بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۴، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۴

شمارهٔ پیاپی: ۳۵

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ــ۱۳۱۴۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکت کامپیوتری تحت ادیتورِ «فارسی TeX» باشد.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده ــ با ذکر نشانی کامل آن ــ لازم است.
- اصطلاحات ریاضیِ به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادی خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارائه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۲۴، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۴
(تاریخ انتشار: پاییز ۱۳۸۵)
شمارهٔ پیاپی: ۳۵

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.
علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: گودل (Kurt Gödel)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۱

سرمقاله

ویژه‌نامهٔ حاضر، مجموعهٔ سخنرانی‌های کارگاه منطق ریاضی است که در اردیبهشت ۱۳۸۳ در دانشگاه صنعتی اصفهان با حمایت مؤسسهٔ پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش عالی برگزار شد.

هدف از این کارگاه آشناسازی شرکت کنندگان با مباحث و شاخه‌های مختلف منطق ریاضی بود و در راستای آن تلاش شد تا آنجا که در برنامه‌ای دو روزه ممکن است، تقریباً از تمام منطق‌دانان ریاضی کشور جهت سخنرانی عمومی و معرفی اجمالی شاخه‌های مختلف دعوت به عمل آید. صرف‌نظر از دشواری گریزناپذیر در ارائهٔ توصیفی مطالب فنی در ریاضیات، خوشبختانه سخنرانی‌های ارائه شده در جهت هدف ترویجی و آشناسازی کارگاه، مجموعهٔ بسیار ارزشمندی را تشکیل داد که در آنها به زبانی حتی‌المقدور ساده و توصیفی به معرفی زمینه‌های مختلف منطق ریاضی پرداخته شد. البته زمینه‌های بسیار دیگری نیز وجود دارند که قابل گنجاندن در این برنامهٔ دو روزه نبود.

با توجه به ویژگی توصیفی ـ ترویجی سخنرانی‌ها، نظر دوستان بر این قرار گرفت که مجموعهٔ مقالات مربوطه داوری و در صورت امکان در قالب ویژه‌نامه‌ای از فرهنگ و اندیشه در اختیار جامعهٔ ریاضی کشور قرار گیرد. در اینجا شایسته است که از همکاری بسیار خوب انجمن محترم ریاضی ایران و مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی در تحقق این امر تشکر نمایم. همچنین از اساتید عزیز آقایان دکتر محمد اردشیر، دکتر اسفندیار اسلامی، دکتر محمود بینای مطلق، دکتر مسعود پورمهدیان، دکتر سید محمود طاهری، دکتر مجتبی منیری و دکتر مرتضی منیری جهت قبول ارائهٔ سخنرانی، و در اکثر موارد در اختیار قرار دادن متن آن جهت داوری و چاپ در این ویژه‌نامه، صمیمانه سپاسگزارم.
سرانجام از ویراستاران میهمان منصوب نشریه برای این شمارهٔ خاص (دکتر اردشیر، دکتر پورمهدیان، دکتر مجتبی منیری) که به همراه اینجانب این مسؤولیت را به عهده داشتند و نیز همکاران متعددی که داوری مقالات را انجام دادند به نوبهٔ خود قدردانی می‌کنم.

مجتبی آقایی

دبیرکارگاه

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۳ تا ۱۲

نظریهٔ ذهن آفریننده براور

محمد اردشیر

چکیده
در این مقاله نظریهٔ ذهن براور را معرفی می‌کنیم. پس از بیان مبانی فلسفی آن، به صورت‌بندی‌های مختلف آن می‌پردازیم و در خاتمه، چند نتیجهٔ معروف ریاضی آن را به اختصار نام می‌بریم.

۱. مبانی فلسفی نظریهٔ ذهن آفریننده

نظریهٔ ذهن آفریننده[1] یا ریاضی‌دان ایده‌آل[2] در ۱۹۴۸ به وسیلهٔ براور معرفی شد [۲]. در آن‌جا براور به صراحت به فعالّیت ریاضی‌دان ایده‌آل اشاره می‌کند تا مثالی برای یک عدد حقیقی a ارائه کند به طوری که $a \neq ۰$، اما نه $a\#۰$. معنای شهودگرایانهٔ عبارت $a \neq ۰$ همان معنای کلاسیک است، یعنی $\neg a = ۰$، اما محتوای عبارت $a\#۰$ مثبت است، یعنی a از ۰ جداست[3]. به‌طور کلی، می‌گوییم a از b جداست، با نماد $a\#b$، اگر دنباله‌های بنیادی[4] منسوب به آن‌ها، به ترتیب، $< r_n >$ و $< s_n >$، در شرط زیر صدق کند:

$$a\#b \Leftrightarrow \exists k \exists n \forall m (|s_{n+m} - r_{n+m}| > ۲^{-k})$$

توجه کنید که $\neg a\#b$ معادل $a = b$ است. در واقع براور با این مثال دو کار انجام داد، یکی این که اصل مارکف[5]

$$(MP) \qquad \neg\neg\exists x A(x) \to \exists x A(x)$$

که در آن A یک محمول بازگشتی مقدماتی[6] است را رد کرد، دوم این که بر خلاف ادعای گریس[7] در مرجع [٦]، که گفت نقیض یا نفی[8] باید از ریاضیات شهودگرایانه حذف شود، براور نشان داد که

---

1) Creating subject 2) Idealized mathematician 3) Apart 4) Fundemental sequence
5) Markov's principal 6) Primitive recursive 7) G. F. C. Griss 8) Negation

نقیض، همیشه حذف شدنی نیست. برای این که روشن شود چه‌گونه مفهوم ذهن آفریننده در استدلال براور ظاهر می‌شود، شکل خلاصه شده‌ای از برهان براور را مرور می‌کنیم.

فرض کنید A گزاره‌ای باشد که $\neg A \vee \neg\neg A$ دانسته نیست. در ارتباط با این A، ذهن آفریننده دنباله‌ای از اعداد گویا، $< r_n >$، را با دستورالعمل زیر می‌سازد:

(۱) تا زمانی که ذهن آفریننده نه حقیقت A را و نه بطلان آن را (یعنی $\neg A$) تجربه کرده، r_n را صفر فرض می‌کنیم.

(۲) اگر بین انتخاب r_{n-1} و r_n، ذهن آفریننده A یا $\neg A$ را ثابت کرد، برای همهٔ k ها، r_{n+k+1} را 2^{-n} فرض می‌کنیم.

آشکارا $< r_n >$ یک دنبالهٔ بنیادی است و بنابراین یک عدد حقیقی، a، را تعریف می‌کند که برای آن:

(الف) $a \neq 0$. اگر ذهن آفریننده بداند که $a = 0$، به این معناست که هرگز قدم (۲) روی نمی‌دهد، یعنی ذهن آفریننده می‌داند که هرگز A را اثبات نخواهد کرد و هرگز $\neg A$ را نیز اثبات نخواهد کرد. پس ذهن آفریننده می‌داند که $\neg A$ و $\neg\neg A$، که تناقض است. پس $a \neq 0$.

(ب) اگر ذهن آفریننده به طور پیشینی[1] بداند که $a \# 0$، آن گاه $a < 0$ یا $a > 0$. بنابر ساختمان بالا، $a < 0$ ناممکن است. $a > 0$ به این معناست که $a > 2^{-k}$، برای یک k. پس ذهن آفریننده به طور پیشینی قبل از انتخاب r_{k+1}، می داند که $A \vee \neg A$. اما ذهن آفریننده نمی تواند این را از قبل بداند، زیرا هیچ یک از $\neg A$ و $\neg\neg A$ برای او دانسته نیست.

در این استدلال عنصر خودآیینی[2] در ایدهٔ براور دربارهٔ ریاضیات در این فرض به میدان می‌آید که یقین در این که ذهن آفریننده نمی‌تواند A را اثبات کند، به این معناست که $\neg A$ اثبات شده است.

چون براور ریاضیات را فعالیت آزاد ذهن آفریننده تعریف می‌کند، می‌توان ادعا کرد که هر استدلال در ریاضیات شهودگرایی را می‌توان یک «استدلال ذهن آفریننده» خواند. اما به‌طور سنتی، واژه برای نوع خاصی از استدلال که مبتنی بر طرح زیر برای ذهن آفریننده است اختصاص یافت: اگر، برای یک گزارهٔ p، ذهن آفریننده به آن‌جا برسد که بداند هرگز آن را اثبات نخواهد کرد، دلیل کافی برای ذهن آفریننده وجود دارد که نتیجه بگیرد p غلط است. اگر عبارت «ذهن آفریننده p را در زمان n تجربه نمود» را با $\Box_n p$ نمایش دهیم، طرح بالا را می‌توان در فرمول زیر نشان داد:

$$(PIN) \qquad \neg\exists n \Box_n p \rightarrow \neg p$$

(PIN به معنی «از نادانی همیشگی به نفی»[3] است)

از نقطه نظر کلاسیک، که کاملاً قابل تصور است که گزاره‌ای هرگز اثبات نشود اما راست باشد، PIN ناباورانه است؛ و همین طور از دیدگاه گونه‌های دیگر ریاضیات ساختی، که کاملاً قابل تصور

1) a priori 2) Slipsistic 3) From perpetual ignorance to negation

است که گزاره‌ای برهان داشته باشد اما به دلایلی هرگز یافت نشود.

اهمیّت فلسفی PIN تنها این نیست که مثال‌های نقض تولید می‌کند؛ زیرا مثال‌های نقض حتی شکل قوی آن‌ها را بدون PIN می‌توان به‌دست آورد. به طور مثال عبارت زیر

$$\neg\forall x \in \mathbb{R}(x \in \mathbb{Q} \vee x \notin \mathbb{Q})$$

از قضیّهٔ پیوستگی (قضیّهٔ ۴) نتیجه می‌شود [۱۰]. اهمیّت فلسفی PIN در روشی است که برانگیخته است. این روش خواصی از ذهن آفریننده را ظاهر می‌سازد که تاکنون دیده نشده‌اند.

بنا بر نظر هوسرل[۱]، تجربه‌های اشیا، علاوه بر افق درونی، که یک ساختار قصدی[۲] دارند، یک افق بیرونی[۳] نیز دارند که به اشیای دیگر اشاره دارند. این افق بیرونی است که این اشیای متنوع را، البته به کم‌ترین وجه، هماهنگ می‌کند. شیئی که در تجربهٔ بیرونی هیچ شیء دیگر اشاره نشود، کاملاً منزوی[۴] خواهد بود، که از هیچ جایی قابل نزدیک شدن نیست، و بنابراین غیر قابل دسترسی است [۱].

اگر سعی کنیم مفهوم افق بیرونی را به ریاضیات به‌کار بندیم، این سؤال مطرح می‌شود که چگونه تجربه‌های ریاضی منفرد به یکدیگر مربوط می‌شوند. در وهلهٔ اوّل ممکن است به‌نظر آید که پاسخ این سؤال در رابطهٔ استنتاج[۵] نهفته است. اما این رابطه بر پیش‌فرض بنیادی‌تری استوار است، زیرا قبل از آن‌که ذهن آفریننده حکم کند که آیا یک حقیقت تجربه‌شده، نتیجهٔ حقیقت تجربه شدهٔ دیگر است، چیزی باید باشد که هر دوی این‌ها به آن تعلق داشته باشند و این‌ها بتوانند از آن چیز انتخاب شوند. اگر تجربه‌های ریاضی در ساختاری که آن‌ها را به‌هم ارتباط می‌دهد خودشان جای نداشته باشند، مطالعهٔ نظام‌مند آن‌ها ممکن نخواهد بود؛ در واقع، ریاضیاتی نمی‌تواند وجود داشته باشد. پس، ساختاری که فعالیت‌های ذهن آفریننده را هماهنگ می‌کند چیست؟ [۱].

بینشِ درونیِ پایه این است که همهٔ فعالیت‌های متنوع ریاضی ذهن آفریننده در مراحل گسستهٔ جریان واحد زمان انجام می‌پذیرد. از کار براور روشن است که او، با اندیشیدن روی این بینش درونی، چند خاصیّت ساختار را که به آن تحمیل می‌کند تمییز داد. به جای صورت‌بندی صریح آن‌ها، او آن‌ها را در استدلال‌هایش به‌کار برد؛ مثالی از این استدلال را در زیر می‌بینیم. صورت‌بندی اصول از آن کرای‌سِل[۶] و کریپکی[۷] (به نقل از [۱۰]) است:

$$(Sub1) \qquad p \leftrightarrow \exists n \Box_n p$$

به بیان فارسی: p راست است دقیقاً اگر ذهن آفریننده برای آن در لحظه‌ای شاهد کاملی داشته باشد.

1) E. Husserl 2) Intentional 3) Outer horizon 4) Isolated 5) Consequence
6) G. Kreisel 7) S. Kripke

$$(Sub2) \qquad \forall n \forall m (\Box_n p \to \Box_{n+m} p)$$

تجربه‌ها هرگز فراموش نمی‌شوند.

$$(Sub3) \qquad \forall n (\Box_n p \vee \neg \Box_n p)$$

در هر لحظه ذهن آفریننده می‌تواند تصمیم بگیرد که آیا p را تجربه نمود یا نه.

دوشرطی (Sub1) را می‌توان به دو جزء تجزیه کرد:

$$\text{(Sub1a)} \qquad p \to \exists n \Box_n p$$
$$\text{(Sub1b)} \qquad \exists n \Box_n p \to p$$

به‌طور شهودگرایانه، (Sub1a) به شکل زیر توجیه می‌شود: اگر p راست باشد، به این معناست که تجربه شده‌است؛ اما اگر چنین شده، آنگاه ذهن آفریننده می‌تواند عدد m را بسازد که متناظر با لحظه‌ای در زمان است که تجربه اتفاق افتاد. در نهایت، این برای تجربه ضروری است که در لحظهٔ معینی در زمان اتفاق می‌افتد. به‌طور خاص، ریاضیاتی خارج از زمان وجود ندارد.

(Sub2a) به این دلیل درست است که تجربهٔ p برای ذهن آفریننده در نقطه‌ای شرط کافی برای راستی p است.

حال ببینیم که چه‌گونه از (Sub1)، آن‌طور که PIN بیان می‌کند، این نتیجه به‌دست می‌آید که اگر ذهن آفریننده بداند که p هرگز اثبات نخواهد شد، آنگاه p غلط است.

فرض کنید

$$\neg \exists n \Box_n p \qquad (1)$$

یعنی

$$\exists n \Box_n p \to \bot \qquad (2)$$

با ترکیب (Sub1a) و (٢)، داریم

$$p \to \bot \qquad (3)$$

زیرا اگر برهانی برای p داشته باشیم، آنگاه می‌بایست آن را در لحظهٔ معینی مانند m به‌دست آورده باشیم، پس $\Box_m p$، و آنگاه می‌توانیم سور وجودی را معرفی کنیم و مقدم (٢) را به‌دست آوریم. با به کاربردن قاعدهٔ وضع مقدم[1] به (٣) می‌رسیم، که بنابر تعریف، معادل

$$\neg p \qquad (4)$$

1) Modus ponens

است. این به‌طور مشخص برای (Sub1a)، چیزی را که به‌طور کلی راست است نشان می‌دهد، یعنی، عکس نقیض یک شرطی راست نیز به طور شهودگرایانه راست است. در این حالت، عکس نقیض، PIN است؛ پس در چارچوب شهودگرایی، PIN غیر منتظره نیست.

شکل ضعیف‌تری نیز برای (Sub1) وجود دارد،

$$(p \to \neg\neg\exists n \Box_n p) \wedge (\exists n \Box_n \to p)$$

بخش دوم عبارت عطفی فوق همان (Sub1b) است، اما بخش اوّل آن بیان می‌کند که اگر p راست باشد، آنگاه غیرممکن است که ذهن آفریننده آن را هرگز اثبات نکند (ذهن آفریننده آزاد است هر چه را که می‌تواند اثبات کند)؛ به بیان منطق شهودگرایانه می‌توان گفت که ذهن آفریننده آن را در زمانی اثبات می‌کند.

۲. کاربردهای ریاضی نظریهٔ ذهن آفریننده

این که ساختار فعالیت ذهن آفریننده مانند یک دنبالهٔ انتخاب است باعث می‌شود بتوانیم آن را در ریاضیات شهودگرایانه به کار بریم: یک سری نامتناهیِ بالقوه و بی‌کران از مراحل گسسته. آشکار است که براور این همانی ساختاری را می‌شناخت. او آن را در ساختمان مثال‌های نقض مانند آن‌چه اکنون دیدیم، دنباله‌های انتخابی که فعالیت ریاضی را ثبت می‌کنند، به‌کار برد و این همانی ساختاری مذکور را به عنوان یک اصل ریاضی تصریح کرد. ذهن آفریننده به هر گزارهٔ p، یک دنبالهٔ انتخاب α را نسبت می‌دهد که مانند یک گزارش، در آن ذهن آفریننده پیش‌رفت یا کم‌بودهای خود را، در ارتباط با p، ثبت می‌کند:

$$\alpha(n) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } \neg\Box_n p \\ ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس تا زمانی که ذهن آفریننده برای p برهانی به‌دست نیاورد، مقدار α صفر است، و بعد از آن، مقدار آن ۱ است. حال «شِمای کریپکی»[۱] (واژه‌ای که مِی‌هیل[۲] [۸] معرفی کرد) شِمای اصلی است که برای هر گزارهٔ خاص p، استنتاج وجود αی نسبت داده شده را مجاز می‌کند:

$$(KS) \qquad \exists\alpha(p \leftrightarrow \exists x(\alpha(x) = ۱))$$

مِی‌هیل در ۱۹۶۷ خاطر نشان کرد که براور KS را در ۱۹۵۴، به طور ضمنی بیان کرد، اما هرگز از آن استفاده نکرد. به چند دلیل KS قابل توجه است:

- کاربردی از دنباله‌های انتخاب را خارج از آنالیز نشان می‌دهد؛

1) Kripke's Schema 2) Myhill

- نشان می‌دهد که چگونه ذهن آفریننده می‌تواند در استدلال دربارهٔ فعالیت خود، از اشیای نوعاً شهودگرایانه، استفاده کند،
- برای ساختن مثال‌های نقض کافی است، و هر چه از (Sub1-3) به دست آید در KS وجود دارد. به همین دلیل KS در اغلب نوشته‌ها موجود است.

دلیل دیگر این که KS به ذهن آفریننده و پارامتر زمان به‌طور صریح اشاره ندارد، آن است که بعضی‌ها با این مفاهیم احساس راحتی نمی‌کنند. اما به‌طور شهودگرایانه، شِمای کریپکی با همین مفاهیم توجیه می‌شود.

برای این که بتوانیم به بعضی نتایج ریاضی KS اشاره کنیم، چند اصل از اصول آنالیز ساختی را یادآوری می کنیم.

۱ــ اصل پیوستگی ضعیف[۱]:

$$(WC-N) \qquad \forall\alpha\exists x A(\alpha,x) \to \forall\alpha\exists x\exists y\forall\beta\in\bar{\alpha}x A(\beta,y)$$

این اصل از اصول اساسی براور برای آنالیز شهودگرایی است. توجیه غیر رسمی آن از این قرار است: اگر برای هر دنبالهٔ $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، بتوانیم عدد طبیعی n را بیابیم که رابطهٔ $A(\alpha,n)$ برقرار باشد، پس برای تعداد متناهی از نتایج α، این عدد طبیعی یافت می‌شود، بنابراین هر دنبالهٔ دیگری مثل β، که در این تعداد متناهی نتیجه با α یکسان است، در همان رابطه صدق می‌کند.

۲ــ تز چرچ[۲]:

$$(CT) \qquad \forall\alpha\exists x\forall y\exists z(Txyz \wedge Uz=\alpha y)$$

با بیانی ساختی‌گرایانه، تز چرچ به این معناست که دنباله‌های قانون‌مانند[۳]، همان دنباله‌های بازگشتی[۴]اند.

۳ــ اصل یک‌نواختی برای اعداد[۵]:

$$(UP) \qquad \forall X\exists n A(X,n) \to \exists n\forall X A(X,n)$$

این اصل می‌گوید که از نظر ساختی، یک مجموعه از اعداد طبیعی، یک کلیّت بسیار پراکنده است، به طوری که اگر بتوان به هریک از این مجموعه‌ها، عددی طبیعی نسبت داد، این نسبت دادن تنها به شکل ثابت قابل تصور است.

۴ــ اصل یک‌نواختی برای توابع[۶]:

1) Weak continuity principle 2) Church's thesis 3) Lawlike 4) Recursive
5) Uniformity principle for numbers 6) Uniformity principle for functions

$$(UP_1) \qquad \forall X \exists \alpha A(X,\alpha) \rightarrow \exists \alpha \forall X A(X,\alpha)$$

توجیه این اصل شبیه اصل یک‌نواختی برای اعداد است. برای اثبات قضایای ۱ تا ۴ به مرجع [۱۰] رجوع کنید.

قضیهٔ ۱. $KS + WC_N$ نتیجه می‌دهد UP.

قضیهٔ ۲. KS نتیجه می‌دهد $\neg UP_1$ و $\neg CT$.

قضیهٔ ۳. $KS + MP$ نتیجه می‌دهد PEM (اصل طرد شق ثالث).

این قضیّه نشان می‌دهد که با حضور اصل مارکف، با پذیرش نظریهٔ ذهن آفریننده، ریاضیات شهودگرایی به ریاضیات کلاسیک تبدیل می‌شود. قبل از این که به نتایج دیگر نظریهٔ ذهن آفریننده بپردازیم، قضیّهٔ معروف براور را در آنالیز شهودگرایی یادآوری می‌کنیم:

قضیهٔ ۴. WC-N نتیجه می‌دهد که هر تابع حقیقی پیوسته است.

یکی از نتایج شگفت‌انگیز قضیّهٔ براور در آنالیز شهودگرایی دربارهٔ ساختار پیوستار، $\mathbb{R}$، در نتیجهٔ بعدی است. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه را شکافتنی[1] گویند اگر بتوان آن را به شکل اجتماع دو مجموعهٔ مجزا نوشت.

قضیهٔ ۵. WC-N نتیجه می‌دهد که $\mathbb{R}$ ناشکافتنی است.

برهان. از ترکیب دو قضیّهٔ بالا به دست می‌آید. □

فان دالن با استفاده از KS نشان داد که زیرمجموعه‌های بیش‌تری از $\mathbb{R}$ ناشکافتنی‌اند. زیرمجموعهٔ X را منفی گوییم اگر $X^{cc} = X$ باشد.

برای اثبات قضیهٔ ٦ به مرجع [۴] و برای اثبات قضیهٔ ۷ به مرجع [۵] رجوع کنید.

قضیهٔ ٦. KS نتیجه می‌دهد که هر زیرمجموعهٔ چگال و منفی از $\mathbb{R}$ ناشکافتنی است.

به‌علاوه فان دالن شکل زیر از عکس قضیهٔ ۵ را ثابت کرد:

قضیهٔ ۷. KS و قضیهٔ «$\mathbb{R}$ ناشکافتنی است» نتیجه می‌دهد که هیچ تابع ناپیوستهٔ حقیقی وجود ندارد.

بر خلاف این نتایج که نشان می‌دهند نتایج ریاضی مفهوم ذهن آفریننده می‌تواند چه‌قدر قدرتمند

1) splittable

باشد، فان دالن حدس زد در قلمرو حساب شهودگرایی، HA، پذیرش مفهوم ذهن آفریننده، چندان مؤثر نیست:

حدس فان دالن $HA + KS$ یک توسیع پایستار[1] روی HA است.

کریفستُف در ۱۹۹۹ حدس بالا را برای وقتی که اصل استقراء در HA به فرمول‌های حسابی[2] محدود شود، ثابت کرد، حدس فان دالن برای حالت کلی هم‌چنان باز است.

مثال زیر از ترولِسترا[3][۹] نشان می‌دهد که در استفاده از نظریهٔ ذهن آفریننده باید احتیاط لازم را به خرج داد.

ذهن آفریننده در هر مرحله از فعالیت خود نتیجهٔ جدیدی به‌دست می‌آورد، علاوه بر آن که همهٔ نتایج قبلی در ذهن حفظ می‌شود (Sub2). ذهن آفریننده می‌تواند فهرستی از این نتایج جدید تهیه کند، $P(۰)$، $P(۱)$، $P(۲)$، ...برای مثال، $P(٦)$ می‌تواند «$۴ = ۲ + ۲$» باشد، $P(۱۹۹)$ می‌تواند «انتخاب بعدی در دنبالهٔ بی‌قانون[4] γ، ۳ است» باشد، $P(۲۵۵۳٦)$ می‌تواند «π ناگویاست» باشد، و غیره؛ به طور خاص، بعضی از آن‌ها عبارت خواهد بود از این حکم (یا تصمیم) که دنبالهٔ معین α با دستورالعملی ثابت باشد (که ممکن است به فعالیت ذهن آفریننده ارجاع شود، و بنابراین فراتر از قانون مانندِ اکید باشد). چنین نتیجه‌ای را با $R(\alpha)$ نشان می‌دهیم. حال ذهن آفریننده می‌تواند دنباله β چنین تعریف کند:

$$\beta(n) = \begin{cases} \alpha(n) + ۱ & \text{اگر } P(n)\text{، } R(\alpha) \text{ باشد، برای } \alpha \text{ ایی} \\ ۰ & \text{اگر } P(n) \text{ از گونهٔ دیگری باشد} \end{cases}$$

در واقع، دنبالهٔ β یک وسیلهٔ بایگانی است، که زمان‌هایی را که ذهن آفریننده حکم می‌کند که یک دنبالهٔ انتخابِ داده شده با دستورالعملی ثابت است، ثبت می‌کند. خود دنبالهٔ β با یک دستورالعمل، ثابت است. اما این به تناقض منجر می‌شود که اگر $R(\beta)$ راست باشد، آنگاه بنابر (Sub1a)،

$$\exists n \Box_n R(\beta)$$

فرض کنیم $R(\beta)$ در زمان k اثبات شده است:

$$\Box_k R(\beta)$$

آنگاه $P(k)$، $R(\beta)$ است، بنابراین، بنابر تعریف β،

1) Conservative extension

2) Arithmetical formulas منظور فرمول‌هایی است که در آن از سور روی متغیرهای مجموعه‌ای اجتناب شده است.

3) A. S. Troelstra 4) Lawless

$$\beta(k) = \beta(k) + ۱$$

که تناقض است. مشکل از غیرمحمولی بودن[1] تعریف β ناشی می‌شود: دنبالهٔ β برحسب همهٔ فعالیت‌های ذهن آفریننده تعریف شده است، اما تولید چنین دنباله‌ای خود یکی از آن‌هاست.

برای رفع این تنازع عجالتاً می‌توان روش خود راسل را برای رفع تنازع راسل به کار بست، یعنی فعالیّت‌های ذهن آفریننده را در یک سلسله مراتب مرتب کرد [۱].

اما این کار تحمیل یک سلسله مراتب از جانب ذهن آفریننده روی فعالیت خودش است. شاید به جای آن مناسب‌تر باشد که این عمل را شناخت یک سلسله مراتب از جانب ذهن آفریننده بدانیم. به همین دلیل بود که براوِر این شرط را قرار داد که یک نوع، خاصیّتی است که «برای هویت‌های ریاضی که قبلاً به‌دست آمدند قابل فرض باشد» [۳].

این مقاله را با عبارتی از تروِلسترا پایان می‌دهیم: «باید بگوییم که نظریهٔ ذهن آفریننده، محرک، جذاب، و خطرناک است؛ نمایش‌گر نتایج افراطی ذهن‌گرایی[2] شهودگرایانه است؛ به همین دلیل، یقیقاً نیازمندِ تحقیق بیش‌تر است.» [۹]

مراجع

[1] Ma. van Atten, *On Brouwer*, Wadworth Philosophers Series, 2004.

[2] L. E. Y. Brouwer, Essential negative properties (Dutch), *Indagations Math.*, 4 (1948), 322-3.

[3] L. E. Y. Brouwer, Historical background, principles and methods of intuitionism, *South African Journal of Science*, 49 (1952) 139-142.

[4] D. van Dalen, Intuitionistic logic, In L. Globe, editor, *Blackwell guide to philosophical logic*, Blackwell, Oxford, (2001) 224-257.

[5] D. van Dalen, From Brouwerian counterexamples to creating subject, *Studia Logica*, 62, (1999), 305-314.

[6] G. F. C. Griss, Negationless intuitionistic mathematics, *Niew. Archief voor Wiskund* 3, (1946) 134-142.

[7] V. Krivstov, Note on extension of Heyting arithmetic by adding the "creative subject", *Arch. Math. Logic* 38, (1999), 145-152.

1) Impredicativity 2) Subjectivism

[8] J. Myhill, Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis, *Logique et Analyse*, 9. (1967), 280-297.

[9] A. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, Springer, Berlin, 1969.

[10] A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, An Introduction, Vol. I and II, North-Holland, 1988.

محمد اردشیر

دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

پست الکترونیک mardeshir@sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۱۳ تا ۳۱

منطق‌های غیرکلاسیک از دیدگاه جبری

اسفندیار اسلامی

چکیده

در این مقاله مروری داریم بر منطق کلاسیک و جبر مربوط به آن، سپس مفهوم جبری کردن منطق‌های غیرکلاسیک را مورد مطالعه قرار داده و مثال‌هایی از آن‌ها را با دید جبری می‌آوریم. جبر منطق چند ارزشی پایهٔ BL را مطالعه کرده تعمیم‌های آن را بررسی می‌کنیم. در پایان آخرین تحقیقات بر روی این تعمیم‌ها را مطرح می‌کنیم.

۱. مقدمه

منطق جبری[1] را همانطور که از نامش برمی‌آید می‌توان به دو بخش اصلی تقسیم کرد. بخش اول به مطالعهٔ جبرهایی می‌پردازد که در رابطه با منطق (ها) هستند. به عنوان مثال جبرهایی که به نوعی از منطق‌ها ناشی می‌شوند. با توجه به این که در این بخش جبرها مورد مطالعه قرار می‌گیرند، روش‌ها اصولاً جبری هستند، تا آنجا که می‌توان این بخش را متعلق به «حوزهٔ جبر» دانست. در بخش دوم با مطالعه و ساختن پلی بین «حوزهٔ جبر» و «حوزهٔ منطق» سر و کار داریم. در واقع با روش‌شناسی حل مسائل، فرآیند زیر را دنبال می‌کنیم:

۱ — ترجمهٔ مسائل منطق به مسائل جبری که جبری کردن نام دارد؛

۲ — حل مسائل جبری که در مرحلهٔ اول به دست می‌آیند؛

۳ — ترجمهٔ نتیجهٔ مرحله دوم و بازگشت به منطق.

در این بخش تأکید بر مرحلهٔ ۳ می‌باشد زیرا بدون آن می‌توان به کارها یا بازی‌های عمدتاً لذت بخش ۱ و ۲ پرداخت و وظیفهٔ خطیر و خسته کنندهٔ ۳ را فراموش کرد. البته این پل را می‌توان به شکل دیگر نیز مورد استفاده قرار داد یعنی حل مسائل جبر از طریق منطق هر چند که کمتر به آن پرداخته می‌شود.

---

1) Algebraic Logic

امروزه منطق جبری موضوعی بسیار گسترده است و تحقیقات بسیار وسیع و دامنه‌داری در آن صورت گرفته و در حال انجام است. جستجو برای پیداکردن روابط بین منطق و جبر به تحقیقات بول و پیروانش برمی‌گردد. تحقیقات آنها منجر به چیزی شد که امروزه جبر بولی نام دارد. ارتباط نزدیک بین منطق کلاسیک و نظریهٔ جبرهای بولی از مدتها پیش شناخته شده است. یکی از نقاط عطف در مطالعهٔ جبری منطق، روشی است که لیندنبام و تارسکی معرفی کردند، آنها فرمول‌ها یا کلاس‌های هم‌ارزی فرمول‌ها را به عنوان عناصری از یک جبر مجرد در نظر گرفتند. به این موضوع در قسمت دوم می‌پردازیم. در قسمت سوم این مقاله منطق‌های غیرکلاسیک و شاخصه‌های آن را مرور کرده و به جبری کردن این نوع منطق‌ها به طور عام می‌پردازیم. در قسمت چهارم منطق چندارزشی پایه را همراه با جبر آن و خواص مربوطه بررسی می‌کنیم. در آخرین قسمت تعمیم‌های مختلف این جبر با تحقیقات اخیری که روی آنها انجام شده است، آورده می‌شود.

جبری کردن منطق کلاسیک

منظور ما از منطق کلاسیک همان منطق دو ارزشی ریاضی است که می‌توان آن را به دو بخش منطق کلاسیک گزاره‌ها و منطق کلاسیک محمولات تقسیم کرد.
الفبای زبان منطق کلاسیک گزاره‌ها که L نامیده می‌شود، شامل مجموعه‌ای شمارش‌پذیر از علائم متغیر گزاره‌ای مانند $V = \{A_۱, A_۲, \ldots\}$ است که نمایشگر جملات ساده (اتمی) هستند، به علاوه مجموعه‌ای از علائم رابط $\{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ و پرانتزها. مجموعهٔ فرمول‌های این منطق را F نامیده و چنین تعریف می‌کنیم:

(a) هر علامت متغیر گزاره‌ای یک فرمول است؛

(b) اگر $\alpha, \beta \in F$ آنگاه $(\neg\alpha)$، $(\alpha \vee \beta)$، $(\alpha \wedge \beta)$، $(\alpha \to \beta)$ و $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ در F هستند؛

(c) هیچ عبارتی فرمولی نیست مگر این که از (a) یا (b) به دست آمده باشد.

هر تابع $v : V \to \{۰, ۱\}$ یک ارزش‌دهی به نمادهای جمله‌ای در V نام دارد که می‌توان آن را به صورت منحصر به فردی به $\bar{v} : F \to \{۰, ۱\}$ تعمیم داد. این تعمیم با توجه به جدول‌های ارزش درستی گزاره‌ها انجام می‌شود.
هر جدول درستی را می‌توان به عنوان تابعی از $\{۰, ۱\}^n \to \{۰, ۱\}$ که در آن $n = ۱$ برای جدول درستی $\neg$ و $n = ۲$ برای جدول‌های درستی رابط‌های دوتایی $\vee$ و $\wedge$ و $\to$ و $\leftrightarrow$ است در نظر گرفت.

این حساب یا منطق گزاره‌ها اصل موضوعی شده است بدین معنی که براساس مشخصات و مفاهیم اولیهٔ این منطق از جمله دوارزشی بودن، قانون‌های ردشق ثالث $(\alpha \vee \neg\alpha)$ و قانون تناقض $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ می‌توان مجموعهٔ کوچکی از تاتولوژی‌ها (فرمول‌های همیشه راست) را به عنوان اصول موضوعه و چند قاعده را به عنوان قواعد استنتاج انتخاب کرد که اجازهٔ نتیجه‌گیری بقیهٔ تاتولوژی‌ها از اصول موضوعهٔ مفروض را بر حسب رابط‌های انتخاب شده صادر می‌کند. شناخته‌شده‌ترین قواعد

اصل موضوعی کردن منطق گزاره‌ها، قاعدهٔ جایگزینی و قاعدهٔ قیاس استثنایی هستند که دومی فقط وقتی به کار برده می‌شود که $\to$(استلزام) یکی از رابطهای اولیهٔ دستگاه باشد. اصول موضوعهٔ این منطق را که شامل هر پنج رابط هستند می‌توان در کتاب‌های مقدماتی منطق ریاضی مشاهده کرد [۱۴،۷] و برای جلوگیری از اطالهٔ کلام از ذکر آنها خودداری می‌کنیم. فقط یادآوری می‌شود که می‌توانیم به جای پنج رابط مقدماتی مجموعهٔ کوچک‌تری از رابطها مثلاً $\{\neg,\wedge,\vee\}$ و $\{\neg,\wedge\}$، $\{\neg,\vee\}$ و یا $\{\neg,\to\}$ را به عنوان مجموعه‌ای کارساز یا تمام از رابطها [۷] به عنوان رابطهای اولیه در نظر بگیریم و واضح است که در آن صورت اصول موضوعهٔ کمتری برای اصل موضوعی کردن و سپس استنتاج‌ها نیاز داریم.

پس از معرفی اصول موضوعه و قواعد استنتاج مفاهیمی از قبیل اثبات، قضیه، هم ارزی و $\cdots$ قابل تعریف هستند که به همان دلیل فوق از بیان آنها خودداری کرده و به کتاب‌های [۷ و ۱۴] ارجاع می‌دهیم.

برای تشریح سادهٔ کار بول به مجموعهٔ توانی مجموعهٔ مرجع U نگاه می‌کنیم:

$$P(U)=\{X : X\subseteq U\}$$

می‌توان هر مجموعهٔ $X\in P(U)$ را با تابعی از U به مجموعهٔ ارزش‌های منطقی $\{۰,۱\}$ که تابع مشخصهٔ آن نام دارد معین کرد یعنی

$$X(a)=\begin{cases} ۱ & a\in X \text{ اگر} \\ ۰ & a\notin X \text{ اگر}\end{cases}$$

به طوری که معادلهٔ $X(a)=۱(۰)$ را می‌خوانیم «$a\in X$ راست (دروغ) است». با این تعریف، U و ϕ به عنوان توابع ثابت با مقادیر ۱ و ۰ هستند. با فرض تابع داده شده، عملگرهای مکمل ــ، اجتماع $\cup$ و $\cap$ را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد. فرض کنیم $a\in U$:

$$\begin{aligned} -X(a) &= ۱-X(a)\\ X\cup Y(a) &= max\{X(a),Y(a)\}\\ X\cap Y(a) &= min\{X(a),Y(a)\}\end{aligned}$$

بعد، اگر رابط $\subseteq$ را به طریق زیر تعریف کنیم:

«$X\subseteq Y$ اگر و تنها اگر $X(a)\leq Y(a)$ برای هر $a\in U$»

آنگاه $(P(U),\subseteq)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب می‌شود که در آن $X\cup Y$ به عنوان کوچک‌ترین کران بالا و $X\cap Y$ به عنوان بزرگ‌ترین کران پایین مجموعهٔ $\{X,Y\}$ ظاهر می‌شوند. بنابراین $(P(U),\cap,\cup)$ مشبکه‌ای است که دارای بزرگترین عضو U و کوچک‌ترین عضو ϕ است. علاوه بر آن این مشبکه توزیع‌پذیر بوده و اگر عملگر یکتایی ــ را به معنی زیر اضافه کنیم:

$$X\cup -X=U \quad \text{و} \quad X\cap -X=\phi$$

آنگاه جبر $(P(U), \cap, \cup, -, ۰, ۱)$، جبری است که مشبکهٔ مربوط به آن توزیع‌پذیر و مکمل دار است. امروزه یک جبر بولی به عنوان یک مشبکهٔ مکمل‌دار و توزیع پذیر که بزرگ‌ترین عضو ۱ (واحد) و کوچک‌ترین عضو ۰ (صفر) دارد در نظر گرفته می‌شود. بنابراین هر جبر مجردی مانند $(L, \wedge, \vee, \neg, ۱, ۰)$ را که در شرایط مربوطهٔ فوق صدق کند یک جبر بولی می‌نامند. جبر دو عضوی زیر

$$B_۲ = \{\{۰, ۱\}, \vee, \wedge, \neg, ۱, ۰)\}$$

همراه با عملگرهای تعریف شده در جدول‌های درستی، ساده‌ترین جبر بولی است. قضیه‌های نمایش، روش‌های متفاوتی برای تشریح جبرهای بولی به عنوان ساختارهای جبری خاص مطرح می‌کنند. مثلاً نمایش جبرهای بولی به‌وسیلهٔ میدانی از مجموعه‌ها و یا نمایش هر جبر بولی به صورت زیرجبری از حاصلضرب دکارتی تعدادی $B_۲$. برای اطلاع از خواص بیشتر جبرهای بولی و نقش آنها به [۲] مراجعه کنید.

حال، رابطهٔ $\approx$ را روی F، مجموعهٔ فرمول‌های منطق کلاسیک گزاره‌ها، چنین تعریف می‌کنیم: برای هر $\alpha, \beta \in F$ داریم:

«$\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \leftrightarrow \beta$ تاتولوژی باشد»

به این معنی که $\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$ برای هر ارزشدهی v. این رابطه یک رابطهٔ هم ارزی یا دقیق‌تر یک رابطهٔ هم‌نهشتی نسبت به عملگرهای $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ می‌باشد. مجموعهٔ کلاس‌های هم نهشتی را با $F/\approx$ و کلاس هم نهشتی $\alpha \in F$ را با $|\alpha|$ نمایش داده و روابط زیر را روی آن تعریف می‌کنیم:

$$-|\alpha| = |\neg\alpha|$$
$$|\alpha| \cup |\beta| = |\alpha \vee \beta|$$
$$|\alpha| \cap |\beta| = |\alpha \wedge \beta|$$

و به علاوه قرار می‌دهیم $|\alpha \wedge \neg\alpha| = ۰$ و $|\alpha \vee \neg\alpha| = ۱$. به سادگی دیده می‌شود که چون $\approx$ هم‌نهشتی است پس روابط فوق عملگرهایی خوش تعریف هستند و این عملگرها و ثابت‌ها در خواص مربوط به جبرهای بولی صدق می‌کنند و در نتیجه جبر زیر

$$L^* = (F/\approx, \cup, \cap, -, ۱, ۰)$$

یک جبر بولی است که جبر لیندنبام[1] منطق کلاسیک نامیده می‌شود. از ساختار ارائه شدهٔ فوق بلافاصله می‌توان دریافت که به هر طرح تاتولوژی در منطق گزاره‌های L یک تساوی در L^* نسبت داده می‌شود و برعکس هر تساوی در L^* مشخص کنندهٔ یک طرح تاتولوژی در L است. مثلاً این رابطه بین فرمول‌های $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ در L و تساوی $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (y \cap z)$ در جبر بولی برقرار است. چون جبر L^* یک جبر آزاد در ردهٔ

1) Lindenbaum

تمام جبرهای بولی است [۱۸] هر تساوی که در L^* برقرار باشد در هر جبر بولی دیگر برقرار است.
حال روش فوق را با تغییراتی در مورد منطق کلاسیک محمولات یا منطق دوارزشی مرتبهٔ اول به کار می‌بریم و جبر آن را معین می‌کنیم.
فرض کنیم L یک زبان منطق محمولات است. الفبای این زبان شامل علائمی برای متغیرها و رابط‌های $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$، پرانتزها، علامتی برای تساوی (اختیاری)، علائم تابعی، علائم محمولی، علائم ثابت و سورهای $\forall$ و $\exists$ می‌باشد. در این زبان مجموعهٔ ترم‌ها و فرمول‌ها به طور استقرایی تعریف می‌شوند. مفاهیم اثبات، استنتاج، قضیه، تعبیر، صدق، اعتبار، مدل و غیره به صورتی که در هر کتاب منطق شامل حساب محمولات باشد می‌آیند [۷و۱۴] و ما از ذکر تعریف‌ها خودداری می‌کنیم مگر این که واقعاً لازم باشد. فرض کنیم F مجموعهٔ فرمول‌ها و T مجموعهٔ ترم‌ها باشند.

ابتدا در جبر $(F, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم. برای هر فرمول، $\alpha, \beta \in F$، $\alpha \sim \beta$ اگر و تنها اگر یکی از آنها با تغییر متغیرهایی پابند از دیگری به دست آید. این یک رابطهٔ هم‌نهشتی روی F است و گوییم α و β هم نهشت هستند. مثلاً اگر $\alpha(x,y)$ یک فرمول باشد $\exists z\alpha(z,y) \sim \exists t\alpha(t,y)$ ولی $\exists t\alpha(z,t) \not\sim \exists t\alpha(t,y)$. حال مجموعهٔ کلاس‌های هم‌نهشتی را با $\bar{F}$ نمایش داده و جبر $(\bar{F}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ را در نظر می‌گیریم. این جبر انتظارات ما را در رابطه با منطق محمولات برآورده نمی‌کند، لذا به این جبر عملگرهای بی‌نهایت $\bigwedge$ و $\bigvee$ را اضافه کرده و جبر تعمیم یافتهٔ $(\bar{F}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bigwedge, \bigvee)$ را که در آن $\bigwedge$ و $\bigvee$ دارای دامنهٔ مشترک Q هستند اختیار می‌کنیم. مجموعهٔ S در Q است اگر و تنها اگر فرمول $\alpha(y)$ وجود داشته باشد به طوری که S متشکل از تمام اعضایی به صورت $|\alpha(t)| \in \bar{F}$ باشد که در آن $t \in T$. حاصل اعمال $\bigwedge$ و $\bigvee$ روی S به صورت $\bigwedge_{t\in T} |\alpha(t)|$ و $\bigvee_{t\in T} |\alpha(t)|$ و نتیجه با معادلات زیر تعریف می‌شود [۱۹]: $|\forall x\alpha(x)| = \bigcap_{t\in T} |\alpha(t)|$ و $|\exists x\alpha(x)| = \bigcup_{t\in T} |\alpha(t)|$ که در آن x یک متغیر پابند است که در $\alpha(y)$ ظاهر نمی‌شود.
این جبر، جبر سوری زبان L یا به طور خلاصه Q–جبر L نامیده می‌شود [۱۹]. این جبر یک جبر تعمیم‌یافته آزاد در ردهٔ تمام جبرهای تام[1] مشابه است [۱۹].
بعد از این هم‌نهشتی که در واقع تغییری در فرمول‌های باز نمی‌دهد (فرمولی را باز می‌نامیم که در آن هیچ متغیری پابند نباشد)، مجدداً جبر $(F, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ را در نظر گرفته و رابطهٔ $\approx$ را روی F چنین تعریف می‌کنیم:

«$\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \leftrightarrow \beta$ فرمولی معتبر باشد.»

فرمول γ را معتبر نامیم هر گاه در هر ساخت تعبیری با هر ارزشدهی به متغیرهای آزاد در آن صادق باشد. بنابراین $\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر در هر ساخت تعبیری برای زبان مورد بحث با هر ارزش‌گذاری، اگر α صادق باشد آنگاه β صادق است و برعکس [۷]. رابطهٔ $\approx$ یک رابطهٔ

1) complete

هم‌نهشتی روی F است و این خاصیت را دارد که اگر $\alpha \sim \beta$ آنگاه $\alpha \approx \beta$. مجموعهٔ کلاس‌های هم‌نهشتی را با $F/\approx$ نمایش داده و عملگرهای $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ را روی آن چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\neg||\alpha|| = ||\neg\alpha|| \\
&||\alpha|| \wedge ||\beta|| = ||\alpha \wedge \beta|| \\
&||\alpha|| \vee ||\beta|| = ||\alpha \vee \beta|| \\
&||\alpha|| \rightarrow ||\beta|| = ||\alpha \rightarrow \beta|| \\
&||\alpha|| \leftrightarrow ||\beta|| = ||\alpha \leftrightarrow \beta||
\end{aligned}$$

به این جبر عملگرهای بی‌نهایت $\bigwedge$ و $\bigvee$ را اضافه کرده و آن را تبدیل به یک جبر تعمیم‌یافته می‌کنیم، همانطور که در مورد $\bar{F}$ گفته شد و نتایج را بیان کردیم. جبر تعمیم یافتهٔ حاصل، عبارت خواهد بود از:

$$\Big(F/\approx, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bigwedge, \bigvee\Big)$$

که در آن برای هر فرمول $\alpha(x)$ داریم:

$$||\exists x \alpha(x)|| = \bigvee_{t \in T} ||\alpha(t)||$$

و

$$.||\forall x \alpha(x)|| = \bigwedge_{t \in T} ||\alpha(t)||$$

ثابت می‌شود که این جبر یک جبر تعمیم یافتهٔ آزاد در ردهٔ تمام جبرهای بولی تام است و مجموعهٔ تمام عناصر به صورت $||\alpha||$ که در آن α یک فرمول اتمی است مجموعهٔ مولد آن است [۱۹]. بنابراین جبر حساب محمولات دو ارزشی یک جبر بولی تام است و چون این جبر آزاد است، به هر طرح فرمول معتبر در منطق محمولات یک تساوی در جبر بولی نسبت داده می‌شود و برعکس. مثلاً برای این که ثابت کنیم فرمول $(\forall x \alpha(x) \rightarrow \beta) \rightarrow \exists x(\alpha(x) \rightarrow \beta)$ در منطق کلاسیک محمولات معتبر است، ملاحظه می‌کنیم که تساوی زیر که نظیر فرمول فوق در یک جبر بولی تام است برقرار است:

$$\bigwedge_{t \in T} a_t \rightarrow b = \bigvee_{t \in T} (a_t \rightarrow b).$$

منطق‌های غیرکلاسیک

یک منطق، عموماً شامل زبان صوری شدهٔ L، مجموعه‌ای از تاتولوژی‌ها به عنوان اصول موضوعهٔ A، مجموعه‌ای از قواعد استنتاج R و عملگری به نام عملگر نتیجهٔ C است. عملگر نتیجهٔ

C مربوط به زبان L دارای نقش ویژه‌ای در تشخیص نوع منطق می‌باشد. این عملگر، تابعی از مجموعهٔ توانی فرمول‌های زبان L، یعنی از ۲^F به ۲^F می‌باشد که شرایط بستاری دارد، به این معنی که برای هر $S \subseteq F$ داریم:

(۱) $S \subseteq C(S)$؛

(۲) اگر $S_۱ \subseteq S_۲$ آنگاه $C(S_۱) \subseteq C(S_۲)$؛

(۳) $C(C(S)) = C(S)$.

مثلاً اگر برای منطق کلاسیک مرتبهٔ صفر و یا مرتبهٔ یک (حساب گزاره‌ها یا حساب محمولات) رابط‌ها $\vee, \wedge, \rightarrow$ باشند اصول موضوعه عبارت خواهند بود از:

$(A_۱)\quad ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$

$(A_۲)\quad (\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta))$

$(A_۳)\quad (\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta))$

$(A_۴)\quad ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)))$

$(A_۵)\quad ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$

$(A_۶)\quad ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta)$

$(A_۷)\quad ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \wedge \beta))))$

$(A_۸)\quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma))$

$(A_۹)\quad ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$

$(A_{۱۰})\quad ((\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta)$

$(A_{۱۱})\quad ((\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha))$

$(A_{۱۲})\quad (\alpha \wedge \neg\alpha)$

در حساب گزاره‌ها تنها قاعدهٔ استنتاج قاعده قیاس استثنایی (MP) است و در حساب محمولات قواعد استنتاج عبارتند از:

$(r_۱)$ قیاس استثنایی: $\dfrac{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta)}{\beta}$

$(r_۲)$ جایگزینی برای متغیرهای آزاد: $\dfrac{\alpha(x_۱, \ldots, x_n)}{\alpha(t_۱, \ldots, t_n)}$

$(r_۳)$ معرفی سور وجودی: $\dfrac{(\alpha(x) \rightarrow \beta)}{(\exists x \alpha(x) \rightarrow \beta)}$

$(r_۴)$ معرفی سور عمومی: $\dfrac{(\alpha \rightarrow \beta(x))}{\alpha \rightarrow \forall x \beta(x))}$

$(r_۵)$ حذف سور وجودی: $\dfrac{(\exists x \alpha(x) \rightarrow \beta)}{\alpha(x) \rightarrow \beta}$

(r_6) حذف سور عمومی: $\dfrac{(\alpha \to \forall x\beta(x))}{(\alpha \to \beta(x))}$.

عملگر نتیجهٔ C در هر منطق به روش زیر تعریف می‌شود: برای هر زیرمجموعهٔ S از فرمول‌ها، $C(S)$ مجموعهٔ تمام فرمول‌هایی است که از اجتماع S و اصول موضوعه توسط قواعد استنتاج نتیجه می‌شوند که در هر منطقی با توجه به خواص معنایی آن شکل خاصی می‌گیرد. مثلاً در منطق کلاسیک

$$C(S) = \{\beta \in F : S \models F\beta\}$$

که در آن $S \models F\beta$ به این معنی است که β نتیجهٔ منطقی فرمول‌ها در S است یا برای هر ارزشدهی به نمادهای گزاره‌ای در S و β، هرگاه فرمول‌های در S ارزش ۱ داشته باشند، آنگاه β هم ارزش ۱ دارد (منطق گزاره‌ها) و یا در هر تعبیری با هر ارزشدهی اگر فرمول‌های در S صادق باشند، آنگاه β هم صادق است (منطق محمولات). عملگر نتیجهٔ C که با روش واحدی برای همهٔ منطق‌ها تعریف می‌شود و شکل خاصی برای هر منطق خاص دارد، مشخص کنندهٔ آن منطق خواهد بود. واضح است که منطق کلاسیک تنها منطقی است که در تعریف اخیر C صدق می‌کند. از این رو منطق کلاسیک تنها منطقی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.

اما از دیدگاه نظری می‌توانیم با انتخاب مجموعه‌های دیگری از فرمول‌ها در چارچوب عمومی، منطق‌های دیگری داشته باشیم. اگر آن‌ها با منطق کلاسیک «فرق» داشته باشند، به آن‌ها منطق‌های غیرکلاسیک یا عملگرهای نتیجهٔ غیرکلاسیک می‌گوییم. به عنوان مثال اگر مجموعهٔ اصول موضوعه A' را زیرمجموعهٔ اکیدی از $A_1 - A_{12}$ انتخاب کنیم آنگاه یک منطق غیرکلاسیک با عملگر نتیجهٔ C' به دست می‌آوریم. بررسی C' نقش اصول موضوعه‌ای را که در A' نیستند روشن می‌کند.

منطق‌های غیرکلاسیک را می‌توان با تعبیرات دیگری از معانی رابط‌های گزاره‌ای $\neg, \vee, \wedge, \to$ و سورهای $\forall, \exists$ و نقطه نظرات دیگری روی مفاهیم درستی و نادرستی جمله‌ها و غیره نیز به‌دست آورد. هرچند هیچ نظریهٔ ریاضی بر مبنای منطق‌های غیرکلاسیک معنی مهمی برای ریاضیات ندارد، ولی فرانظریه بعضی از تئوری‌های صوری شدهٔ غیرکلاسیک از دید ریاضی به خاطر ارتباطشان با توپولوژی و نظریهٔ مشبکه‌ها جالب هستند.

در این جا ابتدا منطق غیرکلاسیکی را معرفی می‌کنیم که شاید نزدیکترین به منطق کلاسیک باشد. این منطق از نقطه نظر گزاره‌ها و محمولات فقط در اصول موضوع با نوع کلاسیکش فرق دارد و مجموعهٔ اصول موضوعه‌اش شامل $A_1 - A_{11}$ است، یعنی فقط $(\alpha \vee \neg\alpha)$ که اصل اساسی منطق کلاسیک است مردود شمرده می‌شود و همین باعث می‌شود که یک منطق متفاوت از منطق کلاسیک به وجود آید. عملگر نتیجه با توجه به روش عمومی تعریف می‌شود. مثلاً در منطق محمولات $C'(S)$ کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که شامل $A' \cup S$ بوده و تحت قواعد استنتاج $r_1 - r_6$ بسته

باشد. این منطق، منطق شهودگرایی نام دارد. واضح است که مثلاً مجموعهٔ $C'(\phi)$، یعنی مجموعهٔ تمام تاتولوژی‌های شهودی، زیرمجموعهٔ اکیدی از $C'(\phi)$، که مجموعه تمام تاتولوژی‌های منطق کلاسیک است، می‌باشد. ما در این جا قصد نداریم به جزئیات بیشتری در مورد خواص این منطق و مفاهیم آن بپردازیم و مسلماً وارد بحث‌های فلسفی مربوط به آن هم نمی‌شویم و علاقمندان را به کتاب‌ها و مقالات مرتبط ارجاع می‌دهیم [۱۶]. فقط از دیدگاه جبری به آن نظر افکنده و جبر مناسب با آن را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $(F_\circ, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ جبر فرمول‌های منطق شهودی گزاره‌ها باشد. روی این جبر رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

«$\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \rightarrow \beta$ و $\beta \rightarrow \alpha$ قابل استنتاج باشند.»

در این صورت جبر کلاس‌های هم‌نهشتی $(F/\approx, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ یک جبر شبه بولی [1] است و برای هر فرمول α و β داریم:

$$\neg||\alpha|| = ||\neg\alpha||,$$
$$||\alpha|| \wedge ||\beta|| = ||\alpha \wedge \beta||,$$
$$||\alpha|| \vee ||\beta|| = ||\alpha \vee \beta||,$$
$$||\alpha|| \rightarrow ||\beta|| = ||\alpha \rightarrow \beta||$$

به علاوه این یک جبر آزاد در ردهٔ تمام جبرهای شبه بولی است.

اگر منطق شهودی محمولات را در نظر بگیریم، نظیر آنچه در نوع کلاسیک انجام دادیم، $Q-$جبر مربوطه، یعنی جبر تعمیم یافتهٔ $(F/\approx, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bigvee, \bigwedge)$، یک جبر تعمیم یافتهٔ آزاد در ردهٔ تمام جبرهای بولی تام خواهد بود که مجموعهٔ تمام عناصری مانند $||\alpha||$ که در آن α یک فرمول اتمی است، مجموعهٔ مولدهای آن می‌باشد.

منظور از یک جبر شبه بولی مشبکه‌ای است مانند A که دارای عنصر صفر است و شبه مکمل‌دار نسبی است، یعنی برای هر دو عضو $a, b \in A$، مکمل a نسبت به b وجود دارد و عبارت است از بزرگ‌ترین عنصری مانند $c \in A$ به طوری که $a \wedge c \leq b$، و آن را با $a \rightarrow b$ نمایش می‌دهیم. برای اطلاع از خواص این مشبکه‌ها به [۲] مراجعه کنید. به عنوان مثالی از یک جبر شبه بولی، مشبکهٔ $O(X)$ شامل تمام زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک X را در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که برای هر زیرمجموعهٔ A و B و C از X، $A \cap C \subseteq B$ اگر و تنها اگر $C \subseteq (X-A) \cup B$، واگر C باز باشد این معادل است با $C \subseteq I((X-A) \cup B)$. منظور از $I(Z)$ درون زیرمجموعهٔ Z است. بنابراین برای هر $A, B \in O(X)$، مجموعهٔ $C = I((X-A) \cup B)$ بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ C است که در شرط $A \cap C \subseteq B$ صدق می‌کند. یعنی

$$A \rightarrow B = I((X-A) \cup B).$$

1) Pseudo Boolean

می‌توان یک لیست طولانی از فرمول‌هایی تهیه کرد که در منطق کلاسیک تاتولوژی هستند و در منطق شهودگرایی تاتولوژی نیستند. به عنوان مثال $\gamma = ((\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta))$. در منطق شهودگرایی تاتولوژی نیست. باید یک جبر بولی و یک ارزشدهی مانند ϑ در آن مثال بیاوریم به طوری که $\bar{\vartheta}(\gamma) \neq ۱$. در این حالت فرض کنیم جبر شبه بولی ما زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک اعداد حقیقی $\mathcal{R}$ و ϑ طوری است که $\bar{\vartheta}(\alpha) = (۰, \infty)$ و $\bar{\vartheta}(\beta) = (۰, \infty)$، در نتیجه $\bar{\vartheta}(\alpha \to \beta) = (\infty, \infty) = \mathcal{R}$، $\bar{\vartheta}(\neg\alpha \vee \beta) = \mathcal{R} - \{۰\}$ و $\bar{\vartheta}(\gamma) = \mathcal{R} - \{۰\} \neq R = ۱$.

منطق غیرکلاسیک دیگر، منطق مثبت[1] نام دارد که رابط‌های آن $\wedge$ و $\vee$ و $\to$ است، فرمول‌ها مانند منطق کلاسیک گزاره‌ها یا محمولات تعریف می‌شوند. در حالت گزاره‌ها قاعدهٔ استنتاج قیاس استثنایی است و در حالت محمولات قواعد استنتاج $r_۱ - r_۶$ هستند. اصول موضوع $A_۱ - A_۹$ و عملگر نتیجه طبق روش عمومی تعریف می‌شوند. کلیهٔ مفاهیم منطقی در این جا نیز قابل تعریف هستند و چنانچه روی جبر فرمول‌ها $(F, \wedge, \vee, \to)$ رابطهٔ زیر را تعریف کنیم:

«$\alpha \sim \beta$ اگر و تنها اگر $(\alpha \to \beta)$ و $(\beta \to \alpha)$ قابل استنتاج باشند»،

این رابطه یک همنهشتی خواهد بود و جبر $(F/\approx, \wedge, \vee)$ مربوط به حساب گزاره‌های مثبت جبری آزاد در ردهٔ تمام مشبکه‌های شبه مکمل‌دار نسبی می‌باشد [۲،۲۰].

در حالت محمولات، این جبر به یک جبر تعمیم یافته تبدیل می‌شود به طوری که $(F/\approx, \wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee)$ یک جبر آزاد در ردهٔ تمام مشبکه‌های شبه مکمل‌دار نسبی تام خواهد بود.

منطق موجه[2] نیز یکی از منطق‌های غیرکلاسیک است که در آن یک نماد عملگر یکتایی دیگر مانند I به مجموعهٔ $\neg, \wedge, \vee, \to$ اضافه می‌شود. اصول موضوعهٔ آن $A_۱ - A_{۱۲}$ به علاوه اصول زیر است (برای هر فرمول α و β):

۱- $((I\alpha \wedge I\beta) \to I(\alpha \wedge \beta))$،

۲- $(I\alpha \to \alpha)$،

۳- $(I\alpha \to II\alpha)$،

۴- $I(\alpha \vee \neg\alpha)$،

عملگر نتیجه در این جا نیز نظیر آنچه در منطق‌های قبل آمده تعریف می‌شود. مفاهیم استنتاج، قضیه، اثبات و غیره به روش عمومی تعریف می‌شوند. نوع گزاره‌ای جبر فرمول‌ها در این منطق، که قواعد استنتاج آن MP همراه با $\frac{(\alpha \to \beta)}{(I\alpha \to I\beta)}$ می‌باشد، $(F, \neg, I, \vee, \wedge, \to)$ است که روی آن رابطهٔ «$\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $(\alpha \to \beta)$ و $(\beta \to \alpha)$ قابل استنتاج باشند» را تعریف می‌کنیم. این رابطه یک رابطهٔ هم نهشتی خواهد بود و $(F/\approx, \neg, I, \wedge, \vee, \to)$ جبر منطق موجه است که در آن

1) Positive Logic 2) Modal Logic

$$\neg||\alpha|| = ||\neg\alpha||$$
$$I||\alpha|| = ||I\alpha||$$
$$||\alpha|| \vee ||\beta|| = ||\alpha \vee \beta||$$
$$||\alpha|| \wedge ||\beta|| = ||\alpha \vee \beta||$$
$$||\alpha|| \to ||\beta|| = ||\alpha \to \beta||$$

و ثابت می‌شود که این جبر یک جبر آزاد در ردهٔ تمام جبرهای بولی توپولوژیک [1] است [۱۹]. یک جبر بولی توپولوژیک، جبری بولی است مانند B همراه با تابع یکتایی چون I روی B به طوری که برای هر $a, b \in B$ داشته باشیم:

۱- $I(a \wedge b) = Ia \wedge Ib$

۲- $Ia \leq a$

۳- $IIa \leq Ia$

۴- $I۱ = ۱$

I یک عملگر درونی [2] است. برای اطلاع از این نوع جبر به [۲،۱۹] مراجعه کنید و برای اطلاع وسیع از منطق موجه، تاریخچه، خصوصیات و مفاهیم مربوط [۱۷] مرجع بسیار خوبی است. آنچه که در این جا بر آن تأکید داریم، به دست آوردن جبر مربوط به آن منطق است که در حالت گزاره‌ای یک جبر بولی توپولوژیک است و در حالت محمولی، آن را به یک جبر تعمیم یافته تبدیل می‌کنیم و جبر کلاس‌های هم نهشتی مربوط با خواص طبیعی و قابل انتظار $(F/\approx, \neg, I, \vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge)$ یک جبر آزاد در ردهٔ تمام جبرهای بولی توپولوژیک تام است.

در تمامی این منطق‌های غیرکلاسیک، مفاهیمی از قبیل تئوری، سازگاری، تامیت قابل بررسی و مطالعه هستند. فیلترها به عنوان تعمیمی از ارزش درستی نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند [۲۰].

منطق‌های غیرکلاسیک کاملاً شناخته شده دیگری نیز وجود دارند از آن جمله منطق‌های استلزامی [3] است که در آن رابط $\to$ یک رابط اولیه و اصلی است که به خاطر تعابیر معنایی مختلفی که به آن داده می‌شود رده‌ای از منطق‌های غیرکلاسیک را به وجود می‌آورد و منطق‌های چندارزشی که بر حسب تغییرات در اصول موضوعه، تعبیرات معنایی مختلف رابط‌ها، جبرهای متفاوتی با خواص ویژه پدید می‌آورند.

در قسمت بعد به یکی از این منطق‌های چندارزشی که نقش خاصی در تحقیقات امروزه مربوط به جبرهای چندارزشی [4] دارد می‌پردازیم.

1) Topological BA 2) Interior Operator 3) Implicative 4) MV-Algebra

۴. منطق چندارزشی پایه[1]

این منطق در ۱۹۹۸ توسط پیتر هایک[2] معرفی شد. او ادعا کرد که این منطق می‌تواند بهترین نمایش از نوع منطق‌هایی باشد که منطق فازی نام دارند. منطق گزاره‌ای آن شامل متغیرهای گزاره‌ای $P_1, P_2, \ldots$؛ و رابطهای $\bar{\circ}$ و $\&$ و $\rightarrow$ است. در این منطق به هر گزاره یک ارزش در $[\circ, 1]$ داده می‌شود (v). این ارزشدهی به جبر فرمول‌ها $(F, \&, \rightarrow)$ تعمیم داده می‌شود به طوری که

$$\bar{\vartheta}(\alpha\&\beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) * \bar{\vartheta}(\beta)$$
$$\bar{\vartheta}(\alpha \rightarrow \beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) \rightarrow \bar{\vartheta}(\beta)$$

که در آن $* : [\circ, 1]^2 \rightarrow [\circ, 1]$ یک t–نرم پیوسته است، به این معنی که شرکت‌پذیر و جابجایی بوده و $x * 1 = x$ برای هر $x \in [\circ, 1]$ و نسبت به هر مؤلفه پیوسته است. عملگر $\rightarrow: [\circ, 1]^2 \rightarrow [\circ, 1]$ چنین تعریف می‌شود.

$$x \rightarrow y = \sup\{z \in [\circ, 1]| : x * z \leq y\}$$

که از آن این رابطهٔ مهم الحاقی نتیجه می‌شود $x * z \leq y$ اگر و تنها اگر $z \leq x \rightarrow y$ برای هر x, y, z در $[\circ, 1]$.

رابطهای دیگر گزاره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱) $\alpha \wedge \beta$ به جای $\alpha * (\alpha \rightarrow \beta)$

(۲) $\alpha \vee \beta$ به جای $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \wedge ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

(۳) $\neg\alpha$ به جای $\alpha \rightarrow \bar{\circ}$

(۴) $\alpha \leftrightarrow \beta$ به جای $(\alpha \rightarrow \beta)\&(\beta \rightarrow \alpha)$

به آسانی دیده می‌شود که $\bar{\vartheta}(\alpha \wedge \beta) = \min(\bar{\vartheta}(\alpha), \bar{\vartheta}(\beta))$ و $\bar{\vartheta}(\alpha \vee \beta) = \max(\bar{\vartheta}(\alpha), \bar{\vartheta}(\beta))$

اصول موضوعهٔ این منطق عبارتند از:

(B_1) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$

(B_2) $((\alpha\&\beta) \rightarrow \alpha)$

(B_3) $((\alpha\&\beta) \rightarrow (\beta\&\alpha))$

(B_4) $((\alpha\&(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\beta\&(\beta \rightarrow \alpha)))$

(B_{5a}) $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha\&\beta) \rightarrow (\gamma))$

(B_{5B}) $(((\alpha\&\beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)))$

(B_6) $(((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma)$

(B_7) $\bar{o} \rightarrow \alpha$

تنها قاعدهٔ استنتاج در این منطق همان قیاس استثنایی (MP) است.

1) Basic Many-Valued Logic 2) Peter Hajek

فرمولی مانند α، ۱ ــ تاتولوژی نامیده می‌شود هر گاه $\bar{\vartheta}(\alpha) = ۱$ برای هر ارزشدهی ϑ. واضح است که تمام اصول موضوعه ۱ ــ تاتولوژی هستند. مفاهیم اثبات، اثبات پذیری، تئوری، سازگاری و غیره به روش معمول تعریف می‌شوند. فرمول‌های زیادی در این منطق اثبات می‌شوند، از جمله توزیع پذیری $\wedge, \vee$ نسبت به هم، توزیع پذیری $\&$ نسبت به $\vee$ و $\wedge$ و قوانین دمورگان. قضیهٔ استنتاج در این جا تغییر می‌کند، به این صورت که فرض کنیم T یک تئوری و α و β فرمول باشند؛ $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ اگر و تنها اگر n وجود داشته باشد به طوری که $T \vdash (\alpha^n \rightarrow \beta)$ که در آن α^n عبارت از $\alpha\&\alpha\&\ldots\&\alpha$ ($n-$ مرتبه) می‌باشد. یک تئوری ناسازگار است اگر $T \vdash \bar{\circ}$ و در غیراین صورت سازگار است، و از آن می‌توان نتیجه گرفت اگر $T \cup \{\alpha\}$ ناسازگار باشد آنگاه برای حداقل یک n، $T \vdash \neg(a^n)$ [۱۲].

قبل از این که جبر این منطق را به دست آوریم لازم است که مشبکه مانده را معرفی کنیم. این مشبکه‌ها [۴] در سال ۱۹۳۹ برای اولین بار توسط دیلوُرث[1] و وارد[2] مطرح شده‌اند.

یک مشبکهٔ ماندهٔ جبری مانند $(L, \wedge\vee, * \rightarrow, \circ, ۱)$ است با چهار عملگر دوتایی و دو ثابت به طوری که:

۱$-$ $(L, \wedge, \vee, \circ, ۱)$ مشبکه‌ای با بزرگ‌ترین عضو ۱ و کوچکترین عضو $\circ$ نسبت به ترتیب مشبکه‌ای $\leq$ است، یعنی

$$a \leq b \text{ اگر و تنها اگر } a \wedge b = a$$

۲$-$ $(L, *.۱)$ یک تکوارهٔ جابجایی با عضو واحد ۱ است، یعنی $*$ جابجایی و شرکت پذیر است و $۱ * x = x$ (برای هر $x \in L$).

۳$-$ $*$ و $\rightarrow$ در شرط الحاقی زیر صدق می‌کنند.

$$z \leq x \rightarrow y \text{ اگر و تنها اگر } x * z \leq y.$$

هایک با اضافه نمودن دو شرط زیر به مشبکهٔ مانده آن را $BL-$ جبر نامید [۱۱]:

۴$-$ $x \wedge y = x * (x \rightarrow y)$

۵$-$ $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = ۱$

بنابراین $L = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \circ, ۱)$ یک $BL-$ جبر است اگر در شرایط (۱) تا (۵) صدق کند. حال می‌توانیم ارزشدهی ϑ را که به $[\circ, ۱]$ تعریف کرده بودیم به L ببریم، به این معنی که L ــ ارزشدهی ϑ از مجموعهٔ متغیرهای گزاره‌ای قابل تعمیم به $\bar{\vartheta}$ از مجموعهٔ فرمول‌ها به L می‌باشد به طوری که

۱$-$ $\vartheta(\bar{\circ}) = \circ$،

۲$-$ $\bar{\vartheta}(\alpha\&\beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) * \bar{\vartheta}(\beta)$،

1) Dilworth 2) Ward

۳− $\bar{\vartheta}(\alpha \to \beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) \to \bar{\vartheta}(\beta)$.

و در نتیجه:

$\bar{\vartheta}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) \wedge \bar{\vartheta}(\beta)$ ، $\bar{\vartheta}(\alpha \vee \beta) = \bar{\vartheta}(\alpha) \vee \bar{\vartheta}(\beta)$ و $\bar{\vartheta}(\neg\alpha) = \bar{\vartheta}(\alpha) \to 0$.

فرمولی مانند α، L−تاتولوژی است اگر $\bar{\vartheta}(\alpha) = 1$ برای هر L− ارزشدهی ϑ. با این تعریف و خواص فوق می‌توان نشان داد که اگر فرمول α در این منطق قابل اثبات باشد، آنگاه α برای هر BL− جبر L یک L−تاتولوژی است.

ثابت شده است که ردهٔ تمام BL− جبرها یک واریته است [۱۲]، بدین معنی که می‌توان تعدادی تساوی یافت که هر BL− جبر توسط آنها کاملاً مشخص شود [۳]. در واقع در مورد این جبرها فقط شرط الحاقی (۳) است که باید معادل یک یا چند تساوی گردد. برای اثبات مفصل به [۱۲] مراجعه شود.

حال اگر جبر فرمول‌های منطق BL یعنی $(F, \wedge, \vee, \&, \to, \bar{0}, \bar{1})$ را در نظر بگیریم و روی آن رابطهٔ زیر را تعریف کنیم:

«$\alpha \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \leftrightarrow \beta$ قابل اثبات باشد»

، آنگاه $\approx$ یک رابطهٔ هم نهشتی روی جبر فرمول‌ها است و جبر کلاس‌های هم‌نهشتی $(F/\approx, \wedge, \vee.*, \to, 0, 1)$ یک BL ـ جبر است به طوری که:

$$[\bar{0}] = 0$$
$$[\bar{1}] = 1$$
$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha \& \beta]$$
$$[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$$
$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$
$$[\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta]$$

رابطهٔ $[\alpha] \leq [\beta]$ اگر و تنها اگر $\vdash (\alpha \to \beta)$ به این جبر یک ترتیب مشبکه‌ای می‌دهد. فیلترها در اثبات تامیت این منطق اهمیت ویژه‌ای دارند.

فرض کنیم $L = (L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ یک مشبکهٔ مانده است. یک فیلتر روی L، مجموعه‌ای ناتهی مانند $F \subseteq L$ است به طوری که برای هر $x, y \in L$،

۱− اگر $x \in F$ و $y \in F$ آنگاه $x * y \in F$،

۲− اگر $x \in F$ و $x \leq y$ آنگاه $y \in F$.

و F یک فیلتر اول است اگر برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم:

$(x \to y) \in F$ یا $(y \to x) \in F$.

این تعاریف در جبر استلزامی هم قابل بیان هستند. حال اگر رابطهٔ زیر را روی یک $BL-$ جبر L نسبت به یک فیلتر F در آن تعریف کنیم:

$$x \sim_F y \text{ اگر و تنها اگر } (x \to y) \in F \text{ و } (y \to x) \in F$$

آنگاه این رابطه یک رابطهٔ هم‌نهشتی روی L بوده و $L/\sim_F$ مرتب خطی است اگر و تنها اگر F یک فیلتر اول باشد. با استفاده از این واقعیت که اگر L یک $BL-$ جبر باشد و $a \in L$ و $a \neq ۱$، آنگاه فیلتری اول مانند F روی L وجود دارد که $a \notin F$. ثابت می‌شود که هر $BL-$ جبر، زیرجبری از حاصلضرب مستقیم خانواده‌ای از $BL-$ جبرهای خطی است [۱۲].

فرض کنیم a فرمولی در منطق BL باشد، به فرمول a با تعویض متغیرهای گزاره‌ای q_i به x_i و تعویض رابطهای $\bar{۱}, \bar{۰}, \vee, \wedge, \&, \to$ به ترتیب به $۱, ۰, \vee, \wedge, *, \to$ ترم a' در زبان مشبکه‌های مانده را به دست می‌آوریم و دیده می‌شود که اولاً a یک $L-$تاتولوژی است اگر و تنها اگر تساوی $a' = ۱$ در L برقرار باشد و ثانیاً هر فرمول که $L-$ تاتولوژی برای تمام $BL-$ جبرهای خطی باشد، در تمام $BL-$ جبرها، $L-$تاتولوژی است. بنابراین قضیهٔ تامیت ثابت می‌شود، بدین معنی که برای هر فرمول a، سه گزاره زیر معادلند:

۱$-$ a در BL قابل اثبات است،

۲$-$ برای هر $BL-$ جبر خطی L، a یک $L-$تاتولوژی است،

۳$-$ برای هر $BL-$ جبر L، a یک $L-$ تاتولوژی است.

انواع خاصی از این جبرها که در آن $L = [۰, ۱]$ و $*$، $t-$ نرم‌های زیر باشد:

$$x * y = \max(o, x + y - ۱)$$
$$x * y = \min(x, y)$$
$$x * y = x.y$$

به ترتیب جبر لوکاسیویچ، جبر گودل و جبر گوگن یا حاصلضرب نام دارند که از آن‌ها می‌توان $\to$ را به ترتیب به صورت‌های زیر به دست آورد:

$$x \to y = \min(۱, ۱ - x + y)$$

$$x \to y = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \leq y \\ y & \text{اگر } y < x \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{اگر } y < x \end{cases}$$

البته منطق‌های مربوطه نیز با همین نام‌ها هستند.

از مثال‌های فوق BL− جبرها با $L = [\circ, \text{۱}]$ دیده می‌شود که اگر یک t−نرم پیوسته روی $[\circ, \text{۱}]$ داشته باشیم، این t−نرم یک جبر BL با دامنهٔ $[\circ, \text{۱}]$ به وجود می‌آورد که به علت وابستگی به این t−نرم می‌توانیم آن را t− جبر بنامیم و فرمول a را t−تاتولوژی بگوییم هرگاه a یک L−تاتولوژی برای هر t−جبر L باشد. واضح است که اگر a در منطق BL اثبات پذیر باشد، آنگاه یک t−تاتولوژی است. اما عکس آن مورد سؤال است، یعنی آیا هر t−تاتولوژی BL قابل اثبات است؟ یا آیا BL یک اصل موضوعی شدهٔ تام از اشتراک تمام منطق‌های مشخص شده با t−نرم‌های پیوسته است؟ یا این که آیا می‌توان فرمولی یافت که t−تاتولوژی باشد ولی قابل اثبات در BL نباشد؟ این مسأله به این صورت هنوز باز باقی مانده است [۱۲].

۵. تعمیم جبرهای BL، تحقیقات امروزی و آینده

همانطور که در آخرین پاراگراف قسمت قبل گفته شد، هر t−نرم پیوسته روی $[\circ, \text{۱}]$ و یک ارزشدهی ϑ از متغیرهای گزاره‌ای، به صورت منحصر به فرد $\bar{\vartheta}(\alpha)$ را برای هر فرمول گزاره‌ای α در زبان BL به وجود می‌آورد. در حالت کلی نیازی نیست که درجات درستی مرتب خطی باشند. دامنهٔ درجات درستی می‌تواند فقط یک مشبکهٔ کراندار باشد. خواص BL−جبر هم بر مرتب خطی بودن تکیه ندارد ولی این‌ها خواصی هستند که هر t−نرم پیوسته $*$ و ماندهٔ آن $\rightarrow$ در آن صدق می‌کنند. هر BL−جبر به عنوان جبر ممکن از توابع درستی عمل می‌کند، به طوری که تعریف کردیم α یک BL تاتولوژی است اگر $\vartheta(\alpha) = \text{۱}_L$ برای هر BL−جبر L در هر ارزشدهی ϑ.

امروزه BL در سه جهت تعمیم یافته است:

(۱) یک t−نرم $*$ ماندهٔ $\rightarrow$ را دارد اگر و فقط اگر $*$ از سمت چپ پیوسته باشد. در این صورت $*$ منطقی را پدید می‌آورد که استلزام $\rightarrow$ قابل قبولی دارد. منطق مربوط به $*$، MTL[1] نامیده می‌شود که در ۲۰۰۱ توسط استوا[2] و گدو[3] مورد استفاده قرار گرفتند [۹] و تعریف جبرهای MTL مربوطه ناشی از تعریف جبرهای BL با حذف اصل موضوع بخشپذیری است به این معنی که یک مشبکهٔ مانده مرتب خطی بخشپذیر است اگر برای هر y, x که $x > y$، وجود داشته باشد z که $y = x * z$، و از آن می‌توان نتیجه گرفت $x \wedge y = x * (x \rightarrow y)$ و این در هر جبر $([\circ, \text{۱}], min, max, *, \rightarrow, \circ, \text{۱})$ با t−نرم پیوسته $*$ برقرار است. بنابراین در واقع پیوستگی $*$ را ضعیف تر می‌کنیم.
(۲) در این تعمیم منطق مربوطه فاقد ارزش «نادرست» است و در نتیجه درجات درستی کوچک‌ترین عضو ندارند، مثلاً ضرب را روی $(\circ, \text{۱}]$ در نظر می‌گیریم. این نوع منطق توسط اگلیانو[4] و مونتاگنا[5] در [۱] مورد مطالعه قرار گرفته و به آن نام منطق هوپ[6] داده‌اند و ثابت کرده‌اند فرمول α که شامل نقیض نباشد در BL قابل اثبات است اگر و فقط اگر در منطق هوپ مربوطه قابل اثبات باشد.
(۳) می‌توان شرط جابجایی & را حذف نمود که در واقع $*$ در جبر مربوطه خاصیت جابجایی ندارد.

1) Monoidal t-norm Logic 2) Esteva 3) Godo 4) Agliano 5) Montagna
6) Hoop Logic

این کار توسط جرجسکو[1] و یورگلسکو[2] شروع شد [۱۰] و جبر مربوط به آن توسط هایک معرفی گردید. این جبرها، جبرهای شبه BL[3] نامیده شدند. بررسی‌های جبری این جبرها در مقالات مفصل [٦] توسط دی نولا[4] و جرجسکو منتشر شده‌اند. این جبرها از این دید مورد توجه محققان قرار گرفتند که در زبان طبیعی عطف‌های غیرجابجایی مانند «نه فقط ... بلکه ...» و یا «... و بعد ...» وجود دارند و از آنجا که یکی از اهداف اصلی، مدلسازی زبان طبیعی است این جبرها ما را به هدف نزدیک‌تر می‌کنند. مثالی از یک t−نرم از چپ پیوسته و ناجابجایی عملگری است که میزر[5] روی $[۰, ۱]$ داده است:

$$x * y = \begin{cases} ۰ & x \leq a, y \leq b \quad ۰ < a < b < ۱ \text{ برای} \\ \min(x, y) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که البته می‌توان آن را به حالات دیگر نیز تعمیم داد.

واضح است زمانی که $*$ جابجایی نباشد باید دو عملگر ماندهٔ مربوط به آن داشته باشیم که آنها را با علائم $\rightarrow$ و $\mapsto$ نمایش می‌دهیم به طوری که

«$x * y \leq z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \rightarrow z$ اگر و تنها اگر $y \leq x \mapsto z$»

در این صورت جبر شبه BL به صورت $(L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \mapsto, ۰, ۱)$ خواهد بود. مطالعات زیادی روی این جبرها توسط محققان مختلف صورت گرفته است و به خاطر کاربردهایی در مدلسازی زبان‌های طبیعی، از طرف محققان علوم کامپیوتر به نوع متناهی آن توجه ویژه شده است [۵].

هایک در ۲۰۰۳ در مقاله‌ای هر سه تعمیم را با هم به کار گرفت و منطق آن را منطق Flea (Fl ــ جبر یا FlL) و جبر آن را جبر Flea نام نهاد [۱۳]. این منطق گزاره‌ای شامل رابط های دوتایی $\wedge, \vee, \&, \rightarrow, \mapsto$ است با اصول موضوعهٔ مشخص که در [۱۳] آمده است و قواعد استنتاج آن (MP) و (IMP) هستند که (IMP) شامل $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha \mapsto \beta}$ و $\dfrac{\alpha \mapsto \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$ می‌باشد. هایک تعریف زیر را برای جبر مربوطه ارائه داد:

ساخت $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow, \mapsto, ۱)$ یک Fl ــ جبر است هر گاه:

۱− $(A, \wedge, \vee, ۱)$ یک مشبکه با بزرگترین عضو ۱ باشد،

۲− $*$ یک عملگر دوتایی شرکت‌پذیر باشد به طوری که $x = ۱ * x = x * ۱$ برای هر $x \in A$،

۳− $y \leq x \mapsto z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \rightarrow z$ اگر و تنها اگر $x * y \leq z$ (شرایط الحاقی)،

۴− $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = ۱$ و $(x \mapsto y) \vee (y \mapsto x) = ۱$،

۵− $x * (x \mapsto y) \leq x \wedge y$ و $(x \rightarrow y) * x \leq x \wedge y$.

1) Georgescu 2) Iorgulescu 3) Pseudo-BL 4) Di Nola 5) Mesiar

در این مقاله با توجه به مفاهیم معمول در هر منطق، تامیت FlL ثابت می‌شود یعنی $FlL \vdash \alpha$ اگر و تنها اگر α یک FlL–تاتولوژی باشد. با الهام از کارهای هارت و همکارانش که ساختار مشبکه‌های ماندهٔ جابجایی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۵] و با فرض این که لزوماً عنصر واحد مونوید $(L, *, e)$ یعنی e، بزرگ‌ترین عضو مشبکه نیست، ما جبر Flea هایک را بدون ۱ در نظر گرفتیم و این در واقع به این معنی است که این جبر شبه Flea $(E, \wedge, \vee, *, \to, \mapsto, e)$ است به طوری که در آن $(E, \wedge, \vee)$ یک مشبکه و $(E, *, e)$ یک تکواره با عنصر واحد e همراه با خواص (۳) و (۵) فوق است. ما در این مقاله خواص این جبر را مورد بررسی قرار داده، نقش فیلترها و ارتباط آن‌ها را با روابط هم‌نهشتی روی جبر E مطالعه کرده‌ایم [۸]. ثابت کرده‌ایم که جبر روابط هم‌نهشتی $\mathrm{Con(E)}$ با جبر زیرجبرهای محدب استلزامی ایزومورف است. منظور از یک زیرجبر محدب استلزامی زیرجبری است محدب مانند H از E به طوری که برای هر $x, y \in E$ داریم $(x \to y) \wedge e \in H$ اگر و تنها اگر $(x \mapsto y) \wedge e \in H$. [۱۵]

با بررسی بیشتر خواص جبری می‌توان به حقایق دیگری نیز دست یافت که می‌توانند احتمالاً به یافتن خواص منطقی منجر شوند. منطق مربوطه اگر شبه FlL نامیده شود دارای چه اصول موضوعه‌ای است؟ تاتولوژی‌ها بدون ۱ چگونه تعریف می‌شوند؟ آیا می‌توان به جای ۱ از فیلتری استفاده کرد که شامل e باشد؟ و سؤالات بسیاری دیگر که تحقیق روی هر یک از آنها می‌تواند به درستی به بسط این نظریه و نزدیکی به مدلسازی زبان‌های طبیعی یاری رساند.

مراجع

[1] Agliano, P., Montagna, F., Varieties of BL-algebras I: General properties, Preprint.

[2] Birkhoff, G., *Lattice theory*, AMS, Rhode Island, 1940.

[3] Burris, S., Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] Dilworth, R. P, Ward, M., Residuated lattices, Trans. Amer. Math. Soc, 45 (1939) 335-354.

[5] Dinola, A., Letteri, A., Finite BL-algebras, *Discrete Mathematics* 269(2003) 93-112.

[6] Dinola, A., Georgascu, G., Iorgulescu, A., Pseudo- BL algebras: Part I, part II, preprint.

[7] Endrton, H. B., *A Mathematical Introduction to logic*, Academic Press, New York, 1972.

[8] Eslami, E., Ghorbani, Sh., pseudo-Flea Algebras, preprint.

[9] Esteva, F., Godo, L., Monoidal t-norm logic, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 275-288.

[10] Georgescue G., Iorgulescu, A., Pseudo t-norms and pseudo BL-algebras, *Soft Computing* 5(2001)355-371.

[11] Hajek, P., Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Computing* 2(1998) 124-128.

[12] Hajek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.

[13] Hajek, P., Fleas and Fuzzy Logic - a survey, *Institute of Computer Sciences AS CR*, Prouge, 2003.

[14] Hanilton, A. G., *Logic for Mathematicians*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[15] Hart, J. B., Rafter, L., Tsinakis, C., Structure of Commutative Residuated Lattices, *International Journal of algebra and Computation*, 2001.

[16] Heyting, A., Intuitionism, An Introduction, *studies in Logic and Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1956.

[17] Hughes, G. E., Cresswell, M. J., *An Introduction to Modal Logic,* Routledge, New York, 1972.

[18] Malinowski, G., Many-valued Logics, *Oxford Logic Studies*: 25, Claredon Press, Oxford, 1993.

[19] Rasiowa, H., Sikorski, R, *The Mathematics of Metamatematics*, Warsawa, 1963.

[20] Rasiowa, H., *Algebraic Approach to Nonclassical Logics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.

اسفندیار اسلامی
دانشکده ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه شهید باهنر کرمان
پست الکترونیک: eeslami@mail.uk.ac.ir

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۳۳ تا ۵۴

حساب مرتبهٔ اول پئانو و زیرنظریه‌های آن همراه با چند مسألهٔ مرتبط در نظریهٔ پیچیدگی

مرتضی منیری

چکیده
در این مقاله مروری بر نظریه‌های مرتبهٔ اول حساب خواهیم داشت. همچنین، اشاره خواهیم کرد که زیر نظریه‌های ضعیف حساب ارتباط‌های اساسی با نظریهٔ پیچیدگی محاسبه دارند. در انتها اشاره‌ای به نظریه‌های مرتبه اول شهودی حساب خواهیم کرد.

یکی از نخستین مباحث ریاضی که منطق‌دانان به مطالعهٔ آن پرداختند نظریهٔ اعداد طبیعی بود. در واقع مطالعهٔ خواص اعداد طبیعی (و البته نظریهٔ مجموعه‌ها) انگیزهٔ اصلی بنیان‌گذاران منطق ریاضی در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بود. دلیل این امر اهمیتی بود که آنان برای این شاخه‌ها به‌عنوان پایه‌هایی برای کل ریاضیات قائل بودند.

پئانو[1]، ریاضی‌دان و منطق‌دان ایتالیایی، اصول موضوع معروف خود برای حساب را در سال ۱۸۸۹ میلادی معرفی کرد. این اصول، به تعبیر ما، مرتبهٔ دوم بودند زیرا به اعداد و همچنین مجموعه‌های شامل اعداد مرتبط بودند. در حال حاضر، منظور از حساب پئانو (PA)، نظیر مرتبهٔ اول اصول مطرح شده به‌وسیلهٔ پئانو است.

۱. حساب (مرتبهٔ اول) پئانو

در این قسمت به معرفی حساب پئانو در دستگاه منطق محمولات مرتبهٔ اول می‌پردازیم.

1) Peano

یک زبان (مرتبهٔ اول) مناسب برای مطالعهٔ PA، $L = \{\circ, ۱, +, \cdot, <\}$ است (در واقع L مجموعهٔ نمادهای ثابت، تابعی و محمولی زبان مورد نظر است). DOR^+ مجموعهٔ اصول موضوع قسمت‌های مثبت حلقه‌های جابجایی و یکدار و به‌طور گسسته مرتب در زبان فوق است. در واقع DOR^+ چیزی نیست جز همان مجموعهٔ خواص معمولی جمع و ضرب و ترتیب اعداد طبیعی. برای مثال اصل $\forall x, y\,(x + y = y + x)$ جابجایی بودن جمع و اصل $\forall x, y\,(x < y \;\vee\; x = y \;\vee\; y < x)$ خطی بودن ترتیب را بیان می‌کند. DOR^+ را با PA^- نیز نشان می‌دهند.

برای بیان اصل استقراء، نیاز به کمی تأمل است. این اصل به‌صورت غیرصوری به شکل زیر بیان شده است:

"فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$. ضمناً فرض کنید $\circ \in A$ و به‌ازای هر عدد طبیعی n، اگر $n \in A$ آن‌گاه $n + ۱ \in A$. در این‌صورت $A = \mathbb{N}$"

اصل فوق قابل بیان در منطق مرتبهٔ اول نیست، زیرا (تلویحاً) شامل سوری عمومی روی مجموعه‌هاست. نظیر مرتبهٔ اول این اصل به شکل زیر است:

$$I_x\varphi :\; [\varphi(\circ) \;\wedge\; \forall x\; (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x + ۱))] \longrightarrow \;\forall x\; \varphi(x)$$

به‌ازای هر فرمول φ، شامل متغیر آزاد x (و متغیرهای آزاد احتمالی دیگر).

در واقع ما با یک طرح اصل موضوعی مواجه هستیم که شامل تعدادی نامتناهی اصل است. اما این مجموعهٔ نامتناهی از اصول، قدرتی بسیار کمتر از اصل غیر صوری استقراء دارد؛ توجه کنید که مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ ناشماراست ولی مجموعهٔ همهٔ فرمول‌ها در زبان L، شمارا است.

مجموعهٔ اصول مرتبهٔ اول مطرح شدهٔ فوق همان حساب مرتبهٔ اول پئانو(PA) است:

$$PA = DOR^+ \cup \text{استقراء}$$

PA فرمولی چون φ را ثابت می‌کند، یعنی $\mathrm{PA} \vdash \varphi$، هرگاه اصول فوق در دستگاه منطق محمولات مرتبهٔ اول φ را ثابت کنند. همین ضعف PA نسبت به دستگاه غیرصوری حساب است که باعث می‌شود اثبات‌های معمولی برای نشان دادن یکتایی مدل‌های دستگاه اخیر (با تقریب یکریختی)، در مورد PA کار نکنند.

۲. وجود مدل‌های نااستانده برای حساب

مدل استانده برای PA، مجموعهٔ اعداد طبیعی با جمع و ضرب و ترتیب معمولی است: $\langle \mathbb{N}, \circ, ۱, +, \cdot, < \rangle$. از این‌جا به بعد، مدل‌ها را با مجموعه‌های زمینهٔ آن‌ها نشان می‌دهیم. دو مدل M و M' از PA را یکریخت گوییم هرگاه تابعی یک‌به‌یک و پوشا چون $f : M \longrightarrow M'$ موجود باشد به طوری‌که $f(\circ_M) = \circ_{M'}$، $f(۱_M) = ۱_{M'}$ و f، جمع و ضرب و ترتیب را حفظ کند.

اگر f یک یکریختی از M به M' باشد آن‌گاه به‌ازای هر فرمول $\varphi(\vec{x})$ در زبان L و هر $\vec{a} \in M^n$، $M \models \varphi(\vec{a})$ (M مدلی است برای جملهٔ $\varphi(\vec{a})$) اگر و تنها اگر $M' \models \varphi(f(\vec{a}))$. در اینجا منظور از

$\vec{x}$ دنبالهٔ $x_{۱}, \ldots, x_n$ است.

هدف اولیه برای معرفی PA، آن بود که مجموعهٔ جمله‌های درست در مورد $\mathbb{N}$ ، اصطلاحاً $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ ، را به‌طور یکتا مشخص کند، اما به‌زودی معلوم شد که این‌کار ممکن نیست. PA دارای مدل‌های نااستانده است، یعنی مدل‌هایی که با $\mathbb{N}$ یکریخت نیستند. این مطلب را می‌توان به‌عنوان نتیجه‌ای از یکی از قضیه‌های اساسی منطق ریاضی، یعنی قضیهٔ لوونهایم ــ اسکولم به‌دست آورد.

بنابراین قضیه، اگر نظریه‌ای در یک زبان متناهی دارای مدلی شمارای نامتناهی باشد، آن‌گاه دارای مدل‌هایی با هر عدد اصلی نامتناهی دلخواه خواهد بود. مدل‌های با عددهای اصلی متفاوت هرگز نمی‌توانند یکریخت باشند. نتایج قوی‌تری نیز در این زمینه در دست است. مثلاً می‌توان نشان داد که مجموعهٔ مدل‌های شمارای غیریکریخت PA، ناشماراست.

روشن است که نتیجهٔ فوق (در مورد یکتا نبودن مدل‌های PA) را می‌توان در مورد هر مجموعهٔ دیگری نیز از اصول موضوع برای حساب، به‌جای PA، به‌دست آورد.

PA دستگاهی است طبیعی و زیبا و وجود مدل‌های به اندازهٔ کافی زیاد نااستانده برای آن موجب خوشحالی است، زیرا باعث باز شدن یک مسیر تحقیقاتی وسیع برای منطق‌دانان شده است که همان مطالعهٔ این مدل‌ها است. مرجع [K2] در این مورد بسیار خواندنی است. در پایین به چند مورد از مهمترین خواص مدل‌های PA اشاره خواهد شد ولی قبل از آن قضیه‌های معروف ناتمامیت گودل [۱] را مرور می‌کنیم.

۳. قضیه‌های ناتمامیت گودل

آیا PA توانایی اثبات همهٔ جملات حسابی درست (در مدل $\mathbb{N}$) را دارد؟

معلوم شده است که PA قدرت زیادی دارد و اثبات‌های ارائه شده برای تمامی قضیه‌های نظریهٔ مقدماتی اعداد را می‌توان در PA صوری کرد. البته این گونه صوری‌سازی‌ها معمولاً پرزحمت و دارای جزئیات زیادی است. به‌عنوان مثال، می‌توانید یک اثبات صوری از نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول را در $[K۲, ۵.۳]$ ببینید:

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x\ \exists y\ (y > x\ \wedge\ \mathrm{prime}(y))$$

که در آن

$$\mathrm{prime}(y) \longleftrightarrow\ (y \geqslant ۲\ \wedge\ \forall z, w\ (y|zw \longrightarrow (y|z\ \vee y|w)))$$

و

$$x|y \longleftrightarrow\ (\exists z \leqslant y\, (xz = y)\ \wedge\ x \neq ۰)$$

1) Gödel

در هر حال، قضیهٔ اول ناتمامیت گودل بیان این مطلب است که با فرض سازگاری PA جواب سؤال فوق منفی است، یعنی در زبان حساب جمله‌ای مانند φ موجود است که درست است ولی PA توانایی اثبات آن را ندارد[۱]. قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل مثال مشخصی از یک چنین φای را عرضه می‌کند، یعنی $\mathrm{Con(PA)}$. $\mathrm{Con(PA)}$ جمله‌ای در زبان حساب است که از طریق کد کردن مفاهیم فرمول خوش ساخت، دنبالهٔ متناهی از فرمول‌های خوش ساخت، اثبات و در نهایت مفهوم اثبات پذیری در PA، به‌دست آمده است:

$$\mathrm{prov}(x,y) \longleftrightarrow \text{“}x \text{ کد اثباتی برای جملهٔ با کد } y \text{ است”}$$
$$\mathrm{Con\,PA} \longleftrightarrow \neg\, \exists x\, \mathrm{prov}\,(x, \overline{\circ = \text{۱}})$$

جایی‌که $\overline{\circ = \text{۱}}$ کد فرمول $\text{۱} = \circ$ است.

در واقع گودل نشان داد که دو قضیهٔ فوق در مورد هر نظریه سازگار شامل PA که مجموعهٔ اصول موضوعهٔ آن بازگشتی (یعنی به صورت الگوریتمیک قابل تمیز) باشد، برقرار است. توجه کنید که یک نتیجهٔ بی‌درنگ این قضایا این است که $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ به طور بازگشتی اصل پذیر نیست، در حالت خاص، خود $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ یک مجموعهٔ بازگشتی نیست، یعنی هیچ روش مکانیکی یا برنامه‌ای کامپیوتری برای تشخیص درستی‌های $\mathbb{N}$ موجود نیست. از طرف دیگر بنا به قضیه‌های گودل، $\mathrm{PA} + \mathrm{Con(PA)}$ و $\mathrm{PA} + \neg\,\mathrm{Con(PA)}$ سازگارند و بنابراین مدل دارند. مدل‌های این دو نظریه، مدل‌های متفاوتی از PA را به‌دست می‌دهند.

هر چند که جملهٔ $\mathrm{Con(PA)}$ از دید منطق ریاضی دارای اهمیت ذاتی است، ولی ممکن است برای ریاضیدانان، به طور اعم، چندان حائز اهمیت نباشد. اکنون مثال‌های دیگری از جملات مستقل از PA موجودند که این نقص را ندارند. این مثال‌ها عمدتاً به وسیلهٔ روش ابداعی دو منطق‌دان نامی، یعنی پریس[۲] و هرینگتون[۳] به‌دست آمده‌اند و بیشتر خواص ترکیبیاتی اعداد (برای مثال شکل‌هایی از قضیهٔ رمزی) هستند. در این زمینه به مراجع [K2] و [PH] رجوع کنید. در هر حال باید متذکر شد که روش اخیر به اثبات استقلال جملاتی از نوع $\Pi_\text{۲}$ از PA می‌انجامد، در حالی‌که $\mathrm{Con(PA)}$ فرمولی $\Pi_\text{۱}$ است (برای تعریف $\Pi_\text{۲}$ و $\Pi_\text{۱}$، فصل ۵ را ببینید). یعنی قضیه‌های‌گودل استقلال جملاتی با پیچیدگی کمتر را نشان می‌دهند و این یک مزیت است.

---

۱) واضح است که بنابر قضیهٔ گودل $\mathrm{PA} \nvdash \varphi$ و $\mathrm{PA} \nvdash \neg\varphi$. وجود φ با چنین خاصیتی را ناتمامیت PA می‌نامند. کلمهٔ تمامیت در منطق ریاضی به معنای دیگری نیز به کار می‌رود. اگر T یک نظریهٔ مرتبهٔ اول باشد آن‌گاه تمامیت T می‌تواند به این معنی نیز باشد که اگر جمله‌ای چون ψ در هر مدل از T درست بود آن‌گاه $T \vdash \psi$. به این مفهوم هر نظریهٔ مرتبهٔ اول (من جمله PA) تمام است. این مطلب همان قضیهٔ تمامیت (قوی) منطق محمولات مرتبهٔ اول است. جالب است بدانید که قضیهٔ تمامیت نیز اول بار بوسیلهٔ گودل ثابت شده است.

2) Paris 3) Harington

۴. چند خاصیت مدل‌های نااستاندهٔ PA

در این فصل پاره‌ای از خواص اساسی مدل‌های نااستاندهٔ PA را ذکر می‌کنیم. مرجع اصلی، [K2] است. در همین‌جا متذکر می‌شوم که اطلاعات ما در مورد این مدل‌ها چندان زیاد نیست، یا بهتر است بگویم، نمی‌تواند زیاد باشد. دلیل این امر، قضیهٔ تننباوم [1] است. بنابراین قضیه، مدل‌های نااستاندهٔ PA، بازگشتی نیستند. این به زبان غیر فنی یعنی این که توصیف صریح یا الگوریتمیک از عمل‌های $+$ و $\cdot$ در آنها نمی‌توان ارائه کرد. اگر M یک مدل نااستاندهٔ PA باشد، آن‌گاه M، $\mathbb{N}$ را به‌عنوان یک پارهٔ آغازی در بر دارد. در واقع اگر M شمارا باشد، از نظر ترتیب دارای شکل زیر خواهد بود:

$$\overbrace{\xrightarrow{\mathbb{N}}}^{\text{یک نسخه از } \mathbb{N}} \quad \overbrace{(\cdots \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} \cdots \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} \cdots \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} \cdots)}^{\mathbb{Q} \text{ نسخه از } \mathbb{Z}}$$

دلیل این امر این است که، اگر $t \in M$ یک عنصر نااستانده (بی‌نهایت بزرگ) باشد، آنگاه عناصر

$$\ldots, t-۲, t-۱, t, t+۱, t+۲, \ldots$$

تشکیل یک $\mathbb{Z}$ ــ زنجیر خواهند داد. اثبات این که این مجموعه از $\mathbb{Z}$ ــ زنجیرها از نظر ترتیب با $\mathbb{Q}$ یکریخت است، متکی بر قضیهٔ سادهٔ اورسپیل [2] است. بنابراین قضیه، در یک مدل نااستاندهٔ PA، هیچ برش سره‌ای تعریف پذیر نیست. اگر $M \models \mathrm{PA}$، $I \subsetneq M$، I یک برش (سره) M است هرگاه I از پائین و همچنین تحت عمل تالی گرفتن، بسته باشد. اگر $a, b \in M$ نمایندهٔ دو $\mathbb{Z}$ ــ زنجیر متفاوت در M باشند و $M \models a < b$، آنگاه $M \models \exists x(a+n < x \ \wedge \ x+n < b)$، به ازای هر عدد طبیعی n. پس بنابر قضیهٔ اورسپیل، عنصر نااستانده‌ای از M چون c موجود است که $M \models \exists x(a+c < x \ \wedge \ x+c < b)$. فرض کنید $d \in M$ چنان باشد که $M \models a+c < d \wedge d+c < b$، در اینصورت $\mathbb{Z}$ ــ زنجیر مشخص شده توسط d بین $\mathbb{Z}$ ــ زنجیرهای مشخص شده توسط a و b قرار می‌گیرد. با کامل کردن جزئیات می‌توان دید که با یک مدل از نظریهٔ ترتیب‌های خطی چگال بدون نقطهٔ ابتدایی و انتهایی (DLO) مواجه هستیم. می‌دانیم که هر مدل شمارای DLO با $(\mathbb{Q}, <)$ یکریخت است.

اگر M مدلی ناشمارا از PA باشد، با تعویض $\mathbb{Q}$ با یک مدل مناسب DLO، تصویر مشابهی از ترتیب آن بدست می‌آید.

این که به‌ازای چه مدل‌های $(A, <) \models \mathrm{DLO}$، که در آن A ناشمارا است، مدلی از PA از این ترتیب وجود دارد، مسأله‌ای حل نشده است. در مورد $(\mathbb{R}, <)$، می‌دانیم که مدلی از PA از این ترتیب موجود نیست. برای دیدن مروری بر نتایج موجود و همچنین مسائل حل نشده در این زمینه [BK] را ببینید.

---

1) Tennenbaum 2) Overspill

همانطور که قبلاً گفته شد، معرفی یک مدل نااستاندهٔ PA از طریق توصیف صریح عمل‌های آن ممکن نیست. در عین حال، اگر مدل نااستانده‌ای چون $M \models \mathrm{PA}$ داده شده باشد، می‌توان وجود توسیع‌های مناسب متفاوتی از M به مدل‌های نااستاندهٔ دیگر PA را نشان داد.

در این‌جا چند تعریف مرتبط را متذکر می‌شویم:

فرض کنید $M, M' \models \mathrm{PA}$ (مدل‌ها و مجموعه‌های زمینهٔ آن‌ها را با نمادی مشابه نشان می‌دهیم). M یک زیر مدل M' است، هرگاه $M \subseteq M'$ ، $\circ_M = \circ_{M'}$، $1_M = 1_{M'}$ و همچنین M تحت $+_{M'}$ و $\cdot_{M'}$ بسته بوده و $<_M$، تحدید $<_{M'}$ به M باشد. معمولاً، نماد $M \subseteq M'$، برای نشان دادن این‌که M زیر مدل M' است به کار می‌رود. M یک زیر مدل مقدماتی M' است، هرگاه $M \subseteq M'$ و به ازای هر فرمول $\varphi(x_\circ, \ldots, x_n)$، و $a_\circ, \ldots, a_n \in M$، $M \models \varphi(a_\circ, \ldots, a_n)$ اگر و تنها اگر $M' \models \varphi(a_\circ, \ldots, a_n)$. این مفهوم با نماد $M \preccurlyeq M'$ نشان داده می‌شود.

M' یک توسیع هم پایان از M است، $M \subseteq_{cf} M'$، هرگاه

$$\forall a \in M' \ \exists b \in M (M' \models b \geqslant a).$$

M' یک توسیع انتهایی از M است، $M \subseteq_e M'$، هرگاه

$$\forall a \in M \ \forall b \in M' (M' \models b < a \Longrightarrow b \in M).$$

در این حالت M را یک پارهٔ آغازی M' گویند.

به ازای هر مدل نااستاندهٔ $M \models \mathrm{PA}$، مدل‌های $M', M'' \models \mathrm{PA}$ موجودند که $M \precneqq_{cf} M'$ و $M \precneqq_e M''$. به عبارت دیگر، توسیع‌های سرهٔ مقدماتی هم پایان و انتهایی از M (به مدل‌های دیگر PA) موجودند. در واقع می‌توان ثابت کرد که هر توسیع هم پایان از یک مدل PA به یک مدل PA، مقدماتی است. قضیهٔ جالب دیگر در این زمینه، قضیهٔ فریدمن[1] است. بنابر این قضیه اگر $M \models \mathrm{PA}$ نااستانده و شمارا باشد و $a \in M$، آن‌گاه پارهٔ آغازی $I \subsetneqq_e M$ موجود است که $a \in I$ و I با M یکریخت است ($I \cong M$). در این حالت روشن است که $I \models \mathrm{PA}$. این قضیه وجود پاره‌های آغازی به اندازهٔ دلخواه بزرگ در یک مدل نااستاندهٔ PA را نشان می‌دهد که خود مدل PA هستند. از طرف دیگر، ثابت شده است که می‌توان پاره‌های آغازی به‌دلخواه کوچکی یافت که PA را ارضاء کنند. در حالت فوق $I' \subseteq_e M$ موجود است که $a \notin I'$ و $I' \models \mathrm{PA}$.

در همین‌جا بحث کوتاه خود در مورد حوزهٔ وسیع مدل‌های نااستاندهٔ PA را به پایان می‌بریم. تنها متذکر می‌شویم که می‌توان PA را به کمک خواص نظریهٔ مدلی‌اش به طور منحصر به فرد مشخص کرد (برای دیدن این مطلب [K1] را ببینید). به نظر می‌رسد که امروزه مطالعهٔ زیر نظریه‌های PA، به خصوص زیر نظریه‌های ضعیف PA، از اهمیت بیشتری برخوردار است و توجه افراد بیشتری را به خود جلب کرده است.

---

1) Friedman

۵. زیر نظریه‌های PA

در این فصل به معرفی مختصر برخی نظریه‌های مهم PA می‌پردازیم. این زیرنظریه‌ها معمولاً با تحدید ردهٔ فرمول‌هایی که استقراء روی آن‌ها مجاز است و یا تغییر شکل اصل استقراء به دست می‌آیند.

یک دلیل اساسی برای مطالعهٔ زیر نظریه‌های PA، تحقیق در مورد سؤالاتی به‌شکل زیر است:

" برای اثبات حکم حسابی φ، اثبات پذیر در PA، استفاده از چه مقدار قدرت PA ضروری است؟ "

دلیل مهم دیگر، ارتباطی است که رده‌هایی از این زیر نظریه‌ها با نظریهٔ پیچیدگی محاسبه دارند. ابتدا، به معرفی رده‌های مختلف فرمول‌های حسابی می‌پردازیم.

بنابر قضیهٔ شکل نرمال پیشوندی در منطق، هر فرمول حسابی با فرمولی به فرم زیر معادل است:

$$Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \quad (\text{فرمولی بدون سور})$$

که در آن Q_iها، به ازای $1 \leq i \leq n$، نمایشگر سور $\exists$ یا $\forall$ می‌باشند. ردهٔ فرمول‌های بدون سور (باز) با Open نشان داده می‌شود. سورهای به شکل $\forall x < t$ یا $\exists x < t$، که در آن t یک ترم فاقد متغیر آزاد x است، سورهای محدود نامیده می‌شوند.

Δ_0 ردهٔ همهٔ فرمول‌های حسابی است که سورهای موجود در آن‌ها، همگی محدود هستند. فرض کنید $\varphi \in \Delta_0$. فرمول $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi$ یک فرمول Π_1 و فرمول $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi$ یک فرمول Σ_1 نامیده می‌شود. به‌همین ترتیب، اگر $\psi \in \Sigma_i$ آن‌گاه $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \psi$ یک فرمول Π_{i+1} است و اگر $\theta \in \Pi_i$ آن‌گاه $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \theta$ یک فرمول Σ_{i+1} است.

توجه کنید که در تعریف‌های فوق، n می‌تواند 0 نیز باشد، پس به‌ازای هر n، $\Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ و $\Sigma_n \subseteq \Pi_{n+1}$ ضمناً $\Pi_0 = \Sigma_0 = \Delta_0$.

اکنون تعریف می‌شود:

$$I\text{open} = \text{PA}^- + \{I_x\varphi \mid \text{باز } \varphi\}, \quad I\Sigma_n = \text{PA}^- + \{I_x\varphi \mid \varphi \in \Sigma_n\},$$
$$I\Pi_n = \text{PA}^- + \{I_x\varphi \mid \varphi \in \Pi_n\}$$

برای سهولت در معرفی، تقسیم‌بندی زیر نظریه‌های PA به زیر نظریه‌های بسیار ضعیف، ضعیف و قوی مناسب است. مراجع اصلی [Bus3]، [HP] و [K2] می‌باشند.

۱.۵. زیر نظریه‌های بسیار ضعیف PA

زیر نظریه‌هایی از PA که با حذف کامل اصل استقراء به‌دست می‌آیند، عمدتاً زیر نظریه‌های بسیار ضعیف PA را تشکیل می‌دهند.

برای مثال، می‌توان از PA^- یاد کرد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، PA^- مجموعهٔ اصول موضوعهٔ قسمت‌های نامنفی حلقه‌های جابجایی و یک‌دار و به‌طور گسسته مرتب است (گسسته مرتب یعنی آن‌که بین ۰ و ۱، و به‌طور معادل بین هر عدد و تالی آن، عددی وجود ندارد).

فرض کنید $\Sigma_1 - \mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma_1, \mathbb{N} \models \sigma\}$. در این‌صورت

$$\mathrm{PA}^- \vdash \Sigma_1 - \mathrm{Th}(\mathbb{N})$$

دلیل این امر آن است که هر مدل از PA^-، $\mathbb{N}$ را به‌عنوان یک پارهٔ آغازی دربردارد. به‌علاوه، می‌توان ثابت کرد که اگر $M \subseteq_e M'$، آن‌گاه به ازای هر $\sigma \in \Sigma_1$، $M \models \sigma \iff M' \models \sigma$. از طرف دیگر روشن است که این مطلب در مورد جملات Π_1 درست نیست، زیرا $\mathrm{Con(PA)}$ فرمولی Π_1 است. مثالی ساده که ضعف PA^- را نشان می‌دهد آن‌است که PA^- نمی‌تواند ثابت کند که هر عددی زوج یا فرد است:

$$\mathrm{PA}^- \nvdash \forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$$

برای دیدن این‌که چرا مطلب فوق درست است، توجه کنید که $\mathbb{Z}[t]^+ \models \mathrm{PA}^-$. $\mathbb{Z}[t]$ حلقه‌ای است که از افزودن عنصر جدید (بی‌نهایت بزرگ) t به $\mathbb{Z}$ پدید می‌آید. جمع و ضرب و ترتیب روی $\mathbb{Z}[t]$ همان‌گونه که در جبر تعریف می‌شوند، در نظر گرفته می‌شوند. ضمناً، $\mathbb{Z}[t]^+ = \{a \mid a \in \mathbb{Z}[t], a \geq 0\}$. در این مدل، عنصر t نه زوج است و نه فرد. توجه کنید که $\mathbb{Z}[t]^+$ به‌وضوح یک مدل بازگشتی است، دستورالعمل‌های مشخصی در مورد انجام اعمال + و . و هم‌چنین تشخیص ترتیب، وجود دارند. این، تفاوت عظیم PA^- و PA را (که فاقد مدل نااستاندهٔ بازگشتی است) نشان می‌دهد.

زیر نظریهٔ بسیار ضعیف معروف دیگر، نظریهٔ Q است. این نظریه در زبان $\{0, s, +, \cdot\}$ ارائه می‌شود. s نشان‌گر تابع تالی است. نماد $\leq$ در زبان نیامده ولی می‌توان آن‌را به‌صورت $x \leq y \longleftrightarrow \exists z(x + z = y)$ تعریف کرد. نظریهٔ Q چیزی نیست جز همان خواص ابتدایی نمادهای موجود در زبانش. می‌توان نشان داد که $\mathrm{Iopen} \vdash Q$. از ذکر جزئیات در مورد این نظریه صرف نظر می‌کنیم.

خود نظریهٔ Iopen، هرچند که از استقراء بی‌بهره نیست، اما درعین حال مناسب‌تر است که جزء نظریه‌های بسیار ضعیف محسوب شود. یک دلیل این امر، وجود مدل‌های نااستاندهٔ بازگشتی برای آن‌است. در واقع روش‌هایی که برای مطالعهٔ Iopen به‌کار رفته‌اند به‌کلی با روش‌های بررسی زیرنظریه‌های ضعیف PA که بعداً به آنها اشاره می‌شود، تفاوت دارند. با این روش‌ها که عمدتاً

جبری هستند، می‌توان تحلیل بسیار زیبایی از Iopen ارائه کرد.

۱.۱.۵ نظریهٔ استقرای باز Iopen

یادآوری می‌کنیم که Iopen زیرنظریه‌ای از PA است که از افزودن همهٔ موارد استقراء روی فرمول‌های باز (یعنی بدون سور) به PA^-، حاصل می‌شود. مطالعهٔ این نظریه در دههٔ ۱۹۶۰ توسط شفردسون[1] آغاز شد. او محکی کاملاً جبری برای ساخت‌هایی که مدل Iopen هستند ارائه کرد و به‌کمک آن مدل بازگشتی معروف خود از این نظریه، یعنی $S_t(\mathbb{N})$، را ساخت.

قضیهٔ ۱ (شفردسون). فرض کنید M حلقه‌ای جابجایی، یک‌دار و به‌طور گسسته مرتب باشد (به‌طور خلاصه $M \models \mathrm{DOR}$) و F میدان مرتب کسرهای M باشد. در این‌صورت دو شرط زیر معادلند:

۱) $M^+ \models \mathrm{Iopen}$

۲) به‌ازای هر $r > 0$ متعلق به $\mathrm{RC}(F)^+$ (عناصر مثبت متعلق به بستار حقیقی F)، وجود دارد $a \in M^+$، به‌طوری که $a \leq r < a + 1$.

به‌عبارت دیگر، مدل‌های Iopen دقیقاً قسمت‌های مثبت مدل‌هایی از DOR هستند که هر عنصر مثبت متعلق به بستار حقیقی میدان کسرهای خود را با تقریب کم‌تر از یک تخمین می‌زنند. مدل شفردسون از Iopen شامل همهٔ عناصر به‌فرم زیر است:

$$a_n t^{n/q} + a_{n-1} t^{n-1/q} + \ldots + a_1 t^{1/q} + a_0$$

که درآن q عددی صحیح و مثبت، n عددی طبیعی (احتمالاً 0) و a_0 عددی صحیح است. ضمناً به‌ازای $i > 0$، a_i متعلق به میدان اعداد جبری حقیقی $(\tilde{\mathbb{Q}})$ است. هم‌چنین فرض می‌شود که $a_n > 0$، اگر $n > 0$ و $a_0 \geq 0$، اگر $n = 0$.

با قرار دادن $t > n$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، روی $S_t(\mathbb{N})$ ترتیب به‌طور طبیعی القاء می‌شود. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $S_t(\mathbb{N})$ هر عنصر متعلق به میدان سری‌های پوئیزو[2] روی میدان اعداد جبری حقیقی، یعنی

$$\tilde{\mathbb{Q}}\left((t^{\frac{1}{\infty}})\right) = \{a_n t^{n/q} + a_{n-1} t^{n-1/q} + \ldots + a_0 + a_{-1} t^{-1/q} + \ldots \mid 0 < q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, a_i \in \tilde{\mathbb{Q}}\}$$

را با تقریب کم‌تر از یک تخمین می‌زند. می‌توان ثابت کرد که $\tilde{\mathbb{Q}}\left((t^{\frac{1}{\infty}})\right)$ یک میدان بستهٔ حقیقی است (قضیهٔ پوئیزو).

مدل شفردسون، برای مثال، نشان می‌دهد که $\mathrm{Iopen} \nvdash \mathrm{Irrational}(\sqrt{2})$، یعنی

$$\mathrm{Iopen} \nvdash \forall x, y (x^2 = 2y^2 \longrightarrow x = 0)$$

دلیل این امر این است که، در این مدل، $2(t^2) = (\sqrt{2}t)^2$.

1) Shepherdson 2) Puiseux

افراد دیگری چون ویلکی[1]، مکینتایر[2] و مارکر[3] مطالعهٔ Iopen را ادامه دادند و مدل‌های مختلفی از Iopen با خواص مشخص ساختند، برای مثال [MM] و [Wilk] را ببینید. مجتبی منیری [M]، با تعمیم روش شفردسون، مدلی بازگشتی از Iopen ساخته است که شامل زیرمجموعه‌ای هم‌پایان از عناصر اول دوقلو است. بوغطاس[4]، در سال ۱۹۹۱، ثابت کرد که Iopen متناهیاً اصل پذیر نیست (این خاصیتی است که PA هم دارا است، اما در مورد زیر نظریه‌های ضعیف، سؤالی باز و اساسی است).

۲.۵. زیر نظریه‌های قوی PA

به‌ازای هر فرمول حسابی $\varphi(x)$، اصول استقراء، استقرای ترامتناهی، قانون کوچک‌ترین عدد و جایگزینی، به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I\varphi:\ (\varphi(\circ)\ \wedge\ (\forall x)\,(\varphi(x)\longrightarrow\ \varphi(x+۱)))\ \longrightarrow\ \forall x\,\varphi(x)$$
$$I^t\varphi:\ [\forall x\ ((\forall y<x)\,\varphi(y)\ \longrightarrow\ \varphi(x))]\ \longrightarrow\ \forall x\,\varphi(x)$$
$$L\varphi:\ (\exists x)\,\varphi(x)\ \longrightarrow\ \exists x\ (\varphi(x)\wedge\ (\forall y<x)\neg\varphi(y))$$
$$B\varphi:\ (\forall v)\ [(\forall x\leq v)\,\exists y\,\varphi(x,y)\ \longrightarrow\ (\exists v)(\forall x\leq v)\,(\exists y\leq v)\varphi(x,y)]$$

زیر نظریه‌های زیر از PA به کمک اصول فوق تعریف می‌شوند. فرض کنید $n\geq\circ$:

$$\begin{aligned}I\Sigma_n &= \mathrm{PA}^-\cup\{I\varphi\,|\,\varphi\in\Sigma_n\}\\ I^t\Sigma_n &= \mathrm{PA}^-\cup\{I^t\varphi\,|\,\varphi\in\Sigma_n\}\\ L\Sigma_n &= \mathrm{PA}^-\cup\{L\varphi\,|\,\varphi\in\Sigma_n\}\\ B\Sigma_n &= \mathrm{PA}^-\cup\{B\varphi\,|\,\varphi\in\Sigma_n\}\end{aligned}$$

نظریه‌های $I\Pi_n$، $I^t\Pi_n$، $L\Pi_n$ و $B\Pi_n$، به‌طریق مشابه و با جایگزینی Π_n به‌جای Σ_n، حاصل می‌شوند. شکل زیر، وضعیت نظریه‌های فوق را از نظر قدرت اثباتی نشان می‌دهد. در مورد $I\Sigma_{n+۱}\Longrightarrow B\Sigma_{n+۱}$ و $B\Sigma_{n+۱}\Longrightarrow I\Sigma_n$ پیکان‌ها واقعاً یکطرفه هستند، یعنی $I\Sigma_n\nvdash B\Sigma_{n+۱}$ و $B\Sigma_{n+۱}\nvdash I\Sigma_{n+۱}$.

1) Wilkie 2) Macintyre 3) Marker 4) Boughattas

$$\begin{array}{l} I\Sigma_{n+1} \\ \quad\Downarrow \\ B\Sigma_{n+1} \iff B\Pi_n \\ \quad\Downarrow \\ I\Sigma_n \iff I\Pi_n \iff L\Sigma_n \iff L\Pi_n \iff I^t\Sigma_n \iff I^t\Pi_n \end{array}$$

به‌ازای $n \geq 1$، نظریه‌های فوق، زیرنظریه‌های قوی PA محسوب می‌شوند. ضعیف‌ترین آن‌ها، $I\Sigma_1$ است ولی این نظریه آن‌قدر قدرت دارد که حسابی‌سازی نحو و ساخت فرمول $\text{prov}(x,y)$، آن‌گونه که در قضایای گودل مورد نیاز است، را انجام دهد. نکتهٔ اساسی در این مورد آن است که تابع نمایی، یعنی $f(x,y) = x^y$، در $I\Sigma_1$ تعریف پذیر است و به‌علاوه $I\Sigma_1$ می‌تواند تام بودن این تابع را ثابت کند. به‌عبارت دیگر فرمول $\exp(z,x,y)$ متعلق به Δ_0 وجود دارد که روی مجموعهٔ اعداد طبیعی، شبیه تابع نمایی $z = x^y$ رفتار می‌کند و ضمناً $I\Sigma_1$ توانایی اثبات خواص زیر برای آن را دارد:

$$\begin{aligned} &\exp(x,y,z_1) \wedge \exp(x,y,z_2) \longrightarrow z_1 = z_2, \\ &\exp(x,0,1), \\ &\exp(x,y,z) \longrightarrow \exp(x,y+1,xz) \\ &(\exp(x,y,z) \wedge y' < y) \longrightarrow \exists z' \ \exp(x,y',z'), \\ &\exp(x,y,z) \longrightarrow z \neq 0, \end{aligned}$$

و سرانجام فرمولی که تام بودن تابع نمایی را بیان می‌کند، یعنی Exp:

$$\forall x,y \,\exists! z \ \exp(x,y,z)$$

برای روشن شدن اهمیت تابع نمایی در قضایای گودل، توجه کنید که اگر فرمول $A(x)$ دارای m نماد و ترم t دارای n نماد باشد، آن‌گاه فرمول $A(t)$، که از جایگزینی یکنواخت t به‌جای موارد آزاد x در $A(x)$ به‌دست می‌آید، ممکن است دارای نمادهایی در حد mn باشد. در این‌صورت اگر یک کدگذاری گودلی مؤثر به‌کار رود، A دارای عدد گودل $g(A) \approx 2^{O(m)}$ و t دارای عدد گودل $g(t) \approx 2^{O(n)}$ است و بنابراین، $A(t)$ دارای عدد گودل زیر خواهد بود:

$$g\left(A(t)\right) \approx 2^{O(n.m)} \approx (g(A))^{O(n)} \approx (g(A))^{O\left(\log_2(g(t))\right)}$$

توجه کنید که مقدار $g\left(A(t)\right)$ توسط یک چندجمله‌ای برحسب $g(A)$ و $g(t)$ محدود نمی‌شود. بنابراین برای اثبات خواص کدگذاری گودلی به‌صورت صوری، استفاده از تابع نمایی (یا حداقل تابع $f(x,y) = x^{\log_2 y}$ که سرعت رشدی کم‌تر از تابع نمایی دارد، ولی همچنان توسط هیچ چندجمله‌ای

برحسب y, x مهار نمی‌شود) ضروری است. مقالهٔ توصیفی [Bus 4] در این مورد خواندنی است. در بخش بعد خواهیم دید که برای مثال، $I\Delta_0$ توانایی اثبات Exp را ندارد، هرچند که مابقی خواص exp در $I\Delta_0$ قابل بیان و قابل اثبات است. بنابراین صوری‌سازی نحو در $I\Delta_0$ با مشکلی اساسی مواجه است.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که سلسله مراتب زیر نظریه‌های قوی حساب سره است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $n \geq 1$.

۱) $I\Sigma_{n+1} \vdash \mathrm{Con}(I\Sigma_n)$

۲) $I\Sigma_n \nvdash \mathrm{Con}(I\Sigma_n)$

برای دیدن خواص مدل‌های نااستاندهٔ این نظریه‌ها، [HP] و [D] را ببینید. برای مثال قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۳. به‌ازای هر $n \geq 2$، اگر $M \models I\Sigma_n$ آن‌گاه توسیعی سره، Σ_n—مقدماتی و انتهایی از M موجود است.

M' توسیعی Σ_n—مقدماتی از M است هرگاه شرط مذکور برای مقدماتی بودن توسیع‌ها، برای فرمول‌های عضو Σ_n (نه لزوماً برای همهٔ فرمول‌ها) برقرار باشد.

قبل از اتمام این بخش، قضیهٔ مشهور موجود درمورد مشخص سازی توابع اثبات پذیر تام در $I\Sigma_1$ را ذکر می‌کنیم. این قضیه اولین بار توسط پارسونز[1] در ۱۹۷۰ ثابت شده و بعداً اثبات‌های متفاوتی برای آن ارائه شده است.

تعریف ۴. فرض کنید T یک نظریهٔ حسابی باشد. گوییم تابع $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ در T، Σ_1—تعریف‌پذیر است هرگاه فرمول $\Phi(\vec{x}, y)$ موجود باشد، که در آن $\Phi \in \Sigma_1$ و Φ به‌جز $\vec{x}$ و y متغیر آزاد دیگری ندارد، به‌طوری‌که:

۱) به‌ازای هر $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$، $\Phi(\vec{n}, f(\vec{n}))$ (در مدل استانده) درست باشد.

۲) $T \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, \Phi(\vec{x}, y)$

$\vec{x}$ نمایشگر دنباله‌ای متناهی از متغیرها و $\exists! y$ به معنی "دقیقاً یک y وجود دارد" است. توابع Σ_1—تعریف‌پذیر یک نظریه، معمولاً توابع اثبات‌پذیر تام یا اثبات‌پذیر بازگشتی آن نظریه نیز نامیده می‌شوند.

قضیهٔ ۵. توابع Σ_1—تعریف‌پذیر $I\Sigma_1$ دقیقاً توابع بازگشتی اولیه هستند.

---

1) Parsons

یادآوری می‌کنم که توابع بازگشتی اولیه، توابعی از $\mathbb{N}^k$ به $\mathbb{N}$، $k \geq ۱$، هستند که از تابع ثابت ۰ و تابع تالی، با استفاده از عمل‌های ترکیب، تصویر و هم‌چنین استفاده از تعاریف بازگشتی به‌دست می‌آیند.
این‌که توابع بازگشتی اولیه در $I\Sigma_۱$، $\Sigma_۱$ تعریف‌پذیر هستند، اساساً توسط گودل اثبات شده است. در مورد مشخص‌سازی توابع اثبات‌پذیر تام نظریه‌های $I\Sigma_n$ و PA، نتایج مختلفی در دست است که از ذکر آن‌ها صرف‌نظر می‌شود.

۳.۵. زیر نظریه‌های ضعیف PA (حساب‌های ضعیف) و نظریهٔ پیچیدگی

در این قسمت، به معرفی زیر نظریه‌های ضعیف PA می‌پردازیم. از آن‌جا که مطالعهٔ این نظریه‌ها، اساساً به‌خاطر ارتباط آن‌ها با نظریهٔ پیچیدگی محاسبه انجام شده، دانستن مقدمات این نظریه برای فهم نتایج موجود درمورد حساب‌های ضعیف، ضروری است.

$I\Delta_۰$، یا حساب محدود، یکی از زیر نظریه‌های ضعیف PA است. مطالعهٔ این زیرنظریه توسط روهیت پریخ[۱] آغاز شد. قضیهٔ اساسی‌ای که پریخ در مورد $I\Delta_۰$ ثابت کرد قضیهٔ زیر است:

قضیهٔ ٦. (پریخ، ۱۹۷۱). فرض کنید $A(x,y) \in \Delta_۰$ و $I\Delta_۰ \vdash \forall x\, \exists y\, A(x,y)$. در این‌صورت اعداد طبیعی مثبت l و k موجودند که $I\Delta_۰ \vdash \forall x\, \exists y\, (y < x^k + l \wedge A(x,y))$. و به‌طور کلی‌تر، اگر $I\Delta_۰ \vdash \forall \vec{x}\, \exists y\, B(\vec{x},y)$، که در آن $B(\vec{x},y) \in \Delta_۰$، آن‌گاه ترم t موجود است که

$$I\Delta_۰ \vdash \forall \vec{x}\, \exists y \leq t\; B(\vec{x},y)$$

نتیجهٔ ۷. تابع $f(\vec{x}) : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ در $I\Delta_۰$، $\Sigma_۱-$ تعریف پذیر است اگر و تنها اگر فرمول محدودی چون $\Phi(\vec{x},y)$ (بدون متغیر آزادی جز $\vec{x}$ و y) و ترم $t(\vec{x})$ موجود باشند به طوری که $\Phi(\vec{n}, f(\vec{n}))$، به‌ازای هر $\vec{n} \in \mathbb{N}^k$ درست باشد و $I\Delta_۰ \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y \leq t\; \Phi(\vec{x},y)$.

برای دیدن یک اثبات ساده نظریهٔ مدل مبتنی بر قضیهٔ فشردگی از قضیهٔ پریخ، [Kr,Th.5.1.4] را ببینید. مرجع [Bus3,1.4.3] حاوی اثباتی به سبک نظریهٔ برهان برای این قضیه است.

از قضیهٔ پریخ نتیجه می‌شود که تابع نمایی، $x^y = z$، در $I\Delta_۰$، $\Sigma_۱$–تعریف‌پذیر نیست. این محدودیتی اساسی برای صوری کردن بسیاری از ساختارها در $I\Delta_۰$ پدید می‌آورد.[۲]

بعد از کارهای اولیهٔ پریخ، افراد سرشناس زیادی به کار درمورد حساب محدود و ارتباط آن با سایر شاخه‌ها پرداختند، از قبیل ویلکی و پریس. برای مثال مرجع [WP] را ببینید.

---

1) Parikh

۲) البته پریخ این ضعف را امتیازی برای نظریهٔ $I\Delta_۰$ می‌داند و دلیلی برای نزدیک‌تر بودن آن به یک نظریهٔ ایده‌آل از نظر محاسبه‌پذیری (feasiblity)، نسبت به نظریه‌هایی که تام بودن تابع نمایی را ثابت می‌کنند.

۱.۳.۵ چند کلمه در مورد نظریهٔ پیچیدگی

نظریهٔ پیچیدگی محاسبه به بررسی پیچیدگی مسائل از جهت فضا (حافظه) و یا زمان (تعداد مراحل) لازم برای حل آن‌ها به‌صورت الگوریتمی و به‌وسیلهٔ کامپیوتر، می‌پردازد. در این‌جا ما تنها به پیچیدگی زمانی می‌پردازیم. یک ماشین تورینگ[1]، نوع خاصی از یک کامپیوتر ایده‌آل، با حافظه‌ای بالقوه نامتناهی است. می‌توان توصیفی صریح و دقیق از ماشین‌های تورینگ ارائه کرد. معمولاً هنگامی که صحبت از پیچیدگی یک مسئله می‌شود، منظور، پیچیدگی حل آن به‌وسیلهٔ یک ماشین تورینگ است. در واقع ثابت شده است که هرچند این ماشین‌ها بسیار ساده هستند، اما از نظر مقاصد مربوط به نظریهٔ پیچیدگی، به‌اندازهٔ دیگر کامپیوترها قوی هستند.

یک ماشین تورینگ با یک ورودی خاص، بعد از تعدادی مرحلهٔ عملیات، یا در وضعیت «قبول» یا «رد» متوقف می‌شود، و یا بی‌وقفه به‌کار ادامه خواهد داد. با استفاده از یک کدگذاری مؤثر، می‌توان تنها مسائلی به‌شکل $x \overset{?}{\in} A$، را که در آن $A \subseteq \mathbb{N}$، در نظر گرفت. فرض بر این است که x به‌صورت دودویی به ماشین وارد می‌شود. $|x|$ نشان‌گر طول x، یعنی تعداد ارقام x در شکل دودویی آن است. داریم $|x| = \lceil \log_۲(x+۱)\rceil$ اگر $x > ۰$، و $|۰| = ۰$. توجه کنید که $\lceil \log_۲ x\rceil = y \iff ۲^{y-۱} < x \leq ۲^y$.

ردهٔ پیچیدگی P، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{N}$ است که به‌صورت چندجمله‌ای تصمیم‌پذیر هستند. به‌عبارت دیگر، زیر مجموعهٔ A از $\mathbb{N}$ به P تعلق دارد، هرگاه ماشین تورینگ M_A و تابع چندجمله‌ای f موجود باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر ورودی $n \in \mathbb{N}$، M_A در حداکثر $f(|n|)$ مرحله متوقف شود، و به علاوه:

$$M_A \text{ با ورودی } n \text{ قبول در وضعیت متوقف شود } \iff n \in A$$

مسائل از نوع P، یعنی مسائلی که در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند، از اهمیت زیادی برخوردارند، زیرا تنها مسائلی هستند که "به‌طور عملی" توسط کامپیوترها قابل حل‌اند. حتی این‌گونه مسائل هنگامی‌که درجهٔ چندجمله‌ای تعیین کنندهٔ پیچیدگی آن‌ها بالا باشد، به‌طور مؤثر قابل حل نیستند، زیرا زمان لازم برای این کار ممکن است نجومی باشد. اما در این زمینه فرضیه‌ای به نام فرضیهٔ محاسبه‌پذیری عملی[2] وجود دارد که می‌گوید: « یک مسأله دارای حل مؤثر و عملی است اگر و تنها اگر به‌صورت چندجمله‌ای قابل حل باشد.»

برای توضیح بیشتر در این زمینه به مقالهٔ توصیفی [C] از کوک[3]، یکی از بنیان‌گزاران نظریهٔ پیچیدگی، مراجعه کنید. یک ماشین تورینگ نامعین، عبارت است از یک ماشین تورینگ که مراحل کار آن به‌طور معین در نظر گرفته نشده است. به‌عبارت دیگر، چنین ماشینی با یک ورودی خاص در هر مرحله از کار، امکان ادامهٔ کار به طرق مختلفی را (به‌طور هم‌زمان) دارد.

---

1) Turing 2) feasibility 3) Cook

یک ماشین تورینگ نامعین چندجمله‌ای، ماشین تورینگ نامعینی است که برای آن تابع چندجمله‌ای g موجود باشد به‌طوری‌که، به ازای هر ورودی m، همهٔ شاخه‌های کار آن، در زمان حداکثر $g(|m|)$ (در وضعیت «قبول» یا «رد») متوقف شوند.

NP ردهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{N}$ چون A است به طوری که برای آن‌ها ماشین تورینگ نامعین چندجمله‌ای M_A موجود است به‌گونه‌ای که $m \in A$ اگر و تنها اگر حداقل یکی از شاخه‌های کاری M_A با ورودی m در وضعیت «قبول» متوقف شود.

روشن است که $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$. سؤال باز و بسیار مهم درمورد تساوی این دو است، آیا $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$؟ اهمیت این سؤال در این است که درمورد تعداد بسیار زیادی از مسائل مهم که می‌دانیم در NP هستند، هنوز روشن نیست که آیا این مسائل در P نیز هستند یا نه؟ یعنی، آیا به‌صورت مؤثر قابل حل هستند یا نه؟ برای مثال مسألهٔ تصمیم SAT، یعنی این که آیا فرمول گزاره‌ای دلخواه داده شده‌ای ارضاء پذیر است یا نه، به این رده از مسائل تعلق دارد.

قرار می‌دهیم $\sum_0^p = \mathrm{P}$ و $\sum_{i+1}^p = \mathrm{NP}(\sum_i^p)$ به‌ازای $i \geq 0$. $\mathrm{NP}(\sum_i^p)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{N}$ است که به‌وسیلهٔ یک ماشین تورینگ نامعین چندجمله‌ای که به یکی از اعضای Σ_i^p به‌عنوان اراکل[1] دسترسی دارد، مشخص می‌شوند. مجموعهٔ A یک اراکل برای یک ماشین تورینگ M است هرگاه، M در هر لحظه بتواند از اطلاعات مربوط به عضویت در A استفاده کند.

توجه کنید که $\Sigma_1^p = \mathrm{NP}$. مجموعهٔ همهٔ Σ_i^p ها، $i \geq 0$، سلسله مراتب زمان چندجمله‌ای[2] (یا به‌طور مختصر PH) را می‌سازند:

$$\mathrm{PH} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i^p$$

سلسله مراتب زمان خطی[3] (یا Lin H) به طور مشابه تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Lin\ Time} = \Sigma_0^l \text{ و } \Sigma_{i+1}^l = \mathrm{NLin\ Time}(\Sigma_i^l)\text{، } i \geq 0 \text{، و } \mathrm{Lin\ H} = \bigcup_{i \geq 0}^{\infty} \Sigma_i^l.$$

فرض کنید که $\Delta_0^{\mathbb{N}}$ مجموعهٔ همهٔ روابطی روی مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد که به‌وسیلهٔ فرمول‌هایی کراندار (در زبان حساب) تعریف‌پذیر هستند. برای مثال، رابطهٔ $\mathrm{Prime}(x)$ (x یک عدد اول است) به $\Delta_0^{\mathbb{N}}$ تعلق دارد زیرا عبارت زیر در $\mathbb{N}$ درست است:

$$Prime(x) \longleftrightarrow 1 < x \wedge \forall y \leqslant x \, \forall z \leqslant x \, (y.z = x \longrightarrow (y = 1 \vee z = 1))$$

حقیقت جالبی که در این مورد وجود دارد این است که $\Delta_0^{\mathbb{N}} = \mathrm{Lin\ H}$ (توجه کنید که در این جا، یک رابطه روی $\mathbb{N}$، که در واقع زیرمجموعه‌ای از یک $\mathbb{N}^k$ است، با مجموعهٔ کدهای اعضایش

1) Oracle 2) Polynomial Time Hierachy 3) Linear Time Hierachy

یکی گرفته شده است. این کدگذاری به‌وسیلهٔ فرمول‌های محدود قابل بیان است و خواص آن، حتی در $I\Delta_۰$، قابل اثبات‌اند). گوییم PH فرو می‌ریزد هرگاه $i \geqslant ۰$ موجود باشد به‌طوری که $\Sigma_j^p = \Sigma_i^p$ به‌ازای هر j به‌طوری که $j \geqslant i$. این که آیا PH فرو می‌ریزد یانه، خود سؤالی باز و اساسی در نظریهٔ پیچیدگی است. سؤالات مشابهی درمورد Lin H وجود دارد. به مورد PH در بخش بعدی می‌پردازیم، اما در مورد Lin H اشاره می‌کنیم که سؤال منطقیِ نظیرِ مسألهٔ فرو ریزش این سلسله، سؤال آیا $\Delta_۰^{\mathbb{N}} = E_۱^{\mathbb{N}}$ ؟ $E_۱$ مجموعهٔ همهٔ فرمول‌های به شکل $\exists x_n < t_n \ldots \exists x_۱ < t_۱ \varphi$ است، که در آن φ فرمولی بدون سور و t_i ترمی فاقد x_i است.

مسئلهٔ مرتبط دیگر، سؤال $I\Delta_۰ \overset{?}{\vdash} IE_۱$ است. $IE_۱$ اول بار توسط ویلمرز[1] مورد مطالعه قرار گرفت. ویلمرز ثابت کرد که $IE_۱$ فاقد مدل نااستاندهٔ بازگشتی است، مرجع [Wilm] را ببینید.

۲.۳.۵ حساب‌های ضعیف و پیچیدگی محاسباتی

ثابت شده است که تابع $|x|$ در $I\Delta_۰$، $\Delta_۰-$ تعریف‌پذیر است. هم‌چنین فرمول محدود $\phi(x,y,z)$ وجود دارد که $I\Delta_۰$ همهٔ خواص معمول تابع نمایی $x^y = z$، به‌جز تام بودن را برای آن اثبات می‌کند. از طرف دیگر، اگر $M \models I\Delta_۰$ آن‌گاه مجموعهٔ کدهای اعضای M، لزوماً تحت ضرب بسته نیست. به‌عبارت دیگر، اگر بخواهیم طول یک عنصر $x \in M$ را به‌صورت چند جمله‌ای افزایش دهیم (چنان که در محاسبهٔ چند جمله‌ای با ماشین تورینگ مورد نیاز است)، حاصل کار لزوماً کدی از اعضای M نخواهد بود. بنابراین برای صوری کردن محاسبهٔ چند جمله‌ای، نیاز به نظریه‌ای قویتر از $I\Delta_۰$ است. معلوم شده است که اصل زیر

$$\Omega_۱ : \forall x, y \, \exists z \;\; x^{|y|} = z$$

دقیقاً چیزی است که در این مورد باید به $I\Delta_۰$ اضافه شود.

یک تحول مهم در زمینهٔ مطالعهٔ حساب‌های ضعیف و ارتباط آن‌ها با نظریهٔ پیچیدگی، با معرفی نظریه‌های جدیدی (که اساساً زیر نظریه‌های $I\Delta_۰ + \Omega_۱$ ولی در زبانی توسعه یافته هستند) توسط ساموئل باس[2] در تز دکترایش به‌وجود آمد. این تز بعداً به‌صورت [Bus1] چاپ شد. این نظریه‌ها در زبان جدید $\{۰, s, +, ., \#, |x|, \lfloor \frac{۱}{۲} x \rfloor\}$ مطرح شده‌اند. $x\#y$ (x اسمش y) نمایانگر $۲^{|x||y|}$ است. رده‌های Σ_i^b و Π_i^b از فرمول‌های محدود در این زبان به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱) $\Sigma_۰^b = \Pi_۰^b$ مجموعهٔ همهٔ فرمول‌هایی هستند که سورهای موجود در آن‌ها همگی اکید، یعنی به‌شکل $\exists x < |t|$ یا $\forall x < |t|$ هستند.

(۲) $\Sigma_{i+۱}^b$ و $\Pi_{i+۱}^b$، کوچک‌ترین مجموعه‌هایی هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(a) $\Sigma_i^b, \Pi_i^b \subseteq \Sigma_{i+۱}^b$ و $\Sigma_i^b, \Pi_i^b \subseteq \Pi_{i+۱}^b$.

---

1) Wilmers 2) Samuel Buss

(b) اگر $\varphi \in \Sigma^b_{i+1}$، آن‌گاه $\exists x \leq t\varphi \in \Sigma^b_{i+1}$ و $\forall x \leqslant |t|\varphi \in \Sigma^b_{i+1}$.
اگر $\varphi \in \Pi^b_{i+1}$، آن‌گاه $\forall x \leq t\varphi \in \Pi^b_{i+1}$ و $\exists x \leq |t|\varphi \in \Pi^b_{i+1}$.

(c) اگر $\varphi, \psi \in \Sigma^b_{i+1}$، آن‌گاه $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma^b_{i+1}$ و $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma^b_{i+1}$.
اگر $\varphi, \psi \in \Pi^b_{i+1}$، آن‌گاه $(\varphi \wedge \psi) \in \Pi^b_{i+1}$ و $(\varphi \vee \psi) \in \Pi^b_{i+1}$.

(d) اگر $\varphi \in \Sigma^b_{i+1}$ و $\psi \in \Pi^b_{i+1}$، آن‌گاه $\neg\psi$ و $(\psi \longrightarrow \varphi)$ در Σ^b_{i+1} هستند.
اگر $\varphi \in \Pi^b_{i+1}$ و $\psi \in \Sigma^b_{i+1}$، آن‌گاه $\neg\psi$ و $(\psi \longrightarrow \varphi)$ در Π^b_{i+1} هستند.

رده‌های فوق به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که قضیهٔ زیر درمورد آن‌ها درست است:

قضیهٔ ۸. فرض کنید $i \geq 1$. زیرمجموعهٔ A از مجموعهٔ اعداد طبیعی به ردهٔ پیچیدگی Σ^p_i تعلق دارد اگر و تنها اگر، فرمولی در Σ^b_i موجود باشد که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که به‌وسیلهٔ آن تعریف می‌شود، برابر با A باشد.

BASIC نظریه‌ای است شبیه Q، در زبان جدید، که خواص اولیهٔ نمادها را بیان می‌کند. برای مثال $|x\#y| = s(|x|.|y|)$ و $x \neq 0 \longrightarrow |x| = s(|\lfloor \frac{1}{2}x \rfloor|)$، دو عضو BASIC هستند. استقرای چند جمله‌ای، PIND، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[A(0) \wedge \forall x \left(A(\lfloor \frac{1}{2}x \rfloor) \longrightarrow A(x)\right)\right] \longrightarrow \forall x A(x).$$

تعریف ۹. به‌ازای $i \geq 0$، S^i_2 نظریه‌ای است که دارای اصول موضوع BASIC همراه با PIND روی همهٔ فرمول‌های Σ^b_i است. هم‌چنین $S_2 = \bigcup_i S^i_2$.

هنوز معلوم نیست که آیا دنبالهٔ $S^1_2 \subseteq S^2_2 \subseteq \ldots$ اکید است یا نه؟ یعنی، آیا $S^i_2 \neq S^{i+1}_2$ برای هر i؟

نظریه‌های دیگری نیز در این زمینه به‌وسیلهٔ باس و دیگران معرفی شده‌اند که از ذکر آن‌ها صرف‌نظر می‌شود.

قضیهٔ ۱۰. S_2 توسیعی محافظه‌کارانه از $I\Delta_0 + \Omega_1$ است. به‌عبارت دیگر، اگر φ فرمولی متعلق به زبان معمولی حساب باشد، آنگاه $I\Delta_0 + \Omega_1 \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر $S_2 \vdash \varphi$.

قضیهٔ ۱۱. دنبالهٔ $S^1_2 \subseteq S^2_2 \subseteq \ldots$ از حساب‌های ضعیف را در نظر بگیرید. اگر PH فرو نریزد، آن‌گاه این دنباله اکید است، یعنی به‌ازای هر $i \geq 1$، $S^i_2 \neq S^{i+1}_2$. هم‌چنین، اکید بودن دنبالهٔ فوق معادل با به‌طور متناهی اصل‌پذیر نبودن S_2 است، که خود معادل است با به‌طور متناهی اصل‌پذیر نبودن $I\Delta_0$.

قضیهٔ ۱۲. S_2 به‌طور متناهی اصل‌پذیر نیست اگر و تنها اگر مدلی چون $M \models S_2$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر (با پارامتر) M به‌وسیلهٔ فرمول‌های Σ^b_{i+1} اکیداً بیشتر از زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر (با پارامتر) M به‌وسیلهٔ فرمول‌های Σ^b_i باشند.
باس، هم‌چنین توصیف دقیقی از توابع اثبات‌پذیر تام نظریه‌های S^i_2 ارائه نموده است. جالب‌ترین قسمت، مشخص‌سازی توابع اثبات‌پذیر تام S^1_2 است (که در این حالت به‌صورت توابع Σ^b_1- تعریف‌پذیر S^1_2 تعریف می‌شوند.)

قضیهٔ ۱۳. توابع Σ^b_1- تعریف‌پذیر S^1_2 دقیقاً توابع محاسبه‌پذیر در زمان چند جمله‌ای هستند. (توجه کنید که در این‌جا با نوع نسبتاً متفاوتی از ماشین‌های تورینگ مواجهیم.)
برای اثبات قضایای فوق می‌توانید به مراجع [HP] و [Kr] مراجعه کنید. هم‌چنین ارتباط‌های جالبی بین S^1_2 و نظریهٔ پیچیدگی اثبات‌ها در منطق گزاره‌ها وجود دارد، مرجع [Bus2] شامل مروری بر نتایج به دست آمده در این زمینه است. توجه کنید که خود منطق گزاره‌ها از طریق قضیهٔ زیر (اثبات شده توسط کوک) در ارتباط مستقیم با سؤالات اساسی نظریهٔ پیچیدگی قرار می‌گیرد. قبلاً یادآوری می‌کنم که coNP نمایشگر مجموعهٔ همهٔ متمم‌های اعضای NP است. یک سؤال اساسی در نظریهٔ پیچیدگی، $\mathrm{NP} \stackrel{?}{=} \mathrm{coNP}$ است. به‌سادگی می‌توان دید که اگر $\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP}$ آن‌گاه $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.
هم‌چنین متذکر می‌شویم که در نظریهٔ پیچیدگی اثبات، طول یک گزاره برابر با تعداد رخ‌داد نمادها (متغیرها، رابطه‌های منطقی و پرانتزها) در آن و طول یک دنباله از گزاره‌ها (مثلاً یک برهان)، برابر با مجموع طول گزاره‌های ظاهرشده در آن است.

قضیهٔ ۱۴. $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$ اگر و تنها اگر دستگاهی اثباتی برای منطق گزاره‌ها موجود باشد به‌طوری که در آن هر راستگو دارای اثباتی کوتاه باشد (یعنی چندجمله‌ای $p(x)$ وجود داشته باشد که هر راستگوی τ دارای اثباتی با اندازهٔ کمتر از $p(|\tau|)$ در این دستگاه باشد).

۶. حساب شهودگرایی و زیرنظریه‌های آن

در این فصل انتهایی به معرفی مختصر حساب شهودگرایی و زیرنظریه‌های آن می‌پردازیم. مرجع اصلی درمورد این حساب و هم‌چنین منطق شهودگرایی، [TD] است.

منطق شهودگرایی با حذف اصل طرد شق ثالث، $A \vee \neg A$، از منطق کلاسیک به‌دست می‌آید. منطق شهودگرایی یکی از منطق‌های به‌اصطلاح ساختنی است و در واقع یکی از مهم‌ترین آن‌ها است.

برای توجیه نام ساختنی، شاید بیان دو خاصیت زیر از منطق شهودی کافی باشد:

(1) خاصیت فصلی (DP): اگر $\vdash_i A \vee B$، آن‌گاه $\vdash_i A$ یا $\vdash_i B$.

(2) خاصیت وجودی (ED): اگر $\vdash_i \exists x A(x)$، آن‌گاه ترم بسته‌ای چون t در زبان موجود است که $\vdash_i A(t)$.

توجه کنید که $\vdash_i$، اثبات‌پذیری در منطق شهودگرایی مرتبهٔ اول (IQC) را بیان می‌کند. نظیر شهودگرایی PA، حساب شهودگرایی یا حساب هیتینگ (HA) است که به وسیلهٔ هیتینگ[1] در سال ۱۹۳۰ معرفی شد و مورد مطالعه قرار گرفت.

می‌توان ثابت کرد که HA نیز دو خاصیت DP و ED را دارا است. به‌علاوه می‌دانیم که به‌ازای هر فرمول $\varphi \in \Pi_2$، اگر $\mathrm{PA} \vdash \varphi$ آن‌گاه $\mathrm{HA} \vdash \varphi$. هم‌چنین، HA همهٔ نتایج PA را که به‌صورت فرمول‌هایی فاقد $\exists$ و $\vee$ باشند، ثابت می‌کند. مطالعهٔ زیرنظریه‌های HA، به‌طور نظام‌مند، کاری نسبتاً جدید است. وهمایر[2] دو نظریهٔ $i\Sigma_1$ و $i\Pi_1$ از HA را، که به‌ترتیب نظیر شهودگرایی $I\Sigma_1$ و $I\Pi_1$ می‌باشند مورد مطالعه قرار داد و برای مثال، ثابت کرد که $i\Pi_1 \nvdash i\Sigma_1$ و $i\Sigma_1 \nvdash i\Pi_1$، مرجع [We] را ببینید. برای نشان دادن آن‌که $i\Pi_1 \nvdash i\Sigma_1$؛ وهمایر ثابت کرد $i\Sigma_1 \vdash \forall x, y \, \exists z \, x^y = z$ ولی $i\Pi_1 \nvdash \forall x, y \, \exists z \, x^y = z$. در مرجع [M1] نشان داده شده است که $i\Pi_1 \nvdash \neg\neg\forall x, y \, \exists z \, x^y = z$. توجه کنید که درمورد نظریه‌های مبتنی بر منطق شهودگرایی، در حالت کلی، $\neg\neg A$ بسیار ضعیف‌تر از A است. نظریه‌های $i$open، $i\forall_1$ و $i\Pi_1$، هم‌چنین در مرجع [MOMO] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

ثابت شده است که قضیهٔ شکل نرمال پیشوندی در منطق کلاسیک، در منطق شهودگرایی معتبر نیست. به‌عبارت دیگر، چنین نیست که هر فرمول دلخواه، در منطق شهودگرایی، معادل با فرمولی به شکل زیر باشد:

$$(Q_n x_n) \dots (Q_1 x_1) A$$

که در آن Q_i سور $\exists$ یا $\forall$، و A فرمولی فاقد سور است. این مطلب در حساب شهودگرایی نیز صحیح است. معلوم شده است که iPNF، یعنی HA با اصل استقراء محدود شده به فرمول‌های پیشوندی، بسیار ضعیف‌تر از خود HA است. برای مثال، ویسر[3] و وهمایر ثابت کرده‌اند که؛ iPNF توسیعی Π_2 ـ محافظه‌کارانه از $i\Pi_2$ است، مرجع [We] را ببینید. و. بور[4] اخیراً زیرنظریه‌های جدیدی از HA (در زبان معمولی حساب) را معرفی و مورد مطالعه قرار داده است [Bur]. بور پیچیدگی فرمول‌ها را نه برحسب سورها بلکه برحسب تعداد روابط $\longrightarrow$ موجود در آن‌ها در نظر گرفته است. خانوادهٔ $\{\phi_n : n \geq 0\}$ یکی از خانوادهٔ فرمول‌هایی است که بور معرفی کرده است. او ثابت کرده که هر فرمول حسابی، در $i\Delta_0$ معادل با یکی از این فرمول‌هاست. ضمناً $I\Sigma_n$ توسیعی Π_2 ـ محافظه‌کارانه از $i\phi_n$ است و هم‌چنین $I\phi_n \equiv_c I\Sigma_n$، به‌ازای $n \geq 0$. نظیر شهودگرایانهٔ نظریه‌های باس نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای مثال، کوک و ارکهارت[5] ثابت کرده‌اند که اگر $IS_2^1 \vdash \forall \vec{x} \; \exists y \; \varphi(\vec{x}, y)$، که در آن IS_2^1 نظیر شهودگرایانهٔ S_2^1 است، آن‌گاه تابع محاسبه‌پذیر چندجمله‌ای f موجود است که $IS_2^1 \vdash \forall \vec{x} \; \varphi(\vec{x}, f(\vec{x}))$ [CU]. این‌دو، IS_2^1 را نامزد خوبی برای معرفی شدن به‌عنوان یک نظریهٔ محاسبه‌پذیر عملی می‌دانند، یعنی نظریه‌ای که دقیقاً چیزهایی را ثابت کند که دارای اثبات‌های کوتاه (چندجمله‌ای) باشند. در مرجع [M2] نشان داده شده است که

1) Heyting 2) Wehmeier 3) Visser 4) W. Burr 5) Urquhart

نظریه‌های حساب محدود شهودی بنا شده بر استقراء چند جمله‌ای روی فرمول‌های مرتبط با رده‌های P و NP، بر خلاف نظایر کلاسیک آنها، متمایز هستند. و. هارنیک[۱] [H]، نظریه‌های شهودگرایانهٔ نظیر S_2^i، $i \geq ۱$، را نیز مطالعه کرده و نتایج مشابهی در مورد توابع به‌طور اثبات‌پذیر تام آن‌ها به‌دست آورده است.

تشکر

از آقای دکتر مجتبی آقایی به خاطر تلاش فراوان در برگزاری موفقیت‌آمیز کارگاه منطق در دانشگاه صنعتی اصفهان (که این مقاله اولین بار در آنجا ارائه شد) و آقای مصطفی زارع به خاطر کمک در تهیهٔ نسخهٔ نهایی تشکر فراوان دارم.

مراجع

[1] [**BK**] A. Bovikin and R. Kaye, Order-Types of Models of Peano Arithmetic, Logic and Algebra, 275–285, *Contemp. Math.*, 302, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[2] [**Bur**] W. Burr, Fragments of Heyting Arithmetic, *J. Symbolic Logic* 63 (2000), 1223-1240.

[3] [**Bus1**] S. Buss, Bounded Arithmetic, Bibliopolis, Napoli, 1986. Revision of 1985 Princeton University Ph.D. thesis.

[4] [**Bus2**] S. Buss, Bounded Arithmetic and Propositional Proof Complexity, Logic of Computation (Marktoberdorf, 1995), 67-121, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F Comput. Systems Sci., 157, Springer, Berlin, 1997.

[5] [**Bus3**] S. Buss, First Order Proof Theory of Arithmetic, in Hand Book of Proof Theory, ed. S. Buss, *Elsevier Science*, 1998.

[6] [**Bus4**] S. Buss, Bounded Arithmetic, Proof Complexity and Two Papers of Parikh, *Ann. Pure App. Logic*, 96 (1999)43-55.

[7] [**C**] S. A. Cook, The P versus NP Problem, available at http://www.cs.toronto.edu/ sacook/.

[8] [**CU**] S. A. Cook and A. Urqhuart, Functional Interpretations of Feasibly Constructive Arithmetic, *Ann. Pure and Appl. logic* 63 (1993), 103-200.

1) Harnik

[9] [**D**] C. Dimitracopolos, On End Extensions of Models of Subsystems of Peano Arithmetic, *Theo. Computer Sci.*, 257 (2001) 79-84.

[10] [**H**] V. Harnik, Provably Total Functions of Intuitionistic Bounded Arithmetic, *J. Symbolic Logic*, 57 (1992) 466-477.

[11] [**HP**] P. Hajek and P. Pudlak, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer, 1993.

[12] [**K1**] R. Kaye, Model-Theoretic Properties Characterizing Peano Arithmetic, *J. Symbolic Logic*, 56 (1991) 949-963.

[13] [**K2**] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[14] [**Kr**] J. Krajicek, Bounded Arithmetic, *Propositional logic, and complexity Theory*, Cambridge University Press, 1995.

[15] [**MM**] A. Macintyre and D. Marker, Primes and Their Residue Rings in Models of Open Induction, *Ann. Pure Appl. Logic*, 43 (1989) 57-77.

[16] [**M**] Moj. Moniri, Recursive Models of Open Induction of Prescribed Finite Transcendence Degree > 1 with Cofinal Twin Primes, *C. R. Acad. Paris Ser. I Mathe.* 319 (1994) 903-908.

[17] [**MOMO**] Mor. Moniri and Moj. Moniri, Some Weak Fragments of HA and Certain Closure Properties, *J. Symbolic Logic*, 67 (2002) 91-103.

[18] [**M1**] Mor. Moniri, Intuitionistic Weak Arithmetic, *Arch. Math. Logic,* 42 (2003) 791-796.

[19] [**M2**] Mor. Moniri, Comparing Constructive Arithmetical Theories Based on NP-PIND and coNP-PIND, *J. Logic and Computation*, 13 (2003) 881-888.

[20] [**PH**] J. Paris and L. Harington, A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic, in Hand Book of Mathematical Logic, ed. J. Barwise, North-Holland, 1977.

[21] [**TD**] A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[22] [**We**] K. F. Wehmeier, Fragments of HA Based on Σ_1-Induction, *Arch. Math. Logic* 37 (1997), 37-49.

[23] [**Wilk**] A. J. Wilkie, Some Results and Problems on Weak Systems of Arithmetic, *Logic Colloquium* 77, North-Holland (1978) 285-296.

[24] [**Wilm**] G. Wilmers, Bounded Existential Induction, *J. Symbolic logic* 40 (1985), 72-90.

[25] [**WP**] A. Wilkie and J. Paris, On the Scheme of Induction for Bounded Arithmetic Formulas, *Ann. Pure Appl*, Logic 35 (1978) 261-302.

مرتضی منیری
دانشگاه شهید بهشتی، گروه ریاضی و مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات
پست الکترونیک ezmoniri@ipm.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۵۵ تا ۷۱

مروری بر نظریه اثبات

مجتبی آقایی

در پاسخ به این سؤال که جایگاه منطق ریاضی چیست، نکات زیر قابل توجه‌اند:
حداقل برای ۲۴۰۰ سال مدارک ریاضی برای بررسی اصل موضوعی ریاضیات (کتاب اصول اقلیدس) وجود دارد که در مطالعهٔ آن نیازی به منطق ریاضی نیست. ریاضیدانان برجستهٔ زیادی وجود دارند که هیچ اطلاعی از منطق ریاضی نداشته و به آن نیازی هم ندارند. بچه‌ها از همان دبستان با ریاضیات آشنا شده و شیوهٔ استدلال کردن را یاد می‌گیرند، بدون آن که نیازی به منطق ریاضی داشته باشند. برخورد با ریاضیات بر اساس شهود ریاضی ما است که با درجات دقت متفاوتی قابل به کارگیری است.

از طرف دیگر نکات زیر نیز شایان ذکرند: اقلیدس در استدلال‌هایش از گام‌هایی استفاده می‌کرد که به صورت شهودی واضح بودند ولی قابل اثبات توسط اصول موضوعهٔ خود نبودند. بعدها هیلبرت با دقیق کردن استدلال‌ها اصول را از پنج اصل به شانزده اصل افزایش داد. در تلاش اثبات اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی) با استفاده از بقیهٔ اصول نیز به صورت ناآگاهانه در برخی از گام‌ها از اصول دیگری معادل اصل پنجم استفاده می‌کردند. پیدایش پارادوکس‌ها در نظریهٔ مجموعه‌ها، منطق و بخش‌های دیگر ریاضیات نیز لزوم برخورد دقیق با ریاضیات را هر چه بیشتر مطرح می‌کردند.

پس از این که کانتور نظریهٔ مجموعه‌ها را معرفی کرد، روش‌های جدید و غیرمتعارفی در ریاضیات پدید آمد که واکنش‌هایی را نسبت به آن برانگیخت. ریاضیدانان قرن نوزدهم نمی‌توانستند این روش‌ها را به‌عنوان روش‌های ریاضی به رسمیت بشناسند و آنها را به‌عنوان الهیات توصیف می‌کردند. بنا به اصل تصریح در نظریهٔ مجموعه‌ها، به ازای هر خاصیت مجموعه‌ای با آن خاصیت موجود است. این اصل در عمل مانند خواندن وردی برای ظاهرشدن ساختمانی ریاضی عمل می‌کند در حالی که پیش از آن برای ساختن اشیاء ریاضی باید با تلاش بسیار مقدمات آن فراهم می‌شد و همین امر ایجاد واکنش نسبت به آن شیء می‌کرد. در واقع کسی در اعتبار نتایج تردیدی نداشت، بلکه نزاع بر سر سبک‌ها و روش‌ها بود، به عنوان نمونه می‌توان به واکنش‌های ایجاد شده در مقابل نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و قضیهٔ مشهور پایهٔ هیلبرت اشاره کرد. امروزه تقریباً در تمام کتب ریاضی، این روشها بصورت فراگیر مشاهده می‌شود، و در واقع مشکل بتوان توضیح داد که چرا این

قضایا روزی جنجال برانگیز بوده‌اند. هیلبرت این روش‌های نظریهٔ مجموعه‌ها را «بهشت کانتور» می‌نامید و به شدت از آن طرفداری می‌کرد. در این حین طرح پارادوکس‌هایی مانند پارادوکس راسل در نظریهٔ مجموعه‌ها موجب تشویش در مورد درستی و سازگاری آنها شد. هیلبرت برای حل این مشکل برنامه‌ای طرح‌ریزی کرد که به «برنامهٔ هیلبرت» مشهور است، و به نوعی می‌کوشید روش‌های جدید را براساس روش‌های قابل قبول توسط ریاضی‌دانان آن زمان موجه جلوه دهد. ولی این برنامه با اثبات قضیه‌هایی توسط گودل (قضیه‌های ناتمامیت گودل) تا حدی شکست خورد. بعداً گنتزن اثبات‌هایی برای سازگاری حساب در برنامهٔ هیلبرت ارائه داد.
برنامهٔ هیلبرت به صورت زیر است: «احکام ریاضی و اثبات‌ها را توسط دنباله‌های متناهی از نمادها بیان کنید و با انجام استدلال‌های مقدماتی نشان دهید که هیچ تناقضی حاصل نمی‌شود.» به نوعی شاید بتوان گفت که برنامهٔ هیلبرت تحقیق سازگاری ریاضیات قرن بیستم (بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها) توسط روش‌های ریاضیات قرن نوزدهم می‌باشد. به علت صورت بندی احکام ریاضی توسط نمادهای ریاضی در این برنامه، مکتب هیلبرت را صورتگرایی می‌نامند و به دلیل متناهی بودن روش‌ها، آن را رویکرد متناهی گرایانه گویند. هیلبرت ابتدا مسأله را به حالات ساده‌تر نظریهٔ اعداد طبیعی، نظریهٔ اعداد حقیقی، آنالیز، توپولوژی، ... و در نهایت نظریهٔ مجموعه‌ها تبدیل کرد. بعدها گودل با ملاحظهٔ این که برخی اثبات‌های نظریهٔ اعداد وابسته به اعداد مورد بررسی می‌باشد و نمی‌توان اثباتی یافت که به صورت یکنواخت برای تمام اعداد کار کند، نسبت به متناهی گرایانه بودن برنامهٔ هیلبرت مردد شد و با اثبات قضایای ناتمامیت، صورت اول این برنامه را شکست داد. البته هم گودل و هم هیلبرت این قضایا را به معنای شکست کامل این برنامه در نظر نگرفتند و هیلبرت نیز به اصلاحی در برنامهٔ خود پرداخت که بلافاصله گنتزن[1] نیز سازگاری نظریهٔ اعداد را با روش‌هایی به ظاهر مقدماتی توسط حساب رشته‌ها که خود معرفی کرده بود انجام داد. این اثبات به ظاهر در تناقض با قضایای ناتمامیت گودل بود و مدتی طول کشید تا راز این موضوع روشن شود. هیلبرت در راستای برنامهٔ خود به صوری سازی دقیق ریاضیات، منطق و هندسه پرداخت و اصول موضوعهٔ هندسه و منطق را به صورت کامل و دقیق بیان کرد. در ۱۹۳۰ گودل کامل بودن اصول منطق محمولات را در رسالهٔ دکترای خود به اثبات رساند و در ۱۹۳۱ نیز با اثبات قضایای ناتمامیت، متناهی گرایانه بودن این برنامه را به چالش کشید. بنا بر این قضیه، سازگاری یک نظریه مانند نظریهٔ مجموعه‌ها یا نظریهٔ اعداد را حتی در خود آن نظریه هم نمی‌توان ثابت کرد چه رسد به استفاده از روش‌های مقدماتی قرن نوزدهم. درواقع متناهی بودن دنباله‌های متناظر با احکام و اثبات‌های ریاضی و کد کردن آنها توسط اعداد طبیعی نکتهٔ بسیار مهمی در اثبات این قضایا است.

برنامهٔ هیلبرت و پیامدهای آن، یعنی ارائهٔ سیستم‌های اصل موضوعی، قضایای ناتمامیت گودل و سیستم‌های مختلف مانند سیستم‌های استنتاج طبیعی و حساب رشته‌ها توسط گنتزن باعث ایجاد شاخه‌ای به نام نظریهٔ اثبات در منطق ریاضی شده است که به زعم برخی از منطق‌دانان

1) Gentzen

مانند ژیرار [۱]، «قلب منطق» یا «منطق منطق» می‌باشد. در سیستم‌های مذکور برخلاف سیستم اصل موضوعی معرفی شده توسط هیلبرت، قواعد جای اصول را می‌گیرند، با این تفاوت که در استنتاج طبیعی، قواعد معرف معنای روابط منطقی می‌باشند ولی در حساب رشته‌ها تکیه بر ماشینی شدن اثبات است.

مفهوم حقیقت و درستی از چند حیث نامعین و نامتناهی است. از طرفی، درستی درگیر مسائل فلسفی و اساسی نظریهٔ شناخت و نظریهٔ هستی‌شناسی می‌شود. نظریهٔ صدق تارسکی تا حدی این مشکل را به‌طریق نسبی حل می‌کند. این نظریه، با در نظر گرفتن سطوح مختلف زبان و فرازبان، بررسی حقیقت در زبان را به فرازبان ارجاع می‌دهد، حال این مسأله در فرازبان با هر مشکلی که می‌خواهد روبرو باشد. برای بررسی درستی جمله‌ای در زبان، باید تمام مدل‌های آن را در فرازبان بررسی کرد. چون ممکن است این مدل‌ها دارای تنوعی نامتناهی باشند و از طرفی بررسی آن جمله در هر مدل نیز خود درگیر پیچیدگی‌های خود می‌باشد، عملاً در بررسی صدق جملات از جهات گوناگون با بی‌نهایت سروکار داریم. در سیستم‌های استنتاجی با تعدادی متناهی اصل یا قاعدهٔ قابل قبول می‌توان جملات درست را با استنتاجی متناهی اثبات کرد. گودل در رسالهٔ دکترای خویش در ۱۹۳۰ با اثبات قضیهٔ تمامیت علاوه بر این که کامل بودن سیستم اصل موضوعی ارائه شده توسط هیلبرت در ۱۹۲۸ را به اثبات رساند، در واقع نامعین بودن و شهودی بودن مفهوم صدق و وجوه مختلف نامتناهی آن را به یک تعریف ریاضی مشخص و متناهی تبدیل کرد. البته مسأله چگونه کنار هم گذاشتن این اصول و قواعد در جهت حصول به نتیجهٔ مورد نظر همچنان پیچیده است. به علاوه باید توجه کرد که از نظر تاریخی بعد از اثبات قضایای ناتمامیت گودل، مسألهٔ صدق و ایجاد شکاف بین مفهوم درستی و استنتاج‌پذیری مورد توجه قرار گرفت، و این شکاف به دلیل آن است که حتی با تقویت بعضی از دستگاه‌های اصل موضوعی، باز هم نمی‌توان تمام جملات درست را از آنها نتیجه گرفت. همچنین به علت دیدگاه افلاطونی نهفته در مسألهٔ صدق و تمایل صورتگرایانهٔ ناشی از برنامه و مکتب هیلبرت حاکم بر تحقیقات ریاضی، تا آن زمان کسی به مفهوم صدق علاقه‌ای نشان نمی‌داد. گودل نیز علیرغم تمایلات افلاطونی خویش و ارائهٔ دیدگاه‌های خود دربارهٔ صدق در سالیان بعد، به علت فضای صورتگرایانهٔ حاکم در مقالهٔ خود فقط اشاراتی مبهم به این موضوع کرده است و بیشتر تلاش نموده براساس روش‌های مقبول آن زمان تردید خود را در رابطه با برنامهٔ هیلبرت به اثبات رساند. بعدها تارسکی مستقیماً به نتایج مرتبط با صدق قضایای گودل اشاره کرد.

۱. سیستم‌های مختلف استنتاج

در اینجا سه سیستم هیلبرتی، استنتاج طبیعی، و حساب رشته‌ها را معرفی می‌کنیم. هر سه سیستم با هم معادلند و قضایای آنها دقیقاً گزاره‌های منطقاً معتبرند، یعنی گزاره‌هایی که در هر مدل زبان درست‌اند. زبانی که از آن استفاده می‌کنیم شامل رابطهای $\bot$, $\to$, $\vee$, $\wedge$, $\exists$, $\forall$ می‌باشد. منظور از $\neg A$، فرمول $A \to \bot$ است. حاصل جانشینی ترم t به جای متغیر x در فرمول A را با $A[x|t]$ و

مجموعهٔ متغیرهای آزاد در A را با $FV(A)$ نشان می‌دهیم. استنتاج‌های منطقی را با خطی که در بالای آن فرضیات مقدم[1] و در زیر آن نتیجه[2] قرار دارد نشان می‌دهیم. به عنوان مثال عبارت «A و $A \to B$، B را نتیجه می‌دهد.» را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

در قضیهٔ زیر $\Gamma \vdash A$ به معنای استنتاج A از مجموعهٔ فرضیات Γ در یکی از سیستم‌های استنتاجی زیر، و $\Gamma \models A$ به معنای درستی A در تمام مدل‌های Γ می‌باشد. در این قضیه نامعین بودن و شهودی بودن مفهوم صدق و وجوه مختلف نامتناهی آن به یک تعریف ریاضی مشخص و متناهی تبدیل شده است.

(۱.۱) قضیهٔ تمامیت. $\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A$.

سیستم‌های هیلبرتی در منطق کلاسیک، منطق شهودی و منطق مینیمال[3] را به ترتیب با Hc، Hi و Hm نشان می‌دهیم. این سیستم برای منطق کلاسیک را هیلبرت و آکرمان در ۱۹۲۸ به منظور اجرای اولین گام برنامه، یعنی صوری سازی احکام و اثبات‌های ریاضی ارائه نمودند. گودل در سال بعد، با اثبات قضیهٔ تمامیت، کامل بودن این سیستم را نشان داد و بدین ترتیب، بخش اول برنامه به انجام رسید. اصول سیستم Hm به صورت زیر است:

(۱) $A \to (B \to A)$

(۲) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(۳) $A \to A \vee B$

(۴) $B \to A \vee B$

(۵) $(A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

(۶) $A \wedge B \to A$

(۷) $A \wedge B \to B$

(۸) $A \to (B \to A \wedge B)$

(۹) $\forall x A \to A[x|t]$

(۱۰) $A[x|t] \to \exists x A$

(۱۱) $\forall x(B \to A) \to (B \to \forall y A[x|y]) \qquad (x \notin FV(B), y \equiv x \ \ or \ \ y \notin FV(A))$

(۱۲) $\forall x(A \to B) \to (\exists y A[x|y] \to B) \qquad (x \notin FV(B), y \equiv x \ \ or \ \ y \notin FV(A))$

سیستم Hi با اضافه کردن اصل $\bot \to A$ به اصول بالا تعریف می‌شود. سیستم Hc نیز با اضافه کردن اصل $\neg\neg A \to A$ به سیستم Hi ساخته می‌شود.

---

1) Premises 2) Conclusion 3) Minimal

این سیستم‌ها همچنین دارای سه قاعدهٔ زیر می‌باشند:

(۱) قاعدهٔ فرض: اگر $A \in \Gamma$ آن‌گاه $\Gamma \vdash A$،

(۲) قاعدهٔ $\to E$ یا MP (وضع مقدم): اگر $\Gamma \vdash A \to B$ و $\Gamma \vdash A$ آن‌گاه $\Gamma \vdash B$،

(۳) قاعدهٔ $\forall I$ یا GEN (تعمیم): اگر $\Gamma \vdash B$ آن‌گاه $\Gamma \vdash \forall y \in B[x|y]$ که در آن $x \notin FV(\Gamma, \forall y \in B[x|y])))$.

سیستم‌های استنتاج طبیعی را در منطق کلاسیک، منطق شهودی و منطق مینیمال[1] به ترتیب با Nc، Ni و Nm نشان می‌دهیم. یک استنتاج در سیستم Nc، درختی است که برگ‌های آن فرضیات حذف نشده است. هر رأس با به کاربردن یکی از قواعد زیر از رأس‌های بالاتر حاصل می‌شود.

قواعد ایراد[2]:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge I \qquad \frac{A}{A \vee B} \vee I \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee I$$

$$\begin{array}{c}(A)\\ \dfrac{B}{A \to B} \to I\end{array} \qquad \frac{A}{\forall x A} \forall I \qquad \frac{A[x|t]}{\exists x A} \exists I$$

قواعد حذف[3]:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \to \exists \qquad \frac{A \vee B \qquad \overset{(A)}{C} \qquad \overset{(B)}{C}}{C} \vee E$$

$$\frac{\exists x A \qquad \overset{(A)}{B}}{B} \exists E \qquad \frac{\forall x A}{A[x|t]} \forall E$$

$$\begin{array}{c}(\neg A)\\ \dfrac{\perp}{A} RAA\end{array} \qquad \frac{\perp}{A} \perp$$

(A) یعنی اگر A در برگ‌هایی از درخت استنتاج وجود داشته باشد می‌توانیم برخی از آنها را حذف کنیم. قاعدهٔ RAA[4] همان برهان خلف[5] است. با حذف قاعدهٔ RAA از Nc سیستم Ni، و با حذف

1) Minimal 2) Introduction 3) Elimination 4) Reduction and absurdum rule
5) Proof by contradiction

قاعدهٔ $\bot$ از Ni، Nm را خواهیم داشت. حالت خاصی از قاعدهٔ $\to I$ به صورت زیر است:

$$\frac{B}{A \to B}$$

در قواعد $\forall E$ و $\exists I$ باید جانشانی ترم t به جای متغیر x آزاد انجام شود، یعنی بعد از جانشینی هیچکدام از متغییرهای آزاد در t در حوزهٔ سور همان متغییر در فرمول قرار نگیرد. در قواعد $\forall I$ و $\exists E$ متغیر x در فرضیات و در B آزاد نیست.

(۲.۱) مثال. درخت استنتاجی زیر یک درخت استنتاج طبیعی است:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \wedge B)}{B}\wedge E \qquad \dfrac{(A \wedge B)}{A}\wedge E}{B \wedge A}\wedge I}{A \wedge B \to B \wedge A}\to I$$

یکی از مهمترین سیستم‌های منطقی سیستم‌های گنتزنی می‌باشد. در اینجا سیستم $G1c$ را معرفی می‌کنیم که با تغییراتی در آن می‌توان سیستم‌هایی دیگر مانند $G2c$ و $G3c$ را ساخت. در زیر Γ, Δ مجموعه‌هایی مکرر می‌باشند یعنی تکرار فرمول در آنها مهم است و $\Gamma \vdash \Delta$ را رشته گوییم که می‌توان آنرا به معنای $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ در نظر گرفت. سیستم گنتزنی $G1c$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱) اصول:

$$AX : A \vdash A \qquad\qquad \bot L : \bot \vdash$$

(۲) قواعد:

$$WL : \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad WR : \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

$$CL : \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad CR : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

$$\wedge L : \frac{A_i, \Gamma \vdash \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \vdash \Delta}(i = 0, 1) \qquad\qquad \wedge R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

$$\vee L : \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad \vee R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A_i}{\Gamma \vdash \Delta, A_0 \vee A_1}(i = 0, 1)$$

$$\to L : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad \to R : \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}$$

$$\forall L : \frac{A[x|t], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad \forall R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x|y]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A}$$

$$\exists L : \frac{A[x|y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad \exists R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A[x|t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x A}$$

(در قواعد $L\exists$ و $R\forall$ نباید y در رشتهٔ نتیجه (در رشتهٔ پایین خط استنتاج) آزاد باشد.)
سیستم گنتزنی $G1i$ همان سیستم $G1c$ است با این تفاوت که در تمام قواعد و اصول آن، سمت راست رشته‌ها تک فرمولی است. همچنین قاعدهٔ $\to L$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\to L \ : \ \frac{\Gamma \vdash A \qquad B, \Gamma \vdash C}{A \to B, \Gamma \vdash C}$$

همچنین سیستم $G1m$، یک سیستم $G1i$ است با این تفاوت که اصل $L\bot$ حذف می‌شود.
به مجموعهٔ قواعد سیستم $G1[mic]$ می‌توان قاعده Cut را به صورت زیر اضافه کرد:

$$Cut \ : \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

(۳.۱) **قضیهٔ حذف برش**[1]. اگر در سیستم $G1[mic] + Cut$ رشتهٔ $\Gamma \vdash \Delta$ قابل اثبات باشد، آنگاه در سیستم $G1[mic]$ رشتهٔ $\Gamma \vdash \Delta$ قابل اثبات است، مشروط بر این‌که هیچ متغیری در رشتهٔ $\Gamma \vdash \Delta$ هم آزاد هم بسته نباشد.

این قضیه برای اثبات معادل بودن این سیستم با دو سیستم قبلی و بنابراین اثبات سلامت و تمامیت آن لازم است. در واقع با کنار گذاشتن قاعدهٔ برش از لیست قواعد، بقیه دارای خاصیت زیر فرمولی می‌باشند، بدین معنی که می‌توان رشته‌های مقدم قواعد را از روی رشتهٔ نتیجه ساخت و بنابراین روشی الگوریتمیک برای ساخت استنتاجی برای حکمی داده شده بدست آورد. البته منظور گنتزن از طراحی این سیستم این بود که به نحوی الگوریتمیک اثبات‌های هیلبرتی را به اثبات‌های حساب رشته‌ها تبدیل و مجدداً برش‌ها را به نحوی الگوریتمیک حذف نموده و اثباتی بدون برش برای حکم مطلوب بدست آورد. حال در صورت وجود اثباتی برای دو حکم متناقض A و $\neg A$، با اجرای الگوریتم‌ها اثباتی بدون برش برای رشتهٔ تهی «$\vdash$» به دست خواهیم آورد که با توجه به قواعد و اصول حساب رشته‌ها این امر غیرممکن است. با توجه به نمادین و الگوریتمیک بودن تمام مراحل، در واقع این نمونه‌ای از اثبات سازگاری منطق محمولات براساس برنامهٔ هیلبرت است، یعنی با روشی مقدماتی و الگوریتمیک روی دنباله‌های متناهی از نمادهای مورد استفاده برای احکام و استنتاج‌ها، ثابت می‌شود که حصول یک تناقض ممکن نیست.
در مورد سازگاری نظریه‌هایی مانند نظریهٔ اعداد، در سیستم حساب رشته‌های متناظر باید اصولی متناظر اصول پئانو مانند $Sx = Sy \vdash x = y$ و قاعده‌ای مانند قاعدهٔ استقرا $\dfrac{A(x), \Gamma \vdash A(x+1)}{A(0), \Gamma \vdash A(t)}$ را به سیستم حساب رشته‌ها اضافه کرد. مجدداً هر اثبات (مخصوصاً اثباتی برای تناقض)، به نحوی الگوریتمیک قابل ترجمه به اثباتی در حساب رشته‌ها است و سپس مجدداً با عملیاتی مقدماتی می‌توان اقدام به تبدیل قواعد استقرا (در صورت بسته بودن ترم t) به قواعد برش، و همچنین اقدام به حذف برش نمود تا در نهایت تمام قواعد استقراء و برش (البته برش‌ها روی فرمول‌های غیراتمی) حذف شوند و اثباتی برای رشتهٔ تهی «$\vdash$» به دست آوریم که در آن حداکثر از برش روی فرمول‌های

1) Cut elimination

اتمی استفاده شده است. سپس با استفاده از قضیهٔ سلامت (که به علت اتمی بودن تمام فرمول‌ها در استنتاج حاصل قابل حسابی‌سازی است)، می‌توان به تناقض رسید. در این فرآیند به نظر می‌رسد که سازگاری حساب را با روش‌های مقدماتی به اثبات رسانده‌ایم و بنابراین باید در زیرسیستم مقدماتی حساب یعنی PRA قابل اثبات باشد در حالی که بنابر قضیهٔ ناتمامیت، حتی سازگاری حساب در خود حساب نیز قابل اثبات نیست. در اینجا در واقع نکته این است که اگرچه در هر مثال مشخص از یک استنتاج می‌توان قواعد استقرا و برش را حذف کرد، ولی متوقف شدن فرایند در یک استنتاج نوعی قابل اثبات در حساب نیست. برای اندکی توصیف وضعیت، مثلاً در جایگذاری یک قاعدهٔ استقراء مانند زیر

$$\dfrac{\dfrac{\Pi(x)}{A(x),\Gamma\vdash A(x+۱)}}{A(۰),\Gamma\vdash A(\bar{۳})}$$

که $\Pi(x)$ استنتاج بالای قاعدهٔ موردنظر است، استنتاج زیر حاصل می‌شود:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi(\bar{۰})}{A(\bar{۰}),\Gamma\vdash A(\bar{۱})} \qquad \dfrac{\Pi(\bar{۱})}{A(۱),\Gamma\vdash A(\bar{۲})}}{A(\bar{۰}),\Gamma\vdash A(\bar{۲})}\,Cut \qquad \dfrac{\Pi(\bar{۳})}{A(\bar{۲}),\Gamma\vdash A(\bar{۳})}}{A(\bar{۰}),\Gamma\vdash A(\bar{۳})}\,Cut$$

اگر به جای عدد ۳ از عدد دیگری مانند ۱۰۰ استفاده می‌کردیم به جای ۲ برش، تعداد ۹۹ برش حاصل و به علاوه تمام برش‌ها و استقراهای موجود در $\Pi(x)$ نیز در تمام برش‌ها، عملاً در تمام $\Pi(\bar{k})$ها تکرار می‌شدند. پس در تبدیل استقراء به برش و در حذف برش‌ها، عملاً با افزایش برش‌ها و استقراهای موجود در استنتاج مواجهیم. اگرچه در بررسی یک مثال مشخص می‌توان دید که علیرغم فرایند افزایشی قواعد، بالاخره فرایند متوقف می‌شود و این موضوع نیز قابل حسابی سازی و اثبات در حساب است، ولی اثباتی متناهی و کلی برای هر استنتاج (مستقل از آن استنتاج) وجود ندارد و این در واقع نمونه‌ای است از شک نسبت به وجود اثبات متناهی برای احکام حساب. در واقع برای اثبات حکمی مانند $\forall x A(x)$ در حساب، باید تمام موارد $A(n)$ را برای $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ اثبات نمود که در مواردی مانند مثال فوق، یا در مواردی ملموس‌تر مانند حدس گلدباخ می‌توان برای هر n، با محاسبه، درستی $A(n)$ را تحقیق نمود. بنا بر حدس گلدباخ هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت، یعنی

$$A(x) \equiv x \geqslant ۲ \to \quad \exists\, p < x \ \ \exists\, q < x \ \ (۲x = p+q \wedge \neg \exists\, y > ۱ \ \ \exists\, z > ۱ \ p = yz \vee q = yz)$$

می‌توان برای هر n، با اندکی محاسبه، p و q را یافت و درستی $A(n)$ را تحقیق کرد، مثلاً $۲ + ۲ = ۴, ۳ + ۳ = ۶, ۳ + ۵ = ۸, ۳ + ۷ = ۵ + ۵ = ۱۰, \cdots$ چنانچه می‌بینید، در هر حالت محاسبهٔ p و q وابسته به مقدار n است و با قدری جستجو بدست می‌آید، بنابراین برای هر n، ممکن است اثبات $P(n)$ برای $A(n)$ وابسته به n وجود داشته باشد، ولی ممکن است که اثبات

متناهی برای $\forall x A(x)$ وجود نداشته باشد و در واقع اثبات $\forall x A(x)$ متشکل از بی‌نهایت اثبات $P(n)$، $n = ۲, ۳, ۴, \cdots$ باشد. اثبات متوقف شدن فرایند حذف برش و استقرا در بالا نیز، هرچند برای هر نمونهٔ مشخص و وابسته به آن نمونه ممکن است قابل انجام باشد، ولی اثباتی در حساب برای متوقف شدن تمام موارد آن وجود ندارد، چراکه در غیراینصورت سازگاری حساب را در خود حساب به اثبات رسانده‌ایم.

در این مورد شایان توجه است، که هرچند اثبات سازگاری و حذف برش و استقراها در حساب قابل انجام نیست، ولی این فرایند به نوعی مقدماتی است و ریاضیدانان آن را می پسندند. در واقع، اثبات سازگاری حساب گنتزن توسط حساب رشته‌ها و فرایند حذف برش و استقرا نمونه‌ای است از آنچه در برنامهٔ اولیهٔ هیلبرت قرار نمی‌گیرد ولی با هدف هیلبرت، یعنی تحقیق سازگاری ریاضیات با روش‌های مورد قبول زمان خود انطباق دارد و در واقع قضایای ناتمامیت گودل صورت اول برنامه، یعنی متناهی گرایانه بودن آن را غیرممکن ساخته است.

در آخر این بخش، می‌توان به ω ـ منطق اشاره کرد که با افزودن قواعدی مانند

$$\frac{A(۰) \quad A(۱) \quad \cdots \quad A(n) \quad \cdots}{\forall x A(x)}$$

به حساب رشته‌ها، منطق محمولات بدست می‌آید و در واقع ایدهٔ اثبات نامتناهی برای احکام $\forall x A(x)$ را صورت‌بندی می‌کند و نسبت به مدل استاندارد حساب یعنی $\mathbb{N}$ سالم و کامل است.

۲. مثال‌هایی از استنتاج در سیستم‌های فوق

استنتاج‌های زیر را برای $A \to B$ و $B \to C$، $\vdash A \to C$ در نظر بگیرید:

(a)		(b)	
۱. $A \to B$	فرض	۱. $A \to B$	فرض
۲. $B \to C$	فرض	۲. $B \to C$	فرض
۳. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	اصل ۱	۳. A	فرض
۴. $A \to (B \to C)$	MP و ۳ و ۲	۴. B	MP و ۳ و ۱
۵. $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	اصل ۲	۵. C	MP و ۴ و ۲
۶. $(A \to B) \to (A \to C)$	MP و ۵ و ۴		
۷. $A \to C$	MP و ۶ و ۵		

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[z:\ A]^{1} \quad x:A\to B}{x:B}E\to \qquad \dfrac{}{y:B\to C}}{y(xz):C}E\to}{\lambda z.y(xz):A\to C}I\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(A)^{1} \quad A\to B}{B}E\to \qquad \dfrac{}{B\to C}}{C}E\to}{A\to C}I\to$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash A}{A\vdash A,B,C}Ax \qquad \dfrac{C\vdash C}{A,B\vdash B,C}Ax}{A,A\to B\vdash B,C} \qquad \dfrac{}{A,A\to B,C\vdash C}L\to}{A,A\to B,B\to C\vdash C}L\to}{A\to B,B\to C\vdash A\to C}R\to$$

(d)

(a) و (b) دو استنتاج هیلبرتی برای حکم مطلوب می‌باشند که در (b) از قضیهٔ استنتاج استفاده شده است، A را نیز به فرضیات اضافه کرده و به‌جای $A\to C$ حکم ساده‌تر C را اثبات می‌کنیم. در (c) یک استنتاج طبیعی و همان استنتاج طبیعی با استفاده از ترمهای حساب لاندا برای حکم داده شده است که در آن آخرین ترم، کل اثبات را به‌صورت خطی در خود کد نموده است. می‌توان $\lambda z.y(xz)$ را بدین صورت فهمید که اگر x و y اثبات‌هایی برای $A\to B$ و $A\to C$ باشند، با درنظر گرفتن اثبات فرضی z برای A، و اعمال x روی z اثبات xz را برای B داریم و با اعمال y روی xz اثبات $y(xz)$ را برای C خواهیم داشت. چون این بحث برای هر اثبات z از A درست است، می‌توان با عملگر λ روی z، ترم فوق را بست و یک اثبات برای $A\to C$ به‌دست آورد.
(d) یک اثبات در حساب رشته‌ها است که با نگاه به‌آن از پائین به بالا می‌توان آنرا تولید کرد. ابتدا عکس $R\to$ برای $A\to C$ و سپس عکس $L\to$ برای $B\to C$ و بالاخره عکس $L\to$ برای $A\to B$ انجام شده است. البته در این‌جا می‌توان سؤالی در مورد ترتیب شکستن فرمول‌ها در طی کردن فرایند عکس مطرح کرد. هم‌چنین در قواعد مربوط به سورها، متغیر یا ترم جانشین‌شونده نیز مشخص نیست و باید حدس زده شود یا محاسبه گردد. در استنتاج‌های زیر، با کاربرد غلط یکی از قواعد سورها، نتیجهٔ غلط حاصل شده است.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x,x)\vdash A(x,x)}Ax}{\forall x\,A(x,x)\vdash A(x,x)}L\forall}{\forall x\,A(x,x)\vdash \forall y\,A(x,y)}R\forall_*}{\forall x\,A(x,x)\vdash \forall x\,\forall y\,A(x,y)}R\forall$$

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x),B(x)\vdash A(x)}Ax \quad \dfrac{}{A(x),B(x)\vdash B(x)}Ax}{A(x),B(x)\vdash A(x)\wedge B(x)}R\wedge}{A(x),B(x)\vdash \exists x\,(A(x)\wedge B(x))}R\exists}{A(x),\exists x\,B(x)\vdash \exists x\,(A(x)\wedge B(x))}L\exists_*}{\exists x\,A(x),\exists x\,B(x)\vdash \exists x\,(A(x)\wedge B(x))}L\exists$$

(b)

حکم (a) می‌گوید که «اگر گزارهٔ A روی نیمساز برقرار باشد، آنگاه روی کل صفحه برقرار است» که لزوماً درست نیست. در روند حرکت معکوس به‌سمت بالا، در قاعدهٔ $R\forall_*$، فرمول $A(x,x)$ از جانشینی x به‌جای y در $A(x,y)$ حاصل شده است، ولی x در رشتهٔ پایین یعنی $\forall x\ A(x,x) \Longrightarrow \forall y\ A(x,y)$ آزاد است که خلاف کاربرد قاعده است. در (b) اگر $A(x)$ و $B(x)$ را به « x زوج است و x فرد است» تعبیر کنیم، رشته بیانگر این است که «اگر عددی زوج و عددی فرد وجود داشته باشد، عددی هم فرد و هم زوج نیز وجود دارد» که غلط است. در واقع، مجدداً در جهت پایین به بالا، در قاعدهٔ $L\exists_*$ در فرمول تحت سور $\exists x$ یعنی $B(x)$، متغیر x را با x جانشین کرده‌ایم در حالی‌که x در رشتهٔ نتیجهٔ این قاعده (در $A(x)$) آزاد است. می‌توان مثال‌های دیگری نیز طرح کرد که با عدم رعایت شرایط قواعد سورها، نتایج غلط حاصل شوند.

در زیر سعی می‌کنیم استنتاج‌هایی برای رشته‌های زیر، با حرکت از پایین به بالا و شکستن فرمول‌ها به‌دست آوریم:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(t) \vdash A(y)}{A(t) \vdash \forall x\, A(x)}\, R\forall}{\vdash A(t) \to \forall x\, A(x)}\, R\to}{\vdash \exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))}\, R\exists$$

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\, Ax \quad \dfrac{B, A(y) \vdash A(t)}{B, \exists x\, A(x) \vdash A(t)}\, L\exists}{B,\ B \to \exists x\, A(x) \vdash A(t)}\, L\to}{B \to \exists x\, A(x) \vdash B \to A(t)}\, R\to}{B \to \exists x\, A(x) \vdash \exists x\, (B \to A(x))}\, R\exists$$

(b)

در (b) فرض شده است که $x \notin \mathrm{FV}(B)$. در قاعدهٔ $R\forall$ در (a) و $L\exists$ در (b) متغیر y نباید در رشتهٔ نتیجهٔ قاعده آزاد باشد، پس $y \notin \mathrm{FV}(t)$. پس رشته‌های $A(t) \vdash A(y)$ و B ،$A(y) \vdash A(t)$ در (a) و (b) نمی‌توانند اصل باشند، یعنی استنتاج فوق از اصل شروع نشده است و قابل قبول نیست. در (c) و (d) با تکرار فرمول وجودی در کاربرد قاعدهٔ $R\exists$ می‌توان استنتاجات زیر را برای آن‌ها به‌دست آورد (روند به‌دست آوردن استنتاج را از پایین به بالا ملاحظه کنید. همچنین $y \neq x$).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x), A(y) \vdash A(y), \forall x\, A(x)}\, Ax}{A(x) \vdash A(y), A(y) \to \forall x\, A(x)}\, R\to}{A(x) \vdash A(y), \exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))}\, R\exists}{A(x) \vdash \forall x\, A(x), \exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))}\, R\forall}{\vdash A(x) \to \forall x\, A(x), \exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))}\, R\to}{\vdash \exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))}\, R\exists$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, B, A(y) \vdash A(x), A(y)}\,Ax}{B, A(y) \vdash A(x),\ B \to A(y)}\,R\to}{B, A(y) \vdash A(x), \exists x\,(B \to A(x))}\,R\exists}{B, \exists x\, A(x) \vdash A(x),\ \exists x\,(B \to A(x))}\,L\exists}{B, B \to \exists x\, A(x) \vdash A(x),\ \exists x\,(B \to A(x))}\,L\to}{B \to \exists x\, A(x) \vdash B \to A(x),\ \exists x\,(B \to A(x))}\,R\to}{B \to \exists x\, A(x) \vdash \exists x\,(B \to A(x))}\,R\exists
$$

۳. روش تابلوها

چنانچه در مثال‌های فوق ملاحظه می‌شود، برای به‌دست آوردن استنتاج یک رشته شروع به شکستن فرمول‌ها و کاربرد قواعد در جهت عکس می‌کنیم. غیر از فرمول شکسته شده، بقیه فرمول‌ها عیناً تکرار می‌شوند و البته نوشتن مجدد آنها پرزحمت است. در روش تابلوها می‌توان این مسأله را حل کرد. فرمول‌های یک رشتهٔ $\Gamma \vdash \Delta$ را در یک شاخه با علامت $+$ کنار فرمول‌های موجود در Δ و علامت $-$ در کنار فرمول‌های موجود در Γ می‌نویسیم. در قواعد $L\wedge$، $R\vee$ و $R\to$ در روند معکوس، یک رشته تولید می‌شود ولی در $R\wedge$، $L\vee$ و $L\to$ دو رشته تولید خواهد شد. متناظراً در روش تابلوها قواعد α و β را داریم:

α		
$-(A \wedge B)$	$-A$	$-B$
$+(A \vee B)$	$+A$	$+B$
$+(A \to B)$	$-A$	$+B$

β		
$+(A \wedge B)$	$+A$	$+B$
$-(A \vee B)$	$-A$	$-B$
$-(A \to B)$	$+A$	$-B$

چنانچه گفتیم، علامت $+$ به‌معنای سمت راست رشته بودن فرمول‌ها و علامت $-$ به‌معنای سمت چپ رشته بودن آنها است.

متناظر با قواعد $R\exists$ و $L\forall$ که در رشتهٔ مقدم ترم t وجود دارد و فرمول اصلی تکرار می‌شود قواعد γ و متناظر با $L\exists$ و $R\forall$ که در رشتهٔ مقدم قاعدهٔ متغیر y وجود دارد و در رشتهٔ نتیجه آزاد نیست قواعد δ

را داریم:

δ	
$-\exists x\, A(x)$	$-A[c/x]$
$+\forall x\, A(x)$	$+A[c/x]$

γ	
$+\exists x\, A(x)$	$+A[x'/x]$
$-\forall x\, A(x)$	$-A[x'/x]$

در قاعدهٔ γ، x' را به‌جای t به‌کار می‌بریم و بعداً سعی در محاسبه آن خواهیم کرد. با کاربرد قاعدهٔ γ کنار فرمول متناظر علامت $*$ نمی‌گذاریم (به‌علت تکرار فرمول در رشتهٔ بالای قاعده) ولی در δ کنار فرمول علامت $*$ می‌گذاریم. به‌علاوه برای رعایت شرط متناظر آزاد نبودن y در رشتهٔ نتیجه، شرط $c < z$ را برای تمام متغیرهای آن شاخه درنظر می‌گیریم که به‌معنای این است که در محاسبهٔ مقادیر این متغیرها، نباید این مقادیر شامل c باشند. در قواعد α, β, δ در کنار فرمول شکسته شده علامت $*$ (احتمالاً $*$ اندیس‌دار برای نشان دادن ترتیب شکستن فرمول‌ها) می‌گذاریم که به‌معنای حذف آن فرمول از رشته و جانشینی آن با فرمول‌های متناظر است. چنان‌چه فرمولی با علامت $-$ و $+$ در شاخه‌ای ظاهر شد، به‌معنای رسیدن به‌یک اصل می‌باشد و آن شاخه را می‌بندیم. چنانچه تمام شاخه‌ها بسته شود، به‌معنای به‌اصل رسیدن تمام شاخه‌ها در حرکت معکوس است و استنتاج کامل شده است. در واقع باید متغیرها را چنان محاسبه کنیم که تمام شاخه‌ها بسته شود.

۱.۳ مثال. به دو مثال قبل توجه کنیم:

(b)

(۱) $-B \to \exists x\, A(x) \quad *_{۲}$

(۲) $+\exists x\, (B \to A(x))$

(۳) $+B \to A(x') \quad *_{۱}$

(۴) $-B$

(۵) $+A(x')$

(۶) $+B$ (۷) $-\exists x\, A(x) \quad *_{۳}$

(۸) $-A(c) \quad c < x'$

(a)

(۱) $+\exists x\, (A(x) \to \forall x\, A(x))$

(۲) $+A(x') \to \forall x\, A(x) \quad *_{۱}$

(۳) $-A(x')$

(۴) $+\forall x\, A(x) \quad *_{۲}$

(۵) $+A(c) \quad c < x'$

در (a)، (۲) از (۱) توسط γ، (۳) و (۴) از (۲) توسط α، (۵) از (۴) توسط δ حاصل شده

است. در (b)، (۱) و (۲) فرمول‌های سمت چپ و راست رشتهٔ مورد نظرند. (۳) از (۲) توسط γ، (۴) و (۵) از (۳) توسط α، (۶) و (۷) از (۱) توسط β، و (۸) از (۷) توسط δ حاصل شده است. * ها با کاربرد قواعد α، β و δ حاصل شده‌اند و اندیس بیانگر ترتیب کاربرد قاعده و حذف فرمول است. در (b) شاخهٔ سمت چپ شامل $+B$ و $-B$ می‌باشد و بسته شده است. شاخهٔ سمت چپ (b) و هم‌چنین تنها شاخهٔ (a) را با گرفتن متغیر x' برابر ثابت c می‌توان بست، ولی شرط $c < x'$ مانع از این کار می‌شود. این شرط به‌این معنی است که x' را نباید برابر ترمی شامل c گرفت. از طرفی برای بسته شدن این شاخه‌ها، تنها انتخاب برابر گرفتن x' با c است. البته هنوز فرمول‌های وجودی با علامت $+$ حذف نشده‌اند و بار دیگر می‌توان از قواعد γ استفاده کرد. ادامهٔ (a) و (b) به‌صورت زیر است:

(۶) $+A(x'') \to \forall x\, A(x) \quad *_۳$	(۹) $+B \to A(x'') \quad *_۴$
(۷) $-A(x'')$	(۱۰) $-B$
(۸) $+\forall x\, A(x)$	(۱۱) $+A(x'')$
(a)	(b)

حال اگر در (a) و (b)، x'' را برابر c بگیریم، شاخه‌های باز بسته می‌شوند و دیگر محدودیتی در این تساوی نداریم. برابر گرفتن x'' با c به‌معنی جانشینی متغیر x'' با ثابت c در تمام تابلو می‌باشد. پس از این جانشینی و تبدیل تابلوها به استنتاج، همان استنتاج‌های مثال‌های قبل را به‌دست می‌آوریم (البته با تغییراتی در اسم متغیرها و استفاده از ثابت c به‌جای متغیر y در قواعد $R\forall$ و $L\exists$).

۴. یکسان‌سازی

چنانچه در مثال‌های فوق دیده شد، در تابلوها لازم می‌شود که به متغیرها مقادیری بدهیم که دو فرمول $+A(t_۱, \ldots, t_n)$ و $-A(s_۱, \ldots, s_n)$ در یک شاخه با هم برابر شوند. در مثال‌های فوق این مسأله به‌سهولت با دادن مقدار c به x'' انجام شد، ولی این مسأله می‌تواند، مسأله‌ای مشکل شود. در این بخش یکسان‌سازی هر ترم و هر فرمول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

(۱.۴) تعریف. برای هر ترم t و s، جانشینی σ را یک یکسان‌ساز گوییم اگر $s\sigma = t\sigma$. ($t\sigma$ به‌معنای جانشینی متغیرهای x در t با ترم‌هایی توسط تابع σ است).

(۲.۴) مثال.

(۱) اگر a و b دو ثابت باشند، a و b قابل یکسان‌سازی‌اند اگر و تنها اگر $a = b$، چون برای هر

جانشینی σ، $a\sigma = a$ و $b\sigma = b$، زیرا جانشینی σ فقط متغیرها را جانشین می‌کند.

(۲) دو ترم $f(t_1, \ldots, t_n)$ و $g(s_1, \ldots, s_m)$ قابل یکسان‌سازی‌اند فقط اگر $f = g$.

(۳) برای متغیر x و ترم t که شامل x نیست و جانشینی $\sigma = [\frac{t}{x}]$ که فقط x را با t جانشین می‌کند، داریم:

$$t\sigma = t, \qquad x\sigma = t$$

(۴) دو ترم x و $f(x)$ قابل یکسان‌سازی نیستند، زیرا اگر $\sigma(x) = t$ آنگاه $d(t) < d(f(t))$ و $f(x)\sigma = f(t)$ و $x\sigma = t$.

(۳.۴) قضیه. فرض کنیم s و t دو ترم باشند. در این‌صورت یا s و t قابل یکسان‌سازی نیستند یا یک کلی‌ترین یکسان‌ساز[1] $\sigma = \mathrm{mgu}(s,t)$ وجود دارد که

۱− $t\sigma = s\sigma$

۲− برای هر یکسان‌ساز σ' برای t و s، جانشینی σ'' وجود دارد که $\sigma' = \sigma\sigma''$.

به‌علاوه، σ با تغییر نام یکتاست.

(۴.۴) الگوریتم محاسبه یکسان‌ساز: مارتلّی[2] و مونتاناری[3] (۱۹۸۲)

فرض کنیم F_0 مجموعه‌ای از تساوی‌های بین ترم‌ها باشد. می‌خواهیم یکسان‌سازی برای ترم‌های دو طرف تساوی بدست آوریم. الگوریتم زیر را با قرار دادن $\sigma_0 = \emptyset$ یعنی جانشینی همانی و زوج (F_0, σ_0) و اجرای قواعد زیر شروع می‌کنیم:

Delete: $(F \cup \{t = t\}) \to (F, \sigma)$

Decomp: $(F \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)\}, \sigma) \to (F \cup \{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n), \sigma)$

Bind: $(F \cup \{x = t\}, \sigma) \to (F, \sigma[\frac{t\sigma}{x}]),\ if \ \ x \notin \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{dom}(\sigma)$

Merge: $(F \cup \{x = t\}, \sigma) \to (F \cup \{x\sigma = t\}, \sigma),\ if \ \ \mathrm{FV}(t) \cap \mathrm{dom}(\sigma) = \emptyset, \quad x \in \mathrm{dom}(\sigma)$

(۵.۴) مثال. فرض کنیم s و t ترم‌های $f(x_1, x_2, x_3)$ و $f(g(x_2, x_2), g(x_3, x_3), g(x_4, x_4))$ باشند. با فرض $F_0 = \{t = s\}$ و $\sigma_0 = \emptyset$ الگوریتم را شروع می‌کنیم:

(۰) $F_0 = \{t = s\} \quad \sigma_0 = \emptyset$

(۱) $F_1 = \{x_1 = g(x_2, x_2), x_2 = g(x_3, x_3), x_3 = g(x_4, x_4)\} \quad \sigma_1 = \emptyset$

(۲) $F_2 = \{x_2 = g(x_3, x_3), x_3 = g(x_4, x_4)\} \quad \sigma_2 = \sigma_1 \left[\frac{g(x_2, x_2)}{x_1}\right]$

---

1) The most general unifier 2) Martelli 3) Montanari

$$(۳)\quad F_{۳}=\{x_{۳}=g(x_{۴},x_{۴})\}\quad \sigma_{۳}=\sigma_{۲}\left[\tfrac{g(x_{۳},x_{۳})}{x_{۲}}\right]$$

$$(۴)\quad F_{۴}=\emptyset\quad \sigma_{۴}=\sigma_{۳}\left[\tfrac{g(x_{۴},x_{۴})}{x_{۳}}\right]$$

(۱) توسط قاعدهٔ Decomp از (۰) و بقیه توسط قاعدهٔ Bind حاصل شده‌اند. در اعمال قاعدهٔ Bind برای (۱)، (۲) و (۳) توجه کنید که:

$$x_{۱}\notin \mathrm{FV}(g(x_{۲},x_{۲}))=\{x_{۲}\}\qquad x_{۲}\notin \mathrm{FV}(g(x_{۳},x_{۳}))=\{x_{۳}\}$$

$$x_{۳}\notin \mathrm{FV}(g(x_{۴},x_{۴}))=\{x_{۴}\}\qquad x_{۱}\notin \mathrm{dom}(\sigma_{۱})=\emptyset$$

$$x_{۲}\notin \mathrm{dom}(\sigma_{۲})=\{x_{۱}\}\qquad x_{۳}\notin \mathrm{dom}(\sigma_{۳})=\{x_{۱},x_{۲}\}$$

هم‌چنین داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_{۴}&=\left[\frac{g(x_{۲},x_{۲})}{x_{۱}}\right]\left[\frac{g(x_{۳},x_{۳})}{x_{۲}}\right]\left[\frac{g(x_{۴},x_{۴})}{x_{۳}}\right]\\&=\left[\frac{g(x_{۲},x_{۲})}{x_{۱}}\right]\left[\frac{g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴}))}{x_{۲}},\frac{g(x_{۴},x_{۴})}{x_{۳}}\right]\\&=\left[\frac{g(g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴})),g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴})))}{x_{۱}},\frac{g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴}))}{x_{۲}},\frac{g(x_{۴},x_{۴})}{x_{۳}}\right]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}s\sigma_{۴}\ =\ t\sigma_{۴}&=f[g(g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴})),g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴})))\\&\quad ,g(g(x_{۴},x_{۴}),g(x_{۴},x_{۴})),g(x_{۴},x_{۴}))\end{aligned}$$

پس

$$\sigma_{۴}=\mathrm{mgu}\,(f(x_{۱},x_{۲},x_{۳}),f(g(x_{۲},x_{۲}),g(x_{۳},x_{۳}),g(x_{۴},x_{۴})))$$

(۶.۴) مثال. با روش تابلوها ثابت می‌کنیم $\vdash \exists x\,\exists y\,\exists z\,\Phi(x,y,z)$ که در آن

$$\Phi(x,y,z)=((P(f(y),z)\wedge P(y,f(z)))\vee P(f(a),f(a)))\to(P(x,f(y))\vee P(f(x),y))$$

$$\begin{array}{ll} & (۱)\ \ +\exists x\,y\,z\ \ \Phi(x,y,z)\\ ۱,\gamma: & (۲)\ \ +\Phi(x',y',z')\qquad *_{۱}\\ ۲,\alpha: & (۳)\ \ -(P(f(y'),z')\wedge P(y',f(z')))\vee P(f(a),f(a))\qquad *_{۳}\\ ۲,\alpha: & (۴)\ \ +P(x',f(y'))\vee P(f(x'),y')\qquad *_{۲}\\ ۴,\alpha: & (۵)\ \ +P(x',f(y'))\\ ۴,\alpha: & (۶)\ \ +P(f(x'),y')\end{array}$$

$$\text{۳}, \beta: \quad (\text{۷}) \ -P(f(y'), z') \wedge P(y', f(z')) \quad *_\text{۴} \qquad \text{۳}, \beta: \quad (\text{۸}) \ -P(f(a), f(a))$$

$$\text{۷}, \alpha: \quad (\text{۹}) \ -P(f(y'), z')$$

$$\text{۷}, \alpha: \quad (\text{۱۰}) \ -P(y', f(z'))$$

$$\text{mgu}((\text{۵}), (\text{۹})) = \sigma_\text{۱} = \left[\frac{f(y')}{x'}, \frac{f(y')}{z'}\right]$$

$$\text{mgu}((\text{۵}), (\text{۱۰})) = \text{mgu}((\text{۶}), (\text{۹})) = \sigma_\text{۲} = \left[\frac{y'}{x'}, \frac{y'}{z'}\right]$$

$$\text{mgu}((\text{۶}), (\text{۱۰})) = \sigma_\text{۳} = \left[\frac{f(x')}{y'}, \frac{x'}{z'}\right]$$

با اعمال $\sigma_\text{۲}$ روی تابلوی فوق، (۵) و (۱۰) به $\pm P(y', f(y'))$ و (۶) و (۹) به $\pm P(f(y'), y')$ تبدیل می‌شوند و شاخهٔ سمت چپ بسته می‌شود. ولی نمی‌توان (۵) یا (۶) را با (۸) یکسان کرد. ولی با اعمال $\sigma_\text{۱}$، (۵) و (۹) به $\pm P(f(y'), f(y'))$ یا با اعمال $\sigma_\text{۳}$، (۶) و (۱۰) به $\pm P(f(x'), f(x'))$ تبدیل می‌شوند که با تبدیل x' به a، شاخهٔ راست نیز بسته می‌گردد و بنابراین با گرفتن $\sigma_\text{۴}$ یا $\sigma_\text{۵}$، هردو شاخه بسته می‌شوند:

$$\sigma_\text{۴} = \sigma_\text{۱}\left[\frac{a}{y'}\right] = \left[\frac{f(y')}{x'}, \frac{f(y')}{z'}\right]\left[\frac{a}{y'}\right] = \left[\frac{f(a)}{x'}, \frac{f(a)}{z'}, \frac{a}{y'}\right]$$

یا

$$\sigma_\text{۵} = \sigma_\text{۳}\left[\frac{a}{x'}\right] = \left[\frac{f(x')}{y'}, \frac{x'}{z'}\right]\left[\frac{a}{x'}\right] = \left[\frac{a}{x'}, \frac{f(a)}{y'}, \frac{a}{z'}\right]$$

مراجع

[1] Girard, J., *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, 1987.

[2] Goubault-Larrecq, J., Mackie,I., *Proof Theory and Automated Deduction*, Kluwer Academic Publisher, 1997.

[3] Takeuti,G., *Proof Theory*, North Holland, 1987.

[4] Troelstra., A.S., Schwichtenburg, H., *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, 1996.

مجتبی آقایی

دانشکده ریاضی — دانشگاه صنعتی اصفهان

پست الکترونیک aghaei@cc.iut.ac.ir

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۷۳ تا ۹۲

سیمای منطق فازی

سید محمود طاهری

چکیده
منطق فازی، که در آن ارزش درستی هر گزاره یک زیرمجموعهٔ فازی از بازهٔ واحد است، معرفی و وجوه اصلی آن بررسی می‌شود. نخست مروری بر منطق‌های دو ارزشی و چند ارزشی انجام می‌شود، و آن گاه به معرفی منطق فازی می‌پردازیم. در این زمینه، متغیرهای زبانی، قیدها و سورهای زبانی، قواعد اگر ــ آن‌گاه فازی و روابط استلزام فازی معرفی و بررسی می‌گردند. سرانجام، استدلال تقریبی را مورد توجه قرار داده و یکی از مهم‌ترین قوانین استنتاج در منطق فازی، یعنی قانون ترکیبی استنتاج، را معرفی و تشریح می‌کنیم.

۱. مقدمه

منطق علم روش‌ها و اصول استدلال است. منطق کلاسیک (دو ارزشی) که دیرینگی آن به دوران یونان باستان باز می‌گردد، و منطق‌های چند ارزشی، که حدود یک سده از معرفی آن‌ها می‌گذرد، با مفاهیم دقیق و استدلال‌های دقیق سر و کار دارند.

از سوی دیگر، مفاهیمی که انسان‌ها در زندگی روزمرّه به کار می‌گیرند و استدلال‌هایی که به‌طور معمول انجام می‌دهند (و برپایهٔ آن‌ها تصمیم می‌گیرند) به‌ندرت آن دقتی را دارند که بتوان آن‌ها را در چارچوب منطق کلاسیک (دو یا چند ارزشی) صورت‌بندی کرد.

برای تشریح مطلب، قانون قیاس استثنایی را، که یک قاعدهٔ اساسی و مهم در منطق است، در نظر می‌گیریم. بیان سادهٔ آن چنین است:

$$(\forall x(A(x) \to B(x)), A(s)) \to B(s)$$

برای نمونه از دو گزارهٔ «هر انسانی فانی است» و «سقراط انسان است»، می‌توان نتیجه گرفت که «سقراط فانی است». در این‌جا دو سؤال اساسی مطرح می‌شود:

الف) آیا همهٔ مفاهیمی که در زندگی و در محاورات انسانی به کار می‌بریم، مفاهیم دقیق و مشخص (مانند سقراط، انسان و فانی) هستند؟

ب) آیا تمام استدلال‌های انسانی کاملاً در قالب قانون قیاس استثنایی می‌گنجند؟

با یک مثال به پاسخ سؤال‌های بالا می‌پردازیم. ما به‌طور طبیعی و معمول از دو گزارهٔ «بسیاری از افراد چاق، خونگرم هستند» و «سعید تا اندازه‌ای چاق است»، نتیجه می‌گیریم که «به امکان زیاد سعید تا اندازه‌ای خونگرم است». این استدلال، به دو دلیل، در چارچوب منطق کلاسیک نمی‌گنجد. نخست این‌که در گزاره‌های بالا از مفاهیم چاق، خونگرم، بسیاری، تا اندازه‌ای و به امکان زیاد استفاده شده است که مفاهیمی نادقیق هستند. دوم این که استدلال فوق منطبق بر قانون قیاس استثنایی نیست (فی‌المثل محمول در گزاره اول «چاق» است، در حالی که در گزارهٔ دوم «تا اندازه‌ای چاق» ؛ و دیگر این‌که سور به کار رفته در گزارهٔ اول، نه سور عمومی و نه وجودی است).

مثال بالا یکی از بی‌شمار استدلال‌هایی است که در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم، در حالی که در منطق کلاسیک ابزارها و روش‌های لازم برای به کارگیری این نوع استدلال‌ها (و مفاهیم به کار رفته در آن‌ها) وجود ندارد. از سوی دیگر به نظر می‌رسد که در نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق فازی ابزارها و روش‌های مورد نیاز برای مشخصه‌سازی، توصیف و تحلیل این استدلال‌ها وجود دارد [۲, ۴, ٦, ۹, ۱۴, ۱۷, ۲۲].

منطق فازی شامل موضوع‌هایی بس گسترده است. هدف از مقالهٔ حاضر معرفی مقدماتی و کوتاه این منطق است. برای ورود به بحث، در بخش دوم مرور کوتاهی بر منطق‌های دو ارزشی و چند ارزشی، و در بخش سوم مرور کوتاهی بر مجموعه‌های فازی انجام می‌شود. در بخش چهارم متغیرهای زبانی، که نقش کلیدی در توصیف مفاهیم نادقیق در منطق فازی دارند، معرفی می‌شوند. در بخش پنجم قواعد اگر ــ آن‌گاه فازی معرفی و بررسی می‌شوند. این قواعد اساس بسیاری از شیوه‌های استدلال و استنتاج در منطق فازی است. بخش ششم و پایانی اختصاص به استدلال تقریبی و تشریح یکی از اصلی‌ترین روش‌های استدلال تقریبی دارد.

۲. منطق‌های دو ارزشی و چند ارزشی

در این بخش، به‌طور گذرا، مفاهیم اولیه منطق‌های دو ارزشی و چند ارزشی را مرور می‌کنیم [۱۸ ,۳ – ۱]. منطق دو ارزشی مبتنی بر اصل دوگانگی[۱] است، لذا در این منطق با گزاره‌هایی روبرو هستیم که فرض می‌شوند درست یا نادرست (دروغ) هستند. حوزه‌ای از این منطق که صرفاً با گزاره‌ها، یعنی عبارت‌هایی که راست یا دروغ‌اند، سر و کار دارد، منطق گزاره‌ها نامیده می‌شود. البته، برای سهولت، به جای گزاره‌ها از متغیرهای گزاره‌ای استفاده می‌شود. هر متغیر گزاره‌ای یکی از دو ارزش درستی T (درست) یا F (نادرست) را اختیار می‌کند. در عمل نوعاً با عبارت‌هایی روبرو هستیم که شامل گزاره‌ها و رابط‌های منطقی (نقیض ($\sim$)، عطف($\wedge$)، فصل ($\vee$)، شرط ($\rightarrow$)، دوشرطی ($\leftrightarrow$)) هستند. عبارت‌های مناسبی را که شامل گزاره‌ها و رابط‌های منطقی هستند،

صورت‌های گزاره‌ای می‌نامند. برای بررسی درستی یا نادرستی هر صورت گزاره‌ای (شامل n گزاره) یک جدول به نام جدول درستی (با ۲^n سطر) تشکیل می‌دهیم تا درستی صورت گزاره‌ای را بررسی کنیم. گذشته از این‌ها، آنچه از منطق گزاره‌ها انتظار داریم این است که بدانیم آیا می‌شود یک گزارهٔ مفروض را از تعدادی مقدمات نتیجه گرفت یا خیر؟ هنگامی که دنباله‌ای متناهی از صورت‌های گزاره‌ای داریم که آخرین آن‌ها به عنوان نتیجه و بقیه به عنوان مقدمات تلقی شوند، این دنباله را یک صورت استدلالی گویند. پس سؤال اصلی این می‌شود: چه هنگام یک صورت استدلالی معتبر است؟ بنا به تعریف، صورت استدلالی $A \Rightarrow (A_۱, A_۲, \ldots, A_n)$ را (که A_iها و A صورت‌های گزاره‌ای هستند) نامعتبر گوئیم اگر بتوان یک نوع ارزش‌دهی برای متغیرهای گزاره‌ای آن یافت که هر یک از A_i ها ارزش T داشته باشند ولی A دارای ارزش F باشد. در غیر این صورت استدلال را معتبر می‌نامیم.

اما هنوز یک نکتهٔ اساسی باقی است: این که اصولاً فرایند استنتاج بر چه پایه‌ها و اصولی استوار باشد. مسلماً نمی‌توان یک استنتاج را از هیچ به عمل آورد. بلکه باید یک یا چند اصل موضوع را به عنوان اصل (اصول) استنتاج بپذیریم تا در فرایند استنتاج از آن(ها) استفاده کنیم. افزون بر این، باید قاعده(ها)یی برای استنتاج داشته باشیم. در رایج ترین دستگاه صوری گزاره‌ها سه اصل زیر به عنوان اصول موضوعه پذیرفته شده‌اند:

$$(\mathrm{L}_۱) : (A \to (B \to A))$$
$$(\mathrm{L}_۲) : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$$
$$(\mathrm{L}_۳) : (((\sim A) \to (\sim B)) \to (B \to A))$$

به علاوه تنها قاعدهٔ استنتاج در این دستگاه، قاعدهٔ قیاس استثنایی به صورت زیر است:

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

منطق محمولات

گر چه با داشتن یک دستگاه صوری گزاره‌ها می‌توانیم چیزهایی دربارهٔ اعتبار گونه‌ای از استدلال‌ها بدانیم، اما بعضی استدلال‌ها الگویی دارند که ابزارهای منطق گزاره‌ها برای بررسی آن‌ها کافی نیست. در واقع هنگامی که بخواهیم محمول‌ها و سورها را نیز در گزاره‌ها و استدلال‌ها به کار گیریم، باید از یک دستگاه به نام دستگاه منطق صوری محمولات استفاده کنیم. یک دستگاه منطق صوری محمولات با روشی مشابه با روش ساخت یک دستگاه منطق صوری گزاره‌ها ساخته می‌شود. بدین معنی که دستگاهی شامل نمادها، اصول موضوعه و قاعدهٔ قیاس استثنائی مربوط به منطق صوری گزاره‌ها، همراه با نمادها و اصول و قواعدی برای کار با گزاره‌های شامل محمولات و سورها، یک

دستگاه منطق صوری محمولات را تشکیل می‌دهند. برای مطالعهٔ بیشتر این دستگاه‌ها می‌توان به [۸, ۱۸] مراجعه کرد. صرفاً یادآور می‌شویم که قاعدهٔ قیاس استثنائی در چارچوب منطق محمولات به صورت زیر است:

مقدمهٔ ۱ (قاعده): اگر x، A باشد؛ آن گاه y، B است.
مقدمهٔ ۲ (مشاهده/ ورودی): x، A است.

نتیجه (خروجی): y، B است.

نکته. بر پایهٔ آنچه بیان شد می‌توان گفت که، در دستگاه‌های منطق صوری گزاره‌ها و منطق صوری محمولات:

۱) هر گزاره ارزش درستی درست (T) یا نادرست (F) دارد.

۲) موضوع‌ها، مفاهیم دقیق و مشخص هستند.

۳) محمول‌ها، ویژگی‌هایی دقیق هستند.

۴) تنها سورهای قابل استفاده، سور عمومی و سور وجودی است.

۵) در قاعدهٔ قیاس استثنائی، عبارتی که در مقدمهٔ ۲ (مشاهده/ ورودی) ذکر می‌شود، دقیقاً همان چیزی است که در مقدم عبارت شرطی (مقدمهٔ ۱ / قاعده) بیان می‌شود.

پنج ویژگی (در واقع محدودیت) بالا از ممیزات منطق دو ارزشی؛ و چهار ویژگی ۲ تا ۵ از ممیزات منطق‌های چند ارزشی هستند. در بخش‌های آینده خواهیم دید که در منطق فازی چگونه این ویژگی‌ها دستخوش تغییر می‌گردند و چگونه این محدودیت‌ها، در راستای نزدیک شدن به منطق انسانی، برطرف می‌شوند.

منطق‌های چند ارزشی

در منطق دو ارزشی، با گزاره‌هایی سر و کار داریم که فقط می‌توانند یکی از دو ارزش درست یا نادرست را اختیار کنند. محدود شدن به چنین گزاره‌هایی، معادل با چشم پوشی از بسیاری از گزاره‌ها در شاخه‌های مختلف علوم است: گزاره‌هایی که وضعیت کاملاً مشخصی ندارند، یعنی نه کاملاً درست و نه کاملاً نادرست‌اند. برای رفع این مشکل بعضی محققان، از اوائل قرن بیستم، شروع به معرفی منطق‌های سه ارزشی نمودند[۱] [۷, ۱٦]. در این منطق‌ها، به گزاره‌هایی که از لحاظ درستی

---

۱. ریشهٔ منطق‌های چند ارزشی به زمان ارسطو (۴ ق‌م) باز می‌گردد. وی بابیان این جمله، به عنوان نمونه، که "فردا یک جنگ دریایی در خواهد گرفت"، اشاره به گزاره‌هایی می‌کند که بررسی آن‌ها مستلزم گذشت زمان است و لذا در زمان حال نه واقعاً درست هستند و نه واقعاً نادرست [۷].

نامشخص هستند یا غیر قابل تصمیم می‌باشند، ارزش درستی $\frac{1}{2}$ داده می‌شود. چندین منطق سه ارزشی معرفی شده است که در تعریف جداول درستی برای رابطه‌های عطف، فصل، شرطی و دوشرطی با یکدیگر تفاوت دارند. جداول درستی مربوط به چند منطق سه ارزشی در جدول ۱ ارائه شده است. شایان یادآوری است که در منطق‌های سه ارزشی قوانین شمول ($a \vee \bar{a} = ۱$) و طرد ($a \wedge \bar{a} = ۰$) برقرار نیستند.

		لوکاسیه‌ویچ				بوخوار				لین				هی تینگ			
a	b	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
$\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱
$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	۱	$\frac{1}{2}$
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰
۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱ تعریف رابطه‌های منطقی برای چهار منطق سه ارزشی

منطق‌های سه ارزشی را می‌توان به آسانی به منطق‌های n ارزشی تعمیم داد[۱]. در یک منطق n ارزشی، درستی هر گزاره از مجموعهٔ $\{۰, \frac{1}{n-1}, \ldots, ۱\}$ اختیار می‌شود. اولین منطق n ارزشی توسط لوکاسیه‌ویچ[۲] ارائه شد. در این منطق رابطه‌های منطقی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{a} = ۱ - a$$

$$a \wedge b = \min(a, b) \qquad a \vee b = \max(a, b)$$

$$a \rightarrow b = \min(۱, ۱ + b - a) \qquad a \leftrightarrow b = ۱ - |a - b|$$

در حالت کلی‌تر، می‌توان مجموعهٔ درجات درستی را اعداد بازهٔ $[۰,۱]$ در نظر گرفت. در این صورت به یک منطق بی‌نهایت ارزشی می‌رسیم. رایج ترین این نوع منطق‌ها، منطق استاندارد لوکاسیه‌ویچ است، که در آن تعریف رابطه‌های منطقی به همان صورتی است که در بالا برای منطق n ارزشی ذکر کردیم. منطق‌های مختلف بی‌نهایت ارزشی در عین حال که شباهت‌هایی دارند، تفاوت‌هایی نیز،

۱. در واقع، عصر چند ارزشی توسط لوکاسیه‌ویچ و پست (E.L. Post) رسماً در سال ۱۹۲۰ م آغاز شد. لوکاسیه‌ویچ اصول یک حساب گزاره‌ای سه ارزشی را بنیان نهاد، و پست در همان سال جبرهای منطقی چند ارزشی (متناهی) را تعریف نمود. برای توضیح بیشتر به [۷] مراجعه کنید.

2) J. Lukasiewicz

به ویژه در منطق محمولات، دارند. خاطر نشان می شود که یک رویکرد اصلی در منطق‌های بی‌نهایت ارزشی، رویکرد منطق‌های احتمالاتی[1] یا به تعبیری دیگر احتمال‌های منطقی[2] است. برای مطالعه مقدماتی این مبحث و مراجعی در این باره می‌توان به [۳, ۷] مراجعه کرد.

۳. مجموعه‌های فازی

تعریف ۱. یک زیر مجموعهٔ فازی[3] A از مجموعهٔ مرجع X توسط تابع عضویت[4] آن، $A(x) : X \to I = [\circ, ۱]$ تعریف می‌شود. مقدار $A(x)$ درجهٔ عضویت[5] x در زیر مجموعهٔ فازی A (به کوتاهی: مجموعهٔ فازی A) نامیده می‌شود [۲, ٦, ۱۲].

مثال ۱. فرض کنید $X = \mathbb{R}$. مجموعهٔ فازی A از $\mathbb{R}$ را که توصیف کنندهٔ ویژگی «حدوداً ۱۰» باشد، می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف کرد:

$$A(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

تعبیر دیگری را برای مجموعهٔ اعداد « حدوداً ۱۰» می‌توان با تابع عضویت زیر ارائه کرد:

$$B(x) = e^{-(x-10)^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ملاحظه می‌کنید که یک مفهوم نادقیق[6] را می‌توان با مجموعه‌های فازی (به‌طور معادل: توابع عضویت) متفاوت و گوناگونی تعریف کرد. در مثال بالا، دو تابع عضویت $A(x)$ و $B(x)$ بیانگر تعبیری از مفهوم نادقیق « حدوداً ۱۰» هستند. آشکار است که برای توصیف و مدل‌سازی مفهوم «حدوداً ۱۰» می‌توان از توابع عضویت گوناگونی (و در نتیجه مجموعه‌های فازی مختلف) استفاده کرد.

تعریف ۲. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ فازی از مجموعه مرجع X باشند.

الف) گفته می‌شود A زیرمجموعهٔ B است، $A \subseteq B$، اگر برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$.

ب) مجموعهٔ فازی A^c با تابع عضویت $A^c(x) = 1 - A(x)$، متمم مجموعه فازی A نامیده می‌شود.

پ) اجتماع دو مجموعهٔ فازی A و B به صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

---

1) Probabilistic Logics 2) Logical Probabilities 3) Fuzzy Set 4) Membership Function

5) Degree of Membershi 6) Imprecise/Vague Concept

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] \quad , \quad x \in X.$$

ت) اشتراک دو مجموعهٔ فازی A و B به صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] \quad , \quad x \in X.$$

نکته. تعریف‌های بالا برای متمم، اجتماع و اشتراک تنها تعاریف ممکن نیستند. تعریف‌های دیگری نیز برای این عملگرها ارائه شده است. خوانندگان علاقمند را به [۱۹ و ۱۶ و ۱۲ و ۵] ارجاع می‌دهیم.

۴. متغیرهای زبانی

در منطق کلاسیک با متغیرهایی سر و کار داریم که مقادیر آنها دقیق هستند. برای مثال متغیر سن را بر حسب سال، با مجموعهٔ مرجع $U = [0, 200]$، در نظر بگیرید. مقادیر این متغیر اعدادی مانند ۳۲، ۷۵/۵ و ۱۱۵ هستند. هم‌چنین هر زیر مجموعه از $[0, 200]$ را می‌توان به عنوان یک تحدید (محدودیّت)[1] برای متغیر سن در نظر گرفت. مثلاً بازهٔ $[0, 50)$ برای توصیف افرادی که سن آنها کمتر از ۵۰ سال است، و مانند این‌ها. در همهٔ این موارد، یک متغیر معمولی داریم و زیر مجموعه‌هایی دقیق از آن، که این زیرمجموعه‌ها را می‌توان به عنوان تحدیدهایی دقیق برای متغیر معمولی سن در نظر گرفت. اما در زبان طبیعی از مفاهیمی استفاده می‌کنیم که در واقع مقادیر مبهم از متغیر سن هستند، مانند: جوان، خردسال، نوجوان، پیر، و مانند این‌ها. بنابراین، از دیدگاهی متفاوت، می‌توان سن را یک متغیر زبانی (نه عددی) در نظر گرفت که مقادیر آن اعداد نیستند بلکه کلمات و عباراتی مانند جوان، خردسال، بسیار جوان، ... هستند. به‌طور خلاصه «یک متغیر زبانی[2] متغیری است که مقادیرش کلمات یا عباراتی از یک زبان طبیعی یا مصنوعی باشد [۲۱]». تعریف دقیق و رسمی متغیر زبانی به صورت زیر است [۲۱, ۲].

تعریف ۳. یک متغیر زبانی توسط چهار مؤلفهٔ $(X, U, T(X), M)$ مشخص می‌شود، که در آن X نام متغیر زبانی است.

U مجموعهٔ مرجع متغیر است. یعنی دامنه‌ای که در آن، متغیر زبانی X مقادیر کمّی (عددی) خود را اختیار می‌کند.

$T(X)$ مجموعهٔ مقادیر زبانی است که X اختیار می‌کند. اعضای $T(X)$ را، اصطلاحاً، ترم[3]‌های X می‌نامند.

M مجموعه قواعد معنایی است که به هر مقدار زبانی از $T(X)$ معنای آن را، که یک مجموعه فازی

1) Restriction 2) Linguistic Variable 3) Term

از U است، مربوط می‌سازد.

مثال ۲. اگر سن را به عنوان یک متغیر زبانی در نظر بگیریم، داریم:

X: سن
$U = [۰, ۲۰۰]$
T(X)= T(سن)= { خردسال, نوجوان, جوان, میان سال, پیر, بسیار جوان, ... }

در این مثال، M مجموعهٔ قواعدی است که به هر مقدار زبانی سن، معنای آن را نسبت می‌دهد. مثلاً می‌توان ترم «جوان» را به‌صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت زیر تعریف کرد:

$$A(u) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq u < ۳۰ \\ ۱ - ۲(\frac{u-۳۰}{۳۰})^۲ & ۳۰ \leq u < ۴۵ \\ ۲(\frac{۶۰-u}{۳۰})^۲ & ۴۵ \leq u < ۶۰ \\ ۰ & ۶۰ \leq u \end{cases}$$

ترم‌های دیگر متغیر زبانی سن، مانند نوجوان، بسیار جوان، پیر، بسیار پیر، کم و بیش جوان و ... نیز باید با مجموعه‌های فازی مناسب تعریف شوند. واضح است که تعریف این ترم‌ها تا اندازه‌ای وابسته به زمینهٔ مورد بحث و همچنین وابسته به نظر افراد متخصص در موضوع مورد مطالعه است. در مبحث قیدهای زبانی، توضیحات بیشتری دربارهٔ ساختن ترم‌ها ارائه خواهیم داد.

اکنون مثال بالا را از چند جنبه بررسی می‌کنیم و مفاهیم و نکات دیگری را یادآور می‌شویم. در این مثال متغیر عددی سن را که مقادیر آن در بازه $[۰, ۲۰۰]$ تغییر می‌کند، متغیر پایه گوییم. هر مقدار از متغیر زبانی سن، مانند جوان، را می‌توانیم به صورت یک تحدید فازی بر مقادیر متغیر پایه تعبیر کنیم. این تحدید فازی، که آن را به‌صورت یک تابع عضویت بیان می‌کنیم، منظور ما را از معنی و مفهوم جوان نشان می‌دهد. به بیان دیگر این تابع میزان سازگاری هر $u \in U$ را با مفهوم (تحدید) مورد نظر نشان می‌دهد. برای نمونه، در این مثال مقدار $A(۳۵) = ۰/۹۴$ یعنی سازگاری و تطابق سن عددی ۳۵ با آن معنا از جوان که در A بیان شده، برابر ۰/۹۴ است.

نکته. از مثال بالا آشکار است که ساختن مجموعهٔ ترم‌های یک متغیر زبانی نکته‌ای حساس و مهم است. معمولاً سعی می‌شود که یک ترم پایه از متغیر زبانی تعریف شود (مثلاً در بارهٔ متغیر زبانی سن: ترم جوان) و آن‌گاه سایر ترم‌ها بر اساس ترم پایه و استفاده از قیدهای زبانی (خیلی، کمی، کم و بیش، خیلی کم و ...) تولید شوند. مسلماً در تعریف ترم پایه زمینهٔ بحث و کاربرد آن و نظرات افراد متخصص باید مورد توجه قرار گیرد.

۱.۴. متغیر زبانی درستی

متغیر زبانی «درستی»، نقش محوری در منطق فازی دارد. دوباره یادآور می‌شویم که در منطق‌های بی‌نهایت ارزشی ارزش درستی هر گزاره عددی از بازهٔ $[0,1]$ است. به سخن دیگر، درستی، یک متغیر عددی است. یک تعمیم طبیعی این نوع منطق ها این است که مقادیر درستی گزاره‌ها مقادیر یک متغیر زبانی درستی باشند. در مورد متغیر زبانی درستی، مجموعهٔ مرجع نیز بازهٔ $[0,1]$ است، و مجموعه ترم‌ها شامل ارزش‌های درستی در زبان طبیعی و انسانی است، یعنی

X: درستی
$\mathrm{U} = [0, 1]$
T(X)= T(درستی)={درست, نه درست, بسیار درست, کم و بیش درست, ...}

در مورد متغیر زبانی درستی، تعریف ترم «درست» حائز اهمیت است. بالدوین[1] [۱۱] ترم «درست» را با تابع عضویت زیر تعریف می‌کند:

$$A(u) = u \quad , \quad 0 \le u \le 1$$

بدین معنی که اگر، برای مثال درستی یک گزاره ۰/۸ باشد، آن گزاره به اندازه ۰/۸ «درست» است. وی ترم‌های «خیلی درست» و «کم و بیش درست» را به‌ترتیب به‌صورت $[A(u)]^2$ و $[A(u)]^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کند. بدین ترتیب اگر درستی یک گزاره ۰/۸ باشد، آن گزاره به اندازه ۰/۶۴ «خیلی درست» و به اندازه ۰/۸۹ «کم و بیش درست» است. زاده[2] [۲۱] تابع عضویت زیر را برای ترم «درست» پیشنهاد کرده است

$$A(u) = \begin{cases} 0 & 0 \le u \le a \\ 2\left(\frac{u-a}{1-a}\right)^2 & a \le u \le \frac{a+1}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{u-1}{1-a}\right)^2 & \frac{a+1}{2} \le u \le 1 \end{cases}$$

در تابع فوق $a \in [0,1]$ یک پارامتر است که بر پایهٔ داوری شخصی، نظر افراد متخصص و زمینهٔ مورد بحث تعیین می‌شود، و به عنوان حداقل مقدار برای u است که بتوان برای آن درجه‌ای مثبت از درستی در نظر گرفت. مثلاً اگر از دیدگاه شما درستی یک گزاره باید دست کم ۰/۶ باشد تا بتوانید به‌طور کلی لفظ «درست» را (با هر درجه‌ای) به آن اطلاق کنید، در این صورت باید از مقدار $a = 0/6$ استفاده کنید. در این حالت (از دیدگاه شما) یک گزاره با درستی ۰/۸، به اندازه ۰/۵ سازگار با معنی «درست» است.

۲.۴. قیدهای زبانی

اکنون به تعریف و توضیح قیدهای زبانی می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که در منطق کلاسیک

1) J. F. Baldwin 2) L. A. Zadeh

تنها یک قید، قید نفی (نقیض / چنین نیست که)، داریم. امّا در زبان طبیعی از قیدهای گوناگونی استفاده می‌کنیم. برای داشتن یک منطق مشابه با منطق عملی لازم است این قیدها را صورت بندی کنیم.

تعریف ۴. یک قید زبانی[۱]، عملگری است که معنای یک ترم را تغییر می‌دهد. الگوهای رایج برای قیدهای زبانی عبارت اند از

عملگر تمرکز[۲] $CON(A)(u) = (A(u))^{۲}$

عملگر اتساع[۳] $DIL(A)(u) = (A(u))^{\frac{۱}{۲}}$

عملگر تشدید تبیین[۴]
$$INT(A)(u) = \begin{cases} ۲A^{۲}(u) & ۰ \leq A(u) \leq \frac{۱}{۲} \\ ۱ - ۲[۱ - A(u)]^{۲} & \frac{۱}{۲} \leq A(u) < ۱ \end{cases}$$

عملگر تمرکز برای قید خیلی[۵] و عملگر اتساع برای قید کم و بیش (نسبتاً)[۶] استفاده می‌شود. عملگر بیش از[۷] و عملگر کمی[۸] نیز به صورت زیر مدل‌سازی می‌شوند

$$\text{Plus}(A) = A^{۱/۲۵}$$

$$\text{Slightly}(A) = INT[Plus(A) \wedge Not(Very(A))]$$

شایان ذکر است که ادوات «و»، «یا» و «نه(چنین نیست که)»، به ترتیب، با عملگرهای عطف، فصل و نفی فازی (تعریف ۲) تعریف می‌شوند. برای مطالعه بیشتر قیدهای فازی می‌توان به [۹, ۱۷, ۲۱] مراجعه کرد.

۳.۴. سورهای زبانی

در منطق‌های کلاسیک دو نوع سور داریم: سور عمومی و سور وجودی. از سوی دیگر، در گفتار طبیعی جملاتی را به کار می‌بریم که حاوی سورهای نادقیق و مبهم هستند، مانند:

بسیاری از افراد چاق خونگرم‌اند.

در تقریباً نیمی از فصل زمستان در آستارا باران می‌بارد.

اندکی از مردم با آراء و افکار امام محمد غزالی آشنا هستند.

در این جملات سورهای بسیاری، تقریباً نیمی و اندکی به کار رفته‌اند که سورهایی نادقیق و مبهم هستند. برای توصیف و تحلیل منطق عملی لازم است این سورها نیز مدل‌سازی شوند. در منطق فازی می‌توان سورهای نادقیق و مبهم را، که سورهای زبانی[۹] نام دارند، توسط مجموعه‌های فازی

1) Linguistic Modifier 2) Concentration 3) Dilation 4) Contrast Intensification
5) Very 6) More or Less 7) Plus 8) Slightly 9) Linguistic Quantifier

مدل‌سازی کرد و در استنتاج‌ها به کار گرفت. واضح است که تعریف این سورها به زمینهٔ مورد بحث و نظر افراد متخصص بستگی دارد.

مثال ۳. سور «تقریباً نیمی» می‌تواند با تابع زیر تعریف و توصیف شود:

$$A(u) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq u < ۰/۴۰ \\ \frac{u-۰/۴۰}{۰/۱۰} & ۰/۴۰ \leq u < ۰/۵۰ \\ \frac{۰/۶۰-u}{۰/۱۰} & ۰/۵۰ \leq u < ۰/۶۰ \\ ۰ & ۰/۶۰ \leq u \leq ۱ \end{cases}$$

بدیهی است که «تقریباً نیمی» را می‌توان به صورت‌های دیگری هم تعریف کرد.

۵. قواعد اگر ـ آن گاه فازی

بخش عمده‌ای از دانش بشری و شیوه‌های تصمیم‌گیری انسانی، مبتنی بر قواعدی به صورت اگر ـ آن‌گاه[1] می‌باشد، که حالت خاص آن در منطق کلاسیک گزاره‌های شرطی $p \to q$ است. یک قاعده (قانون) اگر ـ آن گاه فازی[2]، گزاره‌ای شرطی به شکل زیر است:

اگر «گزارهٔ فازی»، آن‌گاه «گزارهٔ فازی»

این قواعد نقش عمده‌ای در منطق فازی، استنتاج فازی و کنترل فازی دارند [۲۱, ۱۷, ۱۳, ۹]. برای پرداختن به این قواعد، نخست گزاره‌های فازی را معرفی می‌کنیم.

۱.۵. گزاره‌های فازی

گزاره‌های فازی[3] بر دو نوع‌اند: گزاره‌های فازی ساده و گزاره‌های فازی مرکب. یک گزاره فازی ساده به شکل زیر است:

$$X \quad is \quad A$$

که در آن X یک متغیر زبانی و A یک مقدار زبانی از این متغیر است.

مثال ۴. گزارهٔ «هوا گرم است»، یک گزارهٔ فازی ساده است.

یک گزارهٔ فازی مرکب، عبارت است از مجموعه‌ای از گزاره‌های فازی ساده که با رابط‌های «و»، «یا» و «نه» ترکیب شده‌اند. برای این رابط‌ها به ترتیب از اشتراک، اجتماع و متمم مجموعه‌های فازی استفاده می‌شود.

1) If-Then 2) Fuzzy If-Then Rule 3) Fuzzy Propositions

مثال ۵. دو گزارهٔ زیر، گزاره‌های فازی مرکب هستند:

$$X_1 \ is \ A \ \ and \ \ X_2 \ is\, not \ B$$

$$(X_1 \ is \ A \ and \ X_2 \ is \ B) \ or \ X_3 \ is \ C$$

مانند

فشار خون بالا است و قند خون زیاد نیست.

بیمار مسن است یا (فشار خون بالا است و قند خون زیاد است)

مثال ٦. گزاره‌های شرطی زیر نمونه‌هایی از قواعد اگر ـ آن‌گاه فازی هستند:

اگر باران می‌بارد، آن‌گاه سرعت خودرو زیاد نباشد.

اگر باران به‌طور شدید می‌بارد و هوا مه‌آلود است، آن‌گاه سرعت خودرو بسیار کم باشد.

۲.۵. رابطه‌های استلزام

در منطق کلاسیک عبارت شرطی اگر p آن‌گاه q براساس عملگر استلزام و به صورت $p \to q$ نوشته می‌شود. ارزش درستی $p \to q$ نیز به سادگی تعریف می‌شود: اگر p درست و q نادرست باشد، $p \to q$ نادرست است و در غیر این حالت $p \to q$ درست است. بنابراین ارزش درستی $p \to q$ معادل با ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر است:

$$(\sim p) \vee q \qquad (1)$$

$$(p \wedge q) \vee (\sim p) \qquad (2)$$

چون قواعد اگر ـ آن‌گاه فازی با جایگزینی p و q توسط گزاره‌های فازی تولید می‌شوند، لذا می‌توانیم این قواعد را بر حسب عملگرهای نفی، عطف و فصل فازی تعبیر کنیم. برای این عملگرها تعریف‌های مختلفی ارائه شده است (رجوع کنید به نکتهٔ انتهای بخش ۳). بنابراین تعریف‌های مختلفی برای مدل سازی قواعد اگر ـ آن‌گاه فازی می‌توان ارائه نمود. این تعریف‌ها در قالب رابطه‌های استلزام فازی[1] مطرح شده‌اند [۱۷, ٦]. گزارهٔ شرطی زیر را در نظر بگیرید:

$$If \ \ X \ \ is \ \ A, \ \ then \ \ Y \ \ is \ \ B$$

که در آن A و B دو مقدار زبانی، به ترتیب، با توابع عضویت $A(u)$ و $B(v)$ از مجموعه‌های مرجع U و V هستند. یک رابطهٔ استلزام فازی، تابعی به‌صورت $R(u,v) : U \times V \to I = [0, 1]$ است، که توصیف کنندهٔ درستی گزاره شرطی فوق می‌باشد. چند رابطهٔ استلزام مشهور و متداول در جدول ۲ درج شده‌اند.

1) Fuzzy Implication Relations

استلزام لوکاسیه‌ویچ رابطه	$R(u,v) = \min[1, 1-u+v]$
استلزام زاده‌رابطه	$R(u,v) = \max[\min(u,v), 1-u]$
استلزام لین — دینس‌رابطه	$R(u,v) = \max[1-u, v]$
استلزام ممدانی رابطه	$R(u,v) = \min[u,v]$
استلزام لارسن‌رابطه	$R(u,v) = u.v$
استلزام لین — دینس — لوکاسیه‌ویچ‌رابطه	$R(u,v) = 1-u+u.v$
استلزام ییگر[1] رابطه	$R(u,v) = \begin{cases} 1 & u=v=0 \\ v^u & \end{cases}$
استلزام گودل‌رابطه	$R(u,v) = \begin{cases} 1 & u \leq v \\ v & u > v \end{cases}$
استلزام گینز (در برخی متون: گوگوئن)[2] رابطه	$R(u,v) = \begin{cases} 1 & u \leq v \\ \frac{v}{u} & u > v \end{cases}$
استلزام ویلمات[3]رابطه	$R(u,v) = \max[\min(x,y), \min(1-x, 1-y), \min(1-x, y)]$

جدول ۲. رابطه‌های استلزام در منطق فازی

اکنون نکاتی را دربارهٔ روابط مذکور در جدول ۲ بیان می‌کنیم. فرض کنید عبارت (۲) را مبنا قرار دهیم و به جای عملگرهای $\sim$ و $\vee$، از متمم فازی و عملگر max استفاده کنیم. در این صورت به رابطهٔ استلزام زاده می‌رسیم. امّا اگر عبارت (۱) را مبنا قرار دهیم، به رابطهٔ استلزام لین ـ دینس می‌رسیم. و اگر عبارت (۱) را مبنا قرار دهیم ولی به جای عملگر max برای $\vee$ از عملگر $\min[1, (u+v)]$ (حالت خاصی از ردهٔ عملگرهای پارامتری ییگر برای اشتراک دو مجموعه فازی) استفاده کنیم، رابطهٔ استلزام لوکاسیه‌ویچ را به دست می‌آوریم. روابط دیگر نیز بر پایهٔ تعبیرها و تعریف‌های مختلف از روابط منطقی $\vee$ و $\wedge$ و همچنین قواعد اگر ـ آن گاه، بر اساس (۱) یا (۲) حاصل می‌شوند.

۶. استدلال تقریبی

یکی از ممیزات منطق فازی، استفاده از استدلال تقریبی[4] است. در منطق فازی قواعد مختلفی برای استدلال تقریبی وجود دارد مانند قیاس استثنائی تعمیم یافته[5]، قیاس فرضی (اقترانی) تعمیم یافته[6]، قاعده رفع تالی تعمیم یافته[7] و .... مهم‌ترین این قواعد، قاعدهٔ قیاس استثنائی تعمیم یافته است. برای آشنائی خوانندگان با نحوهٔ استدلال تقریبی در منطق فازی این قاعده را تشریح می‌کنیم

1) R.R. Yager 2) Gogoen 3) Wilmat 4) Approximate Reasoning 5) Generalized Modus Ponens 6) Generalized Hypothetical Syllogism 7) Generalized Modus Tollens

و علاقمندان را برای مطالعهٔ قواعد دیگر و مباحث مختلف استدلال تقریبی و استنتاج فازی، به [۲, ۹, ۱۳, ۱۷] ارجاع می‌دهیم.

ساده‌ترین شکل قانون قیاس استثنائی تعمیم یافته به‌صورت زیر است:

مقدمه (قانون)	$If \;\; X \;\; is \;\; A, \;\; then \;\; Y \;\; is \;\; B$
مقدمه (مشاهده)	$X \;\; is \;\; A^*$
نتیجه	$Y \;\; is \;\; B^*$

که در آن X و Y متغیرهای زبانی، و A و B و A^* و B^* مجموعه‌های فازی هستند.

تفاوت شکل بالا با شکل متداول این قانون در منطق کلاسیک این است که: اولاً A و B مقادیر متغیرهای زبانی هستند (به سخن دیگر A و B محمول‌های نادقیق هستند)، و دوم این‌که A^* که در مشاهده بیان شده است، دقیقاً همان A که در قانون ذکر شده است نمی‌باشد. پیش از ادامهٔ بحث به بیان یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۷. نمونه‌ای از استدلال تقریبی بر اساس قانون قیاس استثنائی تعمیم یافته به‌صورت زیر است:

مقدمه (قانون): اگر هوا بارانی باشد، آن‌گاه سرعت خودرو کم شود.
مقدمه (مشاهده/ورودی): هوا شدیداً بارانی است.

نتیجه (خروجی): سرعت خودرو ($B^* = ?$) شود.

در این مثال، وضعیت هوا (X) و سرعت خودرو (Y) متغیرهای زبانی هستند. بارانی (A) و شدیداً بارانی (A^*) دو مقدار زبانی از وضعیت هوا، و سرعت کم (B) یک مقدار زبانی از سرعت خودرو است.

نکتهٔ مهم در استنتاج بالا، به دست آوردن B^* براساس A و B و A^* است. در این باره دو رویکرد وجود دارد. در رویکرد اول قاعده اگر ـ آن‌گاه به وسیلهٔ یک رابطهٔ استلزام فازی صورت‌بندی می‌شود و سپس، بر اساس قانونی به نام قانون ترکیبی استنتاج[1]، مقدار مشاهده با رابطهٔ فوق ترکیب می‌شود و نتیجهٔ استنتاج به دست می‌آید. در رویکرد دوم، مجموعه فازی A^* (مشاهده) با مقدم قاعده اگر ـ آن‌گاه، یعنی با مجموعه فازی A، مقایسه می‌شود و سپس از نتیجه مقایسه استفاده شده و تالی قاعدهٔ شرطی، یعنی مجموعه فازی B، تغییر و تعدیل یافته و B^* به دست می‌آید. در ادامهٔ این مقاله رویکرد اول را به کوتاهی معرفی می‌کنیم.

1) Compositional Rule of Inference

۱.٦. قانون ترکیبی استنتاج (CRI)

همچنان که اشاره کردیم این رویکرد شامل دو مرحله است:

الف) قاعدهٔ اگر ـ آن‌گاه را، بر اساس یک رابطهٔ استلزام فازی، به‌صورت یک رابطهٔ فازی دو بعدی $R(u,v)$ می‌نویسیم.

ب) مشاهدهٔ A^* را با رابطه فازی R ترکیب نموده و B^* را به دست می‌آوریم، یعنی $B^* = A^*OR$ که در آن O نشان دهندهٔ عمل ترکیب است. عمل ترکیب و به دست آوردن تابع عضویت B^* به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$B^*(v) = \sup_u T[A^*(u), R(u,v)]$$

که در آن T یک نرم مثلثی [۱] است. نرم‌های مثلثی رایج برای استفاده در رابطه فوق، که قاعده ترکیبی استنتاج نامیده می‌شود، $T(x,y) = \min(x,y)$ و $T(x,y) = x.y$ می‌باشند.

۲.٦. تعمیم روش CRI

در مسائل کاربردی با حالت‌هایی کلّی‌تر و گسترده‌تر از آنچه در بالا گفته شد (یعنی یک قاعده، یک متغیر در شرط، یک متغیر در تالی) روبرو هستیم. در عمل با مجموعه‌ای از قواعد سر و کار داریم که هر قاعده نیز ممکن است شامل چند متغیر در شرط (متغیرهای ورودی) و چند متغیر در تالی (متغیرهای خروجی) باشد. از این روی مسألهٔ استنتاج به روش CRI را می‌توان از دو جهت تعمیم داد. نخست با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از قواعد فازی (پایگاه قواعد) به جای یک قاعده، و دوم با بسط تعریف قانون فازی به صورت یک قانون با مقدم و تالی چند گزاره‌ای.

در روش CRI بر پایهٔ مجموعه‌ای از قواعد، با استنتاجی به‌صورت زیر روبرو هستیم:

مقدمه (قانون)	$If \quad X \quad is \quad A_i, \quad then \quad Y \quad is \quad B_i$
مقدمه (مشاهده)	$X \quad is \quad A^*$
نتیجه	$Y \quad is \quad B^*$

۱) Triangular Norm، تابع دومتغیره $I \times I \to I$: $T(x,y)$ یک T ـ نرم (نرم مثلثی) نامیده می‌شود اگر: (۱) $T(x,۱) = x$، (۲) اگر $y_۱ \leq y_۲$ و $x_۱ \leq x_۲$ آن‌گاه $T(x_۱,y_۱) \leq T(x_۲,y_۲)$، (۳) $T(x,y) = T(y,x)$، (۴) $T[x,T(y,z)] = T[T(x,y),z]$. نرم‌های مثلثی (و دوگان آن‌ها، همنرم‌های مثلثی (Triangular Conorms)) رده‌هائی از عملگرهای منطقی عطف و فصل (برای عملگرهای مجموعه‌ای: اشتراک و اجتماع) فراهم می‌آورند، و از این رو کاربردهای بسیار در منطق فازی و نظریه مجموعه‌های فازی دارند. برای مطالعه T ـ نرم‌ها می‌توان به [۱۹, ۱٦, ۲] مراجعه نمود. نیز [۱۰] یک مرجع جدید در این باره است.

که در آن $A_i,\ B_i, i = ۱,...,n$ مجموعه‌های فازی (مقادیر زبانی) از متغیرهای Y و X هستند. اکنون باید بر پایهٔ n قاعده (قانون) و هم‌چنین مشاهده $X\ \ is\ \ A^*$، نتیجهٔ استنتاج یعنی B^* را به دست آوریم. در این باره دو شیوهٔ استنتاج وجود دارد: استنتاج مبتنی بر ترکیب قواعد و استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه. در شیوهٔ نخست، هر قاعده را به‌صورت یک رابطهٔ فازی دو بعدی می‌نویسیم و سپس این روابط را به نحوی با هم ترکیب نموده و در یک قاعده خلاصه می‌کنیم. آن گاه مشاهدهٔ A^* را با این قاعدهٔ نهایی ترکیب نموده و B^* را به‌دست می‌آوریم. در شیوهٔ دوم A^* را با هر قاعده ترکیب نموده و یک خروجی بر حسب هر قاعده به دست می‌آوریم و سپس این خروجی‌ها را با هم ادغام نموده و B^* را محاسبه می‌کنیم.

در روش CRI **بر پایهٔ قواعد شامل مقدم و تالی‌های چند گزاره‌ای**، با استنتاجی به‌صورت زیر روبرو هستیم:

مقدمه (قانون)	$\text{If } X_۱\ \ is\ \ A_۱\ \ and\ \ X_۲\ \ is\ \ A_۲\ \ \ldots\ \ and\ \ X_n\ \ is\ \ A_n,$
	$\text{then } Y_۱\ \ is\ \ B_۱\ \ and\ \ Y_۲\ \ is\ \ B_۲\ \ \ldots\ \ and\ \ Y_m\ \ is\ \ B_m$
مقدمه (مشاهده)	$X_۱\ \ is\ \ A_۱^*\ \ and\ \ X_۲\ \ is\ \ A_۲^*\ \ \ldots\ \ and\ \ X_n\ \ is\ \ A_n^*$
نتیجه	$Y_۱\ \ is\ \ B_۱^*\ \ and\ \ Y_۲\ \ is\ \ B_۲^*\ \ \ldots\ \ and\ \ Y_m\ \ is\ \ B_m^*$

البته می‌توان از رابط‌های "یا" و "نه" هم در قواعد بالا استفاده کرد. به علاوه ممکن است (در عمل غالباً چنین است) که با مجموعه‌ای از قواعد چند گزاره‌ای روبرو باشیم. در مثال زیر نمونه‌ای ساده از یک استدلال تقریبی که قواعد آن شامل مقدم و تالی‌های چند گزاره‌ای هستند، ارائه شده است.

مثال ۸. قواعد و مشاهده زیر نمونه‌هایی از قواعد و مشاهداتی هستند که در کنترل فازی یک ماشین لباسشویی استفاده می‌شود

قانون ۱: اگر حجم لباس‌ها کم باشد و لباس‌ها خیلی کثیف نباشند، آن‌گاه زمان شستشو کم باشد و حرارت آب متوسط باشد.

قانون ۲: اگر حجم لباس‌ها کم باشد و لباس ها کثیف باشند، آن‌گاه زمان شستشو متوسط باشد و حرارت آب زیاد باشد.

قانون ۳: اگر حجم لباس‌ها زیاد باشد و لباس‌ها کثیف باشند، آن‌گاه زمان شستشو زیاد باشد و حرارت آب زیاد باشد.

قانون ۴: اگر حجم لباس‌ها زیاد باشد و لباس‌ها خیلی کثیف باشند، آن‌گاه زمان شستشو زیاد باشد و حرارت آب بسیار زیاد باشد.

مشاهده (ورودی): حجم لباس‌ها متوسط است و لباس‌ها کمی کثیف هستند.

نتیجه (خروجی): زمان شستشو (؟) باشد و حرارت آب (؟) تنظیم شود.

آشکار است که برای کنترل مناسب یک ماشین لباسشویی باید مجموعهٔ قوانین را کامل کرد، طوری که همهٔ حالت‌های مربوط به حجم و وضعیت لباس را شامل شود. افزون بر این باید متغیرهای دیگر مانند جنس لباس، مقدار پودر، سرعت چرخش، ... را هم در نظر گرفت.

در استنتاج از قواعدی که مقدم و تالی‌های چند گزاره‌ای دارند، نکتهٔ اصلی به دست آوردن B_1^*و ... و B_m^* به عنوان نتایج مربوط به متغیرهای Y_1 و ... و Y_m است. این نوع قوانین توصیف کنندهٔ سیستم‌های چند ورودی ــ چند خروجی هستند. برای استنتاج از قواعدی مانند قاعدهٔ فوق، دو روش عمده وجود دارد. این دو روش را برای حالتی که تنها یک قانون داریم توضیح می‌دهیم.

در روش نخست، قاعدهٔ اصلی را به صورت m قاعدهٔ چند ورودی ــ یک خروجی می‌نویسیم. آن‌گاه هر یک از این m قاعده را با یک رابطهٔ استلزام $n+1$ بعدی توصیف می‌کنیم. سپس هر B_i^* را بر پایهٔ ترکیب A_i^*ها با رابطه استلزام فوق به دست می‌آوریم. در روش دوم، پس از تجزیهٔ قاعدهٔ اصلی به m قاعدهٔ چند ورودی ــ یک خروجی، هر قاعده از نوع اخیر را به n قاعدهٔ ساده تجزیه می‌کنیم. آن‌گاه هر A_i^* از بردار مشاهدات را با رابطه‌های فازی متناظر که از تجزیه فوق به دست آورده‌ایم ترکیب می‌کنیم. بدین صورت n نتیجهٔ جداگانه برای هر Y_i می‌یابیم که با ادغام آنها خروجی B_i^* را به دست می‌آوریم. روند فوق را برای به دست آوردن همهٔ B_i^* ها انجام می‌دهیم.

دو روشی را که توضیح دادیم می‌توان برای حالتی که مجموعه‌ای از قوانین چند گزاره‌ای داریم، به شیوه‌های گوناگون، تعمیم داد. در اینجا به همین حد بسنده می‌کنیم و دوستداران موضوع را به [۲, ۱۷] ارجاع می‌دهیم.

نکته. همان طور که پیشتر اشاره کردیم، منطق فازی شامل موضوع‌هایی بس گسترده است. علاقمندان به مباحث نظری منطق فازی می‌توانند به [۱۵, ۱۷, ۲۰] مراجعه کنند. دوست‌داران مباحث کاربردی نیز می‌توانند، برای نمونه، به [۹, ۱۳] مراجعه نمایند.

نتیجه‌گیری

تلاش کردیم که سیمای منطق فازی را آشکار کنیم. سخن بر سر منطق فازی، هم در وجوه نظری و هم در وجوه کاربردی آن، فراوان است. اما، بر پایهٔ آنچه در این نوشتار بیان کردیم و در مقام تمایز بین منطق کلاسیک و منطق فازی، می‌توان وجوه زیر را به عنوان خطوط اصلی سیمای منطق فازی برشمرد:

۱) در منطق‌های دو ارزشی، هر گزاره درست یا نادرست فرض می‌شود. در منطق‌های چند ارزشی، ارزش‌های درستی گزاره‌ها، اعداد بازهٔ [۰, ۱] هستند. اما درستی در منطق فازی یک متغیر زبانی است که مقادیر آن زیر مجموعه‌های فازی از بازهٔ [۰, ۱] است.

۲) در منطق کلاسیک موضوع‌ها مفاهیمی دقیق هستند و محمول‌ها نیز ویژگی‌هایی دقیق می‌باشند. اما در منطق فازی می‌توان دربارهٔ مفاهیم نادقیق سخن گفت و از محمول‌های نادقیق استفاده کرد.

۳) در منطق کلاسیک دو سور قابل استفاده است: سور عمومی و سور وجودی. ولی در منطق فازی می‌توان از سورهای فازی (نادقیق) استفاده نمود.

۴) در منطق کلاسیک تنها قیدی که معنای یک گزاره را تغییر می‌دهد قید نفی است. اما در منطق فازی می‌توان از قیدهای فازی برای تعدیل، تشدید، ... و به‌طور کلی تغییر معنای گزاره‌ها استفاده کرد.

۵) در منطق کلاسیک تنها می‌توان استدلال‌های دقیق انجام داد. در حالی که منطق فازی امکان استدلال تقریبی را، کم و بیش آن‌گونه که در استدلال‌های انسانی وجود دارد، فراهم می آورد.

سپاسگزاری

از آقای دکتر مجتبی آقائی و خانم مریم حامد مقدم، که متن نخستین این مقاله را خواندند و راهنمایی‌ها و تذکراتی را ارائه دادند، سپاسگزارم.

مراجع

[۱] جفری، ریچارد (۱۳۶٦)، قلمرو و مرزهای منطق صوری، (ترجمهٔ پرویز پیر)، انتشارات علمی و فرهنگی.

[۲] طاهری، سید محمود (۱۳۷۵)، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

[۳] طاهری، سید محمود (۱۳۸۱)، یگانگی و چندگانگی احتمال، نامه فرهنگستان علوم، ش ۱۹، ۱۲٦—۹۳.

[۴] کریمی، پری نوش (۱۳۸۲)، مبانی فلسفی منطق فازی، پایان نامه کارشناسی ارشد فلسفه، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه اصفهان.

[۵] ماشین‌چی، ماشاالّله (۱۳۷۴)، استدلال تقریبی و عملگرهای استلزام، گزارش کارگاه ریاضیات فازی، ۲٦امین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۱٦—۹۱.

[٦] ماشین‌چی، ماشاالّله (۱۳۷۹)، مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۷] مالینوسکی، گرز گُرز (۱۳۷٦)، منطق‌های چند ارزشی (ترجمهٔ اسفندیار اسلامی)، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[۸] همیلتن، آ.گ. (۱۳۷۱)، منطق برای ریاضیدانان (ترجمهٔ محمدعلی پورعبدا...) انتشارات آستان قدس رضوی.

[۹] وانگ، لی (۱۳۷۸)، سیستم‌های فازی و کنترل فازی، (ترجمهٔ محمدعلی تشنه لب و همکاران)، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.

[10] Alsina, C., Frank, M.J., Schweizer, B. , Problems on associative functions, *Aequationes Math.*, 66, (2003) 128-140.

[11] Baldwin, J.F., A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems*, No 2, (1979) 309-325.

[12] Buckley, J.J., Eslami, E., *An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*, Physica-Verlag (2002).

[13] Dimitrov, V., Korotkich, V. (Eds.), *Fuzzy Logic,* Physica-Verlag (2002).

[14] Goguen, J.A., The logic of inexact concepts, *Synthese*, 19, (1969) 325-373.

[15] Hajek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer (1998).

[16] Klir, G.J., Folger, T.A., *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall (1988).

[17] Lee, E.S., Zhu, Q., *Fuzzy and Evidence Reasoning*, Physica-Verlag (1995).

[18] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth (1987).

[19] Nguyen, H.T., Walker, E.A., *A First Course in Fuzzy Logic*, Third. Ed., Chapman and Hall/CRC (2006).

[20] Reghis, M., Roventa, E., *Classical and Fuzzy Concepts in Mathematical Logic and Applications* , CRC Press (1998).

[21] Zadeh, L.A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts I, II, III, *Information Sciences*, 8: 199-249, 8: 301-357, No 9, (1975): 43-80.

[22] Zadeh, L.A., Knowledge representation in fuzzy logic, *IEEE Trans. Knowledge and Data Engin.* No 1, (1989): 89-100.

سید محمود طاهری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
Taheri@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۹۳ تا ۹۹

آنالیز غیراستاندارد

محمود بینای مطلق

۱. مقدمه

از ابتدای پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال تا دوران معاصر، ایدهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها[۱] ابزار شهودی مناسبی برای یافتن نتایج جدید در آنالیز بود. ولی متأسفانه پاسخگوی دقت ریاضی نبود. جالب است که خود لایب نیتس می‌گفت: «من به آنها ایمان دارم، هر چند از نظر منطقی هنوز توجیه کافی برای آنها ندارم.» این خود از نظر فلسفهٔ ریاضی جالب است ولی وارد بحث آن نمی‌شویم. بالاخره به‌خاطر ایجاد دقت ریاضی، ریاضی‌دانان به $\epsilon - \delta$ پناه بردند.

حدود چهل سال پیش آبراهام رابینسون با ارائهٔ مدلی معادل مدل مقدماتی ولی غیرایزومورف با هیأت مرتب اعداد حقیقی در زبان هیأت، نشان داد که بی‌نهایت کوچک‌ها، همراه با بی‌نهایت بزرگ‌ها، کاملاً از مشروعیت برخوردارند.

۲. ساختن $\mathbb{R}^*$

به روش ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{Q}$ نگاه کنیم. فرض کنید $\mathrm{Cauchy} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ مجموعهٔ دنباله‌های کشی از اعداد گویا باشد. یک رابطهٔ هم‌ارزی به صورت زیر روی آن تعریف می‌کنیم:

$$(u_n - v_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{u_n\} \sim \{v_n\}$$

با این رابطه، $u_n = \frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{2n}$ و $w_n = \frac{1}{n^2}$ و $z_n = \frac{1}{2^n}$ همه یک عدد، یعنی صفر را معرفی می‌کنند. در حالی‌که اگر «عضو به عضو» مقایسه شوند یکی دو برابر دیگری است، یا یکی «بی‌نهایت کوچک از مرتبه اول»، دیگری «بی‌نهایت کوچک از مرتبه دوم» و آخری بی‌نهایت کوچک از مرتبه بی‌نهایت است، البته با ابزاری مناسب برای مقایسه. برای ساختن $\mathbb{R}$، می‌توان به راحتی مجموعهٔ اولیه را بسیار بزرگ گرفت: تمام $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ به‌جای Cauchy، و می‌توان رابطه $\sim$ را

1) infinitesimal

ظریف‌تر انتخاب کرد. در این‌صورت $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\sim$ هیئتی بسیار بزرگ از آب در می‌آید که $\mathbb{R}$ را به‌عنوان دسته‌ای مرکزی در بردارد. برای تعریف $\sim$ نخست به مفهوم فیلتر نیاز است: فرض کنیم X مجموعه‌ای غیرتهی است. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$، مجموعه‌ای غیرتهی، یک فیلتر روی X خوانده می‌شود هرگاه:

$$A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F}\ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{F} \tag{۱}$$

$$A \in \mathcal{F},\ B \supseteq A\ \Rightarrow\ B \in \mathcal{F} \tag{۲}$$

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \tag{۳}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که همواره $X \in \mathcal{F}$ و از (۳) نتیجه می‌شود که $\mathcal{F} \subsetneq \mathbb{P}(X)$.

۱.۲ مثال. $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X \mid B \supseteq A\}$ را که $A \subseteq X$ فیلتر اساسی گویند. فیلتری که برای ما مهم است فیلتر فرشه روی $\mathbb{N}$ یعنی $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A^c| < \infty\}$ است که فیلتر بودن آن به راحتی دیده می‌شود.

فیلتر $\mathcal{U}$ را یک اولترافیلتر نامند هرگاه فیلتری ماکزیمال باشد (بین آن و $\mathcal{P}(X)$ فیلتر دیگری نباشد). با کمک لم تسورن (که معادل اصل انتخاب است) می‌توان نشان داد که هر فیلتری را می‌توان در یک اولترافیلتر نشاند. امّا خود این مطلب می‌تواند به‌عنوان اصل پذیرفته شود که معادل اصل ایده‌آل ماکزیمال (در یک جبر بول) و به‌نوبهٔ خود معادل با قضیهٔ کمال تعمیم یافته است و اکیداً از اصل انتخاب ضعیف‌تر است.

یکی از خواص اولترافیلتر که برای ما مهم است این است که اگر $A \cup B \in \mathcal{U}$ آنگاه $A \in \mathcal{U}$ یا $B \in \mathcal{U}$ و دیگر این‌که برای هر $A \subseteq X$، $(A \in \mathcal{U} \vee A^c \in \mathcal{U})$.

اکنون به تعریف $\sim$ بپردازیم:

فرض کنیم $\mathcal{U}$ یک اولترا فیلتر غیراساسی باشد. اگر $f,\ g,\ h \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم:

$f \sim g$ اگر $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

خواص فیلتر فوراً نتیجه می‌دهد که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی f را با $\bar{f}$ یا $[f]$ نشان می‌دهیم.

۲.۲ تعریف روابط و توابع

برای $\bar{f} < \bar{g}$ داریم $\bar{f} < \bar{g} \Leftrightarrow \{i \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U}$. اصل تثلیث برقرار است زیرا:

$$\{i \mid f(i) < g(i)\} \cup \{i \mid f(i) = g(i)\} \cup \{i \mid f(i) > g(i)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U},$$

پس $\{i \mid f(i) < g(i)\} \in \mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i) > g(i)\} \in \mathcal{U}$

در نتیجه یکی از سه حالت $\bar{f} < \bar{g}$، $\bar{f} = \bar{g}$، یا $\bar{f} > \bar{g}$ همواره برقرار است.

جمع و ضرب توابع را به صورت مؤلفه به مؤلفه تعریف می‌کنیم، مثلاً $\bar{f}+\bar{g}=\bar{h}$ هرگاه $\{i \mid h(i)=f(i)+g(i)\}\in\mathcal{U}$.

نشاندن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{Q}^*$ سرراست است: $q\mapsto\overline{q^\#}$ که $q^\#(i)=q$، یعنی $\overline{q^\#}$ کلاس هم‌ارزی دنبالهٔ ثابت با مؤلفه‌های q است. اکنون ببینیم که اعداد بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ را هم داریم. مجموعهٔ اعداد بی‌نهایت کوچک $\mathbb{Q}_۰$، مجموعهٔ اعداد متناهی $\mathbb{Q}_۱$ و مجموعهٔ اعداد نامتناهی $\mathbb{Q}_\infty$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbb{Q}_۰=\{x \mid \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(|x|<\tfrac{۱}{n})\},\quad \mathbb{Q}_۱=\{x \mid \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(|x|<n)\},\quad \mathbb{Q}_\infty=\mathbb{Q}_۱^c.$$

برای دنبالهٔ $\epsilon:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ با ضابطه $\epsilon(n)=\frac{۱}{n}$، $\bar{\epsilon}$ یک عدد بی‌نهایت کوچک است، چون برای هر n،

$$\{i \mid \epsilon(i)<\frac{۱}{n}\}=\{n+۱,n+۲,\ldots\}=\{۱,۲,\ldots,n\}^c\in\mathcal{U}$$

برای دنباله $w(n)=n$، $\bar{w}$ یک عدد بی‌نهایت بزرگ می‌باشد.

به‌راحتی می‌توان دید که $\mathbb{Q}_۱$ یک حلقه و $\mathbb{Q}_۰$ در آن یک ایده‌آل ماکزیمال است، و داریم $\mathbb{R}\cong\mathbb{Q}_۱/\mathbb{Q}_۰$.

اکنون اگر بخواهیم می‌توانیم با $\mathbb{R}$ شروع کنیم و بگوییم: $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}^\mathbb{N}/\sim$، و $\mathbb{R}_۰$ و $\mathbb{R}_۱$ و $\mathbb{R}_\infty$ را هم به‌همان ترتیب تعریف کنیم. باز هم خواهیم داشت $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}_۱/\mathbb{R}_۰$. کافی است فقط یکبار زحمت $\epsilon/۲$ و غیره را برای نشان دادن ایده‌آل بودن $\mathbb{R}_۰$ در $\mathbb{R}_۱$ بکشیم، در بقیه موارد همه چیز به‌راحتی حل می‌شود (در حالی که در آنالیز معمولی این زحمت هر بار باید تکرار شود!).

هیأت مرتب و کامل با تقریب ایزومورفیسم یکتاست! البته اعداد صحیح و اعداد کسری نیز در $\mathbb{R}^*$ قابل تعریفند:

$\bar{f}\in\mathbb{N}^*$ یا $\bar{f}\in\mathbb{Q}^*$ هرگاه متناظراً $\{i \mid f(i)\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{U}$ یا $\{i \mid f(i)\in\mathbb{Q}\}\in\mathcal{U}$. $\bar{w}$ یک عدد صحیح بی‌نهایت بزرگ است و $\bar{\epsilon}$ یک عدد کسری بی‌نهایت کوچک. چون $\{i|\epsilon(i)\in\mathbb{Q}\}=\{i|w(i)\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ پس $\bar{w}\in\mathbb{N}^*$ و $\bar{\epsilon}\in\mathbb{Q}^*$.

۳.۲ چند تعریف

گوییم x بی‌نهایت به y نزدیک است و می‌نویسیم $x\simeq y$ اگر $x-y\in\mathbb{R}_۰$.

$\mu(x)=\{y \mid y\simeq x\}$ را هالهٔ x گوییم. $\mu(۰)=\{x \mid x\approx ۰\}$ یاهالهٔ صفر، مجموعهٔ تمام اعداد بی‌نهایت کوچک است، چون بی‌نهایت نزدیک به صفر می‌باشد. در نتیجه برای هر x داریم: $\mu(x)=x+\mu(۰)$ و $\mu(۰)=\mathbb{R}_۰$.

هر عدد متناهی x بی‌نهایت نزدیک به یک عدد استاندارد است، که آن عدد را بخش استاندارد x نامیده با $\mathrm{st}(x)$ نمایش می‌دهیم. از این پس اعداد بی‌نهایت کوچک را بیشتر با Δx و مشابه آن نشان می‌دهیم. لذا می‌توان نوشت $x=\mathrm{st}(x)+\Delta x$. به‌راحتی می‌توان دید که

$st(x \pm y) = st(x) \pm st(y)$، $st(x.y) = st(x).st(y)$ و اگر $st(y) \neq \circ$ آنگاه $st(\frac{x}{y}) = \frac{st(x)}{st(y)}$.
تابع $f : I \to \mathbb{R}$ که در آن I یک بازه در $\mathbb{R}$ است و نقطهٔ $a \in I$ مفروض است. حد و پیوستگی و مشتق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ اگر $\bigwedge_{x\in I^*}(x \approx a \to f(x) \approx L)$، و f در a پیوسته است اگر $\bigwedge_{x\in I^*}(x \approx a \to f(x) \approx f(a))$ و یا $f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. قضایای مربوط به حد فوراً به‌دست می‌آیند. مثلاً برای پیوستگی $g \circ f$ داریم $g \circ f(\mu(x)) \subseteq g(\mu(f(x))) \subseteq \mu(g \circ f(x))$. اثبات تمام شد! آن‌هم با دقت کامل! مثال دیگر، پیوستگی حاصل ضرب دو تابع است:

$$\begin{aligned} f.g(x+\Delta x) &= f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) = (f(x)+\Delta u).(g(x)+\Delta v) \\ &= f(x).g(x) + \underbrace{f(x).\Delta v + g(x).\Delta u + \Delta u.\Delta x}_{\in\mathbb{R}_\circ} \approx f(x).g(x) \end{aligned}$$

مشتق f در نقطهٔ a را نیز در صورت وجود با نماد $f'(a) = \mathrm{st}(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x})$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در صورت وجود داریم: $f(a+\Delta x) = f(a) + \underbrace{\Delta x f'(a) + \Delta x.\Delta u}_{\in\mathbb{R}_\circ}$ در نتیجه اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است.
مثلاً برای $f(x) = x^n$، داریم $f'(x) = \mathrm{st}(\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x})$ و بنابراین

$$f'(x) = \mathrm{st}((x+\Delta x)^{n-۱} + (x+\Delta x)^{n-۲}x + \cdots + x^{n-۱}) = nx^{n-۱}.$$

و دستور مشتق زنجیری (از فرمول بالا استفاده شود) فوراً به دست می‌آید. در واقع از
$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \Delta x.\Delta u, \quad g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta x g'(x) + \Delta x.\Delta v$
داریم

$$g(f(x+\Delta x)) = g(f(x)) + (\Delta x f'(x) + \Delta x.\Delta u)g'(f(x)) + (\Delta x.f'(x) + \Delta x.\Delta u).\Delta v$$

و بنابراین $(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$.

پیوستگی یکنواخت نیز توسط فرمول $\bigwedge_{x\in I}\bigwedge_{y\in I}(x \approx y \to f(x) \approx f(y))$ تعریف می‌شود.

۴.۲ مثال. $x^۲$ روی $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته نیست: اگر $x \in \mathbb{R}_\infty$ آنگاه $x \approx x + \frac{۱}{x}$، امّا $(x+\frac{۱}{x})^۲ - x^۲ = ۲ + \frac{۱}{x^۲} \notin \mathbb{R}_\circ$. ولی $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ در سراسر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است:

$$\frac{۱}{۱+x^۲} - \frac{۱}{۱+(x+\Delta x)^۲} = \frac{۲x.\Delta x + \Delta x^۲}{(۱+x^۲)(۱+(x+\Delta x)^۲)}$$

اگر x متناهی باشد، صورت این کسر بی‌نهایت کوچک است و مخرج آن متناهی است و بی‌نهایت کوچک نیست و اگر x بی‌نهایت بزرگ باشد، مخرج بی‌نهایت بزرگ از درجه ۴ و صورت بی‌نهایت بزرگ از درجهٔ ۱ است.

۳. ابر ساختارهای بزرگ[1]

پس از بیان فواید بی‌نهایت کوچک‌ها، به معرفی ساختارهای بزرگ می‌پردازیم. به صورت خلاصه، یک مجموعه S در نظر می‌گیریم که از افراد تشکیل شده است. یک روبنا روی S عبارت است از $\hat{S}$ که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$S_\circ = S \quad , \quad S_{i+1} = S_i \cup \mathcal{P}(S_i) \quad , \quad \hat{S} = \cup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

U، زیرمجموعه‌ای از $\hat{S}$، یک جهان خوانده شود هرگاه خواص در خور را دارا باشد و در $\hat{S}$ متعدی باشد. I یک مجموعه اندیس غیرتهی که و مجموعه‌ای بسیار بزرگ خواهد بود و F یک اولترافیلتر روی آن است. برای $f, g : I \to \hat{S}$ گوییم $f \sim g$ اگر $f(i) \sim g(i)$ a.e. یعنی $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in F$. رابطهٔ سه یک رابطهٔ هم‌ارزی بوده و کلاس هم‌ارزی f با رابطهٔ سه را با $\bar{f}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه، تقریباً همه جا گزارهٔ $p(i)$ درست است را به $p(i)$a.e. نشان داده و به معنای $\{i \in I|p\mathcal{U}|\} \in F$ می‌باشد. مثلاً $\bar{f} \in \bar{g}$ به صورت $f(i) \in g(i)$ a.e. تعریف می‌شود. غیراستاندارد شدهٔ مجموعهٔ $A \in \hat{S}$ با A^* نمایش داده و به صورت $A^* = \{\bar{f} | f(i) \in A \text{ a.e.}\}$ تعریف می‌کنیم.
فرض کنیم

$$Z_n = \{f \mid f(i) \in S_n \ \ a.e.\}, \ Z = \bigcup_n Z_n, \ W = \{\bar{f} \mid f \in Z_\circ\}$$

و $\tilde{W}$ مانند $\hat{S}$ تعریف شود.

۱.۳ چند مثال از توپولوژی

فرض کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی X و برای $p \in X$، O_p مجموعهٔ بازهای حاوی p باشد. هالهٔ p مجموعهٔ $\mu(p) = \bigcap\{G^* \mid G \in O_p\}$ می‌باشد که G^* غیر استاندارد شده G در ساختار بزرگمان می‌باشد و تعریف می‌کنیم $q \in \mu(p) \Leftrightarrow q \approx p$ و $st(q) = p$ اگر $q \approx p$ و $p \in X$. معادل چند خاصیت توپولوژیک به صورت زیر است:

A باز است هرگاه $\bigwedge_{p \in A}(\mu(p) \subset A^*)$. A بسته است اگر $\bigwedge_{p \in A^c}(\mu(p) \cap A^* = \circ)$.
$f : X \to Y$ در x پیوسته است هرگاه $f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. (توجه شود تعاریف در جهت درست حرکت می‌کنند نه در جهت عکس. دانشجویان سال اول معمولاً می‌پرسند چرا ϵ روی محور yها انتخاب می‌شود؟!)
X هاوسدورف است اگر برای هر p, q متمایز در X داشته باشیم $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$، و همچنین X فشرده‌است اگر $\bigwedge_{q \in X^*} \bigvee_{p \in X} (q \approx p)$.

1) superstructure 2) concurrent

۲.۳ قضیه تیخونوف. حاصلضرب مجموعه‌های فشرده، فشرده است.

اثبات. فرض کنیم X_i فشرده باشد و $X = \prod_{i\in I} X_i$ و $q \in X^*$، پس $q(i) \in X_i^*$ و بنابراین $\bigvee_{a_i\in X_i}(q(i) \approx a_i)$، لذا $a : I \to X$ که $a(i) = a_i$ همان نقطه‌ای است که برایش داریم $q \approx a$.
اصل انتخاب در این اثبات و در اثبات قضیهٔ مربوط حاصل‌ضرب فضاهای هاسدورف به‌کار نرفته ولی mI که ضعیف‌تر از آن است در به‌دست دادن ساختار به‌کار رفته است.
گروه‌های توپولوژیکی را هم می‌توان تعریف کرد و وجود اندازهٔ هار خیلی آسانتر اثبات می‌شود. اولین قضیهٔ آنالیز که توسط ابزار غیر استاندارد به اثبات رسید، متعلق به برنشتاین و رابینسون است که وجود زیرفضاهای ناوردای غیربدیهی را برای اپراتورهای چندجمله‌ای فشرده ثابت می‌کند. البته انتگرال‌گیری نیز به این زبان بسیار ساده‌تر می‌شود.
نلسون در مقالهٔ IST (Internal Set Theory) که هر یک از حروف سه‌گانه نمایانگر یک اصل است، روشی اصولی برای کار کردن با آنالیز غیراستاندارد ارائه و کاربرد آن را در احتمال نشان می‌دهد. انتهای مقاله بسیار بسیار جالب است و نشان می‌دهد که متغیر تصادفی δ, ϵی احتمالی مفهومی غیر لازم است و اگر یک عدد صحیح بی‌نهایت بزرگ بگیریم، احتمال، همان معنای حالت متناهی را حفظ می‌کند.
مکتب استراسبورگ (در فرانسه) هم اصولی و هم سیمانتیک به آنالیز غیراستاندارد می‌پردازد و در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آورد. روبرت کتابی دارد به‌نام آنالیز غیر استاندارد [۴]، که کتابی است مقدماتی ولی بسیار آموزنده که آن هم با سه اصل IST کار می‌کند.
برای آشنایی بیشتر با آنالیز غیراستاندارد به مراجع مراجعه کنید.

مراجع

[1] Davis, M: *Applied nonstandard analysis*, Wiley, 1978.

[2] Hurd, A.E, Loeb, P.A.: *An introduction to nonstandard real analysis,* Academic Press, 1985.

[3] Mendelson, E: *Introduction to mathematical logic,* Wadsworth and Brooks, Third Edition, 1987.

[4] Robert, A: *Nonstandard analysis,* Wiley, 1988.

محمود بینای مطلق
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان
پست الکترونیک m-bina@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۹۹ تا ۱۱۷

اثبات قضیه در منطق‌های زمانی به کمک رایانه و کاربر

سید ابوالقاسم کلانتری ــ مجتبی آقایی

۱. مقدمه

هدف این مقالهٔ توصیفی، آشناکردن علاقه‌مندان با نمونه‌هایی از تلاش‌هایی است که در جهت استفاده از سیستم‌های منطقی برای ماشینی‌سازی اثبات در دست انجام است. در [۷] به دنبال الگوریتمی برای اثبات رشته‌های منطقی به کمک رایانه، اثباتگر قضیه‌ای[۱] ارائه شده و این ایده در [۲] با ارائهٔ اثبات با نقطه‌گذاری و سپس تعمیم آن به سیستم‌های منطق موجهات زمانی در[۵] دنبال شده است. به دلیل این که مطالعهٔ سیستم‌های مذکور برای منطق موجهات، سیستم‌های متناظر برای منطق گزاره‌ای را نیز پوشش می‌دهد، این مقاله بنابر مرجع [۵] اهداف زیر را دنبال می‌کند:

۱) الگوریتمی که با استفاده از ایدهٔ کاربر و ادامهٔ روند اثبات توسط رایانه اثباتی در سیستمی گنسنی[۲] ارائه دهد.

۲) الگوریتمی که با استفاده از ایده کاربر و ادامه اثبات با رایانه اثباتی متنی در سیستم استنتاج طبیعی ارائه دهد.

به منظور رسیدن به این اهداف ابتدا با معرفی سیستم گنسنی برای منطق موجه $S۴.۳$، تکنیک‌های اثبات به روش نقطه‌گذاری و روش نقطه و پرتاب[۳] در این منطق را ارائه می‌دهیم [۲]. در انتها با استفاده از زبان شبه طبیعی[۴]، روش تولید چنین اثبات‌های متنی با تلفیق روش نقطه‌گذاری در متن‌ها به کمک رایانه و کاربر ارائه می‌شود [۳].

---

1) Theorem prover 2) Context Gentzen style system 3) Point and Shoot
4) Pseudo-natural language

۲. اصول منطق‌های موجه و زمانی

زبان منطق‌های موجه، توسعه یافتهٔ زبان منطق گزاره‌ای است که با یک یا چند عملگر گزاره‌ای به‌نام عملگرهای موجه ساخته می‌شوند. این منطق‌ها همگی دارای اصلی پایه به‌نام K می‌باشند. همچنین دارای دو عملگر گزاره‌ای «$\Box$» و «$\Diamond$» به‌نام‌های «مربع» و «لوزی» هستند که مثلاً می‌توانند به‌صورت «لزوماً[1]» و «ممکن است[2]» تعبیر شوند. این دو عملگر در منطق‌های زمانی به‌معنی «همیشه» و «بالاخره» می‌باشند. بنابراین اگر A یک گزاره باشد در این صورت $\Box A$ یعنی «A همیشه درست است» و $\Diamond A$ یعنی «A بالاخره درست خواهد بود».
این منطق‌ها همچنین همگی قاعدهٔ لزوم[3] $\Box I$ ($\vdash A \implies \vdash \Box A$) و قاعدهٔ قیاس استثنایی[4] $(\mathrm{MP})(\frac{A \to B \quad A}{B})$ را به‌عنوان قواعد استنتاج دارا می‌باشند. از مهمترین این منطق‌ها منطق $KT۴$ به نام $S۴$ و منطق $KT۴.۳$ به نام $S۴.۳$ است. در اینجا اعداد و حروف معرف اصول زیرند:

$$K: \quad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$
$$T: \quad \Box A \to A$$
$$۴: \quad \Box A \to \Box\Box A$$
$$۳: \quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$$

۳. اثبات به روش نقطه‌گذاری

این روش را روی یک سیستم گنسنی که یکی از مهمترین سیستم‌های منطقی است در منطق زمانی $S۴.۳$ پیاده می‌کنیم. اساس کار در این قسمت سیستم گنسنی مرجع [۵] است. در زیر Γ مجموعه‌هایی مکرراز فرمول‌ها در زبان منطق موجهات است، یعنی تکرار فرمول در آن مهم است و $\Gamma \vdash A$ را رشته گوییم و می‌توانیم آنرا به معنای $\bigwedge \Gamma \to A$ در نظر بگیریم. در این روش ترم‌ها در رشته‌های هر قاعده به ترم‌های کوچکتر تجزیه می‌شوند. عبارتی که باید تجزیه شود در رشتهٔ نتیجهٔ قاعده قرار دارد و ممکن است در نتیجهٔ رشته یا در فرضیات آن باشد. همچنین زیرترم‌های حاصل از تجزیهٔ آن ترم دوباره در فرضیات مقدم ظاهر می‌شوند. برای روشن شدن موضوع آن را روی قاعدهٔ $R\wedge$ به کار می‌بریم. این قاعده به صورت زیر است:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود پس از تجزیهٔ $A \wedge B$، قسمت چپ فرمول یعنی A در رشتهٔ اول فرض، یعنی در $\Gamma \vdash A$، و قسمت راست فرمول یعنی B در رشتهٔ دوم فرض، یعنی در $\Gamma \vdash B$ قرار می‌گیرد.
حال روش نقطه‌گذاری را روی این قاعده به این صورت به کار می‌گیریم:

1) Necessarily 2) Possibly 3) Necessitation 4) Modus ponens

با فرض این که کاربر با موشواره روی زیر فرمولی از A یا روی زیر فرمولی از B در $A \wedge B$ کلیک کرده باشد (که آن را با کشیدن مربع به دور انتخاب مورد نظر نشان می‌دهیم) قاعدهٔ فوق به دو قاعدهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \wedge \boxed{\mathrm{B}}}$$

این روش برای تمام قواعد گزاره‌ای سیستم کلاسیک گنسنی به صورت زیر بیان شده است [۲]:

$$\wedge L_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, B, A \wedge B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \wedge B, \Gamma \vdash C} \qquad \wedge R_1 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \wedge B}$$

$$\wedge L_2 : \frac{A, \boxed{\mathrm{B}}, A \wedge B, \Gamma \vdash C}{A \wedge \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \wedge R_2 : \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \wedge \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\vee L_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, A \vee B, \Gamma \vdash C \qquad B, A \vee B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \vee B, \Gamma \vdash C} \qquad \vee R_1 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \vee B}$$

$$\vee L_2 : \frac{A, A \vee B, \Gamma \vdash C \qquad \boxed{\mathrm{B}}, A \vee B, \Gamma \vdash C}{A \vee \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \vee R_2 : \frac{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \vee \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\to L_1 : \frac{A \to B, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \qquad B, A \to B, \Gamma \vdash C}{\boxed{\mathrm{A}} \to B, \Gamma \vdash C} \qquad \to R_1 : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}} \to B}$$

$$\to L_2 : \frac{A \to B, \Gamma \vdash A \qquad \boxed{\mathrm{B}}, A \to B, \Gamma \vdash C}{A \to \boxed{\mathrm{B}}, \Gamma \vdash C} \qquad \to R_2 : \frac{A, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{B}}}{\Gamma \vdash A \to \boxed{\mathrm{B}}}$$

$$\neg L : \frac{\neg A, \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\neg \boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash \bot} \qquad \neg R : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \boxed{\mathrm{A}}}$$

همچنین برای قواعد موجه نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Box L : \frac{\boxed{\mathrm{A}}, \Box A, \Gamma \vdash C}{\Box \boxed{\mathrm{A}}, \Gamma \vdash C} \qquad \Box R : \frac{\Box \Gamma \vdash \boxed{\mathrm{A}}}{\Box \Gamma \vdash \Box \boxed{\mathrm{A}}}$$

$$\Diamond L : \begin{cases} \dfrac{A_1, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \Diamond C \ \ldots \ \Diamond A_1, ..., \boxed{A_i}, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \Diamond C \ \ldots \ \Diamond A_1, ..., A_n, \Box \Gamma \vdash \Diamond C}{\Diamond A_1, ..., \Diamond \boxed{A_i}, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \Diamond C} \\[2ex] \dfrac{A_1, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \bot \ \ldots \ \Diamond A_1, ..., \boxed{A_i}, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \bot \ \ldots \ \Diamond A_1, ..., A_n, \Box \Gamma \vdash \bot}{\Diamond A_1, ..., \Diamond \boxed{A_i}, ..., \Diamond A_n, \Box \Gamma \vdash \bot} \end{cases}$$

$$\Diamond R : \frac{\Gamma \vdash \boxed{C}}{\Gamma \vdash \Diamond\boxed{C}}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود فرضیات در قاعدهٔ $\Box R$ دارای پیشوند $\Box$ می‌باشند. لذا اگر فرضیاتی دارای پیشوند $\Box$ نبودند می‌توان آنها را به روش زیر با اعمال قاعدهٔ تضعیف[1] حذف کرد. خط زیر یک زیر فرمول به معنای انتخاب آن زیر فرمول توسط کاربر می‌باشد:

$$A, \Box B, C, \Box D \vdash \Box \underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \Box \underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \underline{E}$$

در نتیجه، این روند به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$A, \Box B, C, \Box D \vdash \Box \underline{E} \implies \Box B, \Box D \vdash \underline{E}$$

همچنین با توجه به این که فرمول سمت راست رشته در قاعدهٔ $\Diamond L$، $\Diamond C$ یا $\perp$ است، اگر فرمولی بدون پیشوند $\Diamond$ در سمت راست رشته قرار داشته باشد می‌توان آن را با اعمال قاعدهٔ $\perp R$ به $\perp$ تبدیل کرد. همچنین می‌توان فرضیات بدون پیشوند $\Box$ را با اعمال قاعدهٔ تضعیف حذف کرد. در نتیجه داریم:

$$A, \Diamond \underline{B}, C, \Box D \vdash E \implies \Diamond \underline{B}, \Box D \vdash E \implies \Diamond \underline{B}, \Box D \vdash \perp \implies B, \Box D \vdash \perp$$

این روند را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$A, \Diamond \underline{B}, C, \Box D \vdash E \implies B, \Box D \vdash \perp$$

با توجه به قواعد فوق این روش دارای دو خاصیت مهم زیر است:

۱) خاصیت خوش بنیادی[2]: فرمول‌های درون مربع در فرضیات مقدم، کوچکتر از فرمولی هستند که در نتیجه آمده است. در نتیجه روند به رو آمدن فرمول انتخاب شده پایان یافته[3] است.

۲) خاصیت یکتایی[4]: برای هر هدف و انتخاب حداکثر یک قاعدهٔ قابل اعمال وجود دارد. این خاصیت، قطعیت[5] را نتیجه می‌دهد.

منظور از رو آمدن زیر فرمول انتخابی این است که با به کار بردن قواعد، آنقدر فرمول‌ها را کوچک کنیم تا به زیر فرمول انتخابی برسیم.

بنابراین با داشتن یک انتخاب می‌توانیم الگوریتمی ارائه دهیم که یک سری قواعد را اجرا کند. در این الگوریتم هر مرحله را با($\Longrightarrow$) نشان می‌دهیم که بیانگر کاربردی از قواعد فوق است. همچنین

1) weaken 2) Well foundeness 3) terminated 4) Uniqueness 5) determinism

برای ساده‌تر شدن روند اثبات، نام قاعده را از متن حذف می‌کنیم. خطی که بالای آخرین مرحله کشیده شود به معنی کامل شدن شاخهٔ اثبات با استفاده از یک اصل یا یک قضیهٔ شناخته شده است و نیز خطی که زیر ترم مورد نظر کشیده می‌شود یک انتخاب را نشان می‌دهد.

نکته دیگر این که بنابر هم‌ارزی‌های زیر در $S4.3$ قاعده‌ای به نام نقطه و پرتاب را بیان می‌کنیم:

(۱) $\neg\Diamond A$ هم‌ارز است با $\Box\neg A$.

(۲) $\neg\Box A$ هم‌ارز است با $\Diamond\neg A$.

این قاعده در اثبات به روش نقطه‌گذاری زمانی به کار می‌آید که کاربر با استفاده از هم ارزی‌های فوق بخواهد پیشوند $\neg\Diamond$ را به $\Box\neg$ و $\neg\Box$ را به $\Diamond\neg$ یا برعکس تبدیل کند. برای این منظور کاربر فرمول مذکور را با موس انتخاب می‌کند و هم زمان با فشاردادن یک کلید (مثلاً کلید $SHIFT$) از صفحهٔ کلید رایانه اقدام به تبدیل پیشوندهای مذکور می‌کند. این عمل را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{\neg\Diamond A}^{\,s}, \Gamma \vdash C \implies \Box\neg A, \Gamma \vdash C$$
$$\boxed{\neg\Box A}^{\,s}, \Gamma \vdash C \implies \Diamond\neg A, \Gamma \vdash C$$

برای به کار بردن قاعدهٔ طرد شق ثالث در الگوریتم نقطه‌گذاری به صورت زیر عمل می‌کنیم:
۱) کاربر با انتخاب فرمول A در رشته و فشار دادن همزمان کلیدی از صفحه کلید(مثلاً کلید Alt) فرمول $A \vee \neg A$ را به فرضیات اضافه می‌کند.
۲) رایانه بلافاصله قاعدهٔ $\vee L$ را اعمال می‌کند و منتظر انتخاب کاربر در دو زیر رشتهٔ حاصل می‌شود.

۱.۳ مثال. رشتهٔ $\neg\Diamond\neg A \vdash \Box A$ با این روش به صورت زیر اثبات می‌شود:

ابتدا کاربر روی $\Box A$ کلیک کرده، با فشاردادن همزمان کلید «ALT» فرمول $\Box A \vee \neg\Box A$ را به فرضیات اضافه می‌کند سپس رایانه با اعمال قاعدهٔ $\vee L$ آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه می‌کند:

$$\neg\Diamond\neg A \vdash \underline{\Box A}^{a} \implies \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Box A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A} \\ \\ \neg\Box A, \neg\Box A \vee \Box A, \neg\Diamond\neg A \vdash \Box A \end{array} \right.$$

همان طور که ملاحظه می‌شود در اولین رشته رایانه بلافاصله با رسیدن به اصل، درخت اثبات را متوقف می‌کند ولی در دومین رشته منتظر انتخاب بعدی کاربر می‌ماند. بنابراین کاربر در رشتهٔ دوم روی فرمول $\neg\Box A$ کلیک کرده، همزمان کلید«$SHIFT$» را فشار می‌دهد. رایانه نیز اثبات را در آن

شاخه به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\underline{\neg\Box A}^{s}, \neg\Box A\vee\Box A, \neg\Diamond\neg A\vdash\Box A \implies \Diamond\neg A, \neg\Box A\vee\Box A, \neg\Diamond\neg A\vdash\Box A$$

سپس کاربر با انتخاب فرمول $\Diamond\neg A$ در فرمول $\neg\Diamond\neg A$ نقطهٔ جدید شروع را مشخص می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر به پایان می‌رساند:

$$\Diamond\neg A, \neg\Box A\vee\Box A, \neg\underline{\Diamond\neg A}\vdash\Box A \implies \overline{\Diamond\neg A, \neg\Box A\vee\Box A, \neg\Diamond\neg A\vdash\Diamond\neg A}$$

همانطور که در مثال فوق دیدیم هنگام به کار بردن قاعدهٔ $\neg L$ اگر سمت راست رشته فرمول $\perp$ قرار نداشت می‌توانیم با به کار بردن قاعدهٔ $\perp R$ آن را به صورت زیر تبدیل کنیم:

$$\Gamma, \neg\underline{A}\vdash C \implies \Gamma, \neg\underline{A}\vdash\perp \implies \Gamma\vdash A$$

که در اینجا آن را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\Gamma, \neg\underline{A}\vdash C \implies \Gamma\vdash A$$

نهایتاً برای تکمیل الگوریتم نیاز داریم که قاعدهٔ تضعیف را به قواعد روش نقطه‌گذاری اضافه کنیم. به خصوص هنگامی که از قاعدهٔ $\Diamond L$ استفاده می‌کنیم برای حذف فرضیات بدون پیشوند $\Box$ نیاز داریم که از این قاعده استفاده کنیم. برای این منظور کاربر می‌تواند با موس فرمول A را انتخاب کند و همزمان یک کلید (مثلاً کلید $DELETE$) را فشار داده، آن فرمول را حذف کند. این مراحل را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\mathrm{A}}^{\,d}, \Gamma\vdash C \implies \Gamma\vdash C$$

نکتهٔ دیگر این که قاعدهٔ $\perp R$ به طور ضمنی در قواعد $\neg R$ و $\Diamond L$ ادغام شده است. اما برای تکمیل الگوریتم می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد:
کاربر با موس فرمول C را در طرف چپ رشته انتخاب می‌کند و همزمان یک کلید (مثلاً کلید R) را فشار می‌دهد در نتیجه آن فرمول حذف شده و به جای آن فرمول $\perp$ قرار می‌گیرد. این مراحل را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A, \Gamma\vdash\boxed{\mathrm{C}}^{\,r} \implies \Gamma\vdash\perp$$

قاعدهٔ برش نیز با اضافه‌کردن رشتهٔ تجزیه شونده به فرضیات مقدم قواعد چپ، در این قواعد ادغام شده است. این قاعده به حالتی که فرض مقدم چپ آن اصل $excl-mid$ می‌باشد محدود شده است.

۲.۳ مثال. $\vdash\Diamond(A\vee B)\to\Diamond A\vee\Diamond B$
اثبات: ابتدا کاربر روی فرمول $\Diamond(A\vee B)$ کلیک می‌کند سپس رایانه اثبات را به صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$\vdash\underline{\Diamond(A\vee B)}\to\Diamond A\vee\Diamond B \implies \Diamond(A\vee B)\vdash\Diamond A\vee\Diamond B$$

سپس با کلیک کردن روی فرمول $\Diamond A$ و فشار دادن همزمان کلید «ALT» فرمول $\Diamond A \vee \neg\Diamond A$ را به فرضیات اضافه می‌کند. رایانه نیز بلافاصله پس از اضافه کردن این فرمول به فرضیات، قاعدهٔ $\vee L$ را به صورت زیر به کار می‌برد:

$$\Diamond(A \vee B) \vdash \underline{\Diamond A}^{a} \vee \Diamond B \implies \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$$
$$\implies \begin{cases} \Diamond A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \Diamond B \\ \neg\Diamond A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \Diamond B \end{cases}$$

حال کاربر ابتدا در طرف راست اولین رشته، روی زیر فرمول $\Diamond A$ کلیک می‌کند. سپس در دومین رشته، روی فرمول $\neg\Diamond A$ کلیک کرده، همزمان کلید «$SHIFT$» را فشار می‌دهد. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\begin{cases} \Diamond A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \underline{\Diamond A} \vee \Diamond B \\ \underline{\neg\Diamond A}^{s}, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \Diamond B \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} \overline{\Diamond A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A} \\ \Box\neg A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \Diamond B \end{cases}$$

حال کاربر در رشتهٔ دوم، روی زیر فرمول B در فرمول $\Diamond A \vee \Diamond B$ کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را در آن شاخه از درخت اثبات به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Box\neg A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond A \vee \underline{\Diamond B} \implies \Box\neg A, \Diamond(A \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond B$$

سپس کاربر روی زیر فرمول A در فرمول $\Diamond(A \vee B)$ کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Box\neg A, \Diamond(\underline{A} \vee B), \Diamond A \vee \neg\Diamond A \vdash \Diamond B \implies \Box\neg A, \underline{A} \vee B \vdash \Diamond B$$
$$\implies \begin{cases} A, \Box\neg A, A \vee B \vdash \Diamond B \\ B, \Box\neg A, A \vee B \vdash \Diamond B \end{cases}$$

در نهایت کاربر ابتدا در اولین رشته روی زیر فرمول A در فرمول $\Box\neg A$ و در دومین رشته روی زیر فرمول B در فرمول $\Diamond B$ کلیک می‌کند. رایانه نیز به صورت زیر اثبات را به پایان می‌رساند:

$$\begin{cases} A, \Box\neg\underline{A}, A \vee B \vdash \Diamond B \\ B, \Box\neg A, A \vee B \vdash \Diamond\underline{B} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} A, \neg \underline{A}, \Box\neg A, A \vee B \vdash \Diamond B \implies \overline{A, \neg A, \Box\neg A, A \vee B \vdash A} \\ \overline{B, \Box\neg A, A \vee B \vdash B} \end{cases}$$

۴. ترجمهٔ اثبات از استنتاج طبیعی به زبان شبه طبیعی

یک روش نشان دادن اثبات رشته‌ها ارائهٔ اثبات با درخت اثبات می‌باشد. تجربه نشان داده است که با افزایش طول درخت اثبات، درخت‌های اثبات قابل نشان دادن نیستند. زیرا هم از نظر پهنا و هم از نظر طول افزایش می‌یابند. در مرجع [۳] روشی برای بیان اثبات‌ها ارائه شده است. این روش، اثبات‌ها را در استنتاج طبیعی به متن‌هایی ترجمه می‌کند که آن را زبان شبه طبیعی می‌نامیم. به عنوان نمونه این زبان، قواعد سیستم استنتاج طبیعی N برای $S4.3$ را که در سمت چپ جدول زیر ارائه شده‌است به صورت زیر به زبان شبه طبیعی ترجمه می‌کند:

$$excl - mid \ : \qquad A \vee \neg A$$

با اضافه کردن آن به فرضیات می‌توان آن را به صورت زیر ترجمه کرد:

$$Using\ Excluded\ Middle,\ A \vee \neg A$$

$$\vee E \ : \ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ C\end{matrix}}{C} \implies \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ A \vee B \end{bmatrix}$$

$So\ we\ have\ two\ cases:$

- $Suppose \quad A \quad (i)$
  $\begin{bmatrix} \Pi_2 \\ C \end{bmatrix}$
- $Suppose \quad B \quad (j)$
  $\begin{bmatrix} \Pi_3 \\ C \end{bmatrix}$

$We\ have\ \ C\ \ in\ both\ cases\ (i)\ and\ (j)$

$$\Box I \ : \ \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Box B_1\end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix}\Pi_n \\ \Box B_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi \\ A\end{matrix}}{\Box A} \implies$$

اگر $n = 0$:

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix}$$

$$So \quad \Box A$$

اگر $n = ۱$:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \begin{bmatrix} \Pi_۱ \\ \Box B_۱ \end{bmatrix} \\ In \ \ the\ context \ : \ \Box B_۱ \ \ (h_۱) \\ \qquad\qquad \begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix} \\ So\ we\ deduce \ \ \Box A \end{array}$$

اگر $n > ۱$:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \begin{bmatrix} \Pi_۱ \\ \Box B_۱ \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad \begin{bmatrix} \Pi_n \\ \Box B_n \end{bmatrix} \\ Altogether\ we\ have\ the\ context \ : \\ \qquad\qquad \Box B_۱ \ \ (h_۱) \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad \Box B_n \ \ (h_m) \\ Where \\ \qquad\qquad \begin{bmatrix} \Pi \\ A \end{bmatrix} \\ So\ we\ deduce \ \ \Box A \end{array}$$

بقیهٔ قواعد نیز به همین صورت ترجمه می‌شوند [۵].
توضیح این که اولاً قرار گرفتن اثبات‌ها در کروشه به معنی تکمیل اثبات به روش بازگشتی است. ثانیاً هر کجا به اثباتی تک رأسی رسیدیم عبارت "By (i) We have A" را به جای اثبات درون کروشه قرار می‌دهیم، که (i) اولین جملهٔ رو به بالاست که شماره‌گذاری شده است و در آن فرمول A وجود دارد. ثالثاً در قاعدهٔ $\Diamond E$ تنها ترجمهٔ آن با فرض $\Diamond C$ نوشته شده است. در صورت وجود $\perp$ می‌بایستی در کروشه‌ها به جای $\Diamond C$ ، $\perp$ و در جملات به جای $\Diamond C$ ، کلمه «Contradiction» را قرار دهیم.

۵. روش نقطه‌گذاری در متن

اکنون می‌خواهیم روشی را بیان کنیم که به طور هم زمان با کلیک کردن کاربر در متن اثبات، رایانه متن اثبات را به زبان طبیعی تولید کند. برای این منظور با استفاده از یک تابع $\hat{N}$ اثبات گنسنی را به یک اثبات استنتاج طبیعی ترجمه کرده و در نهایت رایانه با استفاده از ترجمهٔ قواعد سیستم

استنتاج طبیعی به زبان شبه طبیعی آن‌ها را به متن ترجمه و سپس متن جدید را جایگزین متن قبلی می‌کند.

همچنین می‌توان برای کمک به کاربر طوری برنامه‌ریزی کرد که رایانه برای انتخاب بهتر، رشته‌های بالای درخت اثبات را در اختیار کاربر قرار دهد. این مطلب را با ذکر یک مثال بیان می‌کنیم. در مثال زیر که همان اصل ۴ می‌باشد، انتخاب‌های کاربر را با قراردادن فرمول مذکور در مربع نشان داده‌ایم. منظور از N—اثبات، درخت اثبات در سیستم استنتاج طبیعی و منظور از M—اثبات درخت اثبات در سیستم گنسنی است.

۱.۵ مثال. می‌خواهیم با رایانه ترجمه‌ای، متنی از درخت اثبات رشتهٔ

$$\vdash \boxed{\Box(\Box A \to B)}^{\,a} \vee \Box(\Box B \to A)$$

ارائه دهیم. برای این منظور ابتدا کاربر فرمول $\Box(\Box A \to B)$ را انتخاب می‌کند و هم زمان کلید«ALT» را فشار می‌دهد. بنابراین رایانه فرمول $\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$ را به فرضیات اضافه و سپس رشتهٔ زیر را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) \qquad (۱)$$

سپس بلافاصله با اعمال قاعدهٔ $\vee L$ آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه و آنها را در حافظه ذخیره می‌کند.

$$(۱) \Longrightarrow \begin{cases} \Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۲) \\ \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۳) \end{cases}$$

اکنون با در نظر گرفتن این که $\Sigma_۱$، $\Sigma_۲$ و $\Sigma_۳$ به ترتیب اثبات‌هایی گنسنی برای رشته‌های (۱)، (۲) و (۳) هستند، با به کارگرفتن تابع $\hat{N}$ روی رشتهٔ (۱) یک N—اثبات برای فرمول زیر می‌سازد:

$$\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$$

این N—اثبات به صورت زیر است:

$$\hat{N}(\Sigma_۱) = \frac{\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B) \qquad \hat{N}(\Sigma_۲) \qquad \hat{N}(\Sigma_۳)}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee E$$

سپس قاعدهٔ فوق را به متن ترجمه کرده، متن زیر را بر روی صفحهٔ مونیتور نمایش می‌دهد:

Using Excluded Middle, $\Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

So we have two cases :

- *Suppose* $\Box(\Box A \to B)$ (۱)

  Prove ۱ : $\boxed{\Box(\Box A \to B)} \vee \Box(\Box B \to A)$
- *Suppose* $\neg\Box(\Box A \to B)$ (۲)

  Prove ۲ : $\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

$We\ \ have\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

اکنون همان طور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر فرمول $\Box(\Box A \to B)$ را در«$Prove$ ۱» فرض اول انتخاب می‌کند سپس رایانه این نشانه را بلافاصله به صورت زیر به رشتهٔ (۲) انتقال داده، اثبات را در آن شاخه دنبال و در نهایت رشتهٔ نهایی را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\Box(\Box A \to B) \vdash \underline{\Box(\Box A \to B)} \vee \Box(\Box B \to A) \implies \overline{\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B)}$$

سپس با تشخیص این که به یک اصل در سیستم گنسنی رسیده است، درخت اثبات را در این شاخه مسدود و آن را با استفاده از تابع $\hat{N}$ به N—اثبات زیر تبدیل می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_۳) = \frac{\Box(\Box A \to B)}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee I$$

و به طور بازگشتی N—اثبات فوق را به متن ترجمه می‌کند و به صورت زیر نشان می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box A \to B)\quad (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B)$

  $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

- $Suppose\quad \neg\Box(\Box A \to B)\quad (۲)$

  $Prove\ ۲:\ \Box(\Box A \to B) \vee \boxed{\Box(\Box B \to A)}^{\,a}$

$We\ have\quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

حال کاربر همان طور که در متن فوق دیده می‌شود روی فرمول $\Box(\Box A \to B)$ در«$Prove$ ۲» کلیک می‌کند و هم زمان کلید «ALT» را فشار می‌دهد. سپس رایانه آن را بلافاصله به صورت زیر به رشتهٔ (۳) انتقال داده، اثبات را در آن شاخه دنبال و در نهایت رشته‌های نهایی را در حافظه ذخیره می‌کند:

$$\neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \boxed{\Box(\Box B \to A)}^{\,a} \implies$$
$$\Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$$
$$\implies \begin{cases} \Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۴) \\ \neg\Box(\Box B \to A), \neg\Box(\Box A \to B) \vdash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) & (۵) \end{cases}$$

سپس مشابه مرحلهٔ قبل با مسدودکردن شاخهٔ درخت اثبات رشتهٔ (۴)، نتیجه را به صورت متن زیر

نمایش می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \neg\Box(\Box A \rightarrow B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\quad \Box(\Box A \rightarrow B)\quad (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\quad \Box(\Box A \rightarrow B)$

  $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)$

- $Suppose\quad \boxed{\neg\Box(\Box A \rightarrow B)}^{s}\quad (۲)$

  $Using\ Excluded\ Middle,\quad \Box(\Box B \rightarrow A) \vee \neg\Box(\Box B \rightarrow A)$

  $So\ we\ have\ two\ cases\ :$

  - $Suppose\quad \Box(\Box B \rightarrow A)\quad (۳)$

    $By\ (۳)\ we\ have\quad \Box(\Box B \rightarrow A)$

    $Obviously\ we\ have\quad \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)$

  - $Suppose\quad \boxed{\neg\Box(\Box B \rightarrow A)}^{s}\quad (۴)$

    $Prove\ ۳:\ \boxed{\Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)}^{r}$

  $We\ have\quad \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)\ \ in\ both\ cases\ (۳)\ and\ (۴)$

$We\ have\quad \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)\ \ in\ both\ cases\ (۱)\ and\ (۲)$

حال همان طور که در متن فوق نشان داده شده است کاربر ابتدا روی فرمول $\neg\Box(\Box A \rightarrow B)$ کلیک می‌کند و هم زمان کلید «SHIFT» را فشار می‌دهد. سپس روی فرمول $\neg\Box(\Box B \rightarrow A)$ کلیک و هم زمان کلید«SHIFT» را فشار می‌دهد. رایانه نیز به ترتیب با استفاده از تبدیلات در $S۴, ۳$ بلافاصله رشتهٔ (۵) را به صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$\Diamond\neg(\Box B \rightarrow A)\ ,\ \Diamond\neg(\Box A \rightarrow B) \vdash \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A) \qquad (٦)$$

سپس کاربر همان طور که در متن فوق نشان داده‌ایم روی فرمول $\Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)$ کلیک می‌کند و هم زمان کلید «R» را فشار می‌دهد. رایانه بلافاصله قاعدهٔ $\bot$R را روی رشتهٔ (٦) اعمال می‌کند و با توجه به این که تنها در دو قاعدهٔ $\neg$L و $\Diamond$L چنین رشته‌هایی به وجود می‌آیند، بلافاصله قاعدهٔ $\Diamond$L را اعمال و آن را به دو رشتهٔ زیر تجزیه می‌کند:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \neg(\Box B \rightarrow A)\ ,\ \Diamond\neg(\Box A \rightarrow B) \vdash \bot \qquad (۷) \\ \Diamond\neg(\Box B \rightarrow A)\ \ ,\ \ \neg(\Box A \rightarrow B) \vdash \bot \qquad (۸) \end{cases}$$

سپس مشابه حالات قبل ترجمه M—اثبات فوق را به N—اثبات متناظر با آن به صورت زیر انجام

می‌دهد:

$$\hat{N}(\Sigma_{۲}) = \cfrac{\Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A) \quad \cfrac{\Box(\Box B \to A)}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee I \quad \hat{N}(\Sigma_{۴})}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \vee E$$

$$\hat{N}(\Sigma_{۴}) = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\Box(\Box B \to A)}{\Diamond\neg(\Box B \to A)} \quad \cfrac{\neg\Box(\Box A \to B)}{\Diamond\neg(\Box A \to B)} \quad \hat{N}(\Sigma_{۵}) \quad \hat{N}(\Sigma_{۶})}{\bot} \Diamond E}{\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)} \bot E$$

(که در آن $\Sigma_{۴}$ ، $\Sigma_{۵}$ و $\Sigma_{۶}$ به ترتیب اثبات‌هایی گنسنی برای رشته‌های (۵)، (۷) و (۸) می‌باشند.)
اکنون رایانه متن زیر را جایگزین «$Prove$ ۳» می‌کند:

By (۲) $we\ have$ $\neg\Box(\Box A \to B), So$ $\Diamond\neg(\Box A \to B)$

By (۳) $we\ have$ $\neg\Box(\Box B \to A), So$ $\Diamond\neg(\Box B \to A)$

$So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases$:

- $Assume$ $\neg(\Box B \to \boxed{A})$ (۵) and $\Diamond\neg(\Box A \to B)$ (۶)

  $Prove$ ۴ : $a\ contradiction$
- $Assume$ $\neg(\Box A \to B)$ (۷) and $\Diamond\neg(\Box B \to A)$ (۸)

  $Prove$ ۵ : $a\ contradiction$

$In\ all\ the\ possible\ cases$, $we\ have\ a\ contradiction,\ so\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert$ $\Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$

حال نیز همانطور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (۵) روی فرمول A کلیک می‌کند. رایانه نیز آن را بلافاصله به رشتهٔ (۷) انتقال داده اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\neg(\Box B \to \underline{A})\ ,\ \Diamond\neg(\Box A \to B) \vdash \bot \Longrightarrow \Diamond\neg(\Box A \to B) \vdash \Box B \to \underline{A} \quad (۹)$$

$$\Longrightarrow \Diamond\neg(\Box A \to B)\ ,\ \Box B \vdash A \quad (۱۰)$$

سپس آن را به صورت N—اثبات زیر ترجمه می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_{۵}) = \cfrac{\cfrac{\hat{N}(\Sigma_{۷})}{\Box B \to A} \to I \qquad \neg(\Box B \to A)}{\bot} \neg E$$

که در آن $\Sigma_{۷}$ اثباتی برای رشتهٔ (۱۰) است. اکنون رایانه متن زیر را جایگزین متن قبلی می‌کند:

By (۲) $we\ have$ $\neg\Box(\Box A \to B), So\ \Diamond\neg(\Box A \to B)$

$By\ (۳)\ we\ have\quad \neg\Box(\Box B \to A), So\ \Diamond\neg(\Box B \to A)$

$So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases\ :$

- $Assume\ \ \neg(\Box B \to A)\ \ (۵)\ \ and\ \Diamond\neg(\Box A \to \boxed{B}\,)\ \ (٦)$

  $Assume\ \ \Box B\ \ (۹)$

  $Prove\ ٦\ :\ A$

  $We\ have\ proved\ \ \Box B \to A$

  $By\ (۵)\ we\ have\ \ \neg(\Box B \to A)$

  $We\ have\ a\ contradiction$

- $Assume\ \ \neg(\Box A \to B)\ \ (۷)\ \ and\ \ \Diamond\neg(\Box B \to A)\ \ (۸)$

  $Prove\ ۵\ :\ a\ contradiction$

$In\ all\ the\ possible\ cases,\ we\ have\ a\ contradiction,\ so\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$

اکنون همانطور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (٦) روی فرمول B کلیک می‌کند سپس رایانه با انتقال آن به رشتهٔ (۱۰) اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهد:

$$\Diamond\neg(\Box A \to \underline{B})\ ,\ \Box B \vdash A \Longrightarrow \Diamond\neg(\Box A \to \underline{B})\ ,\ \Box B \vdash \bot\quad (۱۱)$$

$$\Longrightarrow \neg(\Box A \to \underline{B}), \Box B \vdash \bot\ \ (۱۲) \Longrightarrow\ \Box B \vdash \Box A \to \underline{B}\quad (۱۳)$$

$$\Longrightarrow\ \Box A\ ,\ \Box B \vdash B\ \ (۱۴)$$

سپس ترجمهٔ N—اثبات زیر را انجام می‌دهد:

$$\hat{N}(\Sigma_۷) = \cfrac{\cfrac{\Diamond\neg(\Box A \to B) \qquad \Box B \qquad \cfrac{\cfrac{\hat{N}(\Sigma_۸)}{\Box A \to B}\to I \qquad \neg(\Box A \to B)}{\bot}\neg E}{\bot}\Diamond E}{A}\bot E$$

که در آن $\Sigma_۸$ اثباتی برای رشتهٔ (۱۴) است. حال رایانه متن زیر را جایگزین «$Prove٦$» می‌کند:

$By\ (۹)\ we\ have\ \ \Box B$

$In\ the\ context\ :\ \ \Box\boxed{B}\ \ (۱۰)$

$\quad By\ (٦)\ we\ have\ \ \Diamond\neg(\Box A \to B)$

$If\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)\ \ (۱۱)$

$\quad Assume\ \ \Box A\ \ (۱۲)$

$\qquad Prove\ ۷\ :\ B$

$We\ have\ proved\ \ \Box A \to B$

$By\ (۱۱)\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)$

$We\ have\ a\ contradiction$

$So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ A$

در نهایت همان طور که در متن فوق دیده می‌شود کاربر در فرض (۱۰) روی فرمول B کلیک می‌کند. رایانه نیز اثبات را به صورت زیر را به پایان می‌رساند:

$$\Box A\ ,\ \Box\underline{B} \vdash B \implies \overline{\Box A, \frac{\Box B}{B} \vdash B} \qquad (۱۵)$$

سپس آن را به N—اثبات زیر ترجمه می‌کند:

$$\hat{N}(\Sigma_۸) = \frac{\Box B}{B}\Box E$$

و متن زیر را جایگزین متن فوق می‌کند:

$By\ (۹)\ we\ have\ \ \Box B$

$In\ the\ context\ :\ \ \Box B\ \ (۱۰)$

$By\ (٦)\ we\ have\ \ \Diamond\neg(\Box A \to B)$

$If\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)\ \ (۱۱)$

$Assume\ \ \Box A\ \ (۱۲)$

$By\ (۱۰)\ we\ have\ \ \Box B$

$In\ particular\ \ B$

$We\ have\ proved\ \ \Box A \to B$

$By\ (۱۱)\ we\ have\ \ \neg(\Box A \to B)$

$We\ have\ a\ contradiction$

$So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

$So\ we\ can\ assert\ \ A$

در نهایت با طی کردن همین مراحل برای «$Prove۵$» رایانه متن زیر را نشان می‌دهد:

$Using\ Excluded\ Middle,\ \ \Box(\Box A \to B) \vee \neg\Box(\Box A \to B)$

$So\ we\ have\ two\ cases\ :$

- $Suppose\ \ \Box(\Box A \to B)\ \ (۱)$

  $By\ (۱)\ we\ have\ \ \Box(\Box A \to B)$

$Obviously\ we\ have \quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

- $Suppose \quad \neg\Box(\Box A \to B)$ (۲)

  $Using\ Excluded\ Middle, \quad \Box(\Box B \to A) \vee \neg\Box(\Box B \to A)$

  $So\ we\ have\ two\ cases\ :$

  - $Suppose \quad \Box(\Box B \to A)$ (۳)

    By (۳) $we\ have \quad \Box(\Box B \to A)$

    $Obviously\ we\ have \quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

  - $Suppose \quad \neg\Box(\Box B \to A)$ (۴)

    By (۲) $we\ have \quad \neg\Box(\Box A \to B), So \quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$

    By (۳) $we\ have \quad \neg\Box(\Box B \to A), So \quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$

    $So\ we\ have\ the\ defferent\ Cases\ :$

    - $Assume\ \neg(\Box B \to A)$ (۵) $and \quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$ (۶)

      $Assume\ \Box B$ (۹)

      By (۹) $we\ have \quad \Box B$

      $In\ the\ context\ : \quad \Box B$ (۱۰)

      By (۶) $we\ have \quad \Diamond\neg(\Box A \to B)$

      $If\ we\ have \quad \neg(\Box A \to B)$ (۱۱)

      $Assume\ \Box A$ (۱۲)

      By (۱۰) $we\ have \quad \Box B$

      $In\ particular\ \ B$

      $We\ have\ proved \quad \Box A \to B$

      By (۱۱) $we\ have \quad \neg(\Box A \to B)$

      $We\ have\ a\ contradiction$

      $So\ we\ deduce\ a\ contradiction$

      $So\ we\ can\ assert\ \ A$

      $We\ have\ proved \quad \Box B \to A$

      By (۵) $we\ have \quad \neg(\Box B \to A)$

      $We\ have\ a\ contradiction$

    - $Assume\ \neg(\Box A \to B)$ (۷) $and \quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$ (۸)

      $Assume\ \Box A$ (۱۳)

      By (۱۳) $we\ have \quad \Box A$

      $In\ the\ context\ : \quad \Box A$ (۱۴)

      By (۸) $we\ have \quad \Diamond\neg(\Box B \to A)$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{If we have} \quad \neg(\Box B \to A) \quad (۱۵) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Assume} \quad \Box B \quad (۱۶) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{By } (۱۴) \textit{ we have} \quad \Box A \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{In particular} \quad A \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{We have proved} \quad \Box B \to A \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{By } (۱۵) \textit{ we have} \quad \neg(\Box B \to A) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{We have a contradiction} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{So we deduce a contradiction} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{So we can assert} \quad B \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{We have proved} \quad \Box A \to B \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{By } (۷) \textit{ we have} \quad \neg(\Box A \to B) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{We have a contradiction} \\
\qquad\qquad\qquad \textit{In all the passible cases, we have a contradiction, so contradiction} \\
\qquad\qquad\qquad \textit{So we can assert} \quad \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A) \\
\qquad \textit{We have} \quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) \quad \textit{in both cases } (۳) \textit{ and } (۴) \\
\textit{We have} \quad \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A) \quad \textit{in both cases } (۱) \textit{ and } (۲)
\end{array}
$$

۶. نتیجه

سیستمی که طراحی شده از نظر ارتباط با کاربر بسیار ساده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) فرایند اثبات به صورت متن‌های اصلاح شدهٔ انگلیسی نمایش داده می‌شود.

(۲) می‌توان به سادگی از موشواره برای انتخاب فرمول در متن، برای اثبات استفاده کرد.

آنچه که در این مقاله معرفی کردیم، ایجاد نوعی اثباتگرِ قضیه است که با استفاده از قوانین شناخته شده، اثباتی هدفگرا برای رشته‌های منطق زمانی $S۴.۳$ ارائه می‌دهد. بنابراین به راحتی می‌توان نرم‌افزاری با این سیستم طراحی کرد.

البته روش‌های مشابه با آنچه در این مقاله آمده قبلاً انجام شده است. مثلاً باسین[1] اثباتگر قضیه ایزابل[2] مرجع [۱۲] را در مقالهٔ [۱] به کار برده‌اند. سیستمی که در این مقاله ارائه شده، شامل بسیاری از منطق‌های مشابه $S۴.۳$ می‌باشد. اثباتگر قضیهٔ ایزابل شامل یک زبان مشخص $\lambda prolog$ است که در منطق‌های مرتبهٔ و همکارانش بالا اعمال می‌شود. با مراجعه به این مرجع مشاهده می‌شود که تکنیک‌های اثبات با نقطه‌گذاری و نقطه و پرتاب را که در این مقاله به آن اشاره شد می‌توان به راحتی با این نوع سیستم‌ها تطبیق داد.

1) Basin 2) Isabelle

البته این سیستم هنوز مراحل اولیهٔ خود را طی می‌کند و هنوز از بازبینی الگوریتم‌ها فاصله دارد. بنابراین این سیستم فقط می‌تواند برای اثبات خواص زمانی ساده به کار رود و به سادگی به عنوان یک ابزار ایده‌آل برای یادگیری و آزمایش با منطق‌های زمانی مورد استفاده قرار گیرد. پس برای مسائل واقع‌بینانه‌تر و الگوریتم‌های بزرگ یک گام لازم، معرفی برخی یادداشت‌ها در این سیستم است که رایانه بتواند با استفاده از آن اثبات‌ها را بهتر بیان کند. همچنین اضافه‌کردن برنامه‌های خطایاب[1] کاملاً خودکار، گام دیگری است که می‌توان برای تکمیل این نرم‌افزار برداشت. البته مانا[2] و همکارانش در اثباتگر زمانی استانفورد[3] (STeP) در این زمینه اقداماتی انجام داده‌اند [۱۰].

مراجع

[1] Basin, D. Matthews, S. Vigano, L. A modular presentation of modal logics in a logical framework, *proceedings of the Isabelle Users Workshop*, (1995).

[2] Bertot, Y. Kahn, G. Thery, L. Proof by pointing, *Theoretical Aspects of Computer Software*, Springer-Verlag LNCS, 789 (1994) 141-160.

[3] Coscoy, Y. Kahn, G. Thery, L. Extracting text from proofs, Typed Lambda calculus and Applications, Springer-Verlag LNCS, 902 (1995) 109-123.

[4] Felty, A. Implementing tactics and tacticals in a higher-order logic programming larg uage, J. *Automated Reasoning*, 11(1) (1993) 48-81.

[5] Felty, A. Thery, L. Interactive theorem proving with temporal logic, *Symbolic Computation*, 23 (1997) 367-397.

[6] Felty, A. Hagre, G. Explaining modal logic proofs, *Proc.of the IEEE International Conf.on Systems.Man.and Cybernetics*, (1988).

[7] Felty, A. Specifying and implementing theorem provers in a higher-order logic Programming language, PhD Thesis, University of Pennsylvania, (1989).

[8] Gore, R. Cut-free tableau and sequent systems for propositional normal modal logics, PhD Thesis, University of Camberidge, (1992).

[9] Gore, R. Tableau methods for modal and temporal logics, *Technical Report TR-ARP-15-95*, (1995).

1) Checkers 2) Manna 3) Stanford

[10] Manna, Z. et al, STeP: The Stanford temporal prover, *Technical Report STAN-CS-TR-94-1518*, (1994).

[11] Manna, Z. Pnueli, A. *The temporal logic of reactive and concurrent systems, Specification* , Springer-Verlag, (1992).

[12] Paulson, L. C. Isabelle: *A generic theorem prover*, Springer-Verlag LNCS, 828 (1994).

[13] Prawit, D. *Natural deducation*, Almqvist and Wiksell, Uppsala,Sweden, (1995).

[14] Szabo, M. E., *The collected papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, (1969).

مجتبی آقایی
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان
پست الکترونیک aghaei@cc.iut.ac.ir
سید ابوالقاسم کلانتری
دانشکده ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۵ (پاییز ۱۳۸۴) صص. ۱۱۹ تا ۱۲۴

زندگینامهٔ گودل

کورت گودل[۱] متولد ۲۸ آوریل ۱۹۰۶ در برنو جمهوری چک بود. پدرش رودولف گودل[۲] از اهالی وین بود. او با این که تحصیلات دانشگاهی نداشت، توانسته بود سهام‌دار و مدیر اجرایی یک شرکت بزرگ تولید پوشاک و البسه در برن شود. مادر گودل، ماریان هندشو[۳]، اهل راین‌لند بود. او تحصیلات دانشگاهی در ادبیات داشت و قسمتی از دوران تحصیل خود را در فرانسه گذرانده بود. آنها صاحب دو فرزند شدند، رودولف و کورت.

دوران کودکی گودل به خوبی سپری شد. او به شدت به مادرش علاقه‌مند بود. هنگامی که مادرش در خانه حضور نداشت می ترسید و بداخلاق می‌شد. در سن ۶ سالگی دچار تب رماتیسم شد. پس از بهبود، زندگی مانند سابق ادامه پیدا کرد. در ۸ سالگی شروع به مطالعه در مورد بیماری رماتیسم کرد و متوجه شد که یک عارضهٔ احتمالی تب رماتیسم، ضعیف شدن قلب است. او به این نتیجه رسید که قلبش ضعیف است، هرچند هیچ نشانه‌ای برای این موضوع وجود نداشت. از این پس مسألهٔ سلامتی یک نگرانی همیشگی و روزمره برای گودل شد.

در ۱۹۲۳ تحصیلات اولیهٔ خود را در برن تمام کرد. به گفتهٔ برادرش «حتی در دبیرستان، خیلی بیشتر از ما یک بعدی بود. معلم‌ها از این که او توانسته بود ریاضی دانشگاهی را بیاموزد متحیر بودند. در مدرسه شایع شده بود که او نه تنها در تمام کلاس‌های لاتین نمرهٔ کامل گرفته است، بلکه حتی یک اشتباه گرامری هم نداشته است.»

گودل در ۱۹۲۳ وارد دانشگاه وین شد، در حالی که هنوز تصمیم نهایی خود را در مورد انتخاب رشته نگرفته بود. دو رشتهٔ مورد علاقهٔ او ریاضی و فیزیک نظری بودند. او در جلسه درس فورتونِگلر[۴]، هان[۵]، منگر[۶]، هلی[۷] و دیگران شرکت می‌کرد. فورتونِگلر بیشترین

1) Kurt Gödel 2) Rudolf Gödel 3) Marianne Handschuh 4) Furtwängler 5) Hahn 6) Menger 7) Helly

تأثیر را روی او گذاشت و باعث شد که گودل رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند. تأثیر او دو جنبه داشت، اول این که او ریاضی‌دان و معلم فوق‌العاده‌ای بود و دوم وضعیت جسمی او. فورتونگلر از ناحیهٔ گردن فلج شده بود و مجبور بود از روی صندلی چرخ‌دار تدریس کند. یک دستیار گفته‌های او را بر روی تخته‌سیاه می‌نوشت. چنین منظره‌ای هر دانشجویی را تحت تأثیر قرار می‌داد. ولی با توجه به نگرانی گودل از سلامتی خود، تأثیر این موضوع دوچندان بود.

گودل به عنوان یک دانشجوی لیسانس در کلاس‌های شلیک[1] که به صورت سمینار برگزار می‌شد، شرکت می‌کرد. موضوع سمینار کتاب معروف «آشنایی با فلسفهٔ ریاضی» راسل[2] بود. الگا توسکی ـ تود[3]، همکلاسی گودل می‌نویسد:

«کم‌کم برای همه واضح می‌شد که او منطق را ادامه خواهد داد و هان را به جای شلیک استاد راهنمای خود انتخاب می‌کند. او فوق‌العاده با استعداد بود.»

گودل دکترای خود ار در ۱۹۲۹ زیر نظر هان تمام کرد. موضوع تز او اثبات تمامیت حساب منطق مرتبهٔ اول بود. در ۱۹۳۰ عضو هیأت علمی دانشگاه وین شد. از ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۸ در مکتب پوزیتیویسم منطقی عضویت داشت. در ۱۹۲۹ پدرش فوت کرد. با توجه به وضعیت خوب کاری پدرش، خانواده از لحاظ مالی تأمین شده بود. مادر گودل بعد از مرگ همسرش یک خانهٔ بزرگ در وین خریداری کرد. با آمدن مادر گودل، او و برادرش به خانهٔ او نقل مکان کردند. در این زمان رودولف، برادر گودل یک رادیولوژیست موفق شده بود. شهر وین با توجه به تحصیلات ادبی مادر گودل مکان مناسبی برای زندگی بود. او به همراه گودل و رودولف به تئاتر می‌رفت و از فضای فرهنگی شهر استفاده می‌کرد.

بیشتر شهرت گودل به خاطر «قضیهٔ ناتمامیت گودل» است. در ۱۹۳۱ او نتایجی را که به دست آورده بود تحت عنوان مقالهٔ

«über Formal unsentscheidbare sätje der prineipia mathematica and verwandter systeme»

به چاپ رساند. قضیهٔ او دربارهٔ دستگاه‌های اصل موضوعی، نشان می‌دهد که در هر دستگاه اصل موضوعی ریاضی به اندازهٔ کافی قوی، گزاره‌هایی وجود دارند که نمی‌توان با استفاده از استنتاج از اصول آن دستگاه آنها را اثبات یا رد کرد. به طور خاص، سازگاری اصول دستگاه قابل اثبات نیست. این قضیه تلاش صدساله برای یافتن اصولی که کل ریاضی را پوشش دهد را پایان داد. دو مثال معروف از چنین تلاش‌هایی، اصول ریاضی راسل و وایتهد و برنامهٔ صورت‌گرایی هیلبرت بود. ضربه‌ای که قضیهٔ گودل وارد کرد، شدید بود. هرچند این قضیه ایدهٔ اولین صورت گرایی را به طور کامل از بین نبرد، ولی نشان داد دستگاه‌هایی که بخواهند ریاضیات موجود را پوشش دهند، بسیار فراتر از دستگاه‌های متناهی گرایانه‌ای است که هیلبرت در نظر داشت.

قضیهٔ گودل یکی از علائم مشخص قرن بیستم است. یکی از نتایج جالب فلسفی این قضیه،

1) Schlick 2) Russell 3) Olga Taussky-Todd

پایان نیافته بودن مبانی و خود ریاضی است، چنان که در آن زمان تصور می‌کردند. همچنین نشان می‌دهد هرگز نمی‌توان رایانه‌ای ساخت که بتواند تمام مسائل ریاضی را پاسخ دهد. گودل در ۱۹۳۱ با زرملو[1] ملاقات کرد.الگا توسکی ـ تود در جلسه حضور داشت: «مسأله با زرملو این بود که او فکر می‌کرد قبل از گودل مهمترین قضیهٔ گودل را به دست آورده است. به نظر می‌رسید که شولز[2] نیز با او هم عقیده بود، ولی او هرگز این مسأله را اعلام نکرد و به نظر می‌رسد هرگز اعلام نکند.... این دیدار صلح آمیز شروع یک دوستی علمی بین آن دو نبود.»

ارسال مقالهٔ گودل در مورد ناتمامیت به دانشگاه وین برای دریافت اجازهٔ اقامت توسط هان در ۱ دسامبر ۱۹۳۲ پذیرفته شد. گودل در مارچ سال بعد به عنوان مدرسِ بدون حقوق دانشگاه وین پذیرفته شد.

سال ۱۹۳۳، هیتلر در آلمان به قدرت رسید. این اتفاق تأثیری در زندگی گودل در وین به وجود نیاورد. او به سیاست علاقه‌مند نبود. گودل در ۱۹۳۴ یک سری سخنرانی در دانشگاه پرینستون با عنوان «دربارهٔ جملات تعمیم‌ناپذیر دستگاه‌های صوری ریاضی» ارائه کرد. کلینی[3] که تازه تز دکترای خود را به پایان رسانده بود، به پیشنهاد وبلن[4] از این جلسات نت برداری کرد که این نوشته‌ها بعداً به چاپ رسیدند. هنگامی که گودل به اروپا برگشت، دچار یک بحران عصبی شد، چند ماهی را بستری شد و با کمک یک روانشناس سلامتی خود را بازیافت. با این وجود تحقیقاتش به خوبی پیش می‌رفت. او در ۱۹۳۵ سازگاری اصل انتخاب را با دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات کرد.

در سال ۱۹۳۶، شلیک که سمینارهای او باعث جلب شدن گودل به سمت منطق شده بود، توسط یک دانشجوی نازی به قتل رسید. این اتفاق یک بحران عصبی دیگر برای وی به وجود آورد. به نوشتهٔ برادرش: «این اتفاق مطمئناً دلیل بحران روانی برادرم بود و باعث نگرانی شدیدی شد. مادرم بیش از همه نگران بود. درست پس از این که سلامت خود را باز یافت اولین دعوت خود برای استاد مهمان شدن در ایالات متحده را دریافت کرد.»

در ۱۹۳۸ به گوتینگن رفت و دربارهٔ تحقیقات خود دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها سمینار داد. سپس به وین بازگشت و با آدل پورکت ازدواج کرد. او از گودل ٦ سال بزرگ‌تر بود و قبلاً ازدواج کرده بود. آنها قبلاً در ۱۹۲۷ آشنا شده بودند. پدر و مادر گودل با ازدواج آنها موافق نبودند.

در ۱۹۳۸، اتریش به آلمان ملحق شد ولی گودل به این موضوع هیچ علاقه‌ای نداشت و زندگی خود را مانند پیش ادامه داد. او در ۱۹۳۸ به پرینستون رفت. ترم اول را در مرکز تحقیقات پیشرفته گذراند. در ترم دوم یک سری سخنرانی زیبا در نوتردام ارائه کرد. اکثر کسانی که قبل از الحاق اتریش مدرسِ بدون حقوق بودند، بعد از الحاق حقوق خود را به عنوان سخنران دریافت می‌کردند. اما گودل استثناء بود. درخواست او در ۲۵ دسامبر ۱۹۳۹ رد شد. به نظر می‌رسد که او را یک یهودی می‌پنداشتند، هر چند این موضوع واقعیت نداشت. با وجود این که دوستان یهودی زیادی داشت، یهودی نبود. افراد دیگری نیز او را به اشتباه یهودی می‌پنداشتند. یک بار هنگام پیاده‌روی همراه

1) Zermelo 2) Scholz 3) Kleene 3) Veblen

همسرش توسط گروهی از جوانان که او را یهودی می‌پنداشتند، مورد حمله قرار گرفت. هنگام شروع جنگ گودل از این که به خدمت نظام فراخوانده شود ترسید. او اطمینان داشت که قدرت بدنی لازم برای خدمت سربازی را ندارد، اما اگر امکان اشتباه در مذهب او وجود داشت، این امکان در مورد عدم سلامتی وی نیز وجود داشت. به همین دلیل با نامه‌نگاری‌های فراوان توانست ویزای سفر به ایالات متحده را به دست آورد. خدمت در ارتش، آنقدر مخاطره‌آمیز بود که گودل حاضر به پذیرفتن آن نباشد. او به همراه همسرش از طریق روسیه و ژاپن به ایالات متحده رهسپار شد.

در ۱۹۴۰ به ایالات متحده رسید و در ۱۹۴۸ شهروند آنجا شد. در واقع او باور داشت که تناقضی در قانون اساسی ایالات متحده پیدا کرده است، ولی قاضی عاقل‌تر از آن بود که به حرف او گوش دهد.

از ۱۹۴۰ تا ۱۹۴۶ عضو مرکز تحقیقات پیشرفته در پرینستون بود. از ۱۹۴۶ تا ۱۹۵۳ عضو دائم این مرکز شد. در قرارداد او به صراحت آمده بود که هیچ اجباری برای تدریس ندارد. آلبرت اینشتین از دوستان نزدیک گودل در پرینستون بود. مسلم است که اینشتین روی علاقه‌مند شدن گودل به تحقیق در مورد نسبیت تأثیر زیادی داشته است. گودل نتایجی در این زمینه به دست آورد.

نگرانی گودل دربارهٔ سلامتی‌اش روز به روز افزایش می‌یافت. برادرش پزشک بود، بنابراین اطلاعاتی که او در این باره نوشته است قابل اعتماداند. او می نویسد: «برادرم دربارهٔ هر چیزی نظری منحصر به فرد و ثابت داشت و به سختی می‌شد او را به تغییر نظر متقاعد کرد. متأسفانه او در تمام عمر خود می‌پنداشت که نه تنها در ریاضی حق با اوست، بلکه در پزشکی هم چنین است. به همین دلیل مریض بسیار سرسختی برای پزشکان بود. بعد از یک خونریزی شدید خود را به یک رژیم غذایی بسیار سخت محدود کرد که منجر شد به مرور زمان وزن خود را از دست بدهد.»

همسر گودل که پشتیبان همیشگی او بود، تلاش بسیاری برای کاهش تنش‌هایی که موجب ناراحتی او می‌شدند، کرد. متأسفانه خود او نیز دچار مشکلات سلامتی شد، دو سکته کرد و یک عمل جراحی سنگین را پشت سر گذاشت. اواخر عمر گودل به این نتیجه رسید که او را مسموم می‌کنند، به همین دلیل از خوردن غذا خودداری می‌کرد و عملاً با گرسنه نگاه‌داشتن خود، خودکشی کرد.

« ... گودل معمولاً در مورد سلامتی خود بسیار نگران بود و در سال‌های آخر عمر به ندرت مسافرت می‌رفت یا سخنرانی می‌کرد. او هیچ دانشجوی دکترایی نداشت ولی بسیاری با ارتباط مستمر از طریق نامه و ارتباط شخصی از ذهن سریع و تأثیرگذار او سود بردند. اینشتین[۲]، فون نیومن[۳] و مرگنشترن[۴] از دوستان او بودند. او از مباحثه‌های فلسفی بسیار لذت می‌برد.»

در ۱۹۵۱ جایزهٔ اینشتین را به دست آورد. در ۱۹۷۴ مدال ملی علم به او اعطا شد. او عضو آکادمی ملی علوم ایالات متحده، انجمن سلطنتی بریتانیا، انستیتوی فرانسه، آکادمی سلطنتی و عضو افتخاری انجمن ریاضی لندن بود. او عضویت آکادمی علوم اتریش، و عضویت افتخاری آن

1) Einstein 2) Von Neumann 3) Morgenstern

را رد کرد. این را از نشانه‌های احساس او نسبت به اتریش می‌دانند. او از پذیرفتن مدال ملی عالی دستاورد علمی اتریش سر باز زد. احساس او از نوع برخورد آنها با او و خانواده‌اش سرچشمه می‌گرفت. گودل در مدت اقامت خود در ایالات متحده کارهای جدیدی به چاپ رساند. «سازگاری اصل انتخاب و تعمیم فرض پیوستار با بقیه اصول نظریهٔ مجموعه‌ها» (۱۹۴۰) یکی از آثار کلاسیک ریاضی مدرن به حساب می‌آید. او در این مقاله نشان داد که اگر نظریهٔ صوری مجموعه‌ها از نوع راسل و وایتهد[1] سازگار باشد، با اضافه کردن اصل انتخاب و تعمیم فرض پیوستار، سازگار باقی می‌ماند. هر چند این مقاله کاملاً مستقل بودن این دو اصل را از نظریهٔ مجموعه‌ها نشان نمی‌داد، لیکن پایهٔ کار کوهن[2] در ۱۹۶۳ در مورد استقلال بود.

«... گودل در بعد از ظهر ۱۴ ژانویهٔ ۱۹۷۸ در بیمارستان پرینستون درگذشت. به نظر عادلانه است که بگوییم افکار گودل روند ریاضی را تغییر داد: واضح است که پرباری ایده‌های او همچنان باعث ایجاد کارهای جدید خواهد شد. تعداد اندکی از ریاضیدانان به چنین مرتبه‌ای رسیده‌اند.»

برای مطالعهٔ بیشتر

[1] Dawson, John W., *Logical dilemmas: The life and work of Kurt Godel.* Wellesley MA: A. K. Peters (1997).

[2] Depauli-Schimanovich, Werner, and Casti, John L., 19nn. Godel, *A life of logic.* Perseus.

[3] Franzén, Torkel, *Godel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, Wellesley, MA: A. K. Peters (2005).

[4] Goldstein, Rebecca, 2005. Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Godel (Great Discoveries). W. W. Norton.

[5] Ivor Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940*, Princeton Univ. Press (2000).

[6] Jaakko Hintikka, 2000. On Godel. Wadsworth, Douglas Hofstadter, 1980. Godel, Escher, Bach. Vintage.

[7] Stephen Kleene, 1967. Mathematical Logic, *Dover paperback reprint ca.* 2001. Ernst Nagel and Newman, James R., 1958. Godel's Proof. New York Univ. Press. Raymond Smullyan, 1992. Godel's Incompleteness Theorems. Oxford University Press.

1) Whitehead 2) Cohen

[8] Hao Wang, *Reflections on Kurt Godel*, MIT Press (1987).

[9] Wang, Hao. 1996. *A Logical Journey: From Godel to Philosophy*, MIT Press (1996).

[10] Yourgrau, Palle, *Godel Meets Einstein: Time Travel in the Godel Universe.* Chicago, Open Court (1999).

[11] Yourgrau, Palle, *A World Without Time: The Forgotten Legacy of Godel and Einstein*, Basic Books (2004).

ترجمه و تلخیص: کاوه قاسملو

پست الکترونیک: ghasemloo@gmail.com

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 24, No. 2, Fall 2005

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: