معصوم ــ سبیل‌های کوتاه و تابیدهٔ او چیزی از این تأثیر کلی نمی‌کاست ــ چنین می‌نمود که در این دنیای خشن و ناهنجار زندگی نمی‌کند. اگر کسی از او می‌پرسید که چگونه می‌تواند منزلش را در گوتینگن پیدا کند، با آرامش کامل می‌گفت: کاری ساده‌تر از این نیست، باید زیباترین خانه را در شهر پیدا کنی » [۵، ص ۲۴].

«معلم دوم من هیلبرت، از قماشی به‌کلی متفاوت بود. او آرامش یک دهقان پروس شرقی را داشت و با وجودی که از قدرت کار خود به خوبی آگاه بود، سادگی و فروتنی اصیل خود را از دست نمی‌داد. دوست داشت دربارهٔ پسرش، که استعداد درخشانی در ریاضیات نداشت، بگوید: او استعداد ریاضی را از مادرش و بقیهٔ چیزها را از من به ارث برده است» [۵، ص ۲۴]. «هیلبرت، دست به حل پیچیده‌ترین مسأله‌ها، در همهٔ شاخه‌های ریاضیات معاصر می‌زد و همیشه هم موفقیت درخشانی به‌دست می‌آورد . او تجسمی از سنت‌های پیشین و استعدادهای درخشان گذشته بود؛ درست همان دانشمندی بود که من آرزوی بودنش را داشتم: با توانایی حیرت‌انگیزی غیرعادی‌ترین اندیشه‌های به‌کلی انتزاعی را با موضوع‌های ملموس فیزیکی و علمی پیوند می‌داد» [۵، صص ۲۴، ۲۵].

وینر در کمبریج و تحت نظر راسل، به ضرورت پیوند ریاضیات با فیزیک پی‌برد. وینر اذعان می‌دارد که « فضای علمی گوتینگن ــ جایی که درس‌هایی را که در کمبریج آغاز کرده بودم، ادامه دادم ــ مرا هرچه بیش‌تر به درستی اعتقاد راسل در مورد فیزیک متقاعد کرد.» او در تابستان همان سال به آمریکا باز می‌گردد و سال تحصیلی بعد، مجدداً به کمبریج می‌رود. وینر می‌گوید: «... در

اوضاع و احوال مرگ و بدبختی، هیچ‌کس نمی‌تواند آمادگی کار جدی پژوهشی را داشته باشد. من هم دارای روحیه‌ای نبودم که بتوانم به نتیجه‌گیری جالبی برسم. در پایان زمستان ۱۹۱۵—۱۹۱۴، نیروی دریایی آلمان داشت به‌صورت خطری جدی در می‌آمد و به همین دلیل، پدر از من خواست تا به منزل برگردم» [۵، ص ۲۵]. وینر به آمریکا باز می‌گردد و در رشتهٔ توپولوژی جبری به کار می‌پردازد و سعی می‌کند مهارت و تجربه‌ای را که در تفکر انتزاعی از راسل آموخته بود، در توپولوژی جبری به‌کار بندد. توپولوژی جبری و استادانش در دانشگاه کلمبیا، چندان رضایتش را جلب نکردند [۱]. «با بی‌قیدی و به دور از اشتیاق همیشگی، به درس استادانی گوش می‌کردم که بعد از بودن با هاردی و دانشمندان هاروارد، بسیار کسل کننده به نظر می‌آمدند.» سخنان وینر برای ما ایرانیان که هشت سال طعم جنگ و عدم آرامش را چشیده‌ایم، بسیار جالب و ملموس است: «جنگ برای آمریکایی‌ها چند سالی دیرتر از اروپایی‌ها آغاز شد، ولی من از اوت سال ۱۹۱۴ بی‌وقفه در اندیشهٔ آن بودم. گمان نمی‌کنم نسل امروزی، که در میان بحران‌ها و بی‌نظمی‌های ناشی از آن بزرگ شده است، بتواند پیش خود تصور کند که جنگ چه وحشت و اضطرابی را برای معاصران من با خود آورده بود. نسل هم‌عصر من، با این فکر تربیت و قانع شده بود که آرامش و نعمت جزو خصلت‌های طبیعی آدمی است؛ ما باور کرده بودیم که در نتیجهٔ تکامل تدریجی، ولی جبری، شرایط باز هم بهتر و مساعدتری برای زندگی فراهم می‌شود. حتی امروز، بعد از چهل سال، به‌سختی می‌توانیم باور کنیم که آن زنجیر طولانی بلیه‌ها و فاجعه‌ها را، چنین از سر گذراندیم و زندگی عادی انسانی همچنان به راه خود ادامه می‌دهد. گمان می‌کنم برای هر کدام از ما گهگاه این آرزوی مبهم پدیدار می‌شود که در یک سحرگاه زیبا، دوباره به زندگی آرام و بی‌دغدغهٔ ابتدای قرن بازگردیم. در این دوران سخت، به بسیاری کارها ـ علمی و غیر علمی ـ دست می‌زدم. ناآگاهانه و به‌طور غریزی، دایم در انتظار پایان جنگ بودم تا زندگی به حالت عادی برگردد و بتوان دوباره برای آینده‌ای امید بخش طرح ریخت» [۳، ص ۳۱].

وینر در سال تحصیلی ۱۶—۱۹۱۵ به‌عنوان کارآموز به هاروارد و سپس در ۱۷—۱۹۱۶ به دانشگاه ایالتی مِین[۱] می‌رود. بعد از پایان جنگ، در حالی که زندگی به تدریج به حالت عادی خود باز می‌گشت، پست‌های خالی روز به روز آشکارتر می‌شد. انستیتوی صنعتی ماساچوست (M.I.T) به تعداد زیادی کادر آموزشی — و تنها به همین منظور ـ نیاز داشت. یعنی به کسانی که بتوانند به تدریس منظم بپردازند. M.I.T در آن زمان، بیش‌تر یک مدرسهٔ عالی فنی بود تا یک دانشگاه علمی طراز اول. به همین جهت، ریاضیات در آن تنها وسیله‌ای بود برای تربیت مهندسان. اما در بخش ریاضی M.I.T، افرادی بودند که اعتقاد داشتند باید M.I.T بتواند نقش شایستهٔ خود را در ردیف هاروارد و پرینستون به‌دست آورد. «حسن سلوک و خوش قلبی رئیس بخش، موقعیت این شیفتگان را تا حدی بهتر می‌کرد. تیلور که مردی کوتاه‌قد ولی پرحرارت و سرزنده بود، با ریشی که

1) Maine

داشت، نه تنها با آرزوهای جاه طلبانهٔ همکارانش همدردی می‌کرد، بلکه عملاً هم از یاری‌کردن آن‌ها دریغ نداشت. خود او کار علمی نمی‌کرد و در آغاز کار، به‌راحتی به موقعیتی درجهٔ دوم در بخش تن داد. وظیفه‌اش عبارت بود از کمک کردن به کسانی که می‌خواستند بیش از هر چیز به کار مهندسی بپردازند. ولی، همان‌طور که هر مدیر خوبی چنین است، تیلور با خوشحالی همهٔ توانایی‌های خود را در اختیار بخش می‌گذاشت و بعدها، وقتی که ما ــ افراد بخش او ــ به تدریج مقامی در جهانِ دانش به‌دست می‌آوردیم، او همچون کوه پشت سر ما ایستاده بود. دوستان تازه، در مجموع، برخوردی محبت‌آمیز با من داشتند و به خصوص در وجود مور[1]، مدافعی پر حرارت و متحدی واقعی پیدا کردم. مور استعداد فوق‌العاده‌ای در زمینهٔ انتقال عشق به ریاضیات به اطرافیان خود داشت. به برکت همین استعداد بود که او توانست به افراد بسیاری کمک کند تا به چنان مرتبهٔ بلندی از دانش برسند، که به تنهایی قادر به انجام آن نبودند. به همین دلیل، می‌خواهم در اینجا احترام عمیق خود را نسبت به این انسان بزرگ ــ با اندام نامتناسب و خنده‌دارش ــ و به فداکاری، شرافت و پاک‌دلی او ابراز دارم» [۳، ص ۳۰].

برای وینر، M.I.T یک استراحتگاه به شمار می‌رفت، زیرا با وجود بیش از بیست ساعت تدریس در هفته، باز هم برای مطالعهٔ نوشته‌های دیگران و هم برای تحقیق، وقت پیدا می‌کرد. «تمامی روز را، از نُه صبح تا پنج بعدازظهر، در انستیتو بودم، ولی حتی در این شرایط هیچ خوشحالی برایم بزرگ‌تر از این نبود که یکشنبه را (شنبه روز کار بود) در سالن خالی کنفرانس به سر ببرم، چرا که مطمئن بودم هیچ مزاحمی وجود ندارد و هیچ‌کس آرامش مرا به هم نمی‌زند. و حالا، با تمام تلاشی که می‌کنم، نمی‌توانم حتی جزیی از آن‌چه را که آن زمان قادر به انجامش بودم، انجام دهم. در اوقات فراغت، به سینما و تئاتر قدیمی کاپلی می‌رفتم، گاهی به ارتفاعات میدل سکس می‌رفتم، سلانه سلانه در «تپهٔ آبی» قدم می‌زدم، گاهی هم یک سورتمهٔ ساده برای پایین آمدن از کوه پشت قبرستان می‌ساختم. دوستانی هم داشتم: چند تا از همکاران جوان بخش و یکی از آسپیران‌های دانشگاه هاروارد. زمستان، از قدم‌زدن روی یخ تا انستیتو و یا پیاده‌روی در خیابان اسپاکس از منزل تا بوستون، لذت می‌بردم» [۳، ص ۳۰]. در همین دوران بود که علاقهٔ وینر به جنبه‌های فیزیکی ریاضیات روز به روز عمیق‌تر می‌شد. وینر، دلیل این علاقه را چنین توصیف می‌کند: « ساختمان M.I.T در ساحل رودخانهٔ چارلز ساخته شده بود و طوری قرارداشت که می‌شد مستقیماً و از پنجره‌های آن، از چشم‌انداز گستردهٔ سرزمین زیبای دور و بر آن لذت برد، به خصوص وجود رودخانه، موجب شادی بود. به نظر می‌رسید که می‌توان از بام تا شام به تماشای ناز و کرشمه‌های عجیب و غریب آب نشست. ولی آنچه در میان این همه زیبایی مرا به طرف خود می‌کشید، ریاضیات و فیزیک بود. آن قانون‌مندی‌های ریاضی، که همهٔ این تودهٔ بی‌نظم و ناآرام آب را هدایت می‌کند، کدام است؟ مگر اهمیت اصلی ریاضیات در این نیست که می‌تواند نظم و ترتیبی را که زیر این هرج و مرج و نابسامانی ظاهری دور و بر ما پنهان شده است، پیدا کند؟

---

1) Moore, C. L. E.

رودخانهٔ چارلز، گاهی ناگهان از موج‌های بلند با شانه‌های بلند کف پوشیده می‌شود و گاهی چنان چین‌خوردگی ملایمی دارد که به زحمت می‌توان موج‌های آن را دید. طول موج‌های آن، گاه از دو یا سه بند انگشت تجاوز نمی‌کند و گاه به چند متر می‌رسد. چگونه می‌توان بیانِ ریاضی همهٔ این پدیده‌ها را ارائه داد؟ از چه دستگاهی باید استفاده کنیم تا در تنوع بی‌پایان جزییات این منظره غرق نشویم؟ برایم روشن بود که این مسأله، با مسألهٔ میانگین آماری ارتباط دارد که آن هم با انتگرال لبگ خویشاوند است» [۳، ص ۴۱].

به همین جهت، وینر به کارهای ویلارد گیبس[1] در زمینهٔ مکانیک آماری علاقه‌مند می‌شود. تعمق وینر در زیبایی‌های اطراف، به خصوص رودخانه و مشاهدهٔ طول موج‌های بلند و کوتاه آب را، می‌توان با مشاهدهٔ نیوتن در افتادن سیب از درخت در کشف قانون جاذبه مقایسه کرد، زیرا وینر هم با مشاهدهٔ زیبایی‌ها و رمز و رازهای نهفته در آب رودخانه، به تبیین ریاضی حرکت براونی می‌پردازد.

در سال‌های ۱۹۳۳—۱۹۳۲ همکار انگلیسی وینر، ام. پالی، با استفاده از یک بورس دولتی به آمریکا می‌آید تا بتواند در طول سال با وینر به فعالیت علمی مشغول باشد. پالی به شدت به لیتلوود[2] علاقه‌مند بود زیرا لیتلوود توانسته بود پالی را به چنان حرکتی وادارد که قادر باشد بر همهٔ دشواری‌ها غلبه کند. پالی یکی از ریاضیدانان نسل جوان بریتانیا بود واگر مرگ زودهنگام او نبود شاید بهترین ریاضیدان معاصر انگلیسی می‌شد. «من و پالی باهم کار می‌کردیم و معمولاً از تخته سیاه بزرگی استفاده می کردیم که در یکی از تالارهای متروک M.I.T قرار داشت. تصمیم گرفته بودیم کاری را ادامه دهیم که من به تنهایی و در ارتباط با علاقه‌ای که به مدارهای الکتریکی داشتم، آغاز کرده بودم. معمولاً من مسأله را مطرح و مسیر بررسی آن را معلوم می‌کردم و آن وقت پالی حمله را آغاز می کرد و کار را به پایان می‌برد» [۳، ص ۲۱۰].

«یکی از مسأله‌های جالبی که ما دو نفر روی آن کار کردیم، مسألهٔ تعیین شرایط لازم برای تبدیل فورهٔ یک تابع بود تا بتواند روی یک نیم‌خط راست به سمت صفر میل کند. این مسأله از دید ریاضی محض محتوای جالبی دارد و پالی با اشتیاق زیاد آن را مطالعه کرد. ولی در جریان کار معلوم شد که روش من بر روش پالی برتری دارد: بر خلاف او من از اول متوجه شده بودم که این مسأله با الکتریسیته پیوندی مستقیم و جدی دارد در حالی که پالی سرگرم حل مسأله‌ای بود که با واقعیت هیچ ارتباطی نداشت و شبیه به یک مسألهٔ زیبا ولی دشوار در شطرنج بود» [۳، ص ۲۱۱].

پالی اسکی را بی‌اندازه دوست داشت ولی یک اسکی باز مشهور و فوق‌العاده به حساب نمی‌آمد. عادت داشت که بی پروا به خطرناکترین جاها برود. اصولاً پالی اهل خطر کردن بود و کمترین توجهی به خطر نداشت و هرگونه احتیاطی رابه معنای ترس می‌دانست. « بعدها دانستم که چرا پالی تا این حد مغرور بود و به استقبال خطر می رفت. او صدای گامهای مرگ را به‌روشنی می‌شنید.

1) Gibbs, g. W. 2) Littlewood, J. E.

در ماه آوریل، پالی همراه چند نفر از دوستان بوستونی برای اسکی به کانادا رفت. در کنار اردویی که در آن توقف کرده بودند، مناطق جالبی برای اسکی وجود داشت ولی چند سراشیبی تند هم بود که از لحاظ بهمن‌گیربودن، خطرناک شمرده می‌شد. متأسفانه روحیهٔ پالی چنان بود که اگر او را از کاری منع می کردند، نمی‌توانست دست به انجام آن نزند. به فاصلهٔ کوتاهی پس از حرکت او، تلگرافی رسید که خبر ناگواری به من داد. او ضمن عبور از یک سراشیبی ممنوع دچار بهمن شده بود. دو روز بعد جسد او را که یک پایش قطع شده بود، هزار متر پایین‌تر از محل فاجعه یافتند» [۳، صص ۲۱۲ — ۲۱۳].

پس از بیان این حادثهٔ تلخ، شاید شنیدن خاطراتی که بعضی از ریاضیدانان در تماس با وینر داشته‌اند، خالی از لطف نباشد. جرج پولیا در یکی از سخنرانی‌های خود می‌گوید: «زیباترین داستانی که سراغ دارم دربارهٔ نوربی ــ همان نوربرت وینر ــ است. موضوع دربارهٔ دانشجویی است که وینر را بسیار ستایش می‌کرد، ولی هیچ وقت مجالی برای صحبت با او نمی یافت. یک روز صبح این دانشجو به ادارهٔ پست رفت. در آنجا وینر را دید که یک برگ کاغذ روی نیمکت جلویش گذاشته و غرق در تفکر به آن خیره شده است. ناگهان وینر با شتاب به سویی روانه شد و دوباره به سروقت کاغذ برگشت و با همان حالت تفکر عمیق به آن چشم دوخت. دانشجو از مشاهدهٔ این تلاش فکری فوق‌العاده که در حرکات وینر دیده می‌شد، سخت تحت تأثیر قرار گرفته بود. در این حال مردد بود برود با وینر صحبت کند یا نه. اما ناگهان تردیدش برطرف شد، زیرا وینر که دوباره داشت از کاغذش دور می‌شد، یکراست به سوی او آمد. دانشجو ناگزیر به حرف درآمد: «صبح بخیر، استاد وینر.» وینر درنگی کرد، قدری مبهوت ماند، دستش را به پیشانی کوبید وگفت: آهان ...! وینر ...! دنبال همین کلمه می‌گشتم[۱].»

در سال‌های پس از جنگ دوم جهانی، وقتی نخستین اثر خود را دربارهٔ نظریهٔ تخمین می‌نوشت گمان نمی‌کرد که بعضی از اندیشه‌های اصلی ریاضی مقاله‌اش، قبل از آن هم منتشر شده باشد. ولی خیلی زود متوجه شد که کمی قبل از جنگ، کلموگروف، ریاضیدان مشهور شوروی، مقاله‌ای کوتاه ولی پر مغز در «گزارش‌ها»ی فرهنگستان علوم فرانسه، در این زمینه منتشر کرده است. کلموگروف در مطالعهٔ خود فقط به نظریهٔ تخمین برای دنباله‌های گسسته پرداخته بود، در حالی که وینر قبلاً حالت زمان ــ پیوسته را نیز بررسی کرده بود. هم‌چنین کلموگروف چیزی دربارهٔ صافی‌ها نگفته بود و مقالهٔ او ارتباطی با الکتریسیته نداشت. «با وجود این، همهٔ اندیشه‌هایی که به نظر من بی‌اندازه عمیق به نظر می‌رسید، در مقاله‌ای که کلموگروف قبل از من چاپ کرده بود، وجود داشت و البته من کمی بعد از چاپ مقالهٔ خودم از این مطلب مطلع شدم. کارهای کلموگروف وبعضی از شاگردان او مثل کرین، در «گزارش‌ها»ی فرهنگستان علوم اتحاد شوروی چاپ می‌شد. گرچه این مقالات بر اساس اندیشه‌هایی بود که در اولین مقالهٔ کلموگروف طرح شده بود، استنباط من این است و تقریباً اطمینان دارم که کلموگروف مستقلاً به همان نتایجی رسیده بود

۱) نقل از مجلهٔ نشر ریاضی، سال ۱، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷، ص ۳۸.

که برای من، در زمینهٔ کاربرد این روش‌ها، معلوم بود. من هرگز کلموگروف را ندیده‌ام و هیچ وقت به روسیه نرفته‌ام و با او و شاگردانش مکاتبه‌ای نداشته‌ام، بنابراین همهٔ آنچه که می گویم، تا حد زیادی، بر استدلال ذهنی من استوار است. ولی اگر غیر از من کسی در جهان وجود دارد که روی این موضوعات کار می‌کند، جز کلموگروف در روسیه نیست» [۳، ص ۳۲۳].

وینر اشاراتی دربارهٔ ویژگی‌های شخصیتی خویش و برداشت خود از یک دانشمند نیز دارد. او موفقیت خود را هم مدیون «استعداد ذاتی» و هم «تأثیر محیط» می‌داند. به گفتهٔ خودش: «نه تنها نبوغ خود را از پدرم گرفته‌ام، بلکه آموزش خود را هم به دلخواه او و با همان ویژگی که از او به ارث برده بودم، به‌دست آوردم. اگر شبیه پدرم نبودم، از دیدگاه او فرزند ناخلفی به حساب می آمدم. اگر این توانایی بالقوه را از او به ارث نبرده بودم، به احتمال زیاد آموزش و تربیت او بی حاصل می‌ماند». وینر، اساس دیدگاه تربیتی پدرش را که خود دانشمند برجسته‌ای بود «اعتماد به تلفیق کامل نظریه و عمل» معرفی می‌کند. او هم‌چنین، به روحیهٔ مستقل، جستجوگر، فداکار و ایثارگر پدر خود اشاره می‌کند و ایجاد چنین روحیه‌ای را در خود، مدیون او می‌داند. وینر، زمان و مکانی را که در آن رشد علمی یافته است محترم می‌شمارد و می‌گوید: «خوشبخت بودم که قبل از جنگ جهانی اول به دنیا آمدم؛ وقتی که هنوز جهان دانش، دچار امواج جهل سال‌های فاجعه و بلیه نشده بود. به خصوص خودم را از این بابت خوشبخت می‌دانم که گرفتار وضعی نشدم تا سال‌های طولانی، همچون یکی از پیچ و مهره‌های کارگاه دانش امروزی، کاری را انجام دهم که دستور می‌دهند و روی مسأله‌هایی کار کنم که مورد خواست مقام ریاست است و مغز خود را تنها «به افتخار کلیسا» بفرسایم و همچون شوالیه‌های سده‌های میانه، تنها در اختیار اربابان خود باشم. من با تمام وجودم برای دانشمندان جوان امروزی متأسفم ــ چه خودشان موافق باشند چه مخالف ــ که به «روح زمان» تسلیم شده‌اند. به‌صورت مستخدمان یا کارمندان روشن فکری درآمده‌اند که نام خود را در لحظه‌های ورود و خروج از محل کار، در دفتر حضور و غیاب ثبت می‌کنند» [۳، صص ۴۳۹ — ۴۴۰].

وینر تأثیر محیط و نوع تعامل با آن را برای تربیت دانشمند، ضروری می‌داند. به گفتهٔ او «دانشمند باید در جریان کاری باشد که در اطراف او می‌گذرد وگرنه کار او به نتیجهٔ واقعی خود نمی‌رسد. او باید در محیطی زندگی کند که امکان اشتغال به دانش را به او بدهد، دوستانی داشته باشد که ضمن گفت و گو و بحث با آن‌ها بتواند به دانش خود بیفزاید و استعداد خود را شکوفا کند» [۳، صص ۴۴۰ — ۴۴۱]. وینر در ادامه، نگرانی خود را از حساب‌گری و کاسب‌کارانه شدن علم و تولید آن ابراز می‌کند و می‌گوید: «ما در دورانی زندگی می‌کنیم که سودجویی، نقشی چنان استثنایی دارد که همهٔ جنبه‌های دیگر را به کنار زده است. جامعهٔ امروزی ما، ارزش اندیشه‌ها را با معیار دلار و سنت می‌سنجد، ولو این که ارزش چنین اندیشه‌هایی به مراتب پایدارتر و ثمربخش‌تر از ارزش پول باشد. کشفی که احتمالاً بتواند در پنجاه سال بعد مورد استفادهٔ علمی قرار گیرد، تقریباً هیچ شانسی برای تأمین شرایط ادامهٔ تحقیق ندارد. از طرف دیگر، چنین کشفی، هیچ‌کسی را به طرف خود جلب نمی‌کند، چرا که همه در فکر تأمین آیندهٔ خود و آیندهٔ بچه‌ها و نوه‌های خود هستند» [۳، ص ۴۴۲].

وینر، سپس بر ضرورت عبور از فردگرایی به کار گروهی در تولید علمی، تأکید می‌کند و در پایان، به ارزیابی خود می‌پردازد: «پس از سی و شش سال خدمت در M.I.T و در سن شصت سالگی، نه خود را در پایان علاقه به کارهای علمی می‌بینم و نه گمان می‌کنم که موفقیت‌های خود را، به‌طور کامل، پشت سر گذاشته‌ام. به نظرم می‌رسد که همکاری من در زمینهٔ امواج مغز، منجر به شکوفایی دانش مهمی می‌شود، هم‌چنین پژوهش‌هایم همراه با آرماند زیگل[1] دربارهٔ حرکت براونی و سری‌های زمانی، مرا به بازشناسی نقش علیت و تصادف در جهان رهنمون شده است. نمی‌دانم در سال‌هایی که از عمرم باقی مانده است، این برنامه را خود به فرجامی خواهم رساند یا دست کم شاهد اجرای آن به دست دیگران و شناخته شدن سهم اندیشه‌های گذشته‌ام در آن خواهم بود یا نه! ولی، اینک اطمینان دارم که اگر کار علمی‌ام زود آغاز شده است، دیر می‌پاید» [۵، ص ۳٦۵].

و سرانجام «وینر دانشمندی است همچون دیگر دانشمندانِ اصیل، انسان دوست، دشمن سرسخت جنگ و نابرابری‌های قومی و نژادی و موجودی سرشار از عاطفه و انسانیت. وینر نه تنها گوشه‌گیر و برکنار از پیش‌آمدهای دور و بر خود نیست بلکه هر حادثه‌ای در هر گوشهٔ جهان اگر به سرنوشت انسان و انسانیت مربوط باشد، او را به خود جلب می‌کند و بسته به نوع حادثه، در برابرش سمت‌گیری می‌کند. یک دانشمند، در هر جای جهان و با هر نظام فکری، انسانی می‌اندیشد و هر رفتار غیر انسانی، او را مضطرب و پریشان می‌سازد و اگر گاهی نواهایی ضدانسانی از زبان کسانی می‌شنویم که خود را صاحب علم و معرفت می‌دانند، بیش‌تر سوداگر و دانشمندنما هستند تا دانشمندی اصیل و واقعی» [۳، ص ۱۱، مقدمهٔ مترجم].

## مراجع


[۱] ظهوری‌زنگنه، بیژن.، وینر و حرکت براونی، رشد آموزش ریاضی، سال نوزدهم، شمارهٔ ٦۸، صص ۵۱ ــ ۵۹.

[۲] هاردی، گادفری‌هرولد.، دفاعیهٔ یک ریاضیدان، ترجمهٔ سیامک کاظمی، انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی، (تهران ۱۳۷۳).

[۳] وینر، نوربرت.، من یک ریاضیدانم، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، (تهران ۱۳٦۸).

[4] Masani, P. R., *Norbert Wiener, 1894-1964.* Birkhauser Verlag, (1995).

[5] Wiener, N., *I am a mathematician, the later life of a prodigy.* The M.I.T. press, cambridge, (1956).


1) Sieglel, A.

بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی شریف، گروه ریاضی
پست الکترونیک: zangeneh@sharif.edu

روح‌الله جهانی‌پور
دانشگاه کاشان، گروه ریاضی
پست الکترونیک: jahanipu@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۱ (پاییز ۱۳۸۲) صص. ۸۷ تا ۸۸

# مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود آنها را به نشانی آقای دکتر محمد صال مصلحیان که در ذیل مسائل آمده است، ارسال فرمایند. بدیهی است که مسائلِ دریافتی، که همراه با حل کامل باشند، به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

**مسألهٔ ۷۰:** بدون استفاده از تفاضلات متناهی، تعداد سه‌تاییهای صحیح $(x,y,z)$ صادق در $x+y=2z$ با شرط $1 \leq x,y,z \leq n$ را بیابید. (آدینه محمد نارنجانی، دانشگاه فردوسی)

**مسألهٔ ۷۱:** فرض کنید $A$ یک ماتریس $n\times n$ باشد و به ازای یک عدد طبیعی $k$، $A^k=0$. ثابت کنید $A^n=0$.

**مسألهٔ ۷۲:** فرض کنید $f$ و $g$ دو تابع حقیقی پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشند و $f\circ g=g\circ f$. ثابت کنید اگر معادلهٔ $f(f(x))=g(g(x))$ دارای جواب باشد، آنگاه معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نیز دارای جواب است.

**مسألهٔ ۷۳:** فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی از مرتبه $p^m$ با زیرگروهی آبلی از شاخص $p$ باشد. ثابت کنید $G$ دارای یک یا $p+1$ زیرگروه آبلی از شاخص $p$ است، و در حالت دوم $|G:Z(G)|=p^2$. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

**مسألهٔ ۷۴:** سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از اعداد حقیقی داده شده است. فرض کنید به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که $x_n\to 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ همگرا باشد. ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگراست.

**مسألهٔ ۷۵:** فضای $X=\mathbb{R}^2$ با متر $d((x,y),(u,v))=\max\{|x-u|,|y-v|\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید هر فضای متریک چهار نقطه‌ای $(Y,\rho)$ را می‌توان به طور طولپا در $X$ نشاند، یعنی یک تابع $\varphi: Y\to X$ وجود دارد که برای هر $y_1,y_2\in Y$، $\rho(y_1,y_2)=d(\varphi(y_1),\varphi(y_2))$.

**مسألهٔ ۷۶:** ثابت کنید مجموعهٔ جواب‌های گویای مثبت معادلهٔ سیالهٔ $2x^3+24xy^2=z^3$ به صورت $\{(x,y,z)|x=2r, y=r, z=4r, r\in\mathbb{Q}, r>0\}$ است.

**مسألهٔ ۷۷:** به چند طریق می‌توان $50!$ را به صورت مجموع حداقل دو عدد صحیح متوالی نوشت؟ (مجید میرزاوزیری، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۷۸: فرض کنید $M$ و $N$ دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که $M^n = 0 = N^n$ و $N^{n-1} \neq 0 \neq M^{n-1}$. ثابت کنید $M$ و $N$ متشابه هستند.

مسألهٔ ۷۹: فرض کنید $X$ یک فضای نرمدار باشد. ثابت کنید تابعک خطی $f : X \to \mathbb{C}$ پیوسته است اگر و فقط اگر زیر مجموعه باز $U$ از $X$ و عدد $t \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشند که $t \notin f(U)$.
(شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی)

**نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۱۱۵۹—۹۱۷۷۵، گروه ریاضی**
**محمد صال‌مصلحیان**