فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۵، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۵
(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۸۶)
شمارهٔ پیاپی: ۳۷

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: جوزف دوب (Josef L. Doob)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۷ (پاییز ۱۳۸۵) صص. ۱ تا ۶

سخن سردبیر

ریاضیات مفهومی، ریاضیات ابزاری

۱. بیست و پنجمین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدان‌ها (ICM) تابستان ۲۰۰۶ در مادرید برگزار شد. این کنگره ۲۰ سخنران عمومی و ۱۷۸ سخنران مدعو داشت که علت انتخاب و دعوت آن‌ها پوشش متعادلی از موضوعات بحث‌انگیز، جذاب، به روز و رو به رشد ریاضی بود. به علاوه تعداد کثیری از افراد نیز مقاله‌های خود را به صورت شفاهی[1] و پوستر در این کنگره ارائه کردند که هدف اصلی بخش «ارائه‌های شفاهی و پوستر»، اولاً تشویق افراد مختلف جامعهٔ ریاضی به شرکت در کنگره و مشارکت در فعالیت‌های علمی و در ثانی ایجاد تسهیلات برای اعضای جامعهٔ علمی جهانی از جهت اخذ ویزا و دریافت اعتبار ویژه برای شرکت در مجامع علمی از مؤسسات بومی است. پس درواقع، روند جهانی تحقیقات ریاضی را می‌توان از سخنرانی‌های عمومی و مدعو ــ و نه از ارائه‌های شفاهی یا پوستر ــ شناخت و مورد بررسی قرار داد.

کنگره فرصت مناسبی برای جوامع ریاضی در همهٔ جهان است تا روند تحقیقات ریاضی خود را با آن مقایسه کنند. کنگره هر چهار سال یک بار تلاش می‌کند تا با ارائهٔ دستاوردهای جامعهٔ جهانی ریاضی، شاخص‌ها و در حقیقت ملاک‌های[2] مناسبی برای سنجش آن چه که در موقعیت‌های بومی رخ می‌دهد، معرفی نماید. به همین دلیل در این سرمقاله با استعانت از تقسیم‌بندی اسکمپ[3] انواع فهم و درک ریاضی، اشاره‌ای مختصر به ماهیت این سخنرانی‌ها و پوشش موضوعی آنها به محل می‌آید.

ریچارد اسکمپ به دو نوع فهم و درک ریاضی یعنی درک مفهومی و درک ابزاری اشاره می‌کند و جایگاه هر یک را در جریان یاددهی و یادگیری ریاضی مورد بحث قرار می‌دهد. این عنوان‌ها می‌توانند استعاره‌ای باشند برای ریاضی مفهومی و ریاضی ابزاری تا از طریق آن‌ها، وضعیت کنونی ریاضی در ایران و جهان مورد بررسی قرار گیرند. با استفاده از این استعاره‌ها، می‌توان گفت که کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدان‌ها[4] (۲۰۰۶) تجلی ریاضیات مفهومی بود؛ ریاضیاتی که به شدت چهرهٔ

1) Oral Presentation 2) Benchmarks 3) Skemp

۴) PDF مقالهٔ کامل سخنرانان عمومی و مدعو کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدان‌ها را می‌توان با مراجعه به سایت ICM2006 به دست آورد.

تلفیقی و بین رشته‌ای داشت و ارتباط و اتصال شاخه‌های مختلف ریاضی در آن‌ها مشهود بود و به همین دلیل، از ریاضیات سنتی فاصله گرفته بود. در واقع ریاضیات مطرح شده در کنگره، از ریاضیات سنتی بیشتر به منزلهٔ ابزار استفاده کرده بود، ابزارهای متداولی که زمانی هر یک مفهوم عمیقی در ریاضی بوده‌اند ولی در حال حاضر، ریاضیدان‌ها از آن‌ها، به عنوان ابزاری عادی اما عمیقاً مهم و مفید برای خلق مفاهیم پیچیده و تلفیقی به خوبی استفاده می‌کنند.

با مروری بر مقالات سخنرانان عمومی و مدعو کنگرهٔ سال ۲۰۰۶، ملاحظه می‌شود که بین ریاضیات مطرح شده در این کنگره و آن‌چه که در ایران به عنوان تحقیقات انجام می‌شود، شکاف قابل توجهی وجود دارد. به علاوه جامعهٔ جهانی نیز معیارهایی برای تعیین جایگاه تحقیقات ریاضی وضع کرده است که در جوایز و نشان‌هایی که به محققین اعطا می‌شود، تجلی می‌یابند. این جامعه در واقع با اعطای جایزه و نشان، علاوه بر ارج نهادن به تلاش‌های ریاضی‌دان‌های برجسته، ارزیابی خود از کیفیت و جهت‌گیری عمدهٔ ریاضیاتِ دورهٔ مربوط به خود را تعیین و اعلام می‌نماید. بنابراین آگاهی از این جوایز و برندگان آنها و رشته‌هایی که جایزه به آنها اهدا شده است می‌تواند معیار دیگری برای ارزیابی جایگاه ریاضی ایران در ریاضی جهانی باشد.

مدال فیلدز

مدال فیلدز مهمترین جایزهٔ ریاضی است که به افتخار جان چارلز فیلدز (۱۹۳۲—۱۸۶۳) نامگذاری شده است[۱] و به‌وسیلهٔ اتحاد بین‌المللی ریاضیدان‌ها (IMU)، هر چهار سال یک بار در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدان‌ها (ICM) به ریاضیدان‌های برجسته‌ای که کمتر از ۴۰ سال دارند اهدا می‌شود. این جایزه شرایط ویژه‌ای دارد که برای مثال، هویت برندهٔ جایزه تا زمان برگزاری مراسم اهدا بایستی محرمانه بماند. برندگان این جایزه به وسیلهٔ کمیته‌ای که اعضای آن محرمانه هستند، انتخاب می‌شوند و آنها قسم می‌خورند که نام برندگان تا اعلام رسمی، محرمانه باقی بماند. این در حالی است که برندگان جایزهٔ فیلدز به طور جداگانه چند هفته قبل از اعلام رسمی مطلع می‌شوند و از کسان دیگری که این جایزه را دریافت خواهند نمود، بی اطلاع هستند. در هر کنگرهٔ ICM ممکن است بین دو تا چهار جایزهٔ فیلدز اهدا شود و برندگان عموماً کسانی هستند که کار گسترده‌ای در ریاضی انجام داده‌اند، و زمینه‌های مختلفی را به هم مرتبط نموده‌اند. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها در سال ۲۰۰۶، به چهار نفر مدال فیلدز اهدا شد که در اینجا به اجمال به معرفی آنها می‌پردازیم[۲,۳].

۱) جایزهٔ فیلدز مترادف جایزهٔ نوبل برای ریاضی‌دان‌ها است که اولین آن در سال ۱۹۳۶ در اُسلو پایتخت نروژ به آلفُرس (Lars N. Ahlfors) و داگلاس (Jesse Douglas) اهدا شد.

۲) برای این معرفی از خبرنامه‌های چاپ‌شده در کنگرهٔ ۲۰۰۶ استفاده شده است.

۳) مجلهٔ نشر ریاضی شمارهٔ پیاپی ۲۹ سال ۱۳۸۵ نیز مطالب مبسوطی دربارهٔ جوایز سال ۲۰۰۶ چاپ کرده است.

۱) **آندره اکونکف**[1] به خاطر خدمات ارزنده‌اش در ایجاد پلی بین احتمال، نظریهٔ نمایش و هندسهٔ جبری. آندره اکونکف در سال ۱۹۶۹ در مسکو به دنیا آمد و در سال ۱۹۹۵ دکتری ریاضی خود را را از دانشگاه مسکو دریافت کرد. او اکنون استاد دانشگاه پرینستون است.

۲) **گریگوری پرلمان**[2]، برای خدماتی که در هندسه انجام داده و به دلیل شهود انقلابی او در ساختارهای هندسی و تحلیلی جریان ریچی[3]. پرلمان در سال ۱۹۶۶ در شوروی سابق به دنیا آمد و در سال ۱۹۹۰، دکتری ریاضی خود را از دانشگاه سن‌پترزبورگ دریافت نمود. پرلمان در سال ۱۹۹۴ نیز مدعو کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دان‌های زوریخ بود. او از گرفتن جایزهٔ فیلدز خودداری کرد و جنجال بسیاری در سطح جهانی به وجود آورد[4].

۳) **ترانس تائو**[5]، برای کارهای عمیقش در تلفیق معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، ترکیبیات، آنالیز هارمونیک و نظریهٔ اعداد جمعی. ترانس تائو در سال ۱۹۷۵ در آدلاید استرالیا به دنیا آمد. تائو یک مسأله‌حل‌کن بی‌نظیر است و کارهای او بر بسیاری از رشته‌های ریاضی اثر درخشانی داشته است. او قدرت تکنیکی وسیع خود را برای پیدا کردن ایده‌های نو به کار می‌برد، ایده‌هایی که بسیار طبیعی‌اند و ریاضیدان‌های دیگر می‌گویند «چرا هیچ کس این مطلب را قبلاً ندیده بود!» علاقه‌های تائو بسیار وسیع‌اند و شامل آنالیز هارمونیک، معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای، ترکیبیات و احتمالات می‌شود. تائو در سال ۱۹۹۶ مدرک دکتری ریاضی خود را از دانشگاه پرینستون گرفت و اکنون استاد دانشگاه کالیفرنیا در لس‌آنجلس است.

۴) **وندلین ورنر**[6]، برای خدماتش در توسعهٔ تحول تصادفی لوونر، هندسه حرکت براونی دو بعدی و نظریهٔ میدان همدیس. کارهای وندلین ورنر و همکارانش (شرام، لولر) یکی از هیجان‌انگیزترین تبادل‌های پربار بین ریاضی و فیزیک در سال‌های اخیر بوده است. کارهای تحقیقاتی ورنر یک چارچوب مفهومی برای درک پدیده‌های بحرانی در سیستم‌های فیزیکی ارائه داده و نسبت به هندسه، بصیرتی نوین ایجاد کرده است. ورنر، نظریهٔ احتمال را با ایدهٔ آنالیز مختلط کلاسیک ترکیب کرده و از ابزار آنالیز تصادفی ایتو استفاده نموده است که این کار، تأثیرات مهمی بر تحقیقات ریاضی و فیزیک در آینده خواهد داشت.

وندلین ورنر در سال ۱۹۶۸ در آلمان به دنیا آمد و دکتری خود را در سال ۱۹۹۳ از دانشگاه پاریس ۶ گرفت و از سال ۱۹۹۷ استاد دانشگاه پاریس ۱۱ است. از قبل هم انتظار می‌رفت که کارهای مشترک ورنر با شرام و لولر به نام نظریهٔ تحول شرام ــ لوونر (SLE)، جایزهٔ فیلدز را بربایند اما چون سن شرام بیش از ۴۰ سال بود، این جایزه فقط به ورنر اهدا شد. لازم به یادآوری است که فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی سفارش مقاله‌ای در این مورد را به آقای دکتر فریدون رضاخانلو داده بود و ایشان یک سخنرانی در مرکز فیزیک نظری و ریاضیات (IPM) ارائه نموده

1) Andre Okounkov 2) Grigori Perelman 3) Ricci

۴) علت اعتراض پرلمان موضوع این نوشتار نیست و در جای دیگری به آن پرداخته خواهد شد.

5) Terence Tao 6) Wendelin Werner

و مقالهٔ انگلیسی خود را به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی دادند. آقای آرش فهیم نیز این مقاله را به فارسی ترجمه کرد و با ویرایش و تأیید دکتر رضاخانلو برای چاپ در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی آماده شد که در این شماره به چاپ می‌رسد.

جایزهٔ نوانلینا

هر چهار سال یک بار، جایزهٔ نوانلینا به نوآورترین کار در ریاضی در زمینهٔ «جامعهٔ اطلاعات» که شامل علوم محاسباتی، زبان‌های برنامه‌نویسی و آنالیز الگوریتم‌ها است، اهدا می‌شود. این جایزه به افتخار رولف نوانلینا[1] (۱۹۸۰—۱۸۹۵) از دانشگاه هلسینکی و رئیس اسبق IMU[2] به نام وی نامیده شده است.

نوانلینا اولین ریاضی‌دانی بود که در سال ۱۹۵۰، علوم محاسباتی را در دانشگاه‌های فنلاند معرفی نمود. جایزهٔ نوانلینا در سال ۲۰۰۶ به جان کلینبرگ[3] اهدا شد که نگاهی نظری به مهمترین مسائل عملی نموده بود که نقش محوری برای فهمیدن و مدیریت دنیای توسعه شبکه بازی کرد.

وی روی مسائل وسیعی کار نمود و از آنالیز شبکه‌ها و پیداکردن مسیرها، حفاری داده‌ها[4] و برای کار تخصصی به طور عمیق در مورد تأثیر تکنولوژی در دنیای اجتماعی، اقتصادی، سیاسی به مطالعه پرداخت.

جان کلینبرگ در سال ۱۹۷۱ در بوستون ماساچوست به دنیا آمد و مدرک دکتری ریاضی خود را در سال ۱۹۹۶ از M.I.T گرفت. او اکنون استاد علوم کامپیوتر در دانشگاه کُرنل است.

جایزهٔ گاوس

اولین جایزهٔ گاوس برای کاربرد ریاضیات، به کیوشی ایتو ۹۰ ساله اعطا شد. این جایزه در مراسم افتتاحیهٔ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در ۲۲ آگوست ۲۰۰۶ اهدا شد. کارل فردریش گاوس (۱۸۵۵—۱۷۷۷) یکی از مهمترین ریاضیدان‌های تمام زمان‌ها است که شاهزادهٔ ریاضیات لقب گرفته است. گاوس کارهای مهمی در زمینه‌های مجرد ریاضی مانند نظریهٔ اعداد، هندسه و احتمال داشته است و ابزاری به‌وجود آورده که فیزیک‌دان‌ها و مهندسان یا کسانی که بخواهند از یک اندازه‌گیری نتیجه‌گیری کنند، از «روش کوچک‌ترین مربعات» گاوس استفاده می‌کنند. هدف این جایزه این است که نشان دهد ریاضی تنها یک علم مجرد نیست، بلکه دارای تأثیرات عمیق در رشته‌های مختلف علوم، تکنولوژی و بازرگانی است. این جایزه بیشتر برای اهمیت تأثیر ریاضیات بر سایر علوم تأسیس شده است و به وسیلهٔ انجمن ریاضی آلمان (DMV)[5] و (IMU) حمایت می‌شود و مسؤولیت اجرایی آن به DMV واگذار گردیده است. برای این جایزه، برخلاف جایزهٔ فیلدز محدودیت سنی وجود ندارد چون اعتقاد بر این است که اثرات کارهای اصیل ریاضی بر رشته‌های غیرریاضی

1) Rolf Nevanlinna 2) International Mathematical Union 3) Jon Kleinberg
4) data mining 5) Deutsche Mathematiker - Vereinigung (German Mathematical Union)

نیاز به زمان دارد. کیوشی ایتو ۹۰ ساله به خاطر کارهایش در آنالیز تصادفی و کاربردهای وسیع آن برندهٔ این جایزه شد. کارهای کیوشی ایتو در سال ۱۹۴۰ شروع شد. او ابتدا مقالاتش را در مجله‌های ژاپنی به چاپ رساند. آنالیز تصادفی ایتو قاعدهٔ زنجیره‌ای در مشتق‌گیری را تغییر داد، قاعده‌ای که به دنبال کارهای بنیان‌گذاران آنالیز و حساب دیفرانسیل و انتگرال (نیوتن، لایب نیتز) بنیان گردید و تأثیر بسیار مهمی در همهٔ رشته‌های متأثر از حساب دیفرانسیل و انتگرال گذاشت. این مشتق‌گیری از توابع یک متغیره شروع شده و به توابع چند متغیره، مشتق گیری روی منیفلد، فضای هیلبرت و باناخ ادامه یافت.

کار مهم و اثرگذار کیوشی ایتو این بود که این مفهوم محوری را مورد سؤال قرار داد و آنالیز و حساب دیفرانسیل و انتگرال جدیدی به نام آنالیز تصادفی یا حساب دیفرانسیل و انتگرال تصادفی را بنیان‌گذاری کرد. این کار، تأثیرات بزرگی بر همهٔ رشته‌های متأثر از ریاضی مانند فیزیک، مهندسی، اقتصاد و مالیه گذاشت و در واقع، انقلابی در همهٔ این رشته‌ها و خودِ ریاضی، چه از بعد نظری و چه از بعد کاربردی، بر جا گذاشت. به این دلیل، هانس فولمر[1] سخنران عمومی کنگره دربارهٔ ایتو گفت که «ایتو را نیوتن زمان می‌گویند، ولی من به عنوان یک آلمانی معتقدم که او لایب نیتز زمان است» و آنالیز تصادفی ایتو را "آنالیز قرن بیستم" می‌نامند*.

جایزهٔ آبل

جایزهٔ آبل در سال ۲۰۰۱ به افتخار ریاضی‌دان نروژی نیلز هنریک آبل[2] تأسیس شد و مقدار آن معادل یک میلیون دلار آمریکا است. اولین جایزهٔ آبل در سال ۲۰۰۳ به ژان پیر سر[3] اعطا شد. این جایزه (برخلاف دیگر جایزه‌های کنگره) هر سال به ریاضی‌دان‌های برجسته اعطا می‌گردد. جایزهٔ آبل ۲۰۰۷ به وارادان[4] از انستیتوی علوم ریاضی کورانت دانشگاه نیویورک به خاطر خدمات اساسی وی در نظریهٔ احتمال و به طور خاص برای خلق یک نظریهٔ یک پارچه در «اصل انحراف بزرگ[5]» اعطا شد. وارادان مدرک دکتری خود را در سال ۱۹۶۳ از انستیتوی آمار هندوستان[6] در کلکته دریافت نمود و در همان سال، به انستیتوی علوم ریاضی کورانت در نیویورک پیوست و اکنون استاد ریاضی این دانشگاه است.

یکی از قضیه‌های اساسی نظریهٔ احتمال قانون اعداد بزرگ است که ثابت می‌کند میانگین پیشامدها برای nهای بزرگ به امید ریاضی میل می‌کند. در این قضیه دربارهٔ نرخ این همگرایی صحبت نمی‌شود، قانون انحراف بزرگ به بررسی این نرخ همگرایی می‌پردازد. وارادان این قضیه را برای فضاهای لهستانی (فضای متریک کامل جدایی پذیر) تعمیم داد. کارهای او بسیار عمیق و متنوع است و تمام زمینه‌های نظری احتمال و آنالیز تصادفی را می‌پوشاند.

*) در شمارهٔ ۳۶ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به معرفی زندگی‌نامهٔ ایتو و ترجمهٔ تاریخ انتگرال تصادفی او پرداختیم و در شمارهٔ ۳۸ جنبه‌های هندسی آنالیز تصادفی را معرفی می‌نمائیم.

1) Hans Föllmer 2) Niles Henrik Abel 3) Jean Pierre Serre 4) Srinivasa S. R. Varadhan 5) Large deviations principal 6) Indian Statistical institute

در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها در مادرید، هر چهار جایزهٔ فیلدز ماهیت آنالیزی داشت و سه جایزه از آنها به کسانی تعلق گرفت که در نظریهٔ احتمال و آنالیز تصادفی کار می‌کردند (وندلین ورنر، اندری اُکونوف، ترانس تائو) و هر کدام به نحوی در نظریهٔ احتمال مشغول بودند. کیوشی ایتو نیز جایزهٔ گوس را برای کارهایش در آنالیز تصادفی دریافت کرد. به علاوه، جان کلاینبرگ هم برندهٔ جایزهٔ نوانلینا در زمینه‌های احتمال و فرآیندهای تصادفی بود و با توجه به دریافت جایزهٔ آبل به‌وسیلهٔ وارادان اکثر جایزه‌های مهم ریاضی در سال گذشته به کسانی تعلق گرفت که در احتمال و فرآیندهای تصادفی تحقیق کرده بودند.

اکنون باید از خود بپرسیم که در کجای جایگاه تحقیقات ریاضی ایستاده‌ایم؟
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امیداور است که با وجود علاقه‌مندی و ظرفیت بالای جامعهٔ ریاضی ایران، بتواند شکاف بین ریاضیات جهانی و ریاضیات بومی را که در ریاضیات مفهومی و ریاضیات ابزاری متجلی است، کم کند.

۲. با توجه به این که جوزف دوب یکی از بنیان گذاران و تأثیرگذاران نظریهٔ مدرن احتمال بوده، به همین دلیل انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۸۴ جایزهٔ استیل [1] را برای کارهای اساسی او در برقراری احتمال به عنوان شاخه‌ای از ریاضی و تأثیر کارهای او در توسعهٔ این رشته به وی اعطا نمود. تأثیر کارهای دوب در هر قسمتی که به احتمال مربوط می‌گردد هویدا است و ردپای کارهای او را در تمام کارهای انجام شده به وسیلهٔ برندگان جوایز مذکور می‌توان دید. بنابراین فرهنگ و اندیشه ریاضی در این شماره به معرفی زندگینامه جوزف دوب می‌پردازد.

خوشحالم به اطلاع خوانندگان عزیز برسانم که با چاپ این شماره، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به‌روز می‌شود و مراحل آماده‌سازی دو شمارهٔ سال ۱۳۸٦ نیز پایان یافته و به‌موقع چاپ خواهند شد. به‌روز شدن مجله مرهون همت علاقه‌مندان به توسعهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی است که با ارسال مقالات خود، به دست‌اندرکاران مجله یاری می‌رسانند. با توجه به فعال شدن این همکاری‌ها و به‌روز شدن مجله در مورد ترکیب مطالب مجله، نکات زیر را جهت آگاهی نویسندگان و مترجمان مقالات ارسالی به عرض می‌رسانم.

ـ ۴۰% مقالات ترجمه‌ای و ٦۰% مقالات تالیفی‌اند.
ـ مقالات تألیفی شامل زندگی‌نامه‌ها، مقالات مدعو و مقالاتی هستند که برای داوری ارسال می‌گردند.
ـ مقالاتِ هر یک از چهار مقولهٔ ترجمه، تألیف، مدعو و زندگی‌نامه در صف‌های متفاوتی برای نوبت چاپ قرار می‌گیرند. بنابراین، طبیعی است که مدت زمان انتظار در صف چاپ برای مقوله‌های مختلف، با هم متفاوت باشد و به این جهت الزاماً، تقدم و تأخر زمان چاپ تنها براساس زمانِ دریافتِ مقاله نیست.

1) Steele

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۷ (پاییز ۱۳۸۵) صص. ۷ تا ۲۰

تحوّل شرام ـ لُونر[۱]

فریدون رضاخانلو

۱. مقدّمه

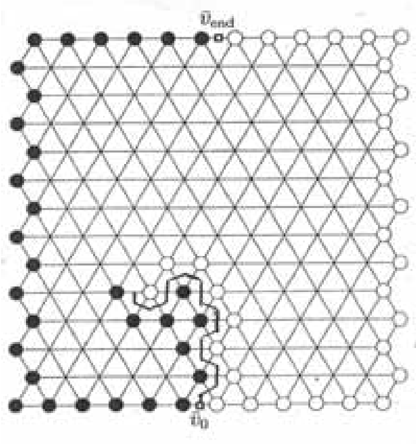
یکی از اهداف اساسی فیزیک آماری شناخت رفتار مدل‌های میکروسکوپی، در مقیاس بزرگ است. اخیراً، روش جدیدی برای معرفی حد در مقیاس[۲] سیستم‌های بحرانی ناوردای همدیس گوناگون در بعد ۲ توسعه یافته است. هدف اصلی این مقاله تشریح چند مدل شبکه‌ای که یک گذر فاز را تجربه می‌کنند، و مطالعهٔ حد در مقیاس آن‌ها در حالت بحرانی است. این مدل‌های شبکه‌ای عبارت‌اند از: قدم‌زن تصادفی خود گریز، قدم‌زن تصادفی بدون دور، کاوش‌گر همساز و نشت.
حدس زده می‌شود که در حالت بحرانی توصیف میکروسکوپی این مدل‌ها توسط اعضای متفاوت خانواده‌ای پیوسته از فرایندهای تصادفی موسوم به تحوّل شرام ـ لُونر (SLE) ارائه می‌شود. ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان حدس زده‌اند که مدل‌های اشاره شده در حالت بحرانی حد پیوسته‌ای (حد در مقیاس) دارند و این حد ناوردای همدیس است. شرام نشان داد که اگر یک قدم‌زن تصادفی بدون دور در بعد ۲ حدی ناوردای همدیس داشته باشد، آن گاه حد آن یک SLE است. وجود این حد ناوردای همدیس بعداً توسط لولر[۳]، شرام و ورنر نشان داده شد.
برای شروع، مسألهٔ کلاسیک قدم‌زن تصادفی گسسته در $\mathbb{Z}^۲$ را در نظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر از نقطهٔ $\gamma_۰ = ۰$ شروع می‌کنیم و برای $\gamma_n \in \mathbb{Z}^۲$، $\gamma_{n+۱}$ را یکی از خانه‌های همسایهٔ γ_n با احتمال مساوی $\frac{۱}{۴}$ انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم که اگر $\beta^n(t) = \frac{۱}{\sqrt{n}}\gamma_{\lfloor nt \rfloor}$؛ آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^n(t) = \beta(t)$ موجود است و یک حرکت براونی ۲ بعدی است. این همان اصل معروف ناوردایی دانسکر[۴] است که در همهٔ ابعاد درست است. امّا، این حد یک حرکت براونی مسطّح است و بنا به قضیه‌ای از پال لوی[۵] ناوردای همدیس است. ابتدا مشاهده می‌شود که اگر قرار دهیم $\epsilon = \frac{۱}{\sqrt{n}}$ و $\beta_\epsilon : [۰, \infty) \to \mathbb{R}^۲ = \mathbb{C}$ را توسط $\beta_\epsilon(t) = \epsilon\gamma_{\lfloor t\epsilon^{-۲} \rfloor}$ تعریف کنیم، آن گاه مجموعهٔ $\{\beta_\epsilon(t) : t > ۰\} = \{\epsilon\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$

1) Schramm – Loewner, C. (English), Löwner, K. (Germany)   2) scaling limit
3) Lawler, G   4) Dansker   5) Paul Levy

یک خم تصادفی است که به $\{\beta(t) : t > \circ\}$ همگرا می‌شود که در آن β یک حرکت براونی مسطّح است. لوی ثابت کرد که اگر $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت همدیس باشد، آن گاه $f(\beta(t))$ نیز با تغییر زمان تصادفی یک حرکت براونی است. به طور دقیق‌تر، اگر $\tau(t)$ را به صورت

$$\int_{\circ}^{\tau(t)} |f'(\beta(\theta))|^{\text{۲}} d\theta = t$$

تعریف کنیم، آن گاه فرایند $\hat{\beta}(t) = f(\tau(t))$ نیز یک حرکت براونی است. معنی دیگر این حرف این است که اگر از پارامتر صرف نظر کنیم و قانون $\{\beta(t) : t > \circ\}$ را $\mathcal{P}$ بنامیم، آن گاه $\mathcal{P} \circ \Gamma^{-\text{۱}} = \mathcal{P}$، که در آن $\Gamma(\gamma) = \{f(z) : z \in \gamma\}$. $\mathcal{P}$ مثالی از یک قانون ناوردای همدیس است.
در بخش ۲، مدل‌های شبکه‌ای متعددی معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، در مورد اهمیّت کار لُونر بحث می‌کنیم و در بخش ۴ نشان می‌دهیم چگونه نسخهٔ تصادفی کار لُونر حد در مقیاس مدل‌های فصل ۲ را توصیف می‌کند.



۲. مدل‌های میکروسکوپی

به عنوان اولّین مثال، قدم زن تصادفی خودگریز را بررسی می‌کنیم که شیمی‌دان‌ها از آن به عنوان مدلی برای پلیمرها استفاده می‌کنند. برای هدف خود، این مدل را روی نیم‌صفحهٔ بالایی معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > \circ\}$، $\overline{\mathbb{H}} = \{c \in \mathbb{C} : Im(z) \geq \circ\}$ و شبکهٔ $\mathbb{Z}^{\text{۲}} \cap \overline{\mathbb{H}}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مجموعهٔ تصادفی $\{\gamma(\circ), \gamma(\text{۱}), \cdots, \gamma(N)\}$ را طوری بسازیم که $\gamma(\circ) = \circ$؛ $\gamma(\text{۱}), \cdots, \gamma(N) \in \mathbb{Z}^{\text{۲}} \cap \overline{\mathbb{H}}$؛ $\gamma(i) \neq \gamma(j)$ برای $i \neq j$ و $\gamma(i) \sim \gamma(i + \text{۱})$ برای $i = \text{۱}, \cdots, N - \text{۱}$. در این جا $a \sim b$ به این معنی است که a و b در $\mathbb{Z}^{\text{۲}}$ مجاورند. مجموعهٔ چنین مسیرهایی را با Γ_N نشان می‌دهیم و روی Γ_N اندازهٔ احتمال یکنواخت

می‌گذاریم. این اندازهٔ احتمال را با $\mathbb{P}_N$ نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_N$ موجود است. این حد یک اندازهٔ احتمال است و روی مسیرهای خودگریز $\{\gamma(0),\gamma(1),\cdots,\gamma(N),\cdots\}$ در نیم‌صفحهٔ بالایی $\mathbb{H}$ متمرکز شده است. ϵ را یک ثابت مثبت کوچک می‌گیریم و $\epsilon\gamma$ را نظیر مسیری که از $\gamma(0)$، $\gamma(1)$،$\cdots$ ساخته می‌شود (روی شبکه $\epsilon(\mathbb{H}\cap\mathbb{Z}^2)$) می‌نویسیم. قانون $\epsilon\gamma$ را با $\mathcal{P}_1^\epsilon$ نشان می‌دهیم که روی مسیرهای خودگریز نیم‌صفحهٔ بالایی متمرکز شده است. اکنون برای طرح اولین سؤال اساسی این مبحث آماده شده‌ایم.

سؤال ۱. حد $\mathcal{P}_1^\epsilon$ وقتی $\epsilon \to 0$ چیست؟

این سؤال یک مسألهٔ باز پیکارجو است. امّا اکنون یک حدس دقیق به کمک SLEها برای این سؤال داریم. همان طور که قبلاً گفتیم یک خانوادهٔ تک پارامتری از فرایندها موسوم به $SLE(\kappa)$، $\kappa > 0$ موجود است که مدل‌های میکروسکوپی متعددی حد پیوسته‌ای در آن دارند.

حدس ۲. $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{P}_1^\epsilon$، $SLE(\frac{8}{3})$ است.

لولر در اواخر دههٔ ۷۰ مدل دیگری که یک اندازهٔ احتمال دیگر روی قدم زن تصادفی خود گریز است، ارائه داد که ریاضیات ساده‌تری دارد. این مدل قدم زن تصادفی بدون دور (LERW) نام دارد و می‌تواند روی شبکه‌های متنوعی تعریف شود. برای وضوح بیش‌تر، فقط آن را روی نیم‌صفحهٔ بالایی تعریف می‌کنیم. این ساختار در دو مرحله انجام می‌گیرد. ابتدا یک قدم زن تصادفی غیربازگشتی را در نیم‌صفحهٔ بالایی در نظر می‌گیریم. سپس دستورالعملی برای پاک کردن دورهای آن به ترتیب تقدّم زمانی در پیش می‌گیریم.

همانند مرحلهٔ اوّل، یک قدم زن تصادفی در $\mathbb{H}\cap\mathbb{Z}^2$ را با احتمال‌های گذر زیر در نظر می‌گیریم:

$(i,j)\to(i\pm 1,j)$	با احتمال $\frac{1}{4}$
$(i,j)\to(i,j+1)$	با احتمال $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{j})$
$(i,j)\to(i,j-1)$	با احتمال $\frac{1}{4}(1-\frac{1}{j})$

می‌توان این قدم زن را از قدم زن تصادفی متقارن با شرط باقی ماندن در نیم‌صفحهٔ بالایی به دست آورد. می‌توان نشان داد که قدم زن تصادفی X_n با احتمال‌های گذر بالا غیربازگشتی است. در واقع $\lim_{n\to\infty} n = \infty$، از $X_0 = 0$ شروع می‌کنیم و دورها را به ترتیب تقدّم زمانی پاک می‌کنیم تا یک قدم زن تصادفی خود گریز به دست آوریم. به طور دقیق‌تر، اگر $\gamma(n)$ را بدانیم، $\gamma(n+1) = X_m$ که $m = \max\{j : X_n = X_j\} + 1$. اگر $\mathbb{P}$ قانون γ باشد، در این صورت:

$$\mathbb{P}(\gamma(n+1) = a|\gamma(0),\cdots,\gamma(n)) = \frac{1}{Z(\gamma(0),\cdots,\gamma(n))} f(a;\gamma(0),\cdots,\gamma(n))P(\gamma(n),a)$$

که در آن Z ثابت بهنجارسازی، $P(a,b)$ احتمال گذر قدم زن تصادفی در نیم‌صفحهٔ بالا و تابع

$f(a;A)$ بر حسب این قدم زن تصادفی در $\mathbb{Z}^{۲}\cap\mathbb{H}\backslash A$ همساز گسسته با شرط مرزی زیر هستند:

$$f(a;A)=\begin{cases} ۰ & a\in A \\ ۱ & a\to\infty \end{cases}$$

به بیان دقیق‌تر

$$Z(\gamma(۰),\cdots,\gamma(n))=\sum_{a\sim\gamma(n)} f(a;\gamma(۰),\cdots,\gamma(n))P(\gamma(n),a).$$

در حقیقت، $f(a;\gamma(۰),\cdots,\gamma(n))$ چیزی نیست جز احتمال این که یک قدم زن تصادفی در نیم‌صفحهٔ بالا با شروع از a به گذشتهٔ $\{\gamma(۰),\cdots,\gamma(n)\}$ برخورد نکند.
قانون $\mathbb{P}$ روی مسیرهای قدم زن خود گریز در نیم‌صفحهٔ بالا با شروع از مبدأ یک اندازهٔ احتمال است. قرارمی‌دهیم $\gamma^{\epsilon}=\epsilon\gamma$ و قانون γ^{ϵ} را با $\mathcal{P}_{۲}^{\epsilon}$ نشان می‌دهیم. قضیهٔ زیر از لولر، شرام و ورنر است.

قضیهٔ ۳. $\lim\limits_{\epsilon\to ۰}\mathcal{P}_{۲}^{\epsilon}$، $SLE(۲)$ است.

به عنوان مدل سوّم، مدل نشت روی شبکهٔ مثلثی را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم V مجموعهٔ رئوس این شبکه باشد و رئوس را درون $V\cap\overline{\mathbb{H}}$ در نظر می‌گیریم. هر رأس $V\cap\mathbb{H}$ با احتمال $\frac{۱}{۲}$ سیاه یا سفید می‌شود. ما انتقالی از این شبکه را در نظر می‌گیریم که $V\cap\mathbb{R}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}+\frac{۱}{۲}$ باشد. بنابراین O در وسط یالی که $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ را وصل می‌کند قرار دارد. $V\cap\mathbb{R}^{+}$ را سفید و $V\cap\mathbb{R}^{-}$ را سیاه رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به بیان دیگر، رئوس مرزی، تعیّنی و رئوس $V\cap\mathbb{H}$ تصادفی رنگ‌آمیزی شده‌اند.
از طرف دیگر، می‌توان شبکهٔ دوگان را در نظر گرفت و وجوه این شبکهٔ ٦ضلعی را به طور مشابه رنگ‌آمیزی کرد. به بیان دقیق‌تر، شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که یال‌های آن بر یال‌های شبکهٔ مثلثی عمودند و رئوس شبکهٔ مثلثی وسط شش‌ضلعی‌ها قرار دارند که از یال‌های دوگان ساخته شده‌اند. به دلیل تناظر یک به یک بین رئوس شبکهٔ مثلثی و وجوه شش‌ضلعی شبکهٔ دوگان، وجوه مرزی در سمت چپ مبدأ سیاه ودر سمت راست مبدأ سفید و سایر رئوس به طور مستقل و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ سیاه یا سفید رنگ‌آمیزی شده‌اند. خط فاصل یکتایی با شروع از O وجود دارد که وجوه سفید را از وجوه سیاه جدا می‌کند. این خط فاصل γ از مبدأ آغاز می‌شود و شامل یال‌های شبکهٔ شش‌ضلعی است. اگر دوباره قانون این خط فاصل را پس از اعمال مقیاس $\epsilon\gamma$ با $\mathcal{P}^{\epsilon}$ نشان دهیم، به حد $\mathcal{P}^{\epsilon}$ وقتی $\epsilon\to ۰$ علاقه‌مندیم. قضیهٔ زیر را اسمیرنف ارائه داده است.

قضیهٔ ۴. $\lim\limits_{\epsilon\to ۰}\mathcal{P}_{۲}^{\epsilon}$، $SLE(٦)$ است.

نکتهٔ ۵. اگر هر خانه را با احتمال p سفید و با احتمال $۱-p$ سیاه کنیم که $p\neq\frac{۱}{۲}$، آن گاه با نشتی

غیر بحرانی مواجه هستیم. به عنوان مثال اگر $p < \frac{1}{2}$، خانه‌های سفید غالب هستند و مجاور مرز سیاه تنها برآمدگی‌های متناهی از تجمّع سیاه‌ها مشاهده می‌شود. حاصل ضرب این برآمدگی‌ها در ϵ وقتی $\epsilon \to 0$، به صفر همگرا می‌شود و خط فاصل γ^ϵ در حد به قسمت منفی محور x میل می‌کند. به طور مشابه، اگر $p > \frac{1}{2}$ آن گاه قانون $\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{P}^\epsilon = \mathcal{P}$ تنها روی یک خم که همان قسمت مثبت محور x است متمرکز شده است.

تنها به این دلیل نشت روی شبکهٔ مثلثی را ملاحظه کردیم که قضیهٔ اسمیرنف بر این حالت دلالت دارد. اما مسألهٔ مشابه را می‌توان برای شبکه‌های دیگری هم چون شبکهٔ مربعی صورت‌بندی کرد. برای مثال، برای شبکهٔ مربعی مقدار بحرانی نشت رأسی عدد p_c است که به طور صریح به دست نیامده است. امّا خط فاصل دو فاز مانند قبل تعریف می‌شود و حد در مقیاس آن $SLE(6)$ حدس زده شده است.

توجه کنید که در شبکهٔ مثلثی خط فاصل با دانستن رنگ خانه‌های مجاورش شناخته می‌شود. به بیان دقیق‌تر، اگر $\gamma(t)$ خط فاصل در زمان t و A مجموعه‌ای از خانه‌ها باشند که از مبدأ فاصله دارند، رنگ خانه‌های A برای $t < \tau$ بر $\gamma(t)$ تأثیری ندارند که در آن τ اولین زمان ورود به A است. این جنبه از خط واصل خاصیت موضعی نامیده می‌شود و در جهت ارائهٔ تعریف دیگری از γ به کار می‌رود. در ابتدا، تنها خانه‌هایی که در مرز $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ قرار دارند، به ترتیب قبل رنگ‌آمیزی شده‌اند. از مبدأ شروع می‌کنیم و به صورت عمودی $\frac{1}{2}$ واحد به بالا می‌رویم تا به مرکز مثلث برسیم. برای رأس مثلث هیچ رنگی در نظر گرفته نشده است. برای این رأس یک سکّهٔ سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر شیر آمد خانهٔ نظیر را سفید و در غیر این صورت سیاه می‌کنیم. اگر این خانه سفید رنگ‌آمیزی شد در جهت یال دوگان یک واحد به چپ می‌پیچیم تا به مرکز جدیدی برسیم و در غیر این صورت به راست می‌پیچیم. این فرایند را تکرار می‌کنیم. اگر در هر مرحله به خانه‌ای رسیدیم که رنگ‌آمیزی نشده بود برای آن یک سکّه پرتاب می‌کنیم و بر حسب برآمد سکّه جهت حرکت بعدی را معیّن می‌کنیم. آن چه به دست می‌آید همان قانون خط فاصل در مدل نشت را دارد.

به عنوان آخرین مثال، نسخهٔ غیر موضعی از خط فاصل نشت را که روح آن به LERW بسیار نزدیک است، در نظر می‌گیریم. این مدل کاوش‌گر همساز نام دارد و توسط شرام و شفیلد معرفی شده است. ساخت کاوش‌گر همانند نشت است به جز این که قانون متفاوتی برای رنگ‌آمیزی به کار می‌بریم. اگر کاوش‌گر $\gamma(n)$ در مرحلهٔ n ام خانهٔ بدون رنگ a_n را پیش رو داشته باشد، a_n را با احتمال p_n سفید و با احتمال $1 - p_n$ سیاه می‌کنیم که در آن $p_n = f(a_n)$ و f تابع همساز گسسته با شرط مرزی به این صورت است که اگر a_n خانه‌ای باشد که در زمان n رنگ‌آمیزی شده است و اگر رنگ آن سفید است قرار می‌دهیم $f(a) = 1$ و در غیر این صورت $f(a) = 0$ به بیان دیگر، با شروع از a_n روی شبکهٔ مثلثی یک قدم زن تصادفی متقارن را تا رسیدن به خانه‌های رنگ‌آمیزی شده، به راه می‌اندازیم. در این صورت رنگ خانه‌ای که قدم زن تصادفی به آن برخورد کرده را به a_n نسبت می‌دهیم.قضیهٔ زیر توسط شرام و شفیلد ثابت شده است.

قضیهٔ ٦. قانون $\mathcal{P}^\epsilon$ مربوط به کاوش‌گر با اعمال مقیاس $\epsilon\gamma$ به قانون $SLE(4)$ میل می‌کند.

نکتهٔ ۷. توجه کنید که در مدل‌های ارائه شده خم‌های $\epsilon\gamma$ بدون پرمایش در نظر گرفته شده‌اند. امّا برای همگرایی $\mathcal{P}^\epsilon$ پرمایش $\epsilon\gamma = \gamma^\epsilon$ به طوری که فشردگی خانوادهٔ $\mathcal{P}^\epsilon$ قابل بحث باشد، مورد نیاز است. همان طور که در تحوّل لُونر خواهیم دید، بهترین پرمایش برای γ^ϵ انتخاب t به صورت $2t = hcap\gamma^\epsilon[0,t]$ است که در آن $hcap$ ظرفیت نیم‌صفحهٔ بالایی است و در بخش آتی تعریف می‌شود (ضریب ۲ در $2t$ برای حفظ یک سنّت است و اهمیّت خاصی ندارد).

۳. تحوّل لُونر

در بخش قبلی، خم‌های تصادفی مختلف γ را در نیم‌صفحهٔ بالایی با $\gamma(0) = 0$ و $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$ تعریف کردیم. می‌توان این مدل‌ها را در دامنه‌های همبند سادهٔ U مطالعه کرد. به این صورت که دو نقطهٔ ثابت a و b روی ∂U در نظر گرفته شده است و خم تصادفی ما در U، a را به b وصل می‌کند. قانون این خم تصادفی را با $\mathcal{P}_{a,b;U}$ نشان می‌دهیم. همان‌طور که قبلاً گفتیم انتظار داریم قانون $\mathcal{P}_{a,b;U}$ ناوردای همدیس باشد. برای وضوح بیشتر اگر $f : U \to V$ نگاشت همدیسی باشد که $f(U) = V$، و اگر f توسعهٔ پیوسته به a و b داشته باشد، چنین fی یک نگاشت $\tilde{f} : \Gamma(a,b,U) \to \Gamma(f(a), f(b), V)$ القا می‌کند که در آن $\Gamma(a,b,U)$ مجموعهٔ خم‌هایی در U است که a را به b وصل می‌کندو در حقیقت $\tilde{f}$ توسط $\tilde{f}(\gamma) = f\circ\gamma$ تعریف می‌شود. در این جا ناوردایی همدیس یعنی برای هر تابع همدیس f داریم:

$$\mathcal{P}_{f(a),f(b);f(U)} = \mathcal{P}_{a,b;U} \circ \tilde{f}^{-1} \ . \qquad (3.1)$$

انتظار می‌رود که $\mathcal{P}_{a,b,U}$ از نوعی خاصیت مارکفی بهره‌مند باشد. برای توضیح این مطلب، فرض می‌کنیم که $\mathcal{P}_{a,b,U}$ روی خم‌های ساده متمرکز باشد و $t \in (0,\infty)$. فرض کنید γ طوری پرمایش شده باشد که $a = \gamma(0)$ و $\gamma(\infty) = b$. خاصیت مارکف این است که:

$$\mathcal{P}_{a,b;U}(\cdot|\gamma[0,t]) = \mathcal{P}_{\gamma(t),b;U\setminus\gamma[0,t]}(.) \qquad (3.2)$$

توجه کنید که به دلیل سادگی خم γ، $V = U\setminus\gamma[0,t]$ هم‌بند ساده است. به عنوان مثال، اگر $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{0,\infty;\mathbb{H}}$، آن گاه (۳.۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathcal{P}(\cdot|\gamma[0,t]) = \mathcal{P}_{0,\infty;U\setminus\gamma[0,t]}(.) \ . \qquad (3.3)$$

به منظور استفاده از (۳.۱)، می‌خواهیم صورتی از آن را به کار بریم که در آن $\mathbb{H}\setminus\gamma[0,t]$ با $\mathbb{H}$ جایگزین شده باشد و خاصیت (۳.۲) تنها بر حسب $\mathcal{P}$ بیان شود. به این منظور به مطالعهٔ دقیق نگاشت‌های همدیس از $\mathbb{H}\setminus\gamma[0,t]$ به روی $\mathbb{H}$ نیاز داریم. اکنون به جایی رسیدیم که نظریهٔ لولر

ایفای نقش می‌کند.
برای سادگی $\gamma[0,t]$ را با K یا K_t نشان می‌دهیم و به مطالعهٔ نگاشت‌های همدیس g که $\mathbb{H}\backslash K$ را به روی $\mathbb{H}$ می‌نگارند، می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که طبق قضیهٔ نگاشت ریمان برای دو دامنهٔ هم‌بند سادهٔ $U, V \neq \mathbb{C}$ نگاشت همدیسی موجود است که U را به روی V می‌نگارد. در حقیقت اگر $U = B(0,1)$ و $a \in V$ دلخواه باشد، نگاشت همدیسی که U را به روی V می‌برد و $f(0) = a$ و $f'(0) > 0$ یکتا است. این بدان معنی است که فضای نگاشت‌های همدیس از U به روی V سه بعدی است. دو درجهٔ آزادی برای انتخاب $f(0) = a \in \mathbb{C}$ است و درجهٔ آزادی باقی‌مانده مربوط به انتخاب $f'(0) \in \mathbb{R}$، f را به طور یکتا معیّن می‌کند. به این نکته اشاره می‌کنیم که تابع f به نقطهٔ $b \in \partial U$ توسعهٔ پیوسته دارد اگر این نقطه، نقطهٔ قابل دسترس مرز باشد. برای جزئیات بیشتر به کتاب‌های آنالیز مختلط استاندارد مراجعه کنید.
برای اهداف خود در نظر داریم که قضیهٔ نگاشت ریمان را برای $U = \mathbb{H}\backslash K$ و $V = \mathbb{H}$ به کار بریم. در این جا K یک $\mathbb{H}$−پوش است، یعنی K فشرده است و $\mathbb{H}\backslash K$ همبند ساده است. نگاشت همدیس g را از $\mathbb{H}\backslash K$ به $\mathbb{H}$ طوری انتخاب می‌کنیم که $g(\infty) = \infty$. بنابراین تمام نقاط مرزی $\partial(\overline{\mathbb{H}}\backslash K) \cap \mathbb{R}$ قابل دسترس هستند. به بیان دیگر، اگر $a \in \partial(\overline{\mathbb{H}}\backslash K) \cap \mathbb{R}$، آن گاه $g(a)$ را می‌توان با استفاده از توسعهٔ پیوسته تعریف کرد. به علاوه، $g(a) \in \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$. با استفاده از اصل انعکاس شوارتز g را به نیم‌صفحهٔ پایین گسترش می‌دهیم. دقیق‌تر این که اگر $B(0,r_0)$ گویی باشد که $K \subseteq B(0,r_0)$ آن گاه g توسعه‌ای تحلیلی به $\mathbb{C}\backslash B(0,r_0)$ دارد. حال به بسط لوران حول ∞ نگاه می‌کنیم. (توجه کنید که ∞ نقطهٔ درونی $\mathbb{C}\backslash B(0,r_0)$ است). چون $g(\infty) = \infty$، بسط به شکل $g(z) = a_1 z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + O(z^{-2})$ است. با قراردادن $g_K(z) = \frac{g(z)-a}{a_1}$، g_K نگاشتی همدیس از $\mathbb{H}\backslash K$ به روی $\mathbb{H}$ است و بسط آن وقتی $z \to \infty$ به صورت زیر است:

$$g_K(z) = z + \frac{b(K)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \qquad (3.4)$$

می‌توان نشان داد که فقط یک نگاشت همدیس $g_K : \mathbb{H}\backslash K \to \mathbb{H}$ وجود دارد که در ∞ $g_K(z) = z + O(\frac{1}{z})$، یعنی $b = b(K)$ در (۳.۴) به طور یکتا تعیین می‌شود. با استدلالی استاندارد نشان داده می‌شود که $b(K) \geq 0$ و اگر $K_1 \subseteq K_2$ آن گاه $b(K_1) \leq b(k_2)$. ثابت $b(K)$ $\mathbb{H}$−ظرفیت نامیده می‌شود و با $hcap(K)$ نشان داده می‌شود.
اکنون به مسألهٔ اصلی برمی‌گردیم و خم سادهٔ $\gamma : [0,\infty) \to \overline{\mathbb{H}}$ با $\gamma(0) = 0$ و $\gamma(0,\infty) \subseteq \mathbb{H}$ را در نظر می‌گیریم. از آن چه تاکنون بیان شد نتیجه می‌شود که $g_t := g_{K_t} : \mathbb{H}\backslash K_t \to \mathbb{H}$ یکتایی وجود دارد که:

$$g_t(z) = z + \frac{hcap(K_t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \ z \to \infty \qquad (3.5)$$

که در آن $K_t = \gamma[0,t]$. به جای $hcap(K_t)$، می‌نویسیم $b(t)$. لُونر مشاهده کرد که صورت ساده‌ای برای تحوّل g_t بر حسب t وجود دارد. قضیهٔ زیر از لُونر است.

قضیهٔ ۱. اگر $b(t)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آن گاه

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{\dot{b}(t)}{g_t(z)-\xi(+)} \tag{۳.٦}$$

که در آن $\xi(t) = g_t(\gamma(t))$.

اکنون بیایید نسبت به (۳.٦) حسّی پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که $\gamma(t)$ نوک خم $\gamma[\circ, t]$ است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، $\partial(\mathbb{H}\backslash K_t) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{\circ\}$ از نقاط قابل دسترس تشکیل شده است. امّا $\gamma(s)$ برای $s < t$ هرگز قابل دسترس نیست. وقتی از چپ یا راست به $\gamma(s)$ نزدیک می‌شویم به دو حد مختلف می‌رسیم. $\gamma(t)$ چنین وضعی ندارد و g_t را می‌توان به طور پیوسته به $\gamma(t)$ توسعه داد.
اکنون طرحی کلّی از اثبات (۳.٦) را ارائه می‌دهیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم $g_{t+\epsilon} = g_{t,t+\epsilon} \circ g_t$ که در آن $g_{t,t+\epsilon} = g_{g_t(\gamma[t,t+\epsilon])}$. داریم:

$$\frac{1}{\epsilon}\left[g_{t+\epsilon}(z) - g_t(z)\right] = \frac{1}{\epsilon}\left[g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z}\right]$$

که در آن $\hat{z} = g_t(z)$ و $K_\epsilon = g_t(\gamma[t, t+\epsilon])$. حال باید نشان دهیم:

$$\lim_{\epsilon\to\circ} \frac{1}{\epsilon}\left[g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z}\right] = \frac{\dot{b}(t)}{\hat{z}-\xi(t)} \ . \tag{۳.۷}$$

توجه کنید که $\gamma(\circ) = \circ$، امّا اکنون K_ϵ خم کوتاهی است که از $\xi(t) = g_t(\gamma(t))$ شروع می‌شود و مشاهده می‌کنیم که $g_{A-a}(z) = g_A(z+a) - a$. بنابراین،

$$g_{K_\epsilon}(\hat{z}) = g_{\hat{K}_\epsilon}(\hat{z} - \xi(t)) + \xi(t) \ .$$

اکنون سمت راست را بسط می‌دهیم،

$$g_{K_\epsilon}(\hat{z}) = \hat{z} + \frac{hcap(K_\epsilon)}{\hat{z}-\xi(t)} + O\left(\frac{1}{(\hat{z}-\xi(t))^2}\right) \ .$$

می‌توان درمورد جملهٔ آخر حرف بیشتری گفت:

$$\left|g_{K_\epsilon}(\hat{z}) - \hat{z} - \frac{hcap(K_\epsilon)}{\hat{z}-\xi(t)}\right| < C_\circ \frac{hcap(K_\epsilon)diam(K_\epsilon)}{(\hat{z}-\xi(t))^2} \ . \tag{۳.۸}$$

به علاوه، چون $g_{t,t+\epsilon} = g_{g_t(\gamma[t,t+\epsilon])}$، می‌توان با استفاده از بسط، g_K را بر حسب $hcap(K_\epsilon)$ نوشت و به دست آورد:

$$hcap(K_{t+\epsilon}) = hcap(K_t) + hcap(K_\epsilon) \ .$$

یعنی، $hcap(K_\epsilon) = b(t+\epsilon) - b(t)$. از این و (۳.۸)، (۳.۷) حاصل می‌شود.
در حالت کلّی انتظار نمی‌رود که $b(t) = hcap(\gamma[\circ, t])$ مشتق‌پذیر باشد. امّا می‌توان نشان داد که b اکیداً صعودی و پیوسته است. با پذیرفتن این مطلب γ را به $\overline{\gamma} = \gamma \circ b^{-1}$ تبدیل می‌کنیم. به این منظور که:

$$\begin{aligned} hcap(\overline{\gamma}\,[\circ,t]) &= hcap(\gamma\,[\circ,b^{-1}(t)]) \\ &= b\circ b^{-1}(t) = t\ . \end{aligned}$$

این بدین معنی است که با تغییر پرمایش، همیشه داریم $hcap(\overline{\gamma}\,[\circ,t]) = t$. در حقیقت سنّت بر این است که پرمایش طوری باشد که:

$$hcap(\overline{\gamma}\,[\circ,t]) = ۲t\ .$$

به طوری که در بخش آینده خواهیم دید، به بررسی حالتی که در آن $\xi(t)$ داده شده است نیاز داریم و نیز یافتن خم γ که g_t نظیر آن از $\xi(t)$ به دست آید. این سؤال هوشمندانه‌تری است و در بخش بعدی به آن می‌پردازیم. امّا اگر ξ داده شده پیوسته باشد، نشان می‌دهیم جواب یکتای g_t برای معادلهٔ زیر:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{۲}{g_t(z)-\xi(t)} & t > \circ \\ g_\circ(z) = z \end{cases} \tag{۳.۹}$$

یک دامنهٔ هم‌بند سادهٔ مناسب $\mathbb{H}_t = \mathbb{H}\backslash K_t$ را به روی $\mathbb{H}$ می‌برد که $hcap(K_t) = ۲t$. امّا در حالت کلّی این آرزوی دور و درازی است. نتیجه می‌شود که اگر ξ به حد کافی هموار باشد چنین γای موجود است. برای مثال، ثابت $C_۱$ به گونه‌ای موجود است که اگر برای یک $C < C_۱$ و برای هر t و s داشته باشیم:

$$|\xi(t) - \xi(s)| \le C|\sqrt{|t-s|} \tag{۳.۱۰}$$

آن گاه چنین γی ساده‌ای موجود است. امّا اگر بهترین C ممکن برای برقراری (۳.۱۰) از $C_۱$ بزرگ‌تر باشد، ممکن است چنین γ ساده‌ای موجود نباشد.

۴. تحوّل شرام ــ لُونر

بر اساس آن چه در بخش ۳ بحث کردیم، به شناختن اندازهٔ احتمال $\mathcal{P}$ روی فضای Γ از خم‌های سادهٔ $\gamma : [\circ,\infty) \to \mathbb{H}$ که $\gamma(\circ) = \circ$ و $\gamma(\infty) = \infty$ علاقه‌مندیم. این اندازه در شرایط ناوردایی (۳.۱) و (۳.۳) صدق می‌کند. نگاشت همدیس $g_t : \mathbb{H}_t \to \mathbb{H}$ را در دو طرف (۳.۳) به کار می‌بریم. بنابر (۳.۱) سمت راست (۳.۳) دوباره $\mathcal{P}$ می‌شود. سمت چپ (۳.۳) قانون شرطی خم $\widetilde{\gamma}(s) = g_t(\gamma(s+t)) - g_t(\gamma(t))$، به شرط $\gamma\,[\circ,t]$ و بر حسب $\mathcal{P}$ است. یعنی:

$$\mathcal{P}(\widetilde{\gamma}(s)|\gamma\,[\circ,t]) = \mathcal{P}\ . \tag{۳.۱۱}$$

این بدین معنی است که قانون شرطی $\widetilde{\gamma}$ به شرط $\gamma\,[\circ,t]$ قانون $\mathcal{P}$ است و از $\gamma\,[\circ,t]$ مستقل است. این به ما امکان ساختن $\mathcal{P}$ از روی دو نسخهٔ مستقل $\mathcal{P}$ را به روش آتی می‌دهد. فرض کنید $\gamma^۱$ و

$\gamma^{۲}$ دو خم مستقل با توزیع $\mathcal{P}$ باشند. فرض کنید که $g^{۱}$، $g^{۲}$ نگاشت‌های همدیس و $\xi^{۱}$ و $\xi^{۲}$ به ترتیب پارامتر ξ آن‌ها باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma^{۱}(t) & t \leq T \\ (g^{۱}_T)^{-۱}(\gamma^{۲}(t-T) + \xi^{۱}(T)) & t > T \end{cases}$$

$$g_t(z) = \begin{cases} g^{۱}_t(z) & t \leq T \\ g^{۲}_{t-T}(g^{۲}_T - \xi^{۱}(T)) + \xi^{۱}(T) & t > T \end{cases} .$$

در این صورت قانون γ همان $\mathcal{P}$ است و نگاشت همدیس نظیر آن g_t است. از $\frac{d}{dt}g^i_t(z) = \frac{۲}{g^i_t - \xi^i(t)}$ برای $i = ۱, ۲$ نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{۲}{g_t(z) - \xi(t)}.$$

که در آن:

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi^{۱}(t) & t \leq T \\ \xi^{۱}(T) + \xi^{۲}(t-T) & t > T \end{cases} .$$

از این مطلب برمی‌آید که قانون ξ همان قانون $\xi^{۱}$ و $\xi^{۲}$ است. بنابه قضیهٔ مشهوری از ایتو، فرآیند پیوسته با خاصیت فوق‌الذکر یک حرکت براونی با روند ثابت است.همان طور که دیده می‌شود، تمام مدل‌های میکروسکپی که شرح دادیم دارای این خاصیّت اضافی هستند که می‌گوید $\mathcal{P}$ تحت انعکاس ناوردا است یعنی قانون آن با $\overline{\gamma}-$ یکسان است. در این جا، $\overline{z}$، مزدوج z است. نتیجه می‌گیریم که ξ همان قانون $\xi-$ را دارد. بر این اساس و آن چه گفته شد ξ تنها یک حرکت براونی است. اگر β حرکت براونی استاندارد باشد، برای $\kappa \geq ۰$ داریم:

$$\xi(t) = \sqrt{\kappa}\beta(t) \ .$$

قانون متناظر $\mathcal{P}$ را با $SLE(\kappa)$ نشان می‌دهیم.

اگر $\kappa > ۰$ داده شود، (۳.۹) را برای $\xi = \sqrt{\kappa}\beta$ حل می‌کنیم. $g_t : \mathbb{H}_t \to \mathbb{H}$ با $\mathbb{H}_t = \mathbb{H} \backslash K_t$ به دست می‌آید. امّا، شرط (۳.۱۰) برای چنین ξ برقرار نیست و واضح نیست که K_t از یک خم γ آمده باشد، چه برسد به یک خم ساده! قضیهٔ زیر بیان می‌کند که چنین γای وجود دارد و برای κهای کوچک، ساده است. برای اثبات به لُونر [L] ارجاع می‌دهیم.

قضیهٔ ۱. برای هر $\kappa > ۰$، حد زیر تقریباً همیشه وجود دارد:

$$\gamma(t) := \lim_{\substack{z \to \xi(t) \\ z \in \mathbb{H}}} g^{-۱}_t(z)$$

به علاوه، $\mathbb{H}_t = \mathbb{H}\backslash K_t$ که در آن K_t مؤلفهٔ همبندی بی‌کران $\mathbb{H}\backslash\gamma\,[\circ, t]$ است.

قضیهٔ ۲. اگر $\kappa \leq ۴$، آن گاه γ تقریباً همیشه ساده است. اگر $۴ < \kappa < ۸$، آن گاه γ خود و $\mathbb{R}$ را قطع می‌کند و $\bigcup_{t>\circ} K_t = \mathbb{H}$، و اگر $\kappa \geq ۸$ آن گاه γ فضا پرکن است.

برای درک اهمیت مقادیر $\kappa = ۴, ۸$، فرض می‌کنیم $Z_t = Z_t(z) = \frac{۱}{\sqrt{\kappa}} g_t(z) - \beta(t)$. آن گاه Z_t یک فرایند شبه بسل با پارامتر $\hat{\kappa} = \frac{۲}{\kappa}$ است.
به بیان دقیق‌تر داریم:

$$dZ = \frac{\hat{\kappa}}{Z} dZ - d\beta \ .$$

برای Z داده شده، معادلهٔ زیر:

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{۲}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}\beta(t)}$$

به محض این که $g_t(z) - \sqrt{\kappa}\beta(t)$ صفر شود، دیگر جواب ندارد؛ یعنی $Z_t(z)$ صفر می‌شود. تعریف می‌کنیم:

$$T(z) = \inf\{t : Z_t(z) = \circ\},$$

در این صورت

$$K_t = \{z : T(z) \leq t\}.$$

اگر نقطهٔ آغازین $z \in \mathbb{R}$ باشد، آن گاه $g_t(z)$ تا زمانی که $t < T(z)$، در $\mathbb{R}$ می‌ماند. در این حالت $Z_t(z) \in \mathbb{R}$ برای $t < T(z)$ و $Z_t(z)$ یک فرایند بسل استاندارد با پارامتر $\hat{\kappa}$ است. در این ارتباط لم زیر را داریم.

لم ۳. فرض کنید Z یک فرایند بسل در $\mathbb{R}$ با پارامتر $\hat{\kappa}$ باشد و $T(x) = \inf\{t : Z_t(x) = \circ\}$، که در آن x نقطهٔ آغازین است و $x > \circ$.

۱− اگر $\hat{\kappa} \geq \frac{۱}{۲}$، آن گاه تقریباً همیشه و برای هر $x > \circ$، $T(x) = \infty$.

۲− اگر $\hat{\kappa} < \frac{۱}{۲}$، آن گاه تقریباً همیشه و برای هر $x > \circ$، $T(x) < \infty$.

۳− اگر $\hat{\kappa} \leq \frac{۱}{۴}$، آن گاه تقریباً همیشه $\circ < x < y$ نتیجه می‌دهد $T(x) < T(y)$.

۴− اگر $\frac{۱}{۴} < \hat{\kappa} < \frac{۱}{۲}$ و $\circ < x < y$ آن گاه $\mathbb{P}(T(x) = T(y)) > \circ$.

برای چشیدن طعم اثبات قضیهٔ ۲، فرض کنید $\kappa \leq ۴$. یعنی $\hat{\kappa} \geq \frac{۱}{۲}$ و با استفاده از لم فوق برای هر $x \neq \circ$، $T(x) = \infty$. این یعنی $K_t \cap \mathbb{R}\backslash\{\circ\} = \emptyset$ و بنابراین γ نمی‌تواند با $\mathbb{R}\backslash\{\circ\}$

اشتراک داشته باشد. (به یاد آورید که $\gamma(\circ) = \circ$). به علاوه، اگر خم خودش را قطع کند مثلاً برای $t_۱ < t_۲$، $\gamma(t_۱) = \gamma(t_۲)$، آن گاه پس از اعمال $g_{t_۱}$، خم $\tilde{\gamma}(s) := g_{t_۱}(\gamma(s+t)) - g_{t_۱}(\gamma(t))$ اکنون $\mathbb{R}$ را قطع می‌کند. چون $\tilde{\gamma}$ نیز $SLE(\kappa)$ است، کار تمام است.

۵. نگاهی دیگر بر مدل‌های میکروسکوپی

اکنون تجاربی دربارهٔ SLE کسب کرده‌ایم. بیایید به مدل‌های میکروسکوپی نگاه دیگری بیندازیم و دلایل مؤید حدس‌هاو نتایج بخش ۲ را بیابیم.
از کاوش‌گر همساز آغاز می‌کنیم. می‌خواهیم در مورد برخی دلایل در تأیید قضیهٔ ٦ بخش ۱ بحث کنیم. همگرایی کاوش‌گر همساز را به $SLE(۴)$ توجیه می‌کند. به عنوان مثال اگر در مرحلهٔ n، V_n مجموعهٔ خانه‌های رنگ‌آمیزی شده و h_n تابع همساز گسسته با شرط مرزی زیر باشد:

$$h_n(a) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a \text{ سفید باشد} \\ \circ & \text{اگر } a \text{ سیاه باشد} \end{cases},$$

آن گاه برای هر رأس v فرایند $\{h_n(v) : n = \circ, ۱, \cdots\}$ یک مارتینگل است. فرض کنید $u_t(z)$ متناظر ماکروسکپی $h_n(v)$ باشد. انتظار می‌رود u خواص زیر را داشته باشد:

۱− برای هر z، $\{u_t(z)\}_{t\geq\circ}$ یک مارتینگل است.

۲− برای هر t، u_t روی $\mathbb{H}\backslash\gamma[\circ, t]$ همساز با شرط مرزی زیر است:

$$u_t(z) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } z \in \mathbb{R}^- \text{ یا } z = \gamma_l(\theta) \text{ برای } \theta < t \\ ۱ & \text{اگر } z \in \mathbb{R}^+ \text{ یا } z = \gamma_r(\theta) \text{ برای } \theta < t \end{cases}.$$

در این جا منظور از $z = \gamma_l(\theta)$ ($\gamma_r(\theta)$) این است که z از چپ (راست) به $\gamma(\theta)$ نزدیک می‌شود. سپس، با استفاده از g_t تعریف می‌کنیم $\tilde{u} = u \circ g_t^{-۱}$. اکنون تابعی همساز روی $\mathbb{H}$ با شرط مرزی زیر داریم:

$$\tilde{u}_t(z) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } z \in \mathbb{R} \text{ و } z < \xi(t) \\ ۱ & \text{اگر } z \in \mathbb{R} \text{ و } z > \xi(t) \end{cases}.$$

تنها یک تابع همساز با این شرط مرزی وجود دارد که در شرط زیر صدق کند:

$$\tilde{u}(z) = ۱ - \tfrac{۱}{\pi}\arg(z - \xi(t))$$

از این بحث می‌فهمیم که تابع زیر یک مارتینگل است:

$$u_t(z) = ۱ - \tfrac{۱}{\pi}\arg(g_t(z) - \xi(t))$$

بنابراین تابع زیر یک مارتینگل است:

$$\arg(g_t(z) - \xi(t)) = \arg(\sqrt{\kappa} Z_t(z))$$

چون $\arg Z = \operatorname{Im}(\log Z)$، فرایند زیر را در نظر می‌گیریم:

$$M_t = \log Z_t(z)$$

و می‌پرسیم: برای چه مقداری از κ فرایند $\log Z_t(z)$ یک مارتینگل است؟ بنا به حسابان ایتو داریم:

$$d(\log Z) = (\hat{\kappa} - \tfrac{1}{۲})\tfrac{1}{Z} dt - \tfrac{1}{Z} d\beta.$$

M_t یک مارتینگل است اگر و تنها اگر $\hat{\kappa} = \frac{1}{۲}$، یعنی $\kappa = ۴$. این بحث توضیح این مطلب است که چرا $SLE(۴)$ حد در مقیاس کاوش‌گر همساز است.

اکنون به مدل نشت برمی‌گردیم. به یادآورید که از دیدگاه میکروسکوپی خط فاصل نشت دارای خاصیت موضعی است. اکنون این خاصیت را برای SLE ها صورت‌بندی می‌کنیم.

تعریف ۱. می‌گوییم $SLE(\kappa)$ دارای خاصیت موضعی است اگر K_t نظیر آن خاصیت زیر را داشته باشد:

برای هر $\mathbb{H}$–پوش A با فاصلهٔ مثبت از مبدأ، اگر $\tau_A = \inf\{t : K_t \cap A \neq \emptyset\}$. آنگاه فرایند $\{g_A(K_t) : t < \tau_A\}$ یک تغییر زمان $SLE(\kappa)$ است.

به بیانی هدف ما این است که فرایند $\{K_t : t < \tau_A\}$، $SLE(\kappa)$ باشد امّا برای مجموعهٔ $\mathbb{H}\backslash A$ به جای $\mathbb{H}$. امّا می‌توانیم با به کار بردن g_A به $\mathbb{H}$ برگردیم و $SLE(\kappa)$ را با همان κ به دست بیاوریم. در این ارتباط، قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲. $SLE(\kappa)$ دارای خاصیت موضعی است اگر و تنها اگر $\kappa = ٦$.

اکنون خاصیت مهمی از SARW را که به خاصیت تحدید معروف است بیان می‌کنیم. می‌توان به راحتی نشان داد که اگر $\mathcal{P}^\delta$ قانون SARW روی $\mathbb{H} \cap \delta\mathbb{Z}^۲$ باشد و اگر A^δ یک $\mathbb{H}$–پوش با $\operatorname{dist}(۰, A^\delta) > ۰$ باشد که در آن ∂A^δ اجتماعی مناسب از یال‌های $\mathbb{Z}^۲$ است، آن گاه قانون زیر:

$$\mathbb{P}^{\delta,A} = \mathbb{P}^\delta(\cdot | \text{برخورد نکند } A^\delta \text{ به } \gamma^\delta)$$

همان قانون SARW است. خاصیت تحدید را برای $SLE(\kappa)$ تحلیل می‌کنیم.

تعریف ۳. گوییم $SLE(\kappa)$ خاصیت تحدید را دارد اگر قانون آن برای هر $\mathbb{H}$–پوش K و A که $\operatorname{dist}(A, ۰) > ۰$ در شرط زیر صدق کند:

$$\mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset | \gamma \cap A = \emptyset) = \mathbb{P}(g_A^{-۱}(\gamma) \cap K = \emptyset) \ . \tag{۵.۱}$$

قضیهٔ ۴. (لولر ـ شرام ـ ورنر) $SLE(\kappa)$ خاصیت موضعی دارد اگر و تنها اگر $\kappa = \frac{۸}{۳}$.
اثبات قضیهٔ فوق بر اساس برابری زیر است:

$$\mathbb{P}(\gamma \cap A = \emptyset) = (g'_A(۰))^{\frac{۵}{۸}}$$

با قبول این برابری، داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset | \gamma \cap A = \emptyset) &= \mathbb{P}(\gamma \cap K = \emptyset, \gamma \cap A = \emptyset) \big/ \mathbb{P}(\gamma \cap A = \emptyset) \\
&= \left(g'_{A\cap K}(۰) \big/ g'_A(۰)\right)^{\frac{۵}{۸}} \\
&= \left(g'_A(۰) g'_{g_A(K)}(g_A(۰)) \big/ g'_A(۰)\right)^{\frac{۵}{۸}} \\
&= \left(g'_{g_A(K)}(g_A(۰))\right)^{\frac{۵}{۸}} \\
&= \mathbb{P}(g_A(K) \cap \gamma = \emptyset)
\end{aligned}$$

مراجع

[1] G. Lawler, Conformally Invariant Processes in The Plane, *AMS*(2005).

[2] G. Lawler, O. Schramm and W. Werner, Conformal Invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Annals of Probability*, Vol.32, 939-995(2005).

[3] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math*, 118, 221-288(2000).

[4] O. Schramm, . Sheffield, The harmonic explorer and its convergence to SLE(4), *arXiv: math*.PR/0310210(2003).

[5] S. Smirnov, Critical percolation in the plane I. Conformal invariance and Cardy's formula II. Continuum scaling limit. Preprint

ترجمه: آرش فهیم
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: arashfahim@yahoo.com

تألیف: فریدون رضاخانلو
Fraydoun Rezakhanlou
University of California,
970 Evans Hall# 3840.
Berkeley, CA 94720-3840 USA
rezakhan@math.berkeley.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۷ (پاییز ۱۳۸۵) صص. ۲۱ تا ۳۶

فاکتوریل تعمیم یافته

منصور معتمدی

تقدیم به استاد ارجمند دکتر جواد بهبودیان

چکیده

تابع فاکتوریل با استفاده از مفهومی بنام $P-$ ترتیب، به هر زیرمجموعهٔ حلقهٔ اعداد صحیح تعمیم‌پذیر است. هدف این نوشتار آگاهی از چگونگی این تعمیم است. در پایان به مفهوم ایدال فاکتوریل در حوزه‌های ددکیند اشاره خواهد شد.

مقدمه

تابع فاکتوریل را که بر مجموعه اعداد طبیعی تعریف می‌شود، می‌توان بر هر زیر مجموعه اعداد صحیح تعریف کرد. این کار با استفاده از مفهومی به نام $P-$ترتیب که توسط باهرگاوا[1] معرفی شده است، انجام می‌گیرد. وی به خاطر پژوهش‌هایی که در این زمینه انجام داده موفق شده است جایزهٔ دومرگَن را در سال ۱۹۹۶ میلادی دریافت کند. این جایزه هر ساله از طرف انجمن ریاضی آمریکا[2]، مجمع ریاضی آمریکا[3] و مجمع ریاضیات صنعتی و کاربردی[4] به افرادی که پژوهش های ارزشمندی در سطح کارشناسی انجام می‌دهند، اهدا می‌شود. جایزهٔ مذکور در سال ۲۰۰۳ میلادی به سبب ادامه تحقیقات در همین زمینه به ام. وود[5] تعلق گرفت. هدف این نوشتار معرفی مفهوم $P-$ ترتیب و استفاده از آن در تعمیم تابع فاکتوریل است. در بخش نخست به بعضی پیش نیازها، اشاره می‌شود. در بخش دوم یکی از موارد نمود مفهوم فاکتوریل را عنوان می‌کنیم. در بخش سوم معرفی حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با مقدار صحیح مورد نظر است. در بخش چهارم مفهوم $P-$ ترتیب معرفی و مثال هایی بیان می‌شود. در بخش پایانی تعمیم‌های بیشتر به حوزه‌های ددکیند به اختصار خواهد آمد.

1) Bhargava 2) AMS 3) MAA 4) SIAM 5) M. Wood

۱. پیش نیازها

تعریف ۱.۱. اگر n یک عدد طبیعی باشد، تابع فاکتوریل به استقرا چنین تعریف می‌شود

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 1 \\ (n-1)!n & \text{اگر } n > 1 \end{cases}$$

برای سهولت در محاسبات قرار می‌دهیم $0! = 1$.
بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

قضیهٔ ۱.۱. برای اعداد صحیح a، b و n برابری زیر همواره برقرار است:

$$\left[\frac{[\frac{n}{a}]}{b}\right] = \left[\frac{n}{ab}\right]$$

(نماد $[x]$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیحی که در x می‌گنجد.)

برهان. درستی برابری را می‌توان با استفاده از الگوریتم تقسیم به اثبات رساند.

نتیجهٔ ۱.۱. اگر p عدد اوّلی باشد، آن گاه

$$\left[\frac{[\frac{n}{p^\alpha}]}{p^\beta}\right] = \left[\frac{n}{p^{\alpha+\beta}}\right].$$

برهان. بدیهی است.

نتیجهٔ ۲.۱. اگر $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ و n_i ها اعداد طبیعی باشند، آن گاه

$$\left[\frac{n}{a}\right] \geq \left[\frac{n_1}{a}\right] + \left[\frac{n_2}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{n_k}{a}\right].$$

برهان. اگر فرض کنیم $a_i = \left[\frac{n_i}{a}\right]$، پس برای هر $1 \lneq i \leq k$

$$n_i = aq_i + r_i \qquad 1 \lneq r_i \lneq a$$

و علاوه بر آن $q_i = \left[\frac{n_i}{a}\right]$. از این رو

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = a(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) + r_1 + r_2 + \cdots + r_k$$

و
$$\left[\frac{n}{a}\right] = q_1 + q_2 + \cdots + q_k + \left[\frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_k}{a}\right]$$
بنابراین
$$\left[\frac{n}{a}\right] \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \left[\frac{n_1}{a}\right] + \left[\frac{n_2}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{n_k}{a}\right].$$

نمادگذاری

فرض کنیم p عددی اوّل است. بزرگ‌ترین نمای p که عدد m را می‌شمارد با $e_p(m)$ نشان می‌دهیم. برهان قضیهٔ بعد در کتاب‌های مقدماتی نظریهٔ اعداد وجود دارد.

قضیه ۲.۱. (لژاندر[1]). بزرگ‌ترین نمای عدد اوّل p که $n!$ را می‌شمارد برابر است با
$$e_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^s}\right]$$
با این فرض که $\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right] = 0$.

قضیه ۳.۱. اگر عدد طبیعی n مجموع چند عدد طبیعی دیگر باشد، فاکتوریل مجموع بر حاصل‌ضرب فاکتوریل اجزاء بخش‌پذیر است. یعنی اگر
$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$
آن گاه عبارت
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$
عددی صحیح است.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر یک عدد اوّل در مخرج کسر با نمای مثبتی وجود داشته باشد، در صورت کسر با نمای کمتر ظاهر نمی‌شود. در این صورت تمام عوامل مخرج در صورت وجود خواهند داشت و حاصل عددی است صحیح. برای اثبات ادعا کافی است از نتیجه‌های قضیه ۱.۱ و نیز از قضیه لژاندر استفاده کنیم.

نتیجهٔ ۳.۱. برای تمام اعداد صحیح و نامنفی k و l، $k!l!|(k+l)!$.

برهان. این مورد حالت خاصی است از قضیه قبل. در ضمن توجه می‌کنیم که عبارت $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ و همچنین عبارت مذکور در قضیه ۳.۱ به ترتیب ضرایب دوجمله‌ای و چندجمله‌ای و لزوماً اعداد صحیح‌اند. در این‌جا منظور آن بوده است که از استدلال ترکیبیاتی استفاده نکنیم.

نتیجهٔ ۴.۱. حاصل‌ضرب n عدد صحیح ناصفر متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $k, k+1, \cdots, k+n-1$، n عدد صحیح متوالی باشند.

1) Legendre

عبارت

$$k(k+۱)\cdots(k+n-۱)$$

را می‌توان به صورت

$$\frac{(k+n-۱)!}{(k-۱)!}$$

نوشت. پس رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{k(k+۱)\cdots(k+n-۱)}{n!}=\frac{(k+n-۱)}{(k-۱)!n!}$$

و چون عامل $k+n-۱$ برابر مجموع عوامل n و $k-۱$ در مخرج است، بنا به قضیه ۳.۱ حاصل، عددی است صحیح، پس طرف دوم عبارت بالا عددی است صحیح، از این رو سمت چپ نیز عددی است صحیح. این دعوی، حکم قضیه را به اثبات می‌رساند.
در پایانِ این مقدمه قضیهٔ بنیادی گروه‌های آبلی متناهی ـ تولید شده را بیان می‌کنیم. از این قضیه در بخش ۴ استفاده خواهد شد.

قضیه بنیادی گروه‌های آبلی متناهی ـ تولید شده

فرض کنیم G گروه آبلی متناهی ـ تولید شده باشد. در این صورت G با مجموع مستقیم گروه‌های دوری آزاد و گروه‌های دوری که مرتبه هر یک از آن‌ها توان عددی اوّل است، یک‌ریخت است. به علاوه تعداد گروه‌های دوری آزاد، هم‌چنین اعداد اوّل و مرتبهٔ هر یک از آن‌ها ناوردا است.

۲. مقسوم‌علیه ثابت یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح

یکی از مواردی که تابع فاکتوریل جلوه‌گر می‌شود بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک مجموعه مقادیری است که یک تابع چندجمله‌ای با ضرایب صحیح اختیار می‌کند.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. مقسوم‌علیه ثابت f که آن را با $d(\mathbb{Z},f)$ نشان می‌دهیم، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک تمام اعداد صحیحی است که f روی $\mathbb{Z}$ اختیار می‌کند. پس

$$d(\mathbb{Z},f)=gcd\{f(a):a\in\mathbb{Z}\}$$

که در آن gcd یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک.

مثال ۱.۲. فرض کنیم $f(x)=x^۵+x$. اگر a زوج باشد، $f(a)$ نیز زوج است و اگر a فرد باشد باز هم $f(a)$ زوج است. بنابراین لازم است که $d(\mathbb{Z},f)$ عددی زوج باشد، اما به سبب این که $f(۱)=۲$، $d(\mathbb{Z},f)=۲$. بدیهی است که اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای در عدد طبیعی ضرب شوند، مقسوم‌علیه ثابت آن نیز در همان عدد ضرب می‌شود. بنابراین برای پاسخ به این پرسش

که $d(\mathbb{Z},f)$ چه مقادیری می‌تواند داشته باشد، کافی است که f را یک چندجمله‌ای اوّلیه در نظر بگیریم. چندجمله‌ای $p(x)$ را اوّلیه می‌نامیم اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ضرایب آن برابر با ۱ باشد.

قضیهٔ ۱.۲. (پولیا[1]). اگر p یک چندجمله‌ای اوّلیه و از درجه k باشد، آن گاه $d(\mathbb{Z},p)$، $k!$ را می‌شمارد.

برهان. به سبب این که در بخش ۳ اثبات حالت تعمیم یافته خواهد آمد، به اثبات در این حالت خاص نخواهیم پرداخت. متذکر می‌شویم که برای هر مقسوم علیه $k!$ مانند d یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و از درجه k وجود دارد که مقسوم علیه ثابت آن همان d باشد. اثبات این قسمت سهل است و به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

۳. حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با مقدار صحیح

مفهوم فاکتوریل آشکارا در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های با مقدار صحیح وجود دارد. لازم است که نخست به بیان یک تعریف بپردازیم.

تعریف ۱.۳. اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد قرار می‌دهیم:

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

و اگر $n=0$ قرار می‌دهیم:

$$\binom{x}{0} = 1$$

مجموعهٔ $\{\binom{x}{n}\}_{n=0}^{\infty}$ را مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های دوجمله‌ای (برگرفته از اصطلاح ضرایب دوجمله‌ای) می‌نامیم.

قضیهٔ ۱.۳. مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های دوجمله‌ای پایه‌ای است برای فضای برداری $\mathbb{Q}[x]$ روی Q.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $\{\binom{x}{n}\}_{n=0}^{\infty}$، $\mathbb{Q}[x]$ را تولید می‌کند. از استقرا روی درجه چندجمله‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $f(x)=b$ که در آن b عددی گویاست، پس $f(x)=b\binom{x}{0}$ و پایه استقرا برقرار است. فرض کنیم $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با درجه n است. اینک چندجمله‌ای $a_nn!\binom{x}{n}$ را که یک چندجمله‌ای در $\mathbb{Q}[x]$ است و ضریب x^n در آن برابر a_n می‌باشد در نظر می‌گیریم. اما درجه چندجمله‌ای $g(x)=f(x)-a_nn!\binom{x}{n}$ حداکثر $n-1$ است بنا به فرض $g(x)=\sum_i b_i\binom{x}{i}$ و از این رو $f(x)=a_nn!\binom{x}{n}+\sum_i b_i\binom{x}{i}$. اینک نشان می‌دهیم که $\{\binom{x}{n}\}_{n=0}^{\infty}$ در $\mathbb{Q}[x]$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. فرض کنیم $f(x)=a_0+a_1\binom{x}{1}+\cdots+a_n\binom{x}{n}$ یک ترکیب خطی دلخواه باشد. اگر $f(x)=0$، لازم است که $a_n=0$، زیرا که چندجمله‌ای با

---
1) Polya

نمای n فقط در $\binom{x}{n}$ موجود است. به همین دلیل و با توجه به این که $a_n = ۰$ به ترتیب به استقراء خواهیم داشت $a_{n-۱} = ۰$، $a_{n-۲} = ۰$، $\cdots$ و $a_۰ = ۰$ بنابراین تمام ضرایب صفرند.

تعریف و نمادگذاری. هر چندجمله‌ای با ضرایب گویا را که به عنوان یک تابع از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Q}$ مقادیر صحیح را به مقادیر صحیح می‌نگارد یک چندجمله‌ای با مقدار صحیح می‌نامیم. مجموعه چنین چندجمله‌ای‌ها را با $Int\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم. پس

$$Int(\mathbb{Z}) = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z}\}$$

مثال ۱.۳. تمام چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح یک عضو $Int(\mathbb{Z})$ هستند.

مثال ۲.۳. اگر p عددی اوّل باشد بنا به قضیهٔ کوچک فرما چندجمله‌ای $g(x) = ۱/p(x^p - x)$، با این که ضرایب صحیح نیستند، به ازای هر عدد صحیح یک عدد صحیح است و از این رو $g(x)$ یک عضو $Int(\mathbb{Z})$ است.

لم ۱.۳. برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ چندجمله‌ای

$$\binom{x}{n} \quad = \quad \frac{x(x-۱)\cdots(x-(n+۱))}{n!}$$

یک عضو $Int(\mathbb{Z})$ است.

برهان. الف) اگر $a \geq n$، پس $\binom{a}{n}$ ضریب دوجمله‌ای است و از این رو $\binom{a}{n}$ یک عدد صحیح است.
ب) اگر $۰ \leq a \leq n - ۱$، $x - a$ به موجب تعریف $\binom{x}{n}$ در صورت کسر وجود دارد پس $\binom{a}{n} = ۰$.
پ) اگر $a < ۰$ پس

$$\begin{aligned}\binom{a}{n} &= \frac{a(a-۱)\cdots(a-(n+۱))}{n!} = (-۱)^n \frac{(-a)(۱-a)\cdots(n-۱-a)}{n!} \\ &= (-۱)^n \binom{n-۱-a}{n}\end{aligned}$$

به هر حال مقدار $\binom{x}{n}$ به یکی از حالت‌های فوق منجر می‌شود و اثبات کامل است. به سادگی دیده می‌شود که $Int(Z)$ حلقه‌ای است تعویض‌پذیر و بدیهی است که

$$\mathbb{Z}[x] \subseteq Int(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}[x]$$

این حلقه و تعمیم‌های آن به روی یک حوزه صحیح به تفضیل مورد مطالعه قرار گرفته است. در این نوشتار به این مهم نخواهیم پرداخت. اساسی‌ترین قضیه در این‌باره قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۲.۳. (پولیا). چندجمله‌ای‌های

$$\binom{x}{۰}, \binom{x}{۱}, \ldots, \binom{x}{n}, \cdots$$

یک پایه برای $Int(\mathbb{Z})$ به عنوان یک $\mathbb{Z}$ مدول است.

برهان. بدیهی است که $Int(\mathbb{Z})$ یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول است. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر دنباله $b_\circ، b_\backslash، \cdots، b_n$ چندجمله‌ای‌های

$$g(x) = c_\circ \binom{x}{\circ} + c_1 \binom{x}{1} + \cdots + c_n \binom{x}{n}$$

با ضرایب صحیح وجود دارند که

$$g(\circ) = b_\circ, g(1) = b_1, \cdots, g(n) = b_n$$

با استقرا به اثبات این ادعا می‌پردازیم. اگر $n = \circ$ قرار می‌دهیم $g(x) = b_\circ \binom{x}{\circ}$ فرض کنیم حکم قضیه برای هر دنباله با طول کوچک‌تر از n صادق باشد و $b_\circ، b_1، \cdots، b_n$ دنباله‌ای به طول $n+1$ باشد. بنا به فرض استقرا چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=\circ}^{n-1} c_i \binom{x}{i}$ با ضرایب صحیح وجود دارد که

$$f(\circ) = b_\circ, f(1) = b_1, \cdots, f(n-1) = b_{n-1}$$

اینک چندجمله‌ای

$$g(x) = f(x) + (b_n - f(n)) \binom{x}{n}$$

را در نظر می‌گیریم. برای $\circ \le i \le n-1$ داریم $\binom{i}{n} = \circ$ زیرا که $(x-i)$ در صورت کسر $\binom{x}{n}$ موجود است. پس برای هر $1 \le i \le n$، $g(i) = f(i) = b_i$ اما

$$g(n) = f(n) + (b_n - f(n)) = f(n) + b_n - f(n) = b_n$$

از این رو با قراردادن

$$g(x) = f(x) + (b_n - f(x)) \binom{x}{n}$$

چندجمله‌ای مطلوب به دست می‌آید. برای تکمیل اثبات فرض می‌کنیم که $h(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n در $Int(\mathbb{Z})$ باشد. اگر

$$h(\circ) = b_\circ, h(1) = b_1, \cdots, h(n) = b_n$$

به موجب آنچه که بیان شد چندجمله‌ای $g(x) = \sum_{i=\circ}^{n} c_i \binom{x}{i}$ وجود دارد به طوری که

$$g(\circ) = h(\circ) = b_\circ, g(1) = h(1) = b_1, \cdots, g(n) = h(n) = b_n$$

از این‌جا معلوم می‌شود که برای هر x، $h(x) = g(x)$ زیرا که درجه $g(x)$ برابر n است و در $n+1$ مقدار با $f(x)$ برابر شده است.

۴. $p-$ ترتیب

با توجه به قضیه‌ها و مثال‌هایی که تاکنون ارائه شد، معلوم می‌شود که آن‌چه رخ داده در واقع در مجموعه $\mathbb{Z}$ یا بهتر بگوییم در حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ بوده است. اکنون این پرسش طبیعی است که

آیا می‌توان تابع فاکتوریل را به زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ تعمیم داد؟ آیا مفهوم فاکتوریل به حلقه‌های دیگر نیز قابل تعمیم است؟ در این بخش به زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ توجه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم X یک زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{Z}$ و p یک عدد اوّل دلخواه و ثابت باشد. یک P–ترتیب X دنباله‌ای است مانند $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ که از اعضای X به استقرا انتخاب می‌شود.

- عضو a_0 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.
- اگر اعضای $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ در S چنان انتخاب شده باشند که بزرگ‌ترین توان p که $(a_{k-1} - a_0)(a_{k-1} - a_1) \cdots (a_{k-1} - a_{k-r})$ را می‌شمارد مینیمم باشد، a_k را چنان انتخاب می‌کنیم که بزرگ‌ترین توان p که

$$(a_k - a_0)(a_k - a_1) \cdots (a_k - a_{k-1})$$

را می‌شمارد مینیمم باشد.

نکته. بی‌گمان P–ترتیب X یکتا نیست. در واقع عضو a_0 به دلخواه انتخاب می‌شود. از طرفی هر انتخاب a_k بر انتخاب های بعدی اثر می‌گذارد.

تعریف ۲.۴. بزرگ‌ترین توان عدد اوّل p که عدد a را می‌شمارد با $w_p(a)$ نشان داده می‌شود.

توجه. $w_p(a)$ نباید با $e_p(a)$ اشتباه شود. برای مثال $e_3(18) = 2$ حال آن که $w_3(18) = 9$.

تعریف ۳.۴. اگر $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{Z}$ و $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک P–دنباله X باشد دنباله افزایشی $\{v_k(\mathrm{X}, p)\}$ را که جمله kام آن با

$$v_k(X, p) = \omega_p((a_k - a_0)(a_k - a_1) \cdots (a_k - a_{k-1}))$$

تعریف می‌شود، P ـ دنباله وابسته به X و متناظر با P ـ دنباله انتخابی $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ می‌نامند.
نتیجه‌ای که در تعریف فاکتوریل تعمیم یافته به کار می‌رود قضیه زیر است که در ادامه آن را اثبات خواهیم کرد.

قضیه کلیدی. P–دنباله وابسته X مستقل از انتخاب P–ترتیب است.
اولین مثال را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۴. برای هر عدد اوّل p دنباله

$$0, 1, 2, \cdots$$

یک P–ترتیب برای $\mathbb{Z}$ است.

اثبات. از استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. گام نخست بدیهی است. اگر $0, 1, 2, \cdots, k-1$ یک P ـ ترتیب برای گام $k-1$ باشد، در گام k ام لازم است که a_k چنان انتخاب شود که بزرگ‌ترین

توان p که

$$(*)\quad (a_k-\circ)(a_k-۱)\cdots(a_k-(k-۱))$$

را می‌شمارد مینیمم باشد. اما $(*)$ حاصل‌ضرب k عدد صحیح متوالی است و بنا به نتیجه ۴.۱ بر $k!$ بخش‌پذیر است. اما آشکارا انتخاب $a_k=k$ بزرگ‌ترین توان p که $(*)$ را می‌شمارد مینیمم می‌کند. بنابراین گام kام را برابر k انتخاب می‌کنیم. حکم قضیه بنابر استقرا ریاضی اثبات شده است.

اکنون $v_k(\mathbb{Z},p)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} v_k(\mathbb{Z},p) &= w_p((a_k-a_\circ)(a_k-a_۱)\cdots(a_k-a_{k-۱})) \\ &= w_p((k-\circ)(k-۱)\cdots(k-(k-۱))) \\ &= w_p(k!) \end{aligned}$$

اما اگر برای هر p، $w_p(k)$ را در هم ضرب کنیم درست $k!$ حاصل می‌شود. بنابراین $k!$ را می‌توان بر حسب این ناورداها(با توجه به قضیه کلیدی) چنین تعریف کرد

$$k!=\prod_p v_k(\mathbb{Z},p)$$

اینک با نظر به قضیهٔ کلیدی بیان تعریف زیر موجه می‌نماید.

تعریف ۴.۴. فرض کنیم X یک زیر مجموعه ناتهی $\mathbb{Z}$ است. تابع فاکتوریل X که مقدار آن در k با $k!_X$ نشان داده می‌شود به صورت

$$k!_X=\prod_p v_k(\mathbb{Z},p)$$

تعریف می‌شود، به ویژه $k!_{\mathbb{Z}}=k!$.

می‌دانیم که مجموعهٔ اعداد اوّل مجموعه‌ای نامتناهی است، در ضرب بالا، امّا، تعداد عوامل نابرابر لزوماً متناهی‌اند. به لم زیر توجه می‌کنیم.

لم ۱.۴. فرض کنیم $\mathrm{X}\subseteq\mathbb{Z}$ و $\circ\le k<|X|$ در این صورت $v_k(X,p)$ تنها برای تعدادی متناهی عدد اوّل p برابر با ۱ نیست.

اثبات. شرط $v_k(X,p)=۱$ برقرار است اگر و تنها اگر k عضو در X وجود داشته باشد که دو به دو، به پیمانه p ناهم‌نهشت شوند. حال برای هر k عضو متمایز X به تعداد $\binom{k}{۲}$ عضو از آن‌ها می‌توان انتخاب کرد. در تجزیه این اعداد به‌حاصل‌ضرب اعداد اوّل تعدادی متناهی عدد اوّل وجود دارد. از این‌جا معلوم می‌شود که هر k عضو در X به پیمانه p باید برای همه اعداد اوّل p مگر تعدادی متناهی متمایز باشند.

در حالت $X=\mathbb{Z}$ دیدیم که برای تمام اعداد اوّل p به طور هم‌زمان $P-$ترتیب

$$\circ,۱,۲,\cdots$$

وجود دارد. به طور کلی اگر برای زیر مجموعه $X\subseteq \mathbb{Z}$ این گزاره برقرار باشد، محاسبه فاکتوریل تعمیم یافته ساده‌تر خواهد بود.

لم ۲.۴. اگر $X\subseteq \mathbb{Z}$ و $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ برای هر عدد اوّل p یک P–ترتیب باشد، آن گاه

$$k!_X = |(a_k - a_0)(a_k - a_1)\cdots(a_k - a_{k-1})|\,.$$

اثبات. کافی است که به تعریف‌ها توجه کنیم.

مثال ۱.۴. فرض کنیم $X = 2\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد زوج باشد، با استدلالی مشابه استدلال قضیهٔ ۱.۴ مشاهده می‌شود که

$$0, 2, 4, 6, \cdots$$

برای هر عدد اوّل یک P ـ ترتیب است. بنا به لم ۱.۴ مشاهده می‌شود که

$$k!_{2\mathbb{Z}} = (2k-0)(2k-2)\cdots(2k-(2k-2))$$

مثال ۲.۴. اگر X مجموعه توان‌های عدد دو باشد، دنباله

$$1, 2, 4, 8, \cdots$$

برای هر عدد اوّل p یک عدد P ـ ترتیب است و از این رو بنا به لم ۱.۴

$$k!_x = (2^k - 1)(2^k - 2)\cdots(2^k - 2^{k-1})$$

مثال ۳.۴. اگر p یک عدد اوّل باشد و $X = \{1, p, 2p, p^2, p^2+1\}$ دنباله‌های

$$1, p, 2p, p^2, p^2+1$$

و

$$1, p, p^2, p^2+1, 2p$$

هر کدام P ـ ترتیب X هستند. p دنباله وابسته به آنها عبارتست از

$$1, p, p^2, p^2, 0, \cdots$$

تعریف ۵.۴. فرض کنیم $X\subseteq \mathbb{Z}$ و $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک $P-$ترتیب X باشند. چندجمله‌ای‌های S_i را به صورت

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 1 \\ S_1(x) &= (x-a_0) \\ S_2(x) &= (x-a_0)(x-a_1) \\ &\vdots \\ S_i(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که هر چندجمله‌ای با ضرایب صحیح را می‌توان در پایه $\{S_i\}$ نوشت. استفاده از این پایه اثبات بسیاری از قضیه‌ها را ساده‌تر می‌کند. ابتدا به اثبات یک لم می‌پردازیم.

لم ۳.۴. فرض کنیم $X\subseteq \mathbb{Z}$ و $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک P ـ ترتیب X باشد. هم‌چنین فرض کنیم

$$(*) \quad f(x) = b_0S_0(x) + b_1S_1(x) + \cdots + b_ks_k(x)$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. در این صورت مقدار $f(x)$ برای هر عضو X بر p^e بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر $(1 \leq i \leq k)b_iS_i(x)$ برای هر عضو X بر p^e بخش‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنیم $f(x)$ برای هر عضوX برp^e بخش‌پذیر باشد، اما جملاتی در سمت راست وجود داشته باشند که چنین نباشند. گیریم j کوچک‌ترین اندیس با این ویژگی باشد که $b_jS_j(x)$ به ازای مقادیر X بر p^e بخش‌پذیر نیست. در $(*)$ قرار می‌دهیم $x = a_j$. در این صورت تمام جملات با شرط $i > j$ متحداً صفرند. حال آن که مینیمم بودن j ایجاب می‌کند در تمام جملات با $i < j$، $b_iS_i(x)$ ضریب‌ها بر p^e بخش‌پذیر باشند. در نتیجه $b_jS_j(x)$ به ازای هر مقدار X بر p^e بخش‌پذیر است، زیرا باید توجه داشت که $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ یک $P-$ترتیب X است. این تناقض حکم لم را ثابت می‌کند.

اینک می‌توان به بیان و اثبات قضیه‌ای که تعمیم قضیه پولیا در بخش ۲ است پرداخت.

قضیهٔ ۲.۴. فرض کنیم $X\subseteq \mathbb{Z}$ و $f(x)$ یک چندجمله‌ای اولیه با ضرایب صحیح و از درجه k باشد. اگر

$$d(X,f) = gcd\{f(a) : a \in X\}$$

آن گاه $d(X,f)$، $k!_X$ را می‌شمارد.

اثبات. برای یک $P-$ترتیب ثابت X مانند $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$، f را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) = b_0S_0(x) + b_1S_1(x) + \cdots + b_ks_k(x)$$

از آن‌جا که $f(x)$ اولیّه است. اندیس $0 \le j \le k$ وجود دارد که b_j بر p بخش‌پذیر نیست. اینک بنا به تعریف $d(X,f)$ مقدار $f(x)$ به ازای مقادیر X بر $w_p(d(X,f))$ بخش‌پذیر است. بنا به لم قبل $b_j S_j(x)$ بر $w_p(d(X,f))$ بخش‌پذیر است. از طرفی چون b_j و p متباین‌اند، نتیجه می‌گیریم که $S_j(x)$ به ازای هر عضو X بر $w_p(d(X,f))$ بخش‌پذیر است. به ویژه $w_p(d(X,f))$ مقدار

$$w_p(S_j(a_j)) = w_p((a_j - a_0)(a_j - a_1)\cdots(a_j - a_{j-1})) = w_p(j!_X)$$

را می‌شمارد. بنابراین $w_p(d(X,f))$، $w_p(k!_X)$ را می‌شمارد، زیرا که $j!_X$، $k!_X$ را می‌شمارد. با در نظر گرفتن تمام اعداد اوّل که با توان غیر صفر در $k!_X$ ظاهر می‌شوند و ضرب آنها نتیجه می‌گیریم که $d(X,f)$، $k!_X$ را می‌شمارد.

نکته: در قضیه ۲.۴ $k!_X$ و هر مقسوم‌علیه آن می‌تواند مقسوم‌علیه $d(X,f)$ باشد. برای اثبات این ادعا کافی است چندجمله‌ای

$$F(x) = (x - a_{0,k})(x - a_{1,k})\cdots(x - a_{k-1,k})$$

که در آن $\{a_{i,k}\}_{i=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{Z}$ است که برای هر عدد اوّل p که $k!_X$ را می‌شمارد، جمله به جمله به پیمانه $v_k(X,p)$ با یک P–ترتیب X هم‌نهشت است. در این صورت آشکار است که $d(X,F) = k!_X$. به علاوه اگر r یک مقسوم‌علیه $k!_X$ باشد، آن گاه $d(X, F(x+r)) = r$. بنابراین هر عامل $k!_X$ می‌تواند به عنوان مقسوم‌علیه ثابت یک چندجمله‌ای اوّلیه قابل حصول باشد.

نتیجهٔ ۱.۴. اگر k و l اعدادصحیح نامنفی باشند، آن گاه برای $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{Z}$، $k!_X l!_X | (k+l)!_X$.

اثبات. چندجمله‌ای‌های اوّلیه $F_k(x)$ و $F_{n-k}(x)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $d(X,F_k) = k!_X$ و $d(X,F_{n-1}) = (n-k)!_X$. با ضرب این دو چندجمله‌ای چندجمله‌ای اولیه $F = F_k F_{n-k}$ با درجه n به دست می‌آید، به طوری که $d(X,F)$، $k!_X(n-k)!_X$ را می‌شمارد. اما باز هم بنا به قضیه قبل می‌دانیم که $d(X,F)$ باید $n!_X$ را بشمارد پس $k!_X(n-k)!_X | n!_X$.

لم ۴.۴. اگر $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$، آن گاه $k!_X | k!_Y$.

اثبات. برای هر چندجمله‌ای f به وضوح $d(X,F)$، $d(Y,f)$ را می‌شمارد. از این رو به ویژه $d(X,F) = k!_X$، $d(Y,F)$ را می‌شمارد. اما بنا به قضیه ۲.۴، $d(X,F)$ باید $k!_X$ را بشمارد. از این‌جا معلوم می‌شود که $k!_X | k!_Y$.

قضیهٔ ۳.۴. اگر $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{Z}$ و $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \subseteq X$ آن گاه

$$a_1!_X a_2!_X \cdots a_n!_X | \prod_{i<j}(a_i - a_j)$$

اثبات. فرض کنیم p یک عدد اوّل ثابت باشد. مجموعه $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ را Y می‌نامیم. پس

$Y \subseteq X$ و برای هر $\circ \leq k \leq n$

$$v_k(y,p) = w_p((a_k - a_\circ)(a_k - a_\backslash) \cdots (a_k - a_{k-\backslash}))$$

با ضرب تمام روی kها و سپس روی تمام p ها داریم:

$$a_\circ!_Y a_\backslash!_Y \cdots a_n!_Y | \prod_{i<j}(a_j - a_i)$$

اینک بنا به لم قبل $k!_X$، $k!_Y$ را می‌شمارد. بنابراین

$$a_\circ!_Y a_\backslash!_Y \cdots a_n!_Y | \prod_{i<j}(a_i - a_j)$$

می‌دانیم هر چندجمله‌ای با ضرایب صحیح یک تابع که آن را تابع چندجمله‌ای می‌نامیم از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ به وجود می‌آورد. اما هر تابع لزوماً از این طریق به دست نمی‌آید. می‌توان نشان داد که تعداد توابع چندجمله‌ای از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ برابر است با

$$\prod_{k=\circ}^{n-\backslash} \frac{n}{gcd(n,k!)}$$

در حالت خاصی که در آن n یک عدد اوّل باشد مقدار فوق برابر خواهد بود با n^n که از آن نتیجه می‌شود، هر تابع از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ یک تابع چندجمله‌ای است. قضیه بعد تعمیم بیشتر قضیه فوق به هر زیر مجموعه $\mathbb{Z}$ است.

قضیهٔ ۴.۴. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{Z}$ در این صورت تعداد توابع چندجمله‌ای از X به $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ برابر است با

$$\prod_{k=\circ}^{n-\backslash} \frac{n}{gcd(n,k!_X)}$$

اثبات. طریقه اثبات کم و بیش مانند اثبات قضیه‌های قبل است. در این‌جا کافی است حالتی را در نظر بگیریم که n توانی از یک عدد اوّل است و آن گاه از قضیه باقی‌مانده چینی استفاده کنیم. در اینجا از بیان جزئیات خودداری می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۴. (تعمیم قضیهٔ پولیا برای حلقه‌های چندجمله‌ای با مقادیر صحیح). اگر $X \subseteq \mathbb{Z}$ و قرار دهیم

$$Int(X,\mathbb{Z}) = \{f(x) \in \mathbb{Q}(x) : f(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in X\}$$

آن گاه $Int(X,\mathbb{Z})$ یک زیر حلقه $Q[x]$ است که به عنوان یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول با چندجمله‌ای‌های

$$\frac{S_k(x)}{k!_X}$$

به‌وجود می‌آید. $S_k(x)$ همان چندجمله‌ای‌هایی هستند که پیشتر تعریف شده‌اند.

اثبات. طریقه اثبات مانند همان قضیه اصلی پولیاست.

همان گونه که ممکن است خواننده تاکنون متوجه شده باشد اثبات قضیه‌های بیان شده به $P-$ترتیب انتخابی بستگی نداشته است. با این حال در این‌جا به اثبات قضیه کلیدی در مورد تابع فاکتوریل تعمیم یافته می‌پردازیم.

قضیه کلیدی P ــ دنباله وابسته X مستقل از انتخاب P ــ ترتیب است.

اثبات. فرض کنیم $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ و $\{a'_i\}_{i=0}^{\infty}$ دو P ــ ترتیب متمایز X باشند، $P-$دنباله‌های وابسته و متناظر با آنها را به ترتیب با $v_k(X,p)$ و $v'_k(X,p)$ نشان می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که برای هر $d \geq 0$،

$$v_d(X,p) = v'_d(X,p)$$

. اگر X متناهی باشد و $d \geq |X|$، اثبات بدیهی است، پس حالت $d < |X|$ را در نظر می‌گیریم. عدد صحیح و مثبت e را چنان انتخاب می‌کنیم که $p^e > v_d(X,p)$ و هم‌چنین $p^e > v'_d(X,p)$. مجموعه چند جمله ای ها در $(Z/p^e\mathbb{Z})[X]$ را که به ازای مقادیر X، مقدارشان بر p^e بخش‌پذیر است با G_d نشان می‌دهیم. اینک از لم ۲.۴ می‌توان نتیجه گرفت که گروه آبلی G_d با

$$\bigoplus_{k=0}^{d} \frac{\mathbb{Z}}{v_k(X,p)\mathbb{Z}}$$

و هم‌چنین

$$\bigoplus_{k=0}^{d} \frac{\mathbb{Z}}{v'_k(X,p)\mathbb{Z}}$$

یک‌ریخت است. بنابراین اعداد $v_k(X,p)$ و $v'_k(X,p)$ (برای $0 \leq k \leq d$) که ضرایب ساختاری گرو آبلی G_d هستند بنا به قضیه بنیادی گروه های آبلی متناهی تولید شده باید برابر باشند، به ویژه $v_d(X,p) = v'_d(X,p)$ و اثبات تمام است.

۵. تعمیم‌های بیشتر به حوزه‌های ددکیند

یادآوری می‌کنیم که در حوزه‌های ددکیند R هر ایدال به صورت یکتایی به حاصل‌ضرب اعداد اوّل تجزیه می‌شود. با توجه به این ویژگی می‌توان مفهوم فاکتوریل را به حوزه های ددکیند و حتی هر زیر مجموعه آن تعمیم داد. تفاوت عمده در آنست که به هنگام ساختن $P-$ترتیب که P یک ایدال اوّل است فاکتوریل‌های به دست آمده را باید ایدال‌های R در نظر گرفت. در حالتی که R یک حوزهٔ ایدال‌های اصلی باشد، می‌توان مانند حلقه $\mathbb{Z}$ عمل کرد. وجود یک $P-$ترتیبِ همزمان برای

تمام ایدال‌های اوّل شرطی لازم برای یافتن ایدال‌های فاکتوریل است. به طور کلی، الگوریتم ساختن P–دنباله‌ها شناخته شده نیست.

طرح بعضی مسائل

۱– اگر $X \subseteq \mathbb{Z}$، تعبیر ترکیباتی $k!_X$ چیست؟

۲– اگر قرار دهیم

$$\binom{n}{k}_X = \frac{n!}{k!_X (n-k)!_X}$$

تعبیر ترکیباتی $\binom{n}{k}_X$ چیست؟

۳– چگونه می‌توان تعمیمی از $k!_X$، نظیر تابع گامای معمولی به دست آورد؟

۴– با توجه به این که $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ تعبیر فاکتوریل تعمیم‌یافته در این مورد چیست؟

به طور کلی هر گونه قضیه یا رابطه‌ای را که در مورد تابع فاکتوریل روی $\mathbb{Z}$ وجود دارد می‌توان مورد پرسش قرار داد.

مراجع

[1] M. Bhargava, P-ording and polynomial functions on arbitrary subset of Dedekind rings, J. reine angew. Math. 490(1997) 101-127.

[2] M. Bhargava, Generlized factorial and fixed divisior over subset of Dedekind domain, J. Number theory 72(1998)67-75.

[3] M. Bhargava, The factorial function and generalizations. Amer. Math. Monthly, 107(2000)783-798.

[4] J.L. Chabert, S. T. Chapman and W.W. Smith, A basis for the ring of polynomials integer-valued on prime numbers,in factorization in integral domains, Marcel Deker lecture Notes in pure and App. Math,189, New York, 1997.pp 271-284.

[5] G. Polya, Uber ganzwertige gang Functionen, Rend. Circ. Mathem. Polermo 40(1915)1-16.

[6] G. Polya, Uber ganzwertige polynome in algebraische Zahlkorpern, J, reine angew. Math. 149(1919) 117-124.

[7] B. Sury, An integral polynomial, Math. Mag, 68(1995)134-135.

[8] M. Wood, P-ordering: a metric viewpoint and the non-existence of similtaneous orderings. J. Number theory 99(2003) 36-56.

منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر
آدرس الکترونیکی motamedi_m@scu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۳۷ تا ۴۷

نقش انگیزه‌های تحقیق در آموزش ریاضی[۱]

سید عباداله محمودیان

مقدمه

عشق و علاقهٔ بشر برای به‌دست آوردن یافته‌های جدید همیشه باعث پیشرفت در هر زمینه‌ای بوده است. تجربه نشان می‌دهد که اگر این علاقه را در جهت یادگیری به کار ببریم نتیجه‌ای چندجانبه به‌دست خواهد آمد. روش این است که دانش‌آموز یا دانشجو را با مسأله حل نشده‌ای که در حد معلومات و درکش است، آشنا کنیم تا به وی انگیزه دهیم که برای حل مسأله مطالب لازم را یاد بگیرد.

تجربهٔ دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف در برگزاری دوره‌های تابستانی برای دانش‌آموزان زبده در شهر تهران و ارائهٔ سمینارها توسط بعضی از گردانندگان این دوره‌ها، از این موارد است. در سطح دانشجویی نیز تجربه‌هایی که با تشکیل گروه‌های تحقیقاتی در مقطع کارشناسی به‌دست آمده است، مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

در این گزارش تجربه‌های به دست آمده ارائه و ابعاد مختلف آن تحت عنوان‌های زیر بررسی می‌شود:

- دانش‌آموزی
- دانشجویان دوره کارشناسی
- طریقهٔ جلب علاقمندان
- انتخاب مسائل

---

۱) بر پایهٔ سخنرانی ارائه شده در ششمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور، شیراز

- ضابطهٔ انتخاب
- حمایت مالی
- در کشورهای دیگر
- جمع‌بندی
- لیست دانشجویان و دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این طرح
- مقالات منتشر شدهٔ مشترک با ع. محمودیان

دانش‌آموزان

دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف از اواخر دههٔ ۱۳۶۰ هرساله در تابستان، یک دورهٔ یک هفته‌ای برای دانش‌آموزان منتخب دبیرستان‌های تهران (دختر و پسر) برگزار می‌کند. این برنامه حدوداً با ۳۰ نفر شروع شد و این اواخر حتی به بیش از ۳۰۰ نفر رسیده بود. این دانش آموزان از طریق مدارس انتخاب شده و به دانشکده معرفی می‌شوند. در این دوره‌ها، اعضای هیأت علمی، دانشجویان تحصیلات تکمیلی و دانشجویان زبدهٔ دوره کارشناسی، سخنرانی‌هایی را برای آنها ایراد می‌کنند و گاهی در حین این سخنرانی‌ها، مسائل حل‌نشده‌ای را برای دانش‌آموزان مطرح می‌کنند.

تجربه نشان داده است که ارائهٔ مسائل حل نشده و قابل فهم برای دانش‌آموزان، در آنها انگیزهٔ یادگیری بیشتری را ایجاد می‌کند. این مطلب را با یک مثال تجربی نشان می‌دهیم.

مثال. خانم‌ها مریم میرزاخانی و رویا بهشتی (فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری ریاضی، به ترتیب از دانشگاه هاروارد و ام‌آی‌تی) بعد از مطرح شدن تعمیم مسألهٔ زیر در کلاس دورهٔ تابستانی (سال ۱۳۷۱)، نسبت به حل آن علاقمند شدند.

با ایشان که دانش‌آموز سال دوم دبیرستان بودند، به مدت یک سال روی آن کار کردیم و نهایتاً نتایج به‌دست آمده به‌صورت مقاله‌ای مشترک چاپ شد [۱۵].

مسأله. (مسألهٔ المپیاد ریاضی داخلی ۱۳۷۰) سه گروه A، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در کنفرانسی گرد آمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به‌طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه با هم شرکت کرده باشند.

الف) اگر این عمل امکان‌پذیر باشد، نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.

ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه ۳ باشد، نشان دهید این عمل امکان‌پذیر است.

ج) ثابت کنید در حالت کلی، وقتی که تعداد اعضای سه گروه مساویند، این عمل امکان‌پذیر است.

صورت دیگر مسأله. شرط لازم و کافی برای تجزیهٔ گراف سه بخشی کامل $K_{r,s,t}$ به مثلث‌ها چیست؟

گزاره. شرط لازم و کافی برای تجزیهٔ $K_{r,s,t}$ به مثلث‌ها این است که $r = s = t$.

تعمیم این مسأله: شرط لازم و کافی برای تجزیهٔ $K_{r,s,t}$ به دورهای ۵ ــ تایی چیست؟

برای تجزیهٔ گراف سه بخشی کامل $K_{r,s,t}$ به ۵ ــ دورها بلافاصله شرایط لازم زیر به‌دست می‌آیند:

قضیه. فرض کنید $r \leq s \leq t$. اگر گراف $K_{r,s,t}$ را بتوان به ۵ ــ دورها افراز کرد، آن‌گاه شرایط زیر برقرارند:

i) r و s و t یا هر سه زوجند یا هر سه فرد؛

ii) $۵|rs + rt + st$؛

iii) $t \leq ۴rs/(r + s)$.

حدس: شرایط لازم فوق کافی نیز هستند.

جایزه. (ده هزار تومان ــ با پول آن زمان!)

در مقاله‌ای مشترک [۱۵] قسمتی از حدس اثبات شد. بعداً N. Cavenough (از استرالیا) دنبالهٔ آن را گرفت و مقاله‌هایی چاپ کرد. ولی هنوز حدس به‌طور کامل اثبات نشده است.

دانشجویان دورهٔ کارشناسی

تجربهٔ کار با دانشجویان دورهٔ کارشناسی به سال ۱۳۶۵ برمی‌گردد. به این صورت که بعد از مطرح شدن مسأله‌های حل نشده در کلاس‌های درس، دانشجویان علاقمند به منظور حل مسأله شروع به یادگیری و تحقیق می‌کردند. از جملهٔ این دانشجویان خانم دکتر نسرین سلطانخواه [۱۷] و آقای مانی رضائی [۱۸] هستند.

در سال ۱۳۶۹ در ادامهٔ این تجربه با آقای علی‌اصغر خانبان (دانشجوی سال سوم کارشناسی آن زمان) بر روی مسأله‌ای درباره «طرح‌های بلوکی جهت‌دار» کار کردیم که نتایج به‌دست آمده از این فعالیت در مقالهٔ [۱۶] چاپ شد. نکتهٔ جالب توجه در مورد این همکاری آن است که اساس این مقاله در یک اردوی تابستانی در مدتی که اینجانب به عنوان مأموریت خارج از مرکز (تابستان ۱۳۶۹) در دانشگاه شهید باهنر کرمان به تدریس مشغول بودم، و آقای خانبان نیز برای انجام همین تحقیقات به کرمان آمده بود، انجام گرفت.

از آن تاریخ به بعد این تجربه با تعداد زیادی از دانشجویان دورهٔ کارشناسی تکرار شده و نتایج به دست آمده توسط آن‌ها به صورت مقالاتی در مجلات معتبر بین‌المللی چاپ شده است.

تعدادی از این مقالات در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نیز چاپ شده است و اکثر این دانشجویان بعد از پایان دوره، کماکان به تحقیقات خود ادامه داده‌اند و دارای مقاله‌های چاپ شدهٔ دیگری نیز هستند، به عنوان مثال در شماره‌های مجلهٔ دانش‌پژوه از انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، مقاله‌هایی از این افراد دیده می‌شود.

اسامی این افراد و فعالیت‌های بعدی آن‌ها در آخر این گزارش آمده است.

تعدادی از افراد فوق که در دانشگاه‌های خارج از کشور مشغول تحصیل هستند در پایگاه اینترنتی خود با لطف فراوان، از این‌جانب به عنوان کسی که ایشان را با ترکیبیات آشنا نموده‌ام، یاد کرده‌اند. برای دیدن این لینک‌ها کافی است که لغت Mahmoodian را در اینترنت جستجو کنیم. در دوره‌هایی از فعالیت تحقیقاتی، به علت زیاد بودن تعداد علاقمندان، آنها را به گروه‌های تحقیقاتی تقسیم کرده و در هر گروه عده‌ای از دانشجویان تحصیلات تکمیلی و یا همکاران هیأت علمی به عنوان مسؤول و مشاور با آن‌ها همکاری می‌کردند. به‌عنوان مثال آقایان یاشار گنجعلی، مهدی میرزازاده، و بشیر سجاد از افرادی هستند که کار تحقیقاتی آن‌ها به مقاله‌های علمی نیز ختم شده‌است.

مثال. یک مثال از فعالیت‌های تحقیقاتی با دانشجویان دوره کارشناسی، مجموعه‌های تعیین‌کننده در رنگ‌آمیزی گراف‌ها است. از نتایج این تحقیقات طرح مسألهٔ زیر می‌باشد. این مسأله جزو مسائل پیشنهادی ایران (توسط محمودیان و مهدیان) بود که در المپیاد جهانی ریاضی در آرژانتین (۱۹۹۷) برای مسابقه برگزیده شد.

مسأله. (IMO97) یک ماتریس $n \times n$ که درایه‌های آن از اعضای مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, ۲n - ۱\}$ انتخاب شده‌اند، را **ماتریس نقره‌ای** نامند اگر به‌ازای $i = ۱, \ldots, n$، سطر i ام و ستون i ام روی هم، اعضای S را شامل شوند. نشان دهید:

(الف) هیچ ماتریس نقره‌ای برای $n = ۱۹۹۷$ وجود ندارد.

(ب) ماتریس‌های نقره‌ای به‌ازای تعداد نامتناهی از n وجود دارد.

تعداد زیادی مسألهٔ حل نشده در این زمینه مطرح است که در مقاله‌ای در رشد آموزش ریاضی، پائیز ۱۳۷۷، آمده است.

طریقهٔ جلب علاقمندان

بیشتر از طریق کلاس‌های درس، کلاس‌های المپیاد دانش‌آموزی و سخنرانی‌ها در مجامع و

دبیرستان‌ها بوده است.

انتخاب مسائل

بیشتر از مسائل حل نشدهٔ روز بوده‌اند که در مجلات بین‌المللی مطرح شده‌اند. بیشتر اوقات صورت‌های ساده‌تری از این مسائل به صورت مسألهٔ مسابقه‌ای مطرح شده‌اند. مسائلی که ما کار کرده‌ایم غالباً در زمینهٔ ترکیبیات، نظریهٔ گراف و ریاضیات گسسته بوده‌است.

ضابطهٔ انتخاب

علاقهٔ دانشجو یا دانش‌آموز به حل مسأله، روحیهٔ تحقیق و پژوهش و انضباط کاری ایشان بوده است.

حمایت مالی

گاهی اوقات پس از به دست آوردن نتایج، از طرف معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف حمایت‌های مالی جزئی انجام گرفته است و در دورانی هم به مدت ۶ ماه از طرف «باشگاه دانش‌پژوهان جوان» به دانشجویان حق‌التحقیق پرداخت شده است. در این دوره جلسات پژوهشی را در آن باشگاه تشکیل می‌دادیم. مدتی نیز (حدود ۲ سال) که من در مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات (IPM) یک «هستهٔ تحقیقاتی» داشتم از طریق آن مرکز به ایشان پرداخت‌هایی (هرچند جزئی) صورت گرفته است. در سال ۱۳۸۰ نیز با چاپ دو مقاله [۸] و [۹] در مجلات بین‌المللی که ۵ نفر از نویسندگان آن‌ها از دانشجویان دورهٔ کارشناسی بودند، از طرف وزارت علوم تحقیقات و فناوری جایزه‌ای به نویسندگان تعلق گرفت.

کار تحقیقاتی در چند مورد، به‌صورت اردو، و حتی در شهرستان‌ها انجام شده است. مثلاً:

- تابستان ۱۳۶۹، کرمان
- تابستان ۱۳۷۳، زنجان (با حمایت دانشگاه زنجان)
- تابستان ۱۳۷۶، باشگاه دانش‌پژوهان جوان (تهران)
- تابستان ۱۳۷۷، IPM (تهران)
- تابستان ۱۳۸۱، زنجان (با حمایت مرکز آموزش و پرورش استعدادهای درخشان و مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان)
- تابستان ۱۳۸۳ و ۱۳۸۵، زنجان (با حمایت مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان)

در کشورهای دیگر

مشابه این فعالیت‌ها در کشورهای دیگر نیز انجام شده است. مثلاً پرفسور جوزف گالیان از

دانشگاه مینوسوتا در آمریکا یک تجربهٔ ۳۰ ساله در این زمینه دارد که در منزلگاه اینترنتی ایشان آمده است:

http://www.d.umn.edu/~jgallian

ایشان که مؤلف کتاب بسیار زیبای درسی در جبر است، از سال ۱۹۷۷ بیش از ۳۰ دورهٔ تابستانی برای کار تحقیقاتی با دانشجویان دورهٔ کارشناسی برگزار کرده است. گزارش کامل این دوره‌ها همراه با عکس‌هایی در منزلگاه فوق آمده است. دربارهٔ این دوره‌ها:

- هر دوره به مدت ۱۰ هفته در دانشگاه مینوسوتای آمریکا برگزار شده‌است.
- در بیشتر این دوره‌ها، تعداد دانشجویان بین ۳ تا ۴ نفر بوده‌است که از میان دانشجویان زبده از سرتاسر آمریکا انتخاب شده‌اند. بیشتر آن‌ها از بین صد نفر اول مسابقه ریاضی دانشجوئی پاتنم (Putnam) بوده‌اند.
- هزینهٔ مسافرت و اقامت این دانشجویان با حمایت مالی دانشگاه مینوسوتا و بنیاد علمی ملی (آمریکا) (NSF) بوده است. اخیراً نیز سازمان امنیت ملی (آمریکا) (NSA) جزو حمایت‌کنندگان شده است.
- تا سال ۲۰۰۶، کلاً بالغ بر ۱۰۰ نفر دانشجو در این دوره‌ها شرکت کرده‌اند که نتایج کار آن‌ها منجر به چاپ بیش از ۹۰ مقاله علمی در مجلات تراز اول ریاضی شده است.
- آمار فعالیت‌های بعدی این دانشجویان که اکثراً به تحصیلات عالیهٔ خود ادامه داده و از دانشگاه‌های ردهٔ اول نظیر هاروارد، پرینستون، ام آی تی، کمبریج، و برکلی دکترا گرفته‌اند در منزلگاه گالیان موجود است.

به علت موفقیت گالیان در اجرای این پروژه‌ها اکنون در بیش از ۲۰ مرکز علمی دیگر در آمریکا برنامه‌ای به نام REU[1] «تجربه‌های پژوهشی برای دانشجویان دوره کارشناسی» اجرا می‌شود. اغلب گردانندگان این دوره‌ها دانشجویانی هستند که خود قبلاً در دوره‌های پرفسور گالیان شرکت کرده‌اند.
گالیان در مورد مسائلی که می‌توان برای این دوره‌ها در نظر گرفت می‌نویسد:
«مسأله باید طوری باشد که:

- زمینهٔ قبلی زیادی برای فهم آن لازم نباشد؛
- به دست آوردن نتایج نسبی امکان‌پذیر باشد؛

1) Research Experiences for Undergraduates

- تازه باشد؛
- نتایج جدید دربارهٔ آن قابل چاپ باشد.»

گالیان در مورد دوره می‌گوید:«مهم است که دانشجویان از دورهٔ اردو لذت ببرند. در نتیجه انواع تفریحات سالم از قبیل دوچرخه‌سواری، شنا، کوهنوردی و غیره بر اساس علایق آنها ترتیب داده می‌شود.»

- مسائلی که گالیان با دانشجویان کار کرده است در زمینه‌های نظریهٔ گراف، ترکیبیات، نظریهٔ گروه‌ها، نظریهٔ حلقه‌ها، نظریهٔ میدان‌ها، و نظریهٔ اعداد بوده است. اتفاقاً یکی از آخرین مسائلی که روی آن کار کرده‌اند با یکی از مسأله‌های ما که در زیر بیان می‌شود مشترک بوده است.

صورت مسأله (مجموعهٔ تحمیلی برای تطابق‌های کامل در گراف‌ها). فرض کنید M یک تطابق کامل برای گراف G باشد. زیرمجموعهٔ S از M را یک مجموعهٔ تحمیلی گوییم، هرگاه M تنها تطابق کاملی باشد که شامل S است. تابع $f(G,M)$، تعداد اعضای کوچک‌ترین مجموعهٔ تحمیلی برای M چیست؟ (مرجع [٦] را ببینید.)

مسألهٔ مشخص: تعیین $f(Q_n) = \min\limits_{M} f(Q_n, M)$

حدس. $f(Q_n) = ۲^{n-۲}$

جایزه. صدهزار تومان.

یکی از دانشجویانی که در سال ۲۰۰۰ با گالیان کار کرده است[1] حدس فوق را برای nهای زوج ثابت کرده است.

• تجربهٔ ام. آی. تی

در سال ۲۰۰۰، از طریق آقای محمد مهدیان و خانم رویا بهشتی (دانشجویان دوره دکتری دانشگاه ام. آی. تی در آن زمان) به من اطلاع داده شد که آن دانشگاه، دانش‌آموزان مستعدِ سال‌های آخر دبیرستان را از کشورهای مختلف انتخاب کرده و به آنها بورس اهدا می‌کند تا در یک دورهٔ یک‌ماههٔ تابستانی تحت سرپرستی دانشجویان دورهٔ دکتری آن دانشگاه به فعالیت‌های تحقیقاتی بپردازند. هدف دوره، سعی در آموزش مطالب به بهانهٔ حل یک مسألهٔ تحقیقاتی است. بعد از مشورت با من، خانم بهشتی با دانش‌آموز خود تعمیمی از مسألهٔ IMO97 را بررسی کرده و به نتایج جالبی دست یافتند و آقای مهدیان نیز با دانش‌آموز خود مسأله‌ای را، که هم ما و هم یکی از

1) Riddle

دانشجویان گالیان بررسی کرده بودیم، دنبال کرده و هر دوی آن‌ها تحقیقات خود را به‌صورت گزارش‌های تحقیقاتی چاپ کردند.

جمع‌بندی

این تجربیات نشان داده است که برخلاف باور عمومی، تحقیق توسط دانشجویان کارشناسی و حتی بعضی از دانش‌آموزان دبیرستانی می‌تواند بسیار نتیجه‌بخش باشد. مثلاً اینجانب اطلاع دارم که در چند سال اخیر در شهر زنجان نیز فعالیت‌هایی توسط آقایان مرتضی بیات، اکبر ترابی و حسین تیموری با دانش‌آموزان دبیرستان صورت گرفته است که نتایج آن به صورت مقاله‌هایی در مجلات چاپ شده است. همهٔ کسانی که من افتخار همکاری با آن‌ها را داشته‌ام، هم‌چنان نیز به تحقیقات خود ادامه داده و مدارج عالی تحصیلی را طی کرده‌اند. ایشان از محققین نسل آینده هستند. نتایج چشم‌گیری که در طول این سال‌ها از این تحقیقات به دست آمده است، لزوم ادامهٔ این برنامه‌ها و سرمایه‌گذاری بیشتر روی این‌گونه پروژه‌ها را نشان می‌دهد.

پیوست ۱: لیست دانشجویان و دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این برنامه‌ها

نسرین سلطانخواه	دکترای ریاضی از دانشگاه صنعتی شریف—عضو هیأت علمی دانشگاه الزهرا
مانی رضائی	کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه شهید بهشتی
علی‌اصغر خانبان	کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی شریف— دکترا از امپریال کالج لندن
حسین حاجی‌ابوالحسن	دکترای ریاضی از دانشگاه صنعتی شریف—عضو هیأت علمی دانشگاه شهید بهشتی
رضا ناصر عصر	کارشناسی از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه سایمون فریزرِ کانادا
منوچهر ذاکر	کارشناسی از دانشگاه تبریز— کارشناسی ارشد و دکترا از دانشگاه صنعتی شریف — عضو هیأت علمی مرکز تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
محمد مهدیان	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — کارشناسی ارشد از دانشگاه تورنتو — دکترا از دانشگاه ام. آی. تی
رضا صادقی	کارشناسی در دانشگاه صنعتی شریف که در تصادف اتوبوس دانشگاه فوت کرده است.
مریم میرزاخانی	کارشناسی از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه هاروارد
محمدرضا صلواتی‌پور	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه تورنتو
حسین مسرت	کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی شریف

رویا بهشتی	کارشناسی از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه ام. آی. تی
امین صابری	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه جورجیاتک
بردیا صدری	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه ایلینوی
بابک فرزاد	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه تورنتو
محمدتقی حاجی‌آقایی	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — کارشناسی ارشد از دانشگاه واترلو — دکترا از دانشگاه ام. آی. تی
میروهاب میرکنی	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دکترا از دانشگاه ام. آی. تی
بهداد اسپهبد	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه تورنتو
حامد حاتمی	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه تورنتو
پیمان افشانی	مهندسی نرم‌افزار از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه واترلو
جواد ابراهیمی بروجنی	کارشناسی از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه سایمون فریزرِ کانادا
هدی بیدخوری	کارشناسی از دانشگاه صنعتی شریف — دانشجوی دکترا در دانشگاه ام. آی. تی
مریم خسروی	دانشجوی دکترای پیوسته در دانشگاه تربیت معلم
پویا حاتمی	دانشجوی کارشناسی (علوم کامپیوتر) در دانشگاه صنعتی شریف

پیوست ۲: مقالات منتشر شده (مشترک با ع. محمودیان)

تشکر

مراحل نهایی تهیهٔ این مقاله در دورهٔ مأموریت فرصت مطالعاتی نویسنده در مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان صورت گرفت. از حمایت آن مرکز سپاسگزارم و از خانم پانته‌آ علیرضازاده برای کمک در اولین ارائهٔ این گزارش کمال تشکر را دارم.

مراجع

[1] With Babak Behsaz and Pooya Hatami, "On Minimum Vertex Cover of Generalized Petersen Graphs", submitted.

[2] With Javad Ebrahimi B. and Nafiseh Jahanbakht, "Vertex Domination of Generalized Petersen Graphs", submitted.

[3] With B. Farzad, M. Mahdian, A. Saberi, and B. Sadri, "Forced Orientation of Graphs", to appear in: *Bull. of Iranian Math. Society.*

[4] With Richard Bean, Hoda Bidkhori, and Maryam Khosravi, "On the Size of the Minimum Critical Set of A Latin Square", *Discrete Math.*, **293** (2005), no. 1-3, 121–127. **MR2005m:05038**.

[5] With M. Ghandehari and H. Hatami, "k-homogeneous Latin Trades", *Bayreuth. Math. Schr.*, **74** (2005), 7–18. **MR2006k:050346**.

[6] With P. Afshani and H. Hatami, "On the Spectrum of the Forced Matching Number of Graphs", *Australas. J. Combin.* , **30** (2004), 147–160. **MR2005b:05176**.

[7] With H. Hatami, "A Lower Bound for the Size of the Largest Critical Sets in Latin Squares", *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, **38** (2003), 19–22. **MR2004d:05038**.

[8] With M. T. Hajiaghaee, V. S. Mirrokni, A. Saberi, and R. Tusserkani, "On Simultaneous Edge-coloring Conjecture", *Discrete Mathathematics*, **216** (2000), 267–272. **MR2001a:05059**.

[9] With M. Mahdian, A. Saberi, M.R. Salavatipour, and R. Tusserkani, "On a Conjecture of Keedwell and the Cycle Double Cover Conjecture, *Discrete Mathematics,* **216** (2000), 287–292. **MR2000k:05056**.

[10] With M. Mahdian, "The Roots of an IMO97 Problem", *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, **28** (2000), 48–54. **MR1740669**.

[11] With M. Mahdian, "A Characterization of Uniquely 2–list Colorable Graphs", *Ars Combinatoria*, **51** (1999), 295–305. **MR 99j:05073**.

[12] With Reza Naserasr, M. Mahdian, and Frank Harary, "On Defining Sets of Vertex Colorings of the Cartesian Product of a Cycle With a Complete Graph", In Y. Alavi, D.R. Lick, and A. Schwenk, editors, *Combinatorics,*

Graph Theory and Algorithms, (Kalamazoo, MI, 1996), New Issues Press, (1999), **MR1985077**.

[13] With S. Akbari, M. Behzad, and H. Hajiabolhassan, "Uniquely Total Colorable Graphs", *Graphs and Combin.*, *Graphs Combin.*, **13** (1997), 305–314. **MR 99b:05052**.

[14] With R. Naserasr and M. Zaker, "Defining Sets in Vertex Colorings of Graphs and Latin Rectangles", *Discrete Mathematics,* **167/168** (1997), 451–460. **MR 98b:05044**.

[15] With Maryam Mirzakhani, "Decomposition of Complete Tripartite Graphs into 5–Cycles", *Combinatorics Advances,* Kluwer Academic Pub. Mathematics and its Applications, 329 C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, Editors (1995), 235–241. **MR 96i:05132**.

[16] With A.A. Khanban, "Ordered Block Designs", *Words, Languages and Combinatorics*, Kyoto, Japan, 1990 M. Ito (ed.) 262–272, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1992), **MR 92m:05022**.

[17] With Nasrin Soltankhah, "On the Existence of (v,k,t) Trades", *Australasian Journal of Combinatorics*, **6** (1992) 279–291. **MR 93j:05013**.

[18] With M. Rezaie and F. Vatan, "Generalization of Venn Diagram", *Proceedings of the Eighteenth Conference of Iranian Mathematical Society*, Birjand (1987), 154–161.

سید عباداله محمودیان
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
emahmood@sharif.edu

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۴۹ تا ۶۹

ریاضیات قرن بیستم[۱]

مایکل اتیا

چکیده

این مقاله مبتنی بر سخنرانی مایکل اتیا[۲]، ریاضیدان بزرگ قرن گذشته و حال حاضر دنیا است که در انستیتو فیلدز تورنتو در ژوئن ۲۰۰۰ میلادی در گردهمایی جهانی ریاضیات ایراد گردید[۳]. در این مقاله به موضوعات کلیدی و مهمی اشاره شده است که شاخص‌های ریاضیات قرن بیستم می‌باشند. به علاوه چگونگی تأثیر فیزیک بر ریاضیات در قرن بیست و یکم مورد بحث قرار گرفته و همچنین پیش‌بینی‌هایی در مورد امکان توسعهٔ ریاضیات در قرن حاضر مطرح شده است.

وقتی صحبت از اتمام یک قرن و آغاز قرنی دیگر می‌شود، پیش روی آدمی دو انتخاب سخت قرار می‌گیرد، اول ارائهٔ تصویری از توسعهٔ ریاضیات در صد سال گذشته و دوم پیش بینی وضعیت

---

۱) این مقاله برگردانی است از متن روسی که در مجلهٔ سالانه متمتیچسکایا پراسوشینیا، شماره ۷، صفحات ۲۴—۵ سال ۲۰۰۳ چاپ شده توسط ب.ر.فرانکینا از متن انگلیسی به روسی برگردانده شده است. البته در ترجمهٔ حاضر از اصل مقاله که در بولتن انجمن ریاضی لندن جلد ۳۴ ، شماره ۱، صفحات ۱۵—۱ سال ۲۰۰۲ به چاپ رسیده نیز استفاده شده است.

۲) مایکل اتیا از تأثیر گذارترین ریاضیدانان معاصر است. پدرش لبنانی و مادرش اسکاتلندی تبار بود. او در سال ۱۹۲۹ به دنیا آمد، تحصیلات دانشگاهی خود را در دانشگاه کمبریج گذراند و سپس در دانشگاه آکسفورد به تدریس پرداخت. پس از یک دورهٔ سه ساله (۱۹۷۲—۱۹۶۹) عضویت رسمی در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستون، مجدداً به آکسفورد بازگشت و تا سال ۱۹۹۰ استادی آن دانشگاه و ریاست مؤسسهٔ نیوتن در کمبریج را به عهده داشت. اتیا با همکاری ریاضیدانانی چون هیرتسبروخ، بات و سینگر در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ در پدیدآوردن یک سلسله آثار مهم ریاضی در زمینه‌هایی مشترک بین رشته‌های هندسهٔ جبری ، توپولوژی و آنالیز نقش مهمی داشت. از جمله این آثار، نظریهٔ کی و قضیهٔ معروف اتیا ـ سینگر می‌باشد. اتیا نقش مهمی در پیوند دادن ریاضیات و فیزیک در نظریهٔ پیمانه‌ای و نظریهٔ میدان کوانتومی ایفا کرده است.

۳) گردهمایی جهانی ریاضیات سال ۲۰۰۰ ، تورنتو، ۹—۷ ژوئن ۲۰۰۰

ریاضیات در صد سال آینده. من سخت‌ترین این دو را انتخاب نموده‌ام. هر یک از ما می‌تواند پیش‌بینی‌هایی داشته باشد و تا وقتی که برایمان روشن نشوند و ندانیم کدام آنها اشتباه است، پیش‌بینی‌ها قابل لمس نخواهند بود؛ اما با دادن تصویری از گذشته هر کسی می‌تواند در مورد آن اظهار نظر و یا مخالفت کند. چیزی که من می‌توانم انجام دهم، این است که نظر شخصی خود را بیان کنم. البته اظهار نظر در مورد همهٔ موضوعات عملاً غیرممکن است، به همین دلیل از بعضی از قسمت‌های مهم سخنی به میان نمی‌آورم چون اولاً در این حوزه‌ها تخصص کافی ندارم ثانیاً در منابع دیگری به طور مفصل مطرح شده‌اند. به عنوان مثال در مورد وقایع مهمی در حوزهٔ واقع بین منطق و ریاضیات محاسباتی که با اسامی افرادی چون هیلبرت[1]، گودل[2] و تورینگ[3] عجین شده‌اند، چیزی نخواهم گفت. همچنین از خیلی از موضوعات سخن به میان نمی‌آورم از جمله کاربردهای ریاضیات، به استثنای فیزیک نظری، چرا که تعداد آنها زیاد است و بررسی‌های خاصی را می‌طلبد. هر کدام از آنها نیاز به یک سخنرانی جداگانه دارند و احتمالاً دربارهٔ آنها سخنرانان دیگری در این گردهمایی مطالبی را مطرح می‌کنند. به علاوه عقلانی نیست که سعی کنیم شماری از قضایا و حتی شماری از ریاضیدانان نامی صد سال گذشته را نام ببریم، که این کاملاً کار بی فایده‌ای خواهد بود. به همین دلیل سعی می‌کنم یک سری از موضوعات را انتخاب کنم. البته از نظر من، این موضوعات مانند نخ قرمزی از میان اکثر حوزه‌های ریاضیات گذشته و وقایع اصلی را مجزا و مشخص می‌کنند.

ابتدا اجازه می‌خواهم که تذکری کلی بدهم. سده یک مفهوم قراردادی است، در واقع پس از گذشت صد سال باورکردنی نیست که چیزی ناگهان متوقف شود و دوباره شروع به حرکت نماید. بنابراین در توصیف ریاضیات قرن بیستم، به‌خصوص به تاریخ وقایع زیاد دقیق نخواهم شد. اگر چیزی در ۱۸۹۰ شروع و تا ۱۹۰۰ ادامه یافته است، از این جزئیات چشم‌پوشی خواهم کرد. قصد دارم مانند یک اخترشناس فقط به رقم‌های تقریبی بسنده کنم. در واقع بسیاری از موضوعات در قرن نوزدهم شروع شدند و تنها در قرن بیستم جامهٔ عمل پوشیدند.

یکی از دلایل سختی موضوع بحث این است که امروزه نگاه کردن به موضوعات از دید یک ریاضیدان قرن نوزدهم خیلی آسان نیست، چون که دستاوردهای ریاضیات قرن نوزدهم ما و فرهنگمان را تغذیه کرده است. مشکل بتوان زمانی را تصور کرد که مردمانش خارج از واژگان ما فکر می‌کردند. در واقع، اگر شما یک کشف مهم و واقعی در ریاضیات انجام دهید، بعد از آن کشف، محکوم به حذف هستید! شما کاملاً در فرهنگ عمومی حل می‌شوید. بنابراین با توجه به گذشته باید تلاش کنیم بفهمیم که ریاضیات در عصر قدیم، یعنی زمانی که مردم مانند ما فکر نمی‌کردند، به چه چیزی شبیه بود.

از موضعی به سرتاسری[4]

اکنون قصد دارم از بعضی موضوعات اسم ببرم و در مورد آنها بحث کنم. نخستین موضوعی که

1) Hilbert 2) Godel 3) Turing 4) Local to global

به طور جامع می‌توان تعریف کرد، موضوع گذر از مفهوم موضعی به مفهوم سرتاسری است. در عصرهای کلاسیک مردم در کل دوست داشتند اشیاء را در مقیاس‌های کوچک مورد مطالعه قرار دهند، یعنی در مختصات موضعی و چیزی از این قبیل. تأکید و تکیه در قرن بیستم به تحقیق و درک رفتارهای سرتاسری در مقیاس‌های بزرگ بود. اما از آن جهت که فهم رفتارهای کلی بسیار سخت است و اکثراً در سطح کیفی انجام می‌شوند، ایده‌های توپولوژیکی بسیار اهمیت پیدا کردند. هنری پوانکاره[1] کسی بود که به طور جدی قدم‌های اولیه را در توپولوژی برداشت و پیش‌بینی کرد که توپولوژی یکی از مهم‌ترین مؤلفه‌های ریاضیات قرن بیستم خواهد شد. در عین حال هیلبرت، که مسائل معروف خود را در ریاضیات مطرح کرد، چنین نظری نداشت. در فهرست مسائل هیلبرت به سختی به توپولوژی برخورد می‌کنیم ولی برای پوانکاره کاملاً مشهود بود که توپولوژی عاملی مهم در ریاضیات قرن بیستم خواهد بود.

اجازه دهید برخی از حوزه‌های ریاضیات را نام ببرم، تا منظورم را بیشتر روشن کنم. به عنوان مثال آنالیز مختلط را در نظر بگیرید (منظور نظریهٔ توابع است) که در نقطهٔ مرکزی ریاضیات قرن نوزدهم قرار داشت و موضوع تحقیقات ریاضیدانان بزرگی مانند وایراشتراوس[2] بود. برای اکثر ریاضی‌دانان تابع، به عنوان تابع یک متغیره مطرح بود و برای وایراشتراوس تنها یک سری توانی بود که بتوان آن را به طور صریح نوشت و توصیف کرد و یا این که آن را به صورت فرمول ارائه داد. توابع در آن زمان فرمول‌هایی بیش نبودند که به طور صریح بیان می‌شدند. اما بعدها کارهای ریاضی‌دانانی همچون آبل[3]، ریمان[4] و پیروان آنها ما را به سمت نگرش کنونی سوق دادند و امروزه توابع بیشتر با خواص سرتاسریشان تعریف می‌شوند تا به صورت فرمول: به عبارتی، مهم است بدانیم که نقاط تکین توابع کدام‌اند، دامنهٔ تعریفشان چیست و کجا مقادیر خود را می‌گیرند. بدین ترتیب این خواص سرتاسری مشخصه‌هایی شدند که توابع را از یکدیگر متمایز می‌کردند و در این میان بسط موضعی تنها به عنوان یکی از این روش‌های بررسی توابع مطرح است.

جریانی مشابه برای معادلات دیفرانسیل نیز پیش آمد. در اصل حل یک معادلهٔ دیفرانسیل چیزی به غیر از یافتن جواب موضعی صریح نبود: چیزی که بتوانید بنویسید و زیردست خود پنهان کنید. در نتیجهٔ پیشرفت‌های بعدی، جواب‌های غیرصریح هم ظاهر شدند ولی همواره امکان بیان آنها به صورت فرمول‌های زیبا وجود نداشت. خواص سرتاسری یک جواب را در واقع، نقاط تکین آن معین می‌کردند و این جریان هم در کل مشابه چیزی بود که برای آنالیز مختلط اتفاق افتاد، هر چند در جزئیات کمی متفاوت بود.

در هندسهٔ دیفرانسیل، کارهای کلاسیک گاوس و دیگران صرف مطالعهٔ اجزاء کوچک فضا، بخش‌های جزئی انحنا و معادلات موضعی شدند که هندسهٔ موضعی را توصیف می‌کردند. در نتیجه، طبیعی است که وقتی از این مقیاس‌های کوچک وارد مقیاس‌های بزرگ می‌شویم بخواهیم طرح سرتاسری رویه‌ها و همچنین توپولوژی آنها را درک کنیم. وقتی از مقیاس کوچک‌تر و جزئی وارد

1) Poincare 2) Weierstrass 3) Abel 4) Riemann

مقیاس بزرگ‌تر و کلی می‌شویم، خواص توپولوژیکی مهم‌ترین مفاهیم خواهند بود.
نظریهٔ اعداد نیز دچار تحول مشابهی شد، هرچند در نگاه نخست به نظر نمی‌رسد که این بخش از ریاضیات در این مقوله بگنجد. متخصصان نظریهٔ اعداد آن را به دو صورت جداگانه مورد مطالعه قرار می‌دهند، نظریهٔ «موضعی اعداد»، جایی که فقط از یک عدد اول در زمان خاص یا از یک مجموعهٔ متناهی از اعداد اول بحث می‌شود، و نظریهٔ سرتاسری اعداد که تمام اعداد اول به طور همزمان مورد بررسی قرار می‌گیرند. این تشابه بین اعداد اول و نقاط، بین مفاهیم موضعی و سرتاسری، تأثیر به‌سزایی در توسعهٔ نظریهٔ اعداد به جای گذاشت و باعث بروز ایده‌هایی در این نظریه شد که ریشه در توپولوژی داشتند.

اما در فیزیک، از آنجا که فیزیک کلاسیک کاملاً با بحث موضعی عجین شده است، معادله دیفرانسیلی که رفتار سیستم را کنترل می‌کند، در مقیاس کوچک توصیف می‌شود و بعد از آن باید رفتارهای سیستم فیزیکی در مقیاس‌های بزرگ را مطالعه کرد. در واقع کار فیزیک این است که سعی می‌کند با توجه به همهٔ نتایج، پیش بینی کند وقتی از یک مقیاس کوچک، جایی که رفتارها قابل فهم‌اند، وارد یک مقیاس بزرگ‌تر می‌شویم چه اتفاقی می‌افتد.

افزایش ابعاد[1]

موضوع دوم بحث متفاوتی است که آن را افزایش ابعاد می‌نامم. بار دیگر از نظریهٔ کلاسیک توابع مختلط شروع می‌کنم. این نظریه ابتدا عبارت بود از بررسی‌های جزئی و خسته‌کنندهٔ توابع مختلط یک متغیره. ورود به حالت‌های دو یا چندمتغیره تقریباً در قرن بیستم اتفاق افتاد و در این حوزه از ریاضیات پدیده‌های جدیدی کشف شد که غالباً با حالت یک متغیره تفاوت داشتند، درنتیجه مشخصه‌های کاملاً جدیدی پدید آمدند و نظریهٔ توابع چند متغیره توانست موقعیت توانمندی را در ریاضیات به دست آورد. این نیز یکی از دستاوردهای مهم قرن بیستم است.

به طور مشابه در شاخهٔ هندسه دیفرانسیل اکثر ریاضی‌دانان در گذشته بیشتر علاقمند به مطالعهٔ خم‌ها و رویه‌ها بودند ولی امروزه ما هندسهٔ چند بعدی چندگونه‌ها را مطالعه می‌کنیم و لازم است آن را به عنوان یک تحول مهم و واقعی قرن‌مان تلقی کنیم. در گذشته خم‌هاو رویه‌ها اشیائی بودند که ما به واقع می‌توانستیم در فضا ببینیم. اشیاء در ابعاد بالاتر بیشتر اشیاء شرطی بودند که ما آنها را به عنوان اشیاء ریاضی فرض می‌کردیم ولی شاید به جد نمی‌پذیرفتیم. ایدهٔ پذیرش و مطالعهٔ آنها به عنوان اشیاء جدی مانند ابعاد پایین‌تر در واقع متعلق به قرن بیستم است. همچنین برای ریاضی‌دانان قرن نوزدهم افزایش تعداد توابع و مطالعهٔ چند تابع همزمان به عبارتی مطالعهٔ توابع برداری، ایدهٔ زیاد روشنی نبود. در حالی که امروزه افزایش تعداد متغیرهای مستقل و همچنین وابسته را شاهد هستیم.

جبر خطی همواره با متغیرهای زیادی سر و کار داشت ولی افزایش در ابعاد غیرمنتظره بود و

1) Increase in dimensions

بدین ترتیب جبر خطی از ابعاد متناهی به ابعاد نامتناهی و از فضاهای خطی به فضاهای هیلبرت با تعداد متغیرهای نامتناهی طی مسیر کرد. البته در این جریان آنالیز هم نقش عمده‌ای داشت. به غیر از توابع چند متغیره، می‌توانیم به توابعی از توابع یعنی تابعک‌ها اشاره داشته باشیم. تابعک‌ها توابعی روی فضای توابع می‌باشند که اصولاً شامل تعداد نامتناهی متغیر هستند و تئوری آنها را حساب تغییرات[1] می‌نامیم. جریان مشابهی در حوزهٔ توابع عمومی (توابع غیرخطی) اتفاق افتاد که البته موضوع جدیدی نبود، ولی در قرن بیستم اولویت پیدا کرد و این موضوع دوم سخنرانی من است.

از جابجایی به ناجابجایی[2]

ورود از مفهوم جابجایی به مفهوم ناجابجایی موضوع سوم این سخنرانی است. شاید بتوان گفت این موضوع یکی از مشخص‌ترین ویژگی‌های ریاضیات و مخصوصاً جبر قرن بیستم است. در این میان جنبهٔ ناجابجایی بسیار مهم جلوه می‌کند. البته جبر ناجابجایی ریشه در قرن نوزدهم دارد و این ریشه‌ها چندجانبه می‌باشند و تحقیقاً غیرمنتظره‌ترین آنها کار هامیلتون روی کواترنیون‌ها است. کارهای وی تأثیرات وسیعی در جهت‌گیری ایده‌های فیزیکی گذاشت. همچنین به کارهای گراسمان روی جبرهای خارجی[3] (یکی دیگر از سیستم‌های جبری که در دل نظریهٔ صورت‌های دیفرانسیلی جای دارد) نیز می‌توان اشاره کرد. البته کار کیلی[4] روی ماتریس‌ها که پایه در جبر خطی دارد و کار گالوا[5] روی نظریهٔ گروه‌ها دستاوردهای دیگری می‌باشند که می‌توان از آنها نام برد.

چنانچه گفته شد تمام این روش‌های متفاوت که پایه‌های ورود ضرب ناجابجایی به جبر را شکل می‌دهند روغن موتور ماشین جبری قرن بیستم بودند. هرچند برای ما زیاد محسوس نیست ولی تمام مثال‌های ذکر شده در قرن نوزدهم هر کدام به نوبهٔ خود مثال‌های کلانی بودند. البته کاربردهای این ایده‌ها از جوانب کاملاً غیرمنتظره‌ای پیدا شدند. کاربردهای ماتریس‌ها و ضرب ناجابجایی در فیزیک با پیدایش مکانیک کوانتمی آغاز شد. مهمترین مثال از کاربرد اساسی جبر ناجابجایی در فیزیک عبارت است از روابط تعویضی هایزنبرگ[6] که بعدها توسط فون نویمان[7] در نظریهٔ جبر عملگرها توسعه یافت.
نظریهٔ گروه‌ها نیز یکی از مهم‌ترین عناصر ریاضیات قرن بیستم به شمار می‌رود که کمی بعد به آن نیز می‌پردازم.

از خطی به غیر خطی[8]

بحث بعدی عبور از مفهوم خطی به مفهوم غیرخطی است. اکثر بخش‌های ریاضیات کلاسیک یا اساساً خطی‌اند یا اگر هم کاملاً خطی نیستند، تقریباً خطی هستند و به کمک اختلالات

---

1) calculus of variation 2) commutative to non-commutative 3) exterior algebras
4) Cayley 5) Galois 6) Heisenberg 7) Von Neumann 8) Linear to Non-liner

متناسب در سیستم بررسی می‌شوند. پدیده‌های واقعی غیرخطی به مراتب مشکل‌اند و به معنای واقعی تنها در قرن بیستم روی آنها کار شده است. این روند با هندسه شروع می‌شود: هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ صفحه، هندسهٔ فضا و هندسهٔ خطوط مستقیم همگی خطی‌اند ولی بعداً با گذر از یک سری مراحل، هندسهٔ غیراقلیدسی وارد هندسهٔ ریمانی می‌شود که اساساً غیرخطی است، در معادلات دیفرانسیل، با مطالعهٔ جدی پدیده‌های غیرخطی، با یک سری پدیده‌های جدید روبرو می‌شویم که در رفتارهای کلاسیک دیده نمی‌شود. من در اینجا به بیان دو مورد بسنده می‌کنم: بحث سالیتون‌ها [۱] و نظریهٔ آشوب [۲] که دو نگرش کاملاً متفاوت از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌باشند که در زمرهٔ موضوعات ویژهٔ قابل توجه و عمومی در قرن بیستم قرار گرفتند. سالیتون‌ها رفتار ناگهانی غیرخطی سازمان یافته را معرفی می‌کنند در حالی‌که آشوب رفتار ناگهانی غیرسازمان یافته را شرح می‌دهد. هردوی آنها در رفتارهای متفاوت یک پدیده حضور دارند و هر دو جالب و مهم‌اند. آنها اساساً پدیده‌های غیرخطی می‌باشند. این مفاهیم را می‌توان در کارهایی نه چندان اساسی که در اواخر قرن نوزدهم روی سالیتون‌ها انجام گرفت ردیابی کرد.
البته در فیزیک معادلات ماکسول (معادلات اساسی الکترومغناطیس) معادلاتی با مشتقات جزئی خطی و در مقابل، معادلات معروف یانگ ـ میلس [۳] غیرخطی‌اند و نیروهای وارد بر ماده را مورد مطالعه قرار می‌دهند. معادلات یانگ ــ میلس غیرخطی‌اند چرا که در اصل صورت ماتریسی معادلات ماکسول هستند ولی از آنجا که ضرب ماتریسی ناجابجایی است، عامل غیرخطی در این معادلات ظاهر می‌شود و اینجاست که ارتباطی جالب بین غیرخطی‌بودن و ناجابجایی بودن دیده می‌شود. ناجابجایی بودن، غیرخطی بودن از نوع خاص را تولید می‌کند و این چیزی جالب و مهم است.

هندسه در مقابل جبر [۴]

تا اینجا تنها در مورد چند موضوع علمی بحث شد. حال می‌خواهم در مورد تقابل در ریاضیات که همواره با ما بوده است صحبت کنم. این تقابل امکان می‌دهد که بتوانم در مورد تعمیم‌های فلسفی صحبت کنم و تذکراتی را خاطرنشان سازم. منظور تقابل بین هندسه و جبر است که دو رکن اولیه و اصلی ریاضیات هستند. هندسه به یونانی‌ها و حتی به زودتر از آن و جبر به عرب‌ها و هندی‌ها [۵] برمی‌گردد. اگرچه هندسه و جبر نقشی اساسی در ریاضیات بازی کردند ولی تأثیر و روابطشان با هم ساده نبوده است.
اجازه بدهید با تاریخچهٔ موضوع شروع کنم. هندسهٔ اقلیدسی اولین مثال یک نظریهٔ ریاضی است و تا زمانی که دکارت مختصات جبری را که امروزه صفحهٔ دکارتی می‌نامند ابداع نکرده بود موکداً

1) Solitons 2) Chaos 3) Yang-Mills 4) Geometry Versus algebra

۵) همانطور که خواننده گرامی می‌داند ایرانیان نیز نقش اساسی در توسعهٔ جبر داشته‌اند که به کارهای خیام، ابوریحان و خوارزمی می‌توان اشاره کرد (مترجم)

هندسی محسوب می‌شد. این کار دکارت تلاشی برای هدایت افکار هندسی به سمت طرح‌های جبری بود. البته این یک شکست یا به عبارت دیگر حمله‌ای بزرگ علیه هندسه بود که توسط جبردانان انجام شد. در حوزهٔ آنالیز، کارهای نیوتن و لایبنیتز[1] متعلق به دو عرف متفاوت هستند. نیوتن قطعاً یک هندسه‌دان و لایبنیتز اساساً یک جبردان بود و برای این ادعا هم دلایل محکم و عمیقی وجود دارد. برای نیوتن هندسه (یا حساب دیفرانسیل که توسط وی بسط داده شد) کوششی برای توصیف قوانین طبیعت به شمار می‌رفت. وی به معنای وسیعی با فیزیک سر و کار داشت و فیزیک تنها در دنیای هندسه نمود پیدا می‌کند. هرگاه بخواهید بدانید اشیاء چگونه ساخته شده‌اند، عملاً در جهان فیزیک و درون اشکال هندسی تفکر می‌کنید. زمانی که نیوتن حساب دیفرانسیل را توسعه می‌داد، می‌خواست آن را به شکلی درآورد که هر چه بیشتر به مفاهیم فیزیکی که تحت لوایش قرار دارند، نزدیک‌تر نماید. او به این دلیل مباحث هندسی را به کار می‌برد زیرا تنها در این صورت به معنی و مقصود واقعی نزدیک می‌شد. لایبنیتز از طرف دیگر آرزو داشت تمام ریاضیات را طوری شکل دهد که آن را به یک ماشین جبری بزرگی تبدیل کند و این دقیقاً مخالف نیوتن بود. بدین جهت آنها کاملاً نمادگذاری‌های متفاوتی را به کار بردند. همانطور که می‌دانیم در جدال بزرگی که بین نیوتن و لایبنیتز روی داد نمادگذاری لایبنیتز پیروز شد و امروزه ما مشتق را با نماد لایبنیتز نشان می‌دهیم. روح نیوتن هنوز پشت این نماد حضور دارد ولی مدت‌های مدیدی بی‌اثر شده بود.

اواخر قرن نوزدهم یعنی صد سال پیش، پوانکاره و هیلبرت دو چهرهٔ شاخص در ریاضیات محسوب می‌شدند. قبلاً در مورد آنها صحبت کردیم، در واقع آنها پیروان نیوتن و لایبنیتز بودند (پوانکاره دنباله‌روی نیوتن و هیلبرت پیرو لایبنیتز بود). فکر پوانکاره بیشتر روح هندسی داشت و وی هندسه و توپولوژی را به عنوان پایهٔ خلاقیت خود به کار می‌برد. هیلبرت بیشتر به عنوان یک صورت‌گرا[2] مطرح بود. وی می‌خواست ریاضیات را اصل موضوعی کند و آن را به صورت قالبی محکم معرفی نماید. آن دو (هیلبرت و پوانکاره) بی شک به سنت‌های متفاوتی تعلق داشتند، هرچند همیشه به این راحتی نمی‌توان گفت که یک ریاضیدان بزرگ به کدام دستهٔ فکری متعلق است.

ضمن آماده کردن این سخنرانی فکر می‌کردم بهتر است اسامی چند تن از ریاضی‌دانانی را که از پیروان این سنت‌ها می‌باشند در این فهرست بیاورم. صحبت کردن در مورد ریاضی‌دانانی که در قید حیات هستند خیلی مشکل است، کدامیک از آنها را در این فهرست می‌آوردم؟ بعداً اندیشیدم که اسامی چه کسان دیگری می‌توانست در هر کدام از دو طرف طبقه‌بندی مذکور بگنجد. در مجموع اسم دو نفر برگزیده شد یکی بورباکی[3] که از نظر اینجانب در نقش معروف‌ترین پیرو هیلبرت است و دیگری آرنولد[4] که به وارث سنت پوانکاره ـ نیوتن می‌باشد. بی تردید نظرات مکانیکی و فیزیکی آرنولد اساساً هندسی‌اند و مستقیماً به نیوتن برمی‌گردند. چیز دیگری که در این بین مطرح می‌شود

1) Leibniz   2) Formalist   3) Bourbaki

۴) ولادیمیر ایگوروویچ آرنولد در بندر اودسا در خانوادهٔ ریاضیدان معروف، متخصص در نظریهٔ اعداد، ایگور←

بجز چند نفر دیگر از ریاضی‌دانان مانند ریمان نادرست به نظر می‌رسد. بورباکی سعی می‌کرد که در سطح وسیعی برنامهٔ صورت‌گرای هیلبرت را با هدف اصل موضوعی ساختن ریاضیات، تکمیل کند و تا اندازهٔ قابل قبولی هم موفقیت‌هایی به‌دست آورد. هر یک از این نقطه‌نظرها اعتبار خاص خود را دارد ولی بین‌شان برخورد نیز وجود دارد.

اجازه دهید نظر شخصی خود را در مورد تفاوت بین هندسه و جبر ابراز کنم. شکی نیست که هندسه در واقع علمی در مورد فضا است، وقتی من به حاضرین می‌نگرم، در آن واحد خیلی چیزها می‌بینم، در یک ثانیه و حتی در یک میکرو ثانیه می‌توانم مقدار قابل ملاحظه‌ای اطلاعات را دریافت کنم و البته این یک امر اتفاقی نیست. مغز ما طوری ساخته شده است که ارتباط تنگاتنگی با قوهٔ بینایی دارد. قوهٔ بینایی، به طوری که از دوستانی که در علم اعصاب و روان کار می‌کنند شنیده‌ام، در حدود ۸۰ یا ۹۰ درصد حجم پوستهٔ مغز را به کار می‌گیرد، در مغز حدود ۱۷ مرکز متفاوت وجود دارد که هر کدام برای قسمت‌های معین مراحل بینایی تخصیص داده شده است. تعدادی از آنها مربوط به خطوط قائم و تعدادی مربوط به خطوط افقی می‌باشند و تعدادی نیز با رنگ مناظر سر و کار دارند و نهایتاً تعدادی با تفکر و تعابیر و تفاسیر در ارتباط می‌باشند. درک و فهم جهانی که می‌بینیم، مهمترین قسمت تکامل تدریجی ما را سبب می‌شود. بنابراین حس فضایی و درک فضایی از جمله وسایل و سلاح‌های قوی می‌باشند. به همین خاطر است که هندسه در واقع شاخه‌ای قوی از ریاضیات را تشکیل می‌دهد که نه تنها با اشیای کاملاً هندسی بلکه با اشیائی هم که هندسی نیستند مرتبط است. ما تلاش می‌کنیم به چنین اشیائی شکل هندسی ببخشیم چرا که چنین کاری ما را قادر می‌سازد از قوهٔ ادراکی که تواناترین سلاح ما است، استفاده کنیم. حتی وقتی شما سعی می‌کنید یک مطلب ریاضی را به دانشجو یا به همکار خود توضیح دهید، این مورد به طور آشکار دیده می‌شود. شما یک بحث طولانی و سخت مطرح می‌کنید و در نهایت دانشجو مطلب را می‌فهمد.

← ولادیمیروویچ آرنولد چشم به جهان گشود. وی در سال ۱۹۵۴ وارد دانشکدهٔ مکانیک ــ ریاضی دانشگاه دولتی مسکو شد و زیر نظر ریاضیدان معروف آن زمان آندری نیکولایوویچ کولموگوروف به تحصیل و تحقیق پرداخت و در همان سال‌های دانشجویی بود که توانست جوابی برای مسألهٔ ۱۳ هیلبرت بیابد، داستان از این قرار بود که روزی کولموگوروف جهت فرصت مطالعاتی قصد سفر به فرانسه را داشت، وی مسأله‌ای را جهت حل به آرنولد پیشنهاد می‌کند. بعد از ٦ ماه که از فرانسه برمی‌گردد، آرنولد حلی از مسألهٔ مذکور را به وی ارائه می‌کند. بعد از تأیید درستی حل، وی به آرنولد می‌گوید که این مسأله، مسألهٔ ۱۳ هیلبرت است. آرنولد در سال ۱۹٦۱ از رسالهٔ دکتری خود تحت رهبری کولموگوروف دفاع کرده و در سال ۱۹٦۳ دورهٔ فوق دکتری خود را به پایان رساند. وی از سال ۱۹٦۱ در دانشکدهٔ مکانیک ــ ریاضی دانشگاه دولتی مسکو مشغول به کار شد و در سال ۱۹٦۵ به درجهٔ پروفسوری نائل آمد. در حال حاضر وی همکار اصلی انستیتوی آکادمی علوم روسیه به نام انستیتو استکلوف می‌باشد و همزمان به عنوان پروفسور دانشگاه دوفین پاریس با آن دانشگاه همکاری دارد. از وی تا به امروز حدود ۳۵۰ کار علمی منتشر شد و کتاب‌های معروفی به چاپ رسیده است. همچنین وی یکی از بنیانگذاران نظریهٔ معروف KAM (کولموگورف ـ آرنولد ـ موزر) می‌باشد.

در این لحظه دانشجو می‌گوید "!I see"، دیدن مترادف فهمیدن دیده می‌شود. شما یک بحث طولانی و سخت مطرح می‌کنید و در نهایت دانشجو مطلب را می‌فهمد. در این لحظه دانشجو می‌گوید "!I see"، دیدن مترادف فهمیدن است و به جای هر دو مفهوم یعنی دیدن و فهمیدن ما کلمهٔ درک را به کار می‌بریم. حداقل در زبان انگلیسی چنین موردی کاملاً درست است. جالب است اگر این ادعا را در دیگر زبان‌ها نیز بررسی کنیم. مغز انسان این قابلیت را دارد که با یک نگاه آنی حجم عظیمی از اطلاعات را دریافت کند و ریاضیات آن را کامل می‌کند.

در طرف دیگر جبر اصولاً زمان را بررسی می‌کند. (و البته احتمال دارد شما در مورد جبر چنین نگرشی نداشته باشید). هر قسمت از جبر را مورد مطالعه قرار دهید، قطعاً دنباله‌ای از اعمال پی در پی اجرا می‌شوند و عبارت «پی در پی» بدین معنی است که شما به اجبار با زمان سر و کار دارید. در دنیای ایستا جایی برای جبر وجود ندارد در حالی که هندسه ذاتاً ایستا است. من می‌توانم بنشینم و نگاه کنم، می‌توان فرض کرد که چیزی تغییر نمی‌کند ولی به هر حال می‌توانم بنگرم. اما جبر مرتبط با زمان است، چرا که ما با اعمالی سر و کار داریم که به طور دنباله‌ای صورت می‌گیرد. وقتی از «جبر» صحبت می‌کنم منظورم تنها جبر نوین نیست. هر الگوریتم و هر روند محاسباتی، دنباله‌ای از مراحل پی در پی می‌باشند که رایانه‌های مدرن به طور واضح و روشن این کار را انجام می‌دهند. آنها اطلاعات را به صورت دنباله‌ای از صفر و یک‌ها دریافت می‌کنند و جواب می‌دهند.

جبر با محاسبه در زمان و هندسه با فضا سر و کار دارد. این دو موضوع جنبه‌های مکمل دنیای ما به شمار می‌روند و برای آنها دو نقطه نظر متفاوت در ریاضیات متناظر می‌شوند. بدین ترتیب بحث و گفتگو بین ریاضی‌دانان گذشته در مورد مفهوم نسبی هندسه و جبر حائز اهمیت است.

البته این فکر که در این بحث و جدل یک طرف بازنده و طرف دیگر برنده به شمار می‌رود درست نیست. بهتر است این موضوع را با یک مثال شهودی توضیح دهم. وقتی که می‌پرسیم می‌خواستید یک جبردان باشید یا یک هندسه‌دان؟ مثل این است که می‌پرسیم دوست داشتید ناشنوا باشید یا نابینا؟ هرگاه نابینا باشیم، فضا را نمی‌بینیم و هرگاه ناشنوا باشیم نمی‌شنویم ولی ناشنوایی در زمان اتفاق می‌افتد. در کل دوست داریم هر دو توانایی را داشته باشیم.

در فیزیک نیز مرزبندی تقریباً مشابهی بین ایده‌ها و تجربیات وجود دارد. فیزیک از دو قسمت تشکیل شده است:

۱) نظریه ـ مفاهیم، ایده‌ها، عبارات؛

۲) قوانین ـ اسباب و ابزار تجربی.

به نظر من ایده‌ها به معنایی وسیع‌تر اشیاء عبارات هندسی می‌باشند چرا که با آنچه که در جهان واقعی اتفاق می‌افتد در ارتباط هستند. از طرف دیگر تجربه، بیشتر محاسبات جبری را خاطرنشان می‌سازد.

شما کاری در زمان انجام می‌دهید یا کمیت‌هایی را اندازه‌گیری می‌کنید و آنها را فرمول‌بندی می‌کنید، ولی ایده‌های اساسی که پشت این تجربیات قرار دارند بخشی از سنت‌های هندسی را

تشکیل می‌دهند.

می‌توان این تقابل را به صورت فلسفی یا ادبی نیز بیان کرد به این صورت که جبر «وسوسهٔ فاوست[۱]» هندسه‌دان است. همانطور که می‌دانید فاوست در داستان گوته در قبال فروختن روح خود می‌توانست مالک هر چیزی شود، از جمله زن زیبا. جبر عبارت است از وسوسه‌های شیطانی ریاضیدان. شیطان می‌گوید: من این ماشین قوی را به تو می‌بخشم، او هر سؤالی را جواب می‌دهد، هر سؤالی که بخواهی. در مقابل چیزی که از تو می‌خواهم این است که روحت را به من بدهی، از هندسه صرف نظر کن و در این صورت است که تو مالک این ماشین فوق‌العاده عالی جبر می‌شوی. در حال حاضر این ماشین می‌تواند همان رایانه باشد. البته که ما دوست داریم هر دو را داشته باشیم. احتمالاً می‌خواستیم شیطان را گول بزنیم و تظاهر کنیم که روح خود را می‌فروشیم در حالی که آن را نمی‌دادیم. به هر حال روحمان در خطر است چرا که با شروع به محاسبات جبری در واقع فکر کردن را متوقف می‌کنیم، دیگر هندسی فکر نمی‌کنیم. در اصل، دیگر در مورد ایدهٔ کار نمی‌توانیم فکر کنیم.

من در اینجا با جبردانان منتقدانه برخورد کردم ولی در واقع هدف جبر همواره ساختن فرمول‌هایی است که بتوان آن‌ها را در ماشین انباشت و با چرخاندن دسته، جواب را گرفت. در واقع شما (جبردانان) چیزی دارای مفهوم را انتخاب و آن را به یک فرمول تبدیل کرده‌اید و جواب را استخراج نموده‌اید. در این شرایط دیگر لازم نیست به این فکر کنید که گام‌های جداگانه‌ای که در انجام مراحل جبری برداشته‌اید، با چه چیزی در هندسه متناظرند. شما قوهٔ ادراک خود را از دست می‌دهید و این مسأله ممکن است در مراحل مختلفی مهم جلوه کند. نباید به طور کلی از قوهٔ ادراک خود صرف نظر کنید، ممکن است بعداً به آن نیازمند شوید. منظور من از وسوسهٔ فاوست این است، من به نیرنگ و مکر او معتقدم.

انتخاب حد وسط هندسه و جبر، موجب ایجاد آمیزه‌هایی شده است که در آنها جبر و هندسه ترکیب می‌شوند و همانطور که اشاره شد جدایی بین جبر و هندسه خیلی ساده و واضح نیست بلکه ساده‌انگارانه می‌باشد، چیزی که بحث‌اش را همین الان کردیم. به عنوان مثال جبردانان معمولاً از دیاگرام‌ها استفاده می‌کنند، دیاگرام چیست، آیا چیزی غیر از تسلیم شدن به قوهٔ ادراک هندسی می‌باشد؟

روش‌های مشترک [۲]

حال اجازه می‌خواهم وارد موضوعی بشوم که بیشتر از این که به محتوای ریاضیات مربوط شود، به اسلوب و روش‌های تکنیکی مربوط می‌شود. می‌خواهم تعدادی از روش‌های کلی را توصیف کنم که به نوعی در تمام زمینه‌ها به کار گرفته شده‌اند.

---

۱) در زبان روسی دیدن فقط با عضو چشم عملی انجام می‌شود و از درک و فهم خبری نیست.

2) Techniques in common

نظریهٔ همولوژی

مرسوم است که نظریهٔ همولوژی را به عنوان شاخه‌ای از توپولوژی در نظر بگیرند. این نظریه با مسأله زیر مرتبط است. فرض می‌کنیم یک فضای توپولوژیک با ساختار پیچیده‌ای وجود دارد و لازم است که از آن اطلاعات ساده‌ای شامل تعداد سوراخ‌ها یا چیزی شبیه آن را به دست آورید، برای این کار می‌توانید چند ناوردای خطی به فضای پیچیده وابسته کنید. در واقع این کار ساختن ناورداهای خطی است که در وضعیت غیرخطی صورت می‌گیرد. به لحاظ هندسی، دورهایی را تصور می‌کنیم که بتوان آنها را جمع و تفریق کرد. در این صورت است که چیزی به نام گروه همولوژی فضا را به دست می‌آوریم. همولوژی ابزار جبری مهمی است که جهت به دست آوردن اطلاعات در مورد فضاهای توپولوژیکی در نیمهٔ اول قرن مطرح شد و بدین ترتیب از هندسه شیئی جبری استخراج شد. همولوژی در مباحث دیگری هم ظاهر می‌شود. نقطهٔ شروع دیگر نظریهٔ همولوژی مدیون هیلبرت است که وی این نظریه را برای مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها به کار برد. چندجمله‌ای‌ها را به عنوان توابع غیرخطی می‌توان در یکدیگر ضرب کرد و چندجمله‌ای‌هایی با درجهٔ بالاتر به دست آورد. ایدهٔ عمیق هیلبرت این بود که ترکیبات خطی چندجمله‌ای‌ها با ریشه‌های مشترک را به عنوان ایده‌آل‌ها مطرح کند و بدین‌وسیله بدنبال یافتن مولدهای چنین ایده‌آل‌هایی بود. مجموعهٔ چنین مولدهایی می‌تواند به حد کافی حجیم باشد. وی روابط بین این مولدها و سپس روابط بین این روابط را بررسی کرد. به این ترتیب وی سلسله‌ای از این روابط را به دست آورد که سی‌زی‌گی‌های هیلبرت[1] نامیده شدند و این نظریهٔ هیلبرت روش زیرکانه‌ای بود که سعی می‌کرد یک وضعیت غیرخطی مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها را به وضعیت خطی تقلیل دهد. در واقع هیلبرت سیستم پیچیده‌ای از روابط خطی را به دست آورد که شامل اطلاعاتی در مورد مفاهیم غیرخطی یا به عبارتی چندجمله‌ای‌ها بود.

این نظریهٔ جبری در واقع یادآور نظریهٔ توپولوژیکی مشابهی است و در حال حاضر آنها با هم، جبر همولوژیکی نامیده می‌شوند. در هندسهٔ جبری، یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای سال ۱۹۵۰ عبارت بود از نظریهٔ کوهمولوژی کلاف‌ها و اشاعهٔ آن به هندسهٔ تحلیلی که توسط کارهای مکتب فرانسوی لِری[2]، کارتان[3]، سر[4] و گروتندیک[5] انجام گرفت. در آنجا ترکیبی از ایده‌های توپولوژیک ریمان ــ پوانکاره[6] و ایده‌های جبری هیلبرت و همچنین مطالبی از آنالیز که برای توازن اضافه شده‌اند وجود دارند.

ظاهراً نظریهٔ همولوژی کاربردهای وسیع‌تری در دیگر شاخه‌های جبر نیز دارد. می‌توان به گروه‌های همولوژی که همواره مشخصهٔ اشیاء خطی در مقابل اشیاء غیرخطی می‌باشند، اشاره کرد.

1) Hilbert's syzygies 2) Leray 3) Cartan 4) Serre 5) Grothendieck
6) Reimann-Poincare

به عنوان مثال گروه‌های متناهی یا جبرهای لی را در نظر بگیرید، برای هر کدام از آنها می‌توان گروه‌های همولوژی متناظر را پیدا کرد. مهم‌ترین کاربردهای نظریهٔ همولوژی در نظریهٔ اعداد، گروه‌های گالوا[1] است. بدین ترتیب نظریهٔ همولوژی به عنوان یکی از قوی‌ترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل یک سری مفاهیم کلی است و به نوعی به عنوان یکی از مشخصه‌های ریاضیات قرن بیستم می‌باشد.

نظریهٔ «کی»

بعد از مدت‌ها نظریهٔ دیگری متولد شد که در خیلی روابط و نسبت‌ها در کل شبیه نظریهٔ همولوژی بود. این نظریه نیز کاربردهای وسیعی یافت و در تمام قسمت‌های ریاضیات نفوذ کرد. این نظریه در اواسط قرن بیستم ظهور کرد، هر چند ریشه‌های آن را می‌توان در سال‌های قبل نیز مشاهده کرد. این نظریه، نظریهٔ «کی» نامیده شد و در اصل ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ نمایش داشت. می‌شود گفت نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی ریشه در قرن گذشته دارد ولی شکل مدرن آن یعنی نظریهٔ «کی» مدت‌ها بعد به وجود آمد. نظریهٔ «کی» را می‌توان به عنوان تلاش برگرفته از نظریهٔ ماتریس‌ها که ضرب در آن ناجابجایی می‌باشد جهت ساختن ناورداهای خطی یا آبلی تلقی کرد. عناصری مانند اثر یک ماتریس، مفهوم بعد و دترمینان همگی ناورداهای آبلی در نظریهٔ ماتریس‌ها می‌باشند. ولی نظریهٔ «کی» در واقع روشی است برای نظام‌مند کردن کار با چنین ناورداهایی و از این رو بعضاً آن را «جبر خطی پایدار» نیز می‌نامند. ایدهٔ این نظریه آن است که اگر دو ماتریس با ابعاد بزرگ داشته باشیم که با هم جابجا نمی‌شوند، با هم جابجا خواهند شد اگر آنها را در بلوک‌های متفاوت و در موقعیت‌های متعامد قرار دهیم، چرا که اشیاء را در فضای بزرگ‌تر می‌توان جابجا کرد و بدین ترتیب می‌توان امیدوار شد که این کار برای به دست آوردن بعضی اطلاعات کافی باشد، و این به عنوان یک روش پایهٔ نظریهٔ «کی» است. تشابه بین نظریهٔ «کی» و نظریهٔ همولوژی عبارت است از این که هر دو سعی دارند از سیستم‌های غیرخطی پیچیده، اطلاعات خطی دریافت کنند.

گروتندیک در هندسهٔ جبری این ایده را برای اولین بار با بهترین شکل در ارتباط تنگاتنگ با نظریهٔ کلاف‌ها که هم‌اکنون به آن اشاره شد و همچنین در ارتباط با کارهای خود در مورد قضیهٔ ریمان ــ رخ[2] توسعه داد.

در توپولوژی من و هیرتسبروخ این ایده‌ها را برگرفتیم و آنها را در زمینهٔ توپولوژیک به کار بردیم. به معنایی، در حالی که گروتندیک به سی‌زی‌گی‌های هیلبرت مرتبط بود، نتایج ما بیشتر با نتایج ریمان و پوانکاره در زمینهٔ همولوژی مرتبط‌اند، با این تفاوت که آنها به جای چندجمله‌ای‌ها، توابع پیوسته را مورد استفاده قرار می‌دهند. همچنین کارهای ما در نظریهٔ شاخص عملگرهای بیضوی در آنالیز خطی ایفای نقش می‌کنند. از طرف دیگر بعد جبری این موضوع همراه با کاربردهای بالقوه در

1) Galois 2) Riemann-Roch

نظریهٔ اعداد توسط میلنور[1]، کویلن[2] و دیگران توسعه یافت و در این شاخه مسائل و سؤالات بسیار جالبی مطرح شد. در آنالیز تابعی در سایهٔ کارهای دانشمندان زیادی از جمله کاسپاروف، نظریهٔ پیوستهٔ «کی» وارد C^*–جبرهای ناجابجایی شد. توابع پیوستهٔ تعریف شده روی کل فضا، یک جبر جابجایی نسبت به عمل ضرب توابع تشکیل می‌دهند، هر چند در مواقعی شکل ناجابجایی آن نیز مطرح می‌شود و آنالیز تابعی یک محیط کاملاً طبیعی برای طرح سؤالاتی از این قبیل می‌باشد.

بدین ترتیب نظریهٔ «کی» حوزهٔ دیگری است که در آن شاخه‌های متفاوتی از ریاضیات خود به خود شکل‌های به حد کافی ساده‌ای می‌یابند، هر چند در هر حالت مسائل عملی سختی هم وجود دارند که خاص خود موضوع در ارتباط با دیگر جنبه‌های آن می‌باشند. این ابزار یکنواختی نیست ولی یک الگوی یکسان در ارتباط با نقاط اشتراک و شباهت‌های بین حالت‌های مختلف می‌باشد.

آلن کن[3] بسیاری از این نتایج را وارد هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی کرد.

جالب است بدانید که در همین اواخر ویتن در کارهای خود در زمینهٔ نظریهٔ ریسمان (شاخهٔ جدیدی در فیزیک نظری) روش‌های جالبی را ابداع کرد که نشان می‌دهند چگونه می‌توان نظریهٔ «کی» را به یک محیط طبیعی برای کمیت‌های پایا (حفظ شونده) تبدیل کرد. در حالی که قبلاً فکر می‌کردند، محیط طبیعی برای این قسمت‌ها نظریهٔ همولوژی می‌باشد. حال می‌توان تصور کرد که نظریهٔ «کی» تأمین کننده نتایج بهتری باشد.

گروه‌های لی

مفهوم تعمیم یافتهٔ دیگری که نمی‌توان کاملاً آن را مفهوم فنی نامید، عبارت است از مفهوم گروه لی. گروه‌های لی، که اساساً عبارتند از گروه‌های متعامد، یکانی و سمپلکتیک به انضمام تعدادی گروه‌های خاص اگرچه از قرن نوزدهم شناخته شده بودند، نقش بسیار مهمی در تاریخ ریاضیات قرن بیستم بازی کرده‌اند. همانطور که می‌دانید سوفوس لی[4] ریاضیدان نروژی قرن نوزدهم بود که همراه با فیلکس کلاین[5] و دیگران بانی پیشرفت قابل ملاحظهٔ نظریهٔ گروه‌های پیوسته شدند.

اصولاً برای کلاین این کار راهی برای متحدکردن انواع هندسه‌ها: هندسهٔ اقلیدسی و غیراقلیدسی به شمار می‌رفت. هر چند این موضوع در قرن نوزدهم هم مطرح شد ولی تنها در قرن بیستم توانست به تکامل اصلی خود برسد. قرن بیستم با حکمرانی کامل نظریهٔ گروه‌های لی به عنوان الگوی واحد برای مطالعهٔ سؤالات مختلفی سپری شد.

چنان که قبلاً نقش ایده‌های کلاین در هندسه را یادآور شدیم، وی هندسه را یک فضای همگن تصور می‌کرد که در آن فضا تغییر مکان اشیاء بدون تغییر شکل امکان‌پذیر است. به همین دلیل هندسه

---

1) Milnor 2) Quillen 3) Alain connes 4) Sophus Lie 5) Felix Klein

توسط گروه‌های ایزومتری متناظرش تعریف می‌شود. هندسهٔ اقلیدسی از گروه حرکت‌های اقلیدسی حاصل می‌شود، هندسهٔ هذلولوی توسط گروه لی دیگری حاصل می‌شود. بدین صورت است که هر هندسهٔ یکنواخت با یک گروه لی مخصوص خودش متناظر می‌شود. اما بعداً طرفداران کارهای ریمان در هندسه بیشتر به مطالعهٔ فضاهای غیرهمگن پرداختند که انحنا در این فضاها از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند و هیچ تقارن کلی برای فضا وجود ندارد. هرچند گروه‌های لی همچنان نقش اساسی را بازی می‌کنند، چرا که آنها در سطح بی‌نهایت کوچک ظاهر می‌شوند و در فضای مماسی همواره مختصات اقلیدسی وجود دارد. بنابراین در فضای مماسی نظریهٔ گروه‌های لی بار دیگر در مقیاس بی‌نهایت کوچک ظاهر می‌شود، ولی از آنجا که لازم است نقاط مختلف را در مکان‌های متفاوت تطبیق دهیم بنابراین تغییر مکان اشیاء ضروری می‌گردد و در حین این کار گروه‌های لی متفاوتی به کار می‌روند. نظریهٔ مذکور به وسیلهٔ ریاضی‌دان فرانسوی الی کارتان[1] توسعه یافت و این نظریه پایهٔ هندسهٔ دیفرانسیل مدرن شد. همچنین در نظریهٔ اینشتین نیز نظریهٔ گروه‌های لی نقش بسزائی بازی می‌کند.

در طول قرن بیستم روش کلی مذکور به مطالعهٔ گروه‌های لی و هندسه دیفرانسیل در سطح کلی منجر شد. یکی از جهات مهم این مطالعه که توسط کارهای بورل و هیرتسبروخ معرفی شد اطلاعاتی در مورد به اصطلاح «رده‌های مشخصه» ناورداهای توپولوژیکی است که سه قسمت کلیدی ریاضیات یعنی گروه‌های لی، هندسه دیفرانسیل و توپولوژی را به هم متصل می‌کند.

یکی از شاخه‌های بسیار نزدیک به آنالیز امروزی آنالیز هارمونیک ناجابجایی نامیده می‌شود. این شاخه تعمیمی از نظریهٔ فوریه می‌باشد که در آن سری‌ها و انتگرال‌های فوریه در اصل با یک گروه لی تعویض‌پذیر روی دایره و روی خط متناظر می‌گردند.

اگر به جای این گروه‌های لی یک تعداد گروه لی پیچیده‌تری جایگزین شوند، نظریهٔ بسیار زیبا و ظریفی حاصل می‌شود که نظریهٔ نمایش گروه‌های لی و آنالیز توسط این نظریه پیوند می‌خورد. این اصلی‌ترین اثر تمام عمر هریش ـ چاندرا[2] بود.

اما آنچه که به نظریهٔ اعداد مربوط می‌شود، آن است که کل برنامهٔ لنگلاندز[3] که ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ هریش چاندرا نیز دارد، در درون نظریهٔ گروه‌های لی مفهوم پیدا می‌کند. به هر گروه لی، نظریهٔ اعداد و برنامهٔ لنگلاندز مخصوصی متناظر می‌گردد. خیلی از کارها در نظریهٔ جبری اعداد، در نیمهٔ دوم قرن بیستم از این جریان تأثیر گرفتند. همچنین باید به این موضوع بررسی و مطالعهٔ صورت‌های مدولی و نیز اثبات آخرین قضیهٔ فرما[4] کار اندرو وایلز[5] را اضافه کرد.

ممکن است تصور شود که گروه‌های لی تنها در هندسه به علت نیاز به تغییرات پیوسته مهم‌اند، اما مشابه‌های گروه‌های لی روی میدان‌های متناهی به گروه‌های متناهی منجر می‌شوند و بسیاری

1) Eli Cartan 2) Harish-Chandra 3) Langlands program 4) Fermat's last theorem
5) Andrew Wiles

از گروه‌های متناهی به این روش به وجود می‌آیند. بدین صورت روش‌های بعضی از بخش‌های نظریهٔ گروه‌های لی حتی در حالت گسسته برای میدان‌های متناهی یا موضعی به کار می‌روند. در این جا خیلی از کارها صرفاً جبری است؛ به عنوان مثال کارهایی که نام جورج لوستیگ[1] را بر خود دارند و در آنها نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی را مطالعه می‌کنند و بسیاری از روش‌هایی که در بالا به آن اشاره شد در این کارها مشابهی دارند.

گروه‌های متناهی

بدین صورت به حوزهٔ گروه‌های متناهی می‌رسیم که برای من نظریهٔ طبقه‌بندی گروه‌های ساده متناهی را تداعی می‌کند. در این مورد باید اعتراف کنم که چند سال پیش مصاحبه‌ای کردم که در آن زمان طبقه‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی تقریباً به انتها رسیده بود و نظر مرا در این مورد جویا شدند. من بدون تأمل گفتم فکر نمی‌کنم که چیز مهمی باشد. علتش این بود که آن طور که این طبقه‌بندی مشخص می‌کرد قسمت اعظم گروه‌های ساده برای ما شناخته شده بود و فقط چند مورد استثنا وجود داشت. از یک نقطه نظر دیگر، این طبقه‌بندی موضوعی، بدون کشف جدیدی به اتمام رسید. وقتی که فضای کاری به جای این که توسعه پیدا کند بسته می‌شود، من چندان هیجان‌زده نمی‌شوم، البته اکثر دوستان من که در این حوزه کار می‌کردند بسیار ناراضی شدند، و بعد از آن بود که من مجبور شدم لباس ضدگلوله بپوشم!

اینجا استثنائی پیدا شد. در واقع من متذکر شدم که اسم بزرگ‌ترین گروه در فهرست به اصطلاح «گروه‌های نامرتب[2]» مانستر بود. فکر می‌کنم که همانا کشف این مانستر تعجب‌آورترین نتیجهٔ این طبقه‌بندی باشد. به نظر می‌آید که مانستر یک حیوان بسیار جالب و ناشناخته است که ارتباط غیرمنتظره‌ای با قسمت‌های بزرگ بقیهٔ ریاضیات، با توابع مدولی بیضوی و حتی با فیزیک نظری و نظریهٔ میدان کوانتمی دارد. این یکی از محصولات جالب طبقه‌بندی مذکور می‌باشد. همانطور که اشاره کردم طبقه‌بندی در را بست ولی مانستر در دیگری را گشود.

تأثیر فیزیک

حال اجازه دهید به موضوع دیگری که تأثیر فیزیک در ریاضیات می‌باشد وارد شویم. در طول قرن‌ها فیزیک همواره در ارتباط با ریاضیات بوده است. بخش‌های بزرگی از ریاضیات، به عنوان مثال محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها در اثر حل مسائل فیزیکی توسعه یافتند. این احتمال وجود دارد که در اواسط قرن بیستم این موضوع چندان واضح نبوده باشد، چرا که قسمت اعظم ریاضیات محض با موفقیت تمام مستقل از فیزیک توسعه یافت ولی در ربع آخر قرن بیستم به طور مهیجی تغییر یافت. حال سعی می‌کنم تأثیر فیزیک بر ریاضیات و بخصوص بر هندسه را به طور خلاصه مرور کنم.

1) George Lusztig   2) Sporadic groups

در قرن نوزدهم هامیلتون مکانیک کلاسیک را با صورت‌بندی جدید که امروزه مکانیک هامیلتونی نامیده می‌شود معرفی کرد. مکانیک کلاسیک باعث شد آنچه که ما امروزه آن را «هندسهٔ سیمپلکتیک[۱]» می‌نامیم ایجاد شود. این شاخه از هندسه می‌توانست سال‌ها قبل مطالعه شود، ولی در واقع مطالعهٔ جدی آن در دو دههٔ اخیر شروع شد. این هندسه در کل از نظر محتوایی یک شاخهٔ غنی هندسه محسوب می‌شود. هندسه در آن معنا که من به کار می‌برم شامل سه شاخه می‌باشد: هندسهٔ ریمانی، هندسهٔ مختلط و سمپلکتیک و سرانجام هندسهٔ متناظر با سه نوع گروه‌های لی. در این میان هندسهٔ سمپلکتیک جدیدترین و شاید از بعضی جهات جالب‌ترین بخش هندسه می‌باشد. در کل این بخش از هندسه با توجه به ریشه‌های تاریخی در ارتباط با مکانیک هامیلتونی و بعدها با مکانیک کوانتمی، ارتباط تنگاتنگی با فیزیک دارد.

معادلات ماکسول که قبلاً به آنها اشاره شد و معادلات خطی اساسی الکترومغناطیسی، انگیزهٔ کارهای هاج[۲] روی صورت‌های هارمونیک و کاربرد آن در هندسهٔ جبری شد. این نظریهٔ فوق‌العاده پربار پایهٔ بسیاری از کارهای انجام شده در هندسه از سال‌های ۱۹۳۰ به بعد را پی‌ریزی کرد. من قبلاً در مورد نظریهٔ نسبیت عام و کارهای اینشتین صحبت کردم. البته مکانیک کوانتمی نه تنها در ارتباط با روابط جابجایی بلکه در فهم فضای هیلبرت و نظریهٔ عملگرها محصول بزرگی به همراه داشت.

بلورشناسی به شکل کلاسیک آن تقارن‌های ساختارهای بلورها را مورد مطالعه قرار می‌داد. گروه‌های متناهی متقارن روی مجموعه‌های نقطه‌ای به خاطر کاربردشان در بلورشناسی در مرحلهٔ اول مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در سدهٔ ما کاربردهای عمیق‌تر و عملی‌تر نظریهٔ گروه‌ها در فیزیک به نتایج مطلوبی رسید. در بین ذرات چنانچه معتقدیم کل ماده از آنها تشکیل شده است تقارن‌های پنهان در مقیاس‌های کوچک کشف شدند که در آنجا گروه‌های لی مخفی هستند و نمی‌توانیم آنها را ببینیم اما طی مطالعه رفتار واقعی ذرات این تقارن‌ها آشکار می‌شوند. بدین صورت مدلی را طرح می‌کنیم که در آن تقارن نقش اساسی را بازی می‌کند. در نظریه‌های معروف فعلی گروه‌های لی کاملاً شناخته شدهٔ $SU(۲)$ و $SU(۳)$ به عنوان اولین گروه‌های متقارن ساخته شدند. بدین صورت این گروه‌های لی در نقش اجزای سازندهٔ ماده ظاهر شدند.

بدین ترتیب گروه‌های به وجود آمده تنها گروه‌های لی فشرده نبودند. در فیزیک گروه‌های غیرفشردهٔ مشخصی مانند گروه لورنتس نیز دیده می‌شوند. همانا برای اولین بار مطالعهٔ نظریهٔ نمایش گروه‌های لی غیرفشرده توسط فیزیک‌دان‌ها آغاز شد. این نمایش‌ها باید در یک فضای هیلبرت انجام شوند چرا که نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های فشرده با بعد متناهی هستند اما گروه‌های غیرفشرده با بعد نامتناهی را می‌طلبند و این چیزی است که فیزیک‌دان‌ها برای اولین بار به آن دست یافتند.

ربع آخر قرن بیستم که مدت زیادی از آن نگذشته است همراه با هجوم ایده‌های جدید از فیزیک به

1) Symplectic geometry 2) Hodge

ریاضیات بود. احتمالاً این یکی از برجسته‌ترین اتفاقات سدهٔ ما است. شاید می‌شد برای این موضوع سخنرانی جداگانه‌ای ترتیب داد. اما آنچه که در اینجا مهم است تأثیر فوق‌العادهٔ نظریهٔ میدان کوانتمی و نظریهٔ ریسمان می‌باشد که روش‌های برجسته و واضحی در رسیدن به نتایج جدید در اکثر بخش‌های ریاضیات را به همراه داشتند. منظورم این است که فیزیک‌دانان می توانستند بعضی از واقعیات ریاضی را که پایه در فهم نظریهٔ فیزیکی داشتند پیش‌بینی کنند. البته این‌ها اثبات‌های محکمی نبودند اما بر شهود بسیار قوی، حالت‌های خاص و تشابهات تکیه داشتند. این نتایج که توسط فیزیک‌دانان پیش‌بینی شده بودند، به نوبهٔ خود مجدداً توسط ریاضیدانان بررسی شدند و مشخص شد که نتایج درست‌اند، هر چند اثبات آنها دشوار است و خیلی از آنها تا به امروز به طور کامل ثابت نشده‌اند.

این چنین بود که در ۲۵ سال اخیر در این شاخه حرکت اساسی و چشمگیری به وقوع پیوست. این نتایج دقیق و جزئی بودند. بی دلیل نیست که فیزیکدانان می‌گویند «این مطلب باید صحیح باشد» و ضمن آن فرمول دقیق همراه با ده حالت اولیه (تا ۱۲ رقم اعشار) را ارائه می‌کنند. آنها به مسائل سخت و پیچیده جواب‌های دقیقی می‌دهند، که تصورش هم برای ما مشکل است. جواب هایی که آنها ارائه می‌دهند فقط توسط رایانه قابل محاسبه می‌باشند. نظریهٔ میدان کوانتمی ابزار جالبی به شمار می‌آید که از نقطه نظر ریاضی درک آن به مراتب مشکل است ولی در اصطلاحات کاربردی ارزش فوق‌العاده دارد. این در واقع موضوع جالب ۲۵ سال آخر قرن بیستم می‌باشد.

اینجا به چند عنصر سازندهٔ این موضوع می‌توان اشاره کرد: مثلاً کارهای دونالدسون[1] در مورد چندگونه‌های چهاربعدی، کارهای واگان ــ جونز[2] روی ناورداهای گره‌ها[3]، تقارن‌های آینه‌ای[4]، گروه‌های کوانتمی و برای تکمیل مطلب به مانستر نیز باید اشاره کنم.

منظور از طرح این موضوع چیست؟ همانطور که قبلاً اشاره کرده‌ام، قرن بیستم شاهد افزایش در بعد بود که به بینهایت ختم می‌شد. فیزیکدانان نیز آن را توجیه کردند. آنان در نظریهٔ میدان کوانتومی سعی دارند به طور دقیق فضای با بعد نامتناهی را عمیقاً مورد مطالعه قرار دهند.

فضاهای با بعد نامتناهی که فیزیکدانان با آنها سر و کار دارند، معمولاً فضاهای تابعی با سرشت‌های متفاوت می‌باشند. ساختار این فضاها بسیار پیچیده می‌باشد، نه تنها به این دلیل که با بعد نامتناهی‌اند بلکه جبر، هندسه و توپولوژی پیچیده‌ای دارند و برای هر کدام از آنها یک گروه لی بزرگ ــ گروه لی با بعد نامتناهی ــ مربوط می‌شود. همانطور که در قرن بیستم قسمت اعظم ریاضیات به توسعهٔ هندسه، توپولوژی، جبر و آنالیز روی گروه‌های لی با بعد متناهی و چند گوناها مربوط می‌شود، این بخش از فیزیک نیز با تحقیقات مشابه در ابعاد نامتناهی مرتبط است. البته این خود بحث دیگری است هر چند نتایج قابل توجهی به همراه دارد. حال روی این موضوع کمی بیشتر بحث می‌کنیم. نظریهٔ میدان کوانتومی در فضا و زمان اتفاق می‌افتد و فضا در واقع سه‌بعدی است ولی مدل‌های ساده شده‌ای وجود دارند که می‌توان یک بعد آنها را در نظر گرفت. در فضای

1) Donaldson 2) Vaughan-Jones 3) Kont invariants 4) Mirror symmetry

۱ بعدی و زمان ۱ ـ بعدی، فیزیکدانان معمولاً با گروه‌هایی همچون گروه دیفئومرفیسم‌های دایره یا گروه نگاشت‌های دیفرانسیل‌پذیر روی دایره به توی یک گروه لی فشرده برخورد می‌کنند. این دو مثال مهم گروه‌های لی با بعد نامتناهی در مبحث نظریهٔ میدان کوانتومی ظاهر می‌شوند و این در قالب موضوعات ریاضی کاملاً معقول است و ریاضیدانان مدتی است که به مطالعه در این زمینه می‌پردازند.

در چنین نظریه‌های (۱+۱)− بعدی، می‌توان به عنوان فضا ـ زمان یک رویهٔ ریمانی را در نظر گرفت، و در این صورت به نتیجه رسید. به عنوان مثال، فضای مدول‌های رویه‌های ریمانی با گونهٔ مشخص یک موضوع کلاسیک است که به قرن ۱۹ بر می‌گردد. نظریهٔ میدان کوانتومی در ارتباط با کوهمولوژی این فضاهای مدولی به نتایج جدیدی رسیده است. فضاهای مدولی کاملاً مشابه دیگر، فضای مدولی ـ کلاف‌های مسطح روی رویه‌های ریمانی با گونه می‌باشد. این فضاها، فضاهای جالبی هستند و نظریهٔ میدان کوانتومی نتایج دقیقی در مورد آن‌ها بدست می‌دهد. مخصوصاً، فرمول‌های جالب و مناسبی برای احجام، جایی که مقادیر توابع زتا به‌کار می‌روند، وجود دارند. کاربرد دیگر این نظریه‌ها با شمارش خم‌ها مرتبط است. اگر بخواهیم خم‌های جبری در صفحه با درجه و نوع مفروضی را مورد مطالعه قرار دهیم و مسألهٔ شمارش تعدادی از این خم‌ها که از نقاط معلوم داده شده‌ای عبور می‌کنند، مطرح باشد در این صورت با مسائل هندسهٔ جبری که در فوق اشاره شده برخورد خواهیم کرد، که از مسائل کلاسیک قرن بیستم می‌باشند. این‌ها مسائل سختی هستند و به کمک مبحث جدیدی به نام کوهمولوژی کوانتومی حل می‌شوند. می‌توان سؤالات سخت‌تری را نیز مطرح کرد که در ارتباط با خم‌ها نه در صفحه، بلکه روی چند گوناهای خمیده می‌باشند. این نیز بحث جالبی است که نتایج روشنی به همراه دارد که به تقارن آینه‌ای معروف است. همهٔ این‌ها از نظریه میدان کوانتومی با بعد(۱+۱) ناشی می‌شوند.

هر گاه یک بعد دیگر هم اضافه کنیم، در این صورت یک فضای دو بعدی و یک فضای ۱ ـ بعدی زمان را خواهیم داشت که در این صورت نظریهٔ ناورداهای گره‌ها منتسب به واگان ـ جونز مطرح می‌شوند. این نظریه توصیف و تفسیر زیبایی در قالب نظریهٔ میدان کوانتومی دارد.

بدین ترتیب گروه‌هایی به نام گروه‌های کوانتومی بروز می‌کنند. جالب‌ترین چیزی که در مورد گروه‌های کوانتومی وجود دارد، اسم گروه است که بر آنها نهاده‌اند، در حالی که گروه نیستند. اگر بخواهید تعریفی از گروه‌های کوانتومی ارائه دهم به زمان بیشتری نیاز دارم. گروه‌های کوانتومی موضوعات پیچیده‌ای هستند ولی بدون شک ارتباط عمیقی با نظریهٔ کوانتومی دارند. با این که این گروه‌ها از فیزیک مشتق شده‌اند ولی در حال حاضر توسط جبردانان متعصب به‌کار می‌روند. آنها گروه‌های کوانتومی را در محاسبات خاصی به‌کار می‌برند.

اگر یک گام دیگر نیز جلوتر رویم (بعد ۳+۱) آنگاه این نظریهٔ چهاربعدی با نظریهٔ چندگونه‌های چهاربعدی دونالدسون متناسب می‌شود. همانا نظریهٔ چند گوناهای چهاربعدی دونالدسون است که با ارائهٔ نظریهٔ میدان کوانتومی تأثیر مهمی بر ریاضیات می‌گذارد. به‌عنوان مثال

این نظریه باعث شد که سیبرگ[1] و ویتن[2] یک نظریهٔ جایگزین ایجاد کنند که مبنای آن شهود فیزیکی است ولی بهر حال نتایج ریاضی جالبی به‌همراه دارد. همهٔ این‌ها مثال‌های خاص می‌باشند که البته مثال‌های دیگری هم در این زمینه وجود دارد. نظریهٔ دیگر، نظریهٔ ریسمان است که آن را پشت سر گذاشته‌ایم . نظریهٔ (ام) نظریه‌ای است که لازم می‌دانم در مورد آن صحبتی داشته باشم. این نظریه هم از نظر محتوی غنی است و هم این که جنبه‌های ریاضی متفاوتی دارد. نتایج به‌دست آمده از آن هنوز به طور کامل تجزیه و تحلیل نشده‌اند. بنابراین مدت زیادی برای ریاضیدانان کار بحد کافی وجود خواهد داشت.

خلاصهٔ تاریخی

حال اجازه دهید نتیجه‌گیری کوتاهی داشته باشیم و به طور خلاصه و کلی به تاریخ ریاضی بنگریم: در واقع امر چه اتفاقی در ریاضیات افتاده است؟ بدون هیچ تعصبی ترجیح می‌دهم سده‌های ۱۸ و ۱۹ را دورهٔ ریاضیات کلاسیک بنامم. در این دوره که برای ما با اسامی اویلر و گاوس شناخته شده است، تمام ریاضیات عظیم کلاسیک ساخته شد و توأماً توسعه یافت. چنان تصور می‌شد که ریاضیات به آخر رسیده است ولی قرن بیستم برعکس پر بار و پر محصول جلوه کرد و این چیزی بود که من در موردش صحبت کردم.

قرن بیستم را می‌توان تقریباً به دو نیمه تقسیم کرد. از نظر من نیمهٔ اول ترجیحاً به عنوان دوره‌ای که من آن را دورهٔ تخصص‌گرایی می‌نامم جلوه‌گر شد. در این دوره روش هیلبرت بسیار مؤثر بود. در این روش سعی برآن بود که موضوعات صوری شده و هرکدام بطور دقیق تعریف شود و سپس در هر حوزه تحقیقات انجام شود. چنان که قبلاً نیز گفته‌ام، نام بورباکی با این جریان مرتبط است. در اینجا توجه ریاضیدانان متمرکز به فهم این مورد است که در قالب دستگاه‌های تعریف شدهٔ جبری یا دستگاه‌های دیگر در زمان معین چه کاری می‌توان انجام داد. نیمه دوم قرن بیستم تا حد زیادی به صورت دورهٔ اتحاد و یگانگی جلوه‌گر شد. در این دوره مرزها از بین رفتند، روش‌ها از یک حوزه به حوزه دیگر انتقال یافتند و اختلاط عظیمی بین حوزه‌های مختلف اتفاق افتاد. اگر چه این تقسیم‌بندی بسیار ساده است، با این حال فکر می‌کنم بعضی جنبه‌های توسعهٔ ریاضیات قرن بیستم را بیان می‌کند.

چه پیش‌بینی‌هایی در مورد قرن بیست و یکم می‌توان کرد؟ چنانچه قبلاً نیز اشاره کردم، قرن بیست و یکم را می‌توان دورهٔ ریاضیات کوانتومی یا به عبارت بهتر ریاضیات با بعد بی‌نهایت نام نهاد. این عبارت به چه معنی می‌تواند باشد؟ ریاضیات کوانتومی به طور کلی به معنی درک واقعی آنالیز، هندسه، توپولوژی، جبر در فضاهای تابعی غیرخطی متفاوت است. «درک واقعی» برای من درکی است که از آن برای تمام چیزهای زیبایی که فیزیک‌دان‌ها در مورد آنها اندیشیده‌اند اثبات دقیق

1) Seiberg 2) Witten

حاصل شود. باید بگویم که اگر با بعد بینهایت با خامی برخورد کنید و سؤالات ناپخته مطرح کنید، معمولاً پاسخ نادرست یا بدیهی دریافت می‌کنید. شهود، کاربردهای فیزیکی و انگیزه، همگی به نوعی با فیزیک در ارتباط هستند. به طوری که برای فیزیکدانان این امکان را فراهم آورده‌اند که سؤالات معقولی را در مورد بعد نامتناهی مطرح کنند و به نکات ظریفی توجه داشته باشند که ما را به جواب‌های محسوسی هدایت می‌کنند. بنابراین تحقیق در آنالیز نامتناهی از این طریق اصلاً کار ساده‌ای نیست. اینجاست که باید کاملاً صحیح عمل کرد. ما تنها یک سری کلید و نشان در دست داریم و مقابل‌مان نقشهٔ راه نیز قرار دارد و این‌ها کاملاً مشخص می‌کنند که چه کار باید کرد ولی راه هنوز دراز است.

چه چیز دیگری ممکن است در قرن بیست و یکم اتفاق بیفتد؟ می‌خواهم به هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی کُن اشاره داشته باشم. این نظریهٔ مهم و وحدت بخش توسط آلن کن پایه‌گذاری شد. این نظریه بار دیگر همه چیز را به هم پیوند می‌دهد. آنالیز، جبر، هندسه، توپولوژی، فیزیک و حتی نظریهٔ اعداد توسط نظریهٔ کن به هم مرتبط شده و هر کدام از آنها بخشی از این نظریه را تشکیل می‌دهند. این نظریه چارچوبی است که امکان انجام تحقیقاتی را در زمینهٔ آنالیز ناجابجایی فراهم می‌کند که در هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی معمول‌اند. دلایل کافی و قانع‌کننده‌ای (بالقوه و بالفعل) وجود دارند که لزوم این کار را باعث می‌شوند مثلاً کاربردهایی در نظریهٔ اعداد، هندسه، گروه‌های گسسته و همچنین در فیزیک و مثال‌هایی از این قبیل. در حال حاضر تحقیقاتی در مورد ارتباط این نظریه با فیزیک انجام می‌شود. چه مدت طول می‌کشد یا چه نتایجی حاصل خواهد شد فعلاً باید منتظر ماند. من به نوبهٔ خود مشخصاً انتظار دارم شاهد توسعهٔ قابل توجه در این حوزه تا اتمام دههٔ اول قرن بیست و یکم باشم، امکان ظهور ارتباط بین این نظریه و نظریهٔ تا به امروز نه چندان توسعه یافتهٔ میدان‌های کوانتومی بعید به نظر نمی‌رسد.

با حرکت به سمت دیگری به آنچه که «هندسهٔ محاسباتی» یا هندسهٔ آراکلوف نامیده می‌شود برخورد می‌کنیم که سعی در اتحاد هر چه بیشتر هندسهٔ جبری با بعضی از گرایش‌های نظریهٔ اعداد دارد. این هم نظریهٔ بسیار موفقی است. این نظریه شروع خیلی خوبی داشت ولی راهی طولانی پیش رو دارد. کسی چه می‌داند؟

به طور حتم همه این مسیرها تقاطع‌هایی هم دارند. انتظار می‌رود که فیزیک تأثیر خود را همه جا اشاعه دهد، حتی در نظریهٔ اعداد. آندرو وایلز با نظر من موافق نیست و تنها زمان است که همه چیز را روشن می‌کند.

اینها رشته‌هایی هستند که به نظر من در یک دههٔ آینده می‌توانند پدیدار شوند، البته موضوع دیگری هم که می‌توان به آن اشاره کرد و من آن را ژوکر در قاب می‌نامم، نزول به هندسهٔ با بعد پایین‌تر می‌باشد. در کنار همهٔ توهمات بعد نامتناهی، هندسه با بعد پایین‌تر یک نوع آشفتگی به همراه دارد. بعدهایی که با گذشتگانمان شروع شدند، در خیلی از موارد مبهم جلوه می‌کنند. بعد پایین از نظر من ابعاد ۲، ۳، ۴ می‌باشد. به عنوان مثال هدف کارهای ترستون در هندسهٔ ۳ ــ بعدی

عبارت بود از طبقه‌بندی هندسه. آنها را می‌توان برای چندگوناهای ۳ ـ بعدی اعمال کرد. این نظریه خیلی عمیق‌تر از نظریهٔ ۲ ـ بعدی می‌باشد. برنامه ترستون هنوز به اتمام نرسیده است و تحقق آن بدون شک یکی از بزرگترین چالش‌ها خواهد بود.

یکی دیگر از موارد قابل توجه در بعد ۳ عبارت است از کارهای واگان — جونز که ایدهٔ آن در اصل از فیزیک ناشی شده است. این کارها اطلاعات جدیدی از حالت ۳ بعدی به دست می‌دهند که تقریباً مکمل چیزی است که در برنامهٔ ترستون وجود دارد. چگونگی اتصال این دو نظریه یکی از بزرگترین چالش‌ها است و این در حالی است که اولین علائم در مورد امکان عملی شدن این اتصال دیده شده است. بدین ترتیب این حوزه هنوز در ابعاد پایین با فیزیک در ارتباط است ولی فی‌الواقع بسیار اسرارآمیز است.

نهایتاً چیزی که لازم می‌دانم به آن اشاره کنم این است که در فیزیک چیزهایی که در کل نقش اساسی را بازی می‌کنند «دوگانگی‌ها» هستند. این دوگانگی‌ها به طور کلی وقتی ظاهر می‌شوند که نظریهٔ کوانتومی به عنوان نظریه‌ای کلاسیک به دو صورت متفاوت تحقق می‌یابد. مثالی ساده از دوگانگی عبارت است از دوگانگی بین موقعیت و اندازه حرکت در مکانیک کلاسیک. در این حالت فضا با فضای دوگان خود تعویض می‌شود و جای خود را به فضای دوگان می‌دهد و در نظریه‌های خطی این دوگانگی چیزی جز تبدیلات فوریه نیست. ولی این که در نظریه‌های غیرخطی تبدیلات فوریه را با چه چیزی جایگزین کنیم خود چالش بزرگی است. خیلی از قسمت‌های ریاضیات با این مسألهٔ مهم درگیرند که چگونه دوگانگی را از حالت‌های خطی به حالت‌های غیرخطی تعمیم دهند. چنین به نظر می‌رسد که فیزیکدانان به طور قابل توجهی می‌توانند این کار را در نظریهٔ ریسمان و نظریهٔ M انجام دهند. آنها مثال‌های زیادی از دوگانگی‌های جالب ارائه می‌دهند که به معنای کلی می‌توانند صورت‌های غیرخطی با بعد نامتناهی از تبدیلات فوریه باشند و جالب این که این مثال‌ها در اینجا مصداق دارند.

ولی فهم دوگانگی‌های غیرخطی همچنین یکی از مسائل بزرگ قرن بیست و یکم است. به نظر می‌رسد که به نوعی باید صحبتم را پایان دهم. کار بسیار است و صحبت در مورد آنها در حضور کثیری از جوانان مثل شما برای شخص مسنی مثل من بسیار دلپذیر و خوشایند است و می‌توانم بگویم در سدهٔ بیست ویکم برای شما کارهای زیادی وجود دارد که انجام دهید.

مترجم: قربانعلی حقیقت دوست بناب
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
gorbanali@yahoo.com

ویراستار: محمد جلوداری ممقانی

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۷ (پاییز ۱۳۸۵) صص. ۷۱ تا ۸۹

دوب، آنالیزدان تمام‌عیار

بیژن ظهوری زنگنه

آنالیز چیست؟ و آنالیزدان چه کسی است؟ با مطالعهٔ موضوعات دروس ریاضی دانشگاه MIT که با شمارهٔ ۱۸۰۱ شروع می‌شوند و آنالیز نامیده می‌شوند، ملاحظه می‌کنیم که این دروس، در زمینه‌های اندازه و انتگرال، آنالیز حقیقی، نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی، آنالیز مختلط، نظریهٔ پتانسیل، معادلات دیفرانسیل عادی و پاره‌ای، آنالیز فوریه و هارمونیک، آنالیز تابعی و نظریهٔ عملگرها، حساب تغییرات و کنترل بهینه هستند [۲۰]. جالب است که همین زمینه‌ها در برنامهٔ دکتری ریاضی مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی [۲۴] نیز در جدول شمارهٔ (۱) به عنوان موضوعات آنالیز آمده‌اند. بنابراین، طبیعی است که کسی را که در یکی از زمینه‌های بالا کار تحقیقاتی می‌کند می‌توان آنالیزدان نامید، لابد اگر کسی در چندین زمینهٔ بالا کار تحقیقاتی کند، بیشتر آنالیزدان است! با این وجود، چنین افرادی را نمی‌توان آنالیزدان تمام عیار نامید!

زندگی دوب، دلیلی بر این ادعاست. جوزف دوب نه تنها در اغلب زمینه‌های بالا کار تحقیقاتی کرده، بلکه خود از بنیان‌گذاران بسیاری از این زمینه‌هاست. برای نشان‌دادن این ادعا، لازم است بدانیم که جوزف دوب فعالیت‌های تحقیقی ریاضی خود را با آنالیز مختلط شروع کرد [۱۹] پس از آن به نظریهٔ اندازه و انتگرال، آنالیز حقیقی، نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی تغییر جهت داد. آن‌گاه، این زمینه‌ها را به صورت مدرن و امروزی شکل داد. دوب مجدداً به آنالیز مختلط، آنالیز فوریه و هارمونیک و نظریهٔ پتانسیل بازگشت به‌طور معجزه‌آسایی بین این زمینه و نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی، ارتباط برقرار کرد.

درواقع دوب زیررشته‌های مختلف آنالیز را به عنوان زیررشته‌های جدا از هم که یک محقق می‌تواند در یک یا چندین زیررشته کار کند، نمی‌دید، بلکه آنالیز را به عنوان یک رشته با زیررشته‌های گوناگون آن، به عنوان یک کل واحد و همبسته و مرتبط به هم می‌دید. در حقیقت دوب به عنوان یکی از افراد شاخص در برقراری و کشف ارتباط تنگاتنگ بین این زمینه‌های مختلف آنالیز و کل ریاضیات شناخته شده است.

دیدگاه دوب در این مورد، با دیدگاه مایکل اتیا همسو است که می‌گوید: « ... اعتقاد دارم ریاضیات را باید به عنوان یک کل یکپارچه در نظر گرفت و مسیر کار من نیز انعکاسی از همین اعتقاد است. من ارتباطات بین قسمت‌های گوناگون ریاضیات را جالب می‌یابم. غنای رشتهٔ ما ناشی از جدایی مطلق بین موضوع‌های دور از هم نیست بلکه حاصل همین درآمیختگی قسمت‌های مختلف است.» [۲۶].

مالیوان، سردبیر فعلی ژورنال آنالیز تابعی که یکی از احتمال‌دانان معاصر است و حسابان مالیوان یا آنالیز تصادفی تغییراتی از کارهای با ارزش او است؛ نیز در کتاب انتگرال و احتمال [۱۳] خود به روشنی تحت تأثیر دیدگاه‌های دوب و اتیا قرار گرفته و یک رویکرد تلفیقی را به آنالیز معرفی کرده است. به گفتهٔ ناشر کتاب

> «این کتاب به عنوان کتاب مقدماتی در آنالیز است که تلفیق مناسبی بین نظریه‌های مجرد و مسائل ملموس و عینی انجام داده است. این کتاب با نظریهٔ کلی اندازه شروع می‌شود، اندازه‌های بُرِل و رادن (با تأکید خاص روی اندازهٔ لبگ) را بررسی می‌کند و خواننده را با آنالیز فوریه در فضاهای اقلیدسی آشنا می‌نماید. سپس فضاهای سوبولف، توزیع‌های شوارتز، و آنالیز فوریه آن را مورد بررسی قرار می‌دهد. آن گاه، به مطالعهٔ هیلبرتی قضیه‌های پایه‌ای احتمال شامل قضیه همگرایی مارتینگل دوب می‌پردازد و با "آنالیز تصادفی تغییراتی[۱]" مالیوان در چارچوب فضاهای اندازهٔ گاوسی پایان می‌یابد. خدمات با ارزش کتاب در این حوزه، چشاندن این طعم[۲] به خواننده است که در حقیقت آنالیز گردایه‌ای از نظریه‌های مستقل نیست، بلکه آنالیز را می‌توان به عنوان یک کلیت در نظر گرفت.»

با دقت در این مقدمه، می‌بینیم که این کتاب، اغلب موضوعاتی را که در برنامهٔ M.I.T و برنامهٔ مصوب کمیتهٔ برنامه‌ریزی ریاضی به عنوان موضوعات آنالیز معرفی شده‌اند، همه را پوشش داده است. یعنی در واقع، آنالیز یک رشتهٔ به هم پیوسته است که بین مباحث مختلف، انسجام و تلفیق ویژه‌ای برقرار کرده است و بدون تردید، یکی از کسانی که آنالیز را به این درجه از انسجام و یکپارگی رسانده، جوزف دوب است. به این دلیل، او را آنالیزدان تمام عیار می‌نامیم و به اختصار به معرفی زندگی او می‌پردازیم.

جوزف دوب در ۲۷ فوریه ۱۹۱۰ در شهر سینسیناتی[۳] ایالت اوهایو به دنیا آمد و در ۷ ژوئن ۲۰۰۴ در اربنا واقع در ایلنوی ــ جایی که تقریباً تمام عمر خود را در آن جا گذرانده بود دار فانی را وداع گفت [۲]. علاقه‌مندی جوزف به علوم در دورهٔ متوسطه شروع شد که در آنجا او به ساختن یک دستگاه رادیو کریستال پرداخت و روز به روز علاقه‌مندی وی به رادیو و چگونگی فرستادن کدهای مورس و غیره افزایش پیدا می‌کرد. به این دلیل فکر می‌کرد در دانشگاه، رشتهٔ مورد علاقه‌اش فیزیک ریاضی خواهد بود. اما روح نقاد و خلاقی داشت و خودش بیان می‌کند که «همیشه

---

1) Variatinal Stochastic Analysis 2) taste 3) Cincinnati

می‌خواستم بفهمم چه کار می‌کنم و به چه دلیل این کار را می‌کنم. من اغلب آدم سمج و پی‌گیری بودم. اگر چیزی را می‌شنیدم یا می‌خواندم که نمی‌توانستم آن را درک کنم، اعتراض می‌کردم. همیشه الگوی من پسربچه‌ای بود که تشخیص داد امپراتور لباس بر تن ندارد و آن را با صدای بلند بیان کرد! به نظر می‌رسید که ریاضی با روان‌شناسی من سازگار است. اشتباهی که در محاسبهٔ من دخالت نداشت این بود که ریاضی نیز به وسیلهٔ انسان‌ها تولید شده است» [۱٦ صفحهٔ ۲]. دوب در سال ۱۹۲٦ وارد هاروارد می‌شود. در آن زمان، برنامهٔ ریاضی هاروارد بسیار کند بود و آن برنامه نمی‌توانست دوب را ارضا کند. به همین دلیل «مارشال استون»[1] استاد مشاورش به او پیشنهاد می‌کند که همزمان درس «توابع تحلیلی» را که اُسگود[2] از کتاب خودش برای سال سومی‌ها تدریس می‌کرد، بگیرد. دوب توضیح می‌دهد که این درس، «اولین برخورد من با آنالیز دقیق[3]، نظریهٔ توابع تحلیلی بود که به‌وسیلهٔ اُسگود از روی کتاب خودش تدریس می‌شد. به هر صورت این درس باعث علاقه‌مندی من گردید.» [۱٦ صفحهٔ ۱۳]. دوب در سال ۱۹۳۰ لیسانس و در سال ۱۹۳۱ فوق لیسانس خود را در رشتهٔ ریاضی از دانشگاه هاروارد گرفت [۲۱]. او می‌گوید: زمانی بود که بایستی برای دکتری فکر می‌کردم. به استاد راهنمایم مارشال استون مراجعه کردم و تقاضای یک مسأله برای رساله نمودم. استون به من گفت که او در حال حاضر مسأله‌ای برای من ندارد و پیشنهاد کرد که با والش صحبت کنم چون او همیشه مسائل زیادی برای حل دارد. این کار را کردم و والش من را پذیرفت.» [۱٦ صفحهٔ ۱۳]

دوب رسالهٔ دکتری خود را در رشتهٔ آنالیز مختلط نوشت و در سال ۱۹۳۲ از رسالهٔ خود با عنوان «مقادیر مرزی توابع مختلط[4]» دفاع کرد و فارغ‌التحصیل شد. او از فارغ‌التحصیلی به این سرعت راضی نبود و علت آن را توضیح می‌دهد که «گرفتن Phd در دو سال باعث شد من تقریباً نسبت به همه چیز ریاضی که مستقیماً به رسالهٔ من مربوط نمی‌شد، به طور وحشتناکی غفلت بورزم.» به همین دلیل دوب برای رفع این غفلت به مطالعه در زمینه‌های مختلف ریاضی پرداخت.
در این راستا دوب حتی از این که برای امرار معاش برای مارشال استون مقاله‌ای با عنوان «تبدیلات خطی در فضای هیلبرت» تایپ کرده به خوبی یاد می‌کند و می‌گوید که این مقاله را به دقت خوانده و فهمیده و این فهم در تحقیقات بعدی او بسیار مفید بوده است.

دوب بعد از گرفتن مدرک دکتری خود با حمایت و توصیه‌نامه‌ای که جورج بیرکف[5] برای او نوشت، توانست یک بورس از «شورای ملی تحقیقات»[6] برای مدت دو سال دریافت نماید. چون در سال ۱۹۳۲، همسر دوب دانشجوی رشتهٔ پزشکی دانشگاه کلمبیا در نیویورک بود، دوب به دانشگاه کلمبیا رفت و با ریت[7] به کار پرداخت. با این حال دوب بیان می‌کند که این زمان بسیار بدی بود و وی نتوانست با اعتماد به نفس به آینده نگاه کند. شاید بخشی از این امر به رکود اقتصادی بزرگی که در ۱۹۲۹ شروع شده و در ۱۹۳۲ ــ سالی که دوب به نیویورک رفت ــ به اوج خود

1) Marshall Stone 2) osgood 3) rigorous 4) “Boundary Values of Analytic Functions”
5) G. Birkhoff 6) National Research Council 7) J. f. Ritt

رسید، برمی‌گردد. در این سال، یک چهارم کارگران در آمریکا بیکار بودند و با وجودی که دوب علاقه‌مند به گرفتن یک شغل دانشگاهی بود ولی تقریباً شانسی برای موفقیت نداشت. در همین زمان، به او پیشنهاد شد که با هارولد هتلینگ [۱] استاد آمارِ دانشگاه کلمبیا صحبت کند، زیرا آمار موضوعی بود که به رغم رکود اقتصادی در حال توسعه بود. این اتفاق افتاد و هتلینگ برای دوب بورسی از مؤسسهٔ کارنگی [۲] گرفت و بدین ترتیب وی توانست در سال ۱۹۳۴ ـ ۱۹۳۵ در دانشگاه کلمبیا در زمینهٔ احتمال که در آن زمان به آمار گره خورده بود، کار کند. دوب توضیح می‌دهد که «در سال ۱۹۳۵، ایگان پرسون [۳] به من گفت که احتمال به آمار متصل است ولی می‌توان احتمال را به صورت مجزا تدریس کرد. با توجه به این که دوب نیز مانند فلر، وینر، لوی و بقیهٔ احتمال‌دانان، معتقد بود که بایستی تدریس و یادگیری احتمال را از آمار جدا کرد، از این پیشنهاد استقبال نمود. زیرا به اعتقاد وی، طعم احتمال با طعم آمار متفاوت است، حتی احتمال مقدماتی دارای همان طعمی است که بقیهٔ ریاضیات از آن برخوردار است، شهود احتمالی جذبهٔ زیبایی به آن می‌دهد و این درس مقدماتی، پر از مسائل چالش برانگیز است و دانشجویان علاقه‌مند به مسائل ریاضی را به خود جذب می‌کند. دوب نگران بود که ممکن است گره‌زدن احتمال به آمار باعث گردد کسانی که علاقه‌مند به آمار نیستند، علاقه‌مندی به احتمال را نیز از دست بدهند، زیرا ماهیت آمار مقدماتی بیشتر تجربی و توصیفی است و یادگیری آن نیازمند نوع دیگری از تفکر است. دوب در جواب سؤال اسنل [۴] [۱٦] در مصاحبه‌اش که از او پرسیده بود «وقتی در دانشگاه کلمبیا می‌خواستی احتمال را یاد بگیری چگونه مطالعه می‌کردی؟ چون در آن زمان، کتاب استانداردی در نظریهٔ احتمال وجود نداشت». دوب جواب می‌دهد: «من خیلی از زبان غیردقیق کتاب‌ها به جان آمده بودم، مثلاً تفسیر قضیهٔ ارگودیک بیرکف را برای متغیرهای تصادفی ایستا برای قانون قوی اعداد بزرگ فهمیدم، قبل از این که استفاده از نامساوی چی‌بی‌شف را برای اثبات قانون ضعیف اعداد بزرگ برای دنباله دو به دو مستقل هم توزیع از متغیرهای تصادفی را بدانم! از طرفی کوپمن [۵] که این اثبات را به من نشان داد و خودش از پیشکسوتان نظریه ارگودیک بود، به این مطلب توجه نکرده بود که قضیهٔ ارگودیک به احتمال ربط دارد تا این که من و نوربرت وینر در یکی از نشست‌های انجمن ریاضی آمریکا این رابطه را به او گفتیم» [۱٦]. دوب در همین مصاحبه ابراز می‌دارد که «تک نگاشت (۱۹۳۳) کلموگرف در مبانی ریاضی احتمال، دقیقاً زمانی ظاهر شد که من با استیصال سعی می‌کردم بفهمم که موضوع دربارهٔ چیست؟ کلموگرف با استفاده از نظریهٔ اندازه، احتمال، متغیر تصادفی، امید ریاضی و امید شرطی را تعریف نمود و اندازهٔ احتمال را روی فضای بینهایت بعدی مختصات ساخت. اما کلموگرف توضیح نداده بود که مجموعه متغیرهای مختصاتی این چنین فضایی یک مدل برای کلکسیونی از متغیرهای تصادفی با توزیع توأم سازگار به وجود می‌آورد و من شرمگینانه می‌گویم که این بخش این تک نگاشت را از دست دادم و زمانی آن را فهمیدم که اندازهٔ حاصلضربی بینهایت بعدی را برای کارهای تحقیقاتی خود ساختم».

1) Horold Hotelling 2) Carnegie 3) Egon Person 4) Snell 5) Koopman

دوب ادامه می‌دهد که «کلموگرف، متغیر تصادفی را به عنوان تابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه احتمال تعریف کرد. اما یک شکاف بزرگ بین پذیرفتن یک تعریف و جدی گرفتن آن وجود دارد. این یک شوک به احتمال‌دانان بود که قبول کنند یک تابع، تبدیل به یک متغیر تصادفی می‌گردد به محض این که به دامنه آن که تابع اندازه‌پذیر است، یک توزیع احتمال نسبت داده شود. در ۱۹۳۴، هتلینگ در بحث کلاسی راجع به توزیع توأم نرمال تأکید کرد که همبستگی صفر دو متغیر توأم نرمال، استقلال آنها را نتیجه می‌دهد، اما هنوز دانسته نشده بود که آیا دو متغیر ناهمبسته مستقل هستند یا خیر؟ البته وقتی بعد از کلاس توضیح دادم که بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ با اندازهٔ لبگ $\frac{۱}{۲\pi}dx$ یک فضای اندازه احتمال است و روی این فضا توابع سینوس و کسینوس ناهمبسته هستند اما متغیرهای تصادفی مستقل نیستند، هتلینگ این مطلب را فهمید.

در جریان این فعالیت‌های علمی، رشتهٔ دوب از آنالیز مختلط به نظریهٔ احتمال تغییر کرد، رشته‌ای که تازه داشت به عنوان بخشی از ریاضی شکل می‌گرفت و دوب یکی از افراد شکل دهندهٔ این رشته بود [۱،۴،۵،۱۷]. بعد از سه سال بورس در دانشگاه کلمبیا، در سال ۱۹۳۵، دوب به عنوان دانشیار در دپارتمان ریاضی دانشگاه ایلنوی در اِربنا شمپین استخدام شد. ورود دوب به اربنا یکی از سال‌های فراموش نشدنی پل هالموس اولین دانشجوی دکتری بود. هالموس در صفحه ۵۰ کتاب جالب خود با عنوان «می‌خواهم یک ریاضی‌دان باشم»[1] این واقعه را شرح می‌دهد. «آن سال عالی بود، سال تحصیلی که با پاییز ۱۹۳۵ شروع شد. آن سال، یک سالِ پربار بود و مهمترین خاطرهٔ آن ورود دوب بود» [۱۲ صفحهٔ ۵۰] هالموس شرح می‌دهد که او و دوستش وارن امیروس که دومین دانشجوی دوب بود، از همه چیز دپارتمان مطلع بودیم و بعضی اوقات به جای منشی در دفتر دپارتمان کار می‌کردیم. ما خبردار شدیم که یک جوان باهوش که دورهٔ پسادکتری خود را در کلمبیا گذرانده بود به ایلنوی می‌آید. هالموس و امبروس جوانی را دیدند که ۱۹ یا ۲۰ ساله به نظر می‌رسید و به دنبال رئیس دپارتمان ریاضی می‌گشت. از او پرسیدند که کیست و او خود را «دوب» معرفی کرد. آن دو با تعجب تکرار کردند «D,O,O,B» و سپس خود را به دوب معرفی کردند و این اولین لحظهٔ آشنایی آن‌ها با هم بود. هالموس در ادامه می‌افزاید «چند روز بعد از ورود دوب دفتر خاطرات من پر از خاطرات دوب شد؛ شوت کردن توپ و دوب، سیزده بازی اسکواش با دوب، کلاس خوب دوب و نظایر اینها. هالموس شرح می‌دهد که در یکی از بازی‌های اسکواش وقتی نتوانست توپ را بزند، حرف زشتی از دهانش پرید و بعد نگران شد که جلوی تازه وارد چه کند و در همان حال دوب با خونسردی به او گفت که «فقط مرا جو صدا کنید!»

هالموس شرح می‌دهد که دوب و دانشجویان، دربارهٔ همه چیز از جمله ریاضی، سیاست و موسیقی با هم گپ می‌زدند اما بیش از همه دربارهٔ ریاضی صحبت می‌کردند. هالموس شرح می‌دهد که ورود دوب به دانشگاه ایلنوی که مانند دیگر دپارتمان‌های ریاضی آمریکا برنامه‌ای سنتی داشت، باعث شد تا جوّ دپارتمان به کلی تغییر یابد و جالب اینجاست که دوب نه با تغییر انقلابی برنامهٔ

1) I want to be a Mathematician

درسی بلکه فقط با این که خودش بود، شروع به دمیدن روح در آن دپارتمان کرد [۱۲ صفحهٔ ۵۰] مثلاً در آخرین سالی که دانشجوی ایلنوی بودم، دوب برای اولین بار درس جدیدی در توپولوژی داد که بیشتر نظریهٔ مجموعه‌ای، ولی شامل بخش‌هایی در نظریهٔ هوموتوپی [1] و دسته‌بندی منیفلدهای دوبعدی فشرده بود و اولین درس پیشرفته‌ای که تدریس کرد، درسی در آنالیز حقیقی و مختلط بود. تا آن زمان دوب هیچگاه به تدریس یا مطالعهٔ سیستماتیک نظریهٔ احتمال به عنوان یک درس فکر نکرده بود. اما پُل هالموس و وارن امبروس که دوب را به عنوان استاد راهنما انتخاب کرده بودند به او فشار آوردند که درسی در نظریهٔ احتمال برای آنها تدریس کند. «آنها آنقدر خوب بودند که می‌توانستند با مطالعهٔ خارج از کلاس، مطالب مورد نیاز را یاد بگیرند. اما حقیقتاً مطالبی برای خواندن وجود نداشت که من فکر کنم مناسب است. در آن روزها، یک درس شایسته در نظریهٔ احتمال بر اساس نظریهٔ اندازه بایستی شامل اندازه روی فضاهای مجرد، توابع اندازه‌پذیر بُرل، قضیه رادن ـ نیکودیم می‌شد. وقتی بالاخره مجبور شدم که در احتمال درسی ارائه دهم، لازم بود که ابتدا آن مطالب مقدماتی را یاد می‌گرفتم و بعد جزئیات آن را شرح می‌دادم ـ مطالبی مانند توزیع‌های برنولی و فرمول استرلینگ ...» [۱٦ صفحهٔ ۱۵]. بنابراین، دوب برای اولین بار به تدریس نظریهٔ احتمال پرداخت که شاید اولین درس در نظریهٔ ریاضی احتمال بوده باشد. دوب اذعان دارد که این بدترین تدریس او بود.

در سال ۱۹۳۸ اولین دانشجوی دکتری دوب، پُل هالموس بود که از رسالهٔ خود تحت عنوان «ناوردایی تبدیل‌های تصادفی مشخص: نظریهٔ ریاضی سیستم قمار» دفاع کرد. نحوهٔ سرپرستی رسالهٔ دکتری پل هالموس توسط دوب، با جزئیات کامل از زبان هالموس در صفحات ۵۰ تا ۸۰ «می خواهم یک ریاضیدان شوم» [۱۲] نوشته شده است که این جزئیات می‌تواند برای هر استاد ریاضی و هر دانشجوی دکتری ریاضی آموزنده باشد.
هالموس شرح می‌دهد که «بعد از امتحان جامع، به دوب مراجعه کردم و تقاضا کردم که استاد راهنمایم شود. او قبول کرد و گفت بایستی برایت مسأله‌ای پیدا کنم. دوب ابتدا به هالموس پیشنهاد می‌کند که کارهای «فیشر» را به زبان ریاضی و دقیق بازنویسی کند. هالموس برای این کار، به مطالعهٔ مطالب مختلفی در آمار و احتمال می‌پردازد اما چندین بار از این که «فیشر» بنیان‌گذار آمار، ریاضیدان نبوده دلخور است و بالاخره تصمیم می‌گیرد که در احتمال کار کرده و آمار را فراموش کند. هالموس در نهایت در راستای کارهای دوب در مارتینگل‌ها به تحقیق می‌پردازد و قضیهٔ «جهش اختیاری هالموس» [2] را ثابت می‌کند (این عنوانی است که دوب به قضیهٔ هالموس می‌دهد) [۲۵ صفحهٔ ۱۱۹]. هالموس شرح می‌دهد که امتحان نهایی دکتری (Ph.D) به طور رسمی برگزار شد و مانند هر کس دیگر من خوشحال بودم و افتخار می‌کردم و هنوز هم خوشحال و مفتخرم که دانشجوی دوب بودم». وی اولین دانشجوی دوب بود. دوب چهار دانشجوی دکتری در دو یا سه سال فارغ‌التحصیل کرد و بعد از یک فاصله، مجدداً چندین سال پس از آن، دوباره تربیت دانشجوی

1) Homotopy

دکتری ریاضی را شروع کرد و دومین، سومین و چهارمین دانشجوی وی به تربیت امبروس[۱]، کیبی[۲] و بلک ول[۳] بودند [۱۲، صفحهٔ ۷۹ و ۸۰].
دومین دانشجوی دکتری دوب، وارن امبروس بود. از رسالهٔ خود با عنوان «بعضی خواص فرآیندهای تصادفی اندازه‌پذیر» در سال ۱۹۳۹ دفاع کرد. امبروس کارهای جالبی در احتمال و آنالیز تابعی انجام دادو به هندسه وارد شد و به همراه سینگر[۴] بنیان‌گذار هندسهٔ دیفرانسیل در M.I.T شدند، قضیه هلونومی امبروس ــ سینگر[۵] بسیار مهم و اساسی است [۱۵]. امبروس زمانی وارد هندسه شد که هندسه رونقی نداشت و او در رونق این رشته نقش مهمی ایفا کرد. بعد از ۱۹۶۰ علاقهٔ امبروس به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تغییر جهت داد و می‌خواست مانند دوب، دست به ایجاد یک رشتهٔ تلفیقی جدید در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هندسه بزند که متأسفانه عمرش کفاف نداد. امبروس در سال ۱۹۸۵ از M.I.T بازنشسته شد و در سال ۱۹۹۵ دار فانی را وداع گفت [۱۵].

امبروس در «جشن پنجاه سالگی کارهای ریاضی هالموس» قدردانی خود و هالموس را از دوب چنین ابراز نمود که «پل و من احساس می‌کنیم که جو دوب در ریاضی و همینطور در خارج از ریاضی چیزهای بسیاری به ما یاد داد و تمام کسانی که تحت تأثیر کارهای ریاضی و فعالیت‌های روشنفکری ما قرار گرفته‌اند باید در پس آنها دوب را ببینند.قبل از ملاقات دوب هیچ یک از ما با چنین متفکر پرقدرتی مواجه نشده بودیم در واقع، تمام انتخاب‌های قبلی ما دربارهٔ جهان به وسیلهٔ انتقادات جدی دوب جرح و تعدیل شدند. [۲ صفحهٔ ۱۰۷۱]
چهارمین دانشجوی دکتری دوب، دیوید بلک ول استاد بازنشسته ریاضی و آمار و بنیان‌گذار آمار دانشگاه برکلی، چهار درجه از دانشگاه ایلنوی گرفت و آخرین آن درجهٔ دکتری افتخاری از این دانشگاه بود. او می‌گوید «یکی از خوش‌ترین حادثه‌هایی که در زندگی من اتفاق افتاد، داشتن جو دوب به عنوان استاد راهنمایم بود. این اتفاق به صورت زیر انجام گرفت. در ابتدای سال دوم دورهٔ تحصیلات تکمیلی‌ام، دان کیبی از من سؤال کرد که استاد راهنمایم کیست؟ گفتم هنوز استاد راهنما ندارم و بایستی به دنبال استاد راهنما بگردم. دان به من گفت که چرا جو دوب را انتخاب نمی‌کنی؟ او استاد راهنمای من است، آدم بسیار خوبی است و من قول می‌دهم که او تو را قبول می‌کند.» من هیچگاه جو دوب را ملاقات نکرده بودم و چندان چیزی راجع به او نمی‌دانستم، اما به دان اعتماد کردم و از جو تقاضا کردم و او نیز قبول کرد. در زمانی که حتی نمی‌دانستم جو در احتمال کار می‌کند، تنها می‌دانستم که او یک آنالیزدان است» [۲ صفحه ۱۰۶۵].
بلک ول ادامه می‌دهد که در آن سال، «جو به من هیچ مسألهای نداد، تنها مطالعهٔ مقالات نظریهٔ اندازه و احتمال را که شامل تک نگاشت کلموگرف بود به من داد و در آخر سال مقاله‌ای به من داد که مسیر کاری مرا روشن کرد. مقاله "فرآیند تصادفی با پارامتر اعداد صحیح". آن مقاله، سال‌های

1) Warren Ambrose 2) Kibbey 3) David Blackwell 4) I. M. Singer
5) Ambrose-Singer holonomy theorem

متمادی مونس من شد و تنها بعد از مطالعهٔ آن متوجه شدم که چقدر خوش شانس بودم که یکی از بنیان‌گذاران نظریهٔ احتمال مدرن، استاد راهنمایم بوده است». بلک ول ادامه می‌دهد که «در انتهای آن سال جو به من دو موضوع رساله داد» [۲ صفحه ۱۰٦۵]. بلاک ویل در سال ۱۹۴۱ از رسالهٔ خود با عنوان «خواص زنجیرهای مارکف» دفاع کرد. به گفتهٔ هالموس هر کدام از شاگردان دوب بنیان‌گذاران رشته‌های مختلف ریاضی شده‌اند و بعد از فارغ‌التحصیلی روی پای خودشان ایستاده‌اند[۱].

اخیراً پروژه‌ای با عنوان «پروژهٔ شجره‌شناسی ریاضی» به همت دپارتمان ریاضی دانشگاه ایالتی داکوتای شمالی شروع شده که به تدوین شجرهٔ تمام ریاضیدانان همت گماشته است.
در این پروژه، استاد راهنما، عنوان پایان‌نامهٔ دکتری، سال اخذ دکتری، فهرست دانشجویان هر ریاضیدان و تعداد نوادگان وی آورده شده است [۲۲]. دوب دارای ۱٦ دانشجو و ٦۸۰ نواده است[۲].

دوب در سال ۱۹۴۵ به استادی نایل شد، اما قبل از آن، برای مدتِ سه سال از دانشگاه ایلنوی دور بود زیرا در سال ۱۹۴۲ به دعوت نیروی دریایی ایالات متحده به واشنگتن رفت تا در مسائل تحقیقاتی در مورد کاربرد ریاضیات پیشرفته در حل مسائل عملی به کار بپردازد. در این دوره، دوب بر روی مؤلفه‌های یک فرآیند $N-$بُعدی گاوسی مارکف کار کرد و در همان جا بود که به وی پیشنهاد شد برای سری آمار وایلی، کتابی در فرآیندهای تصادفی بنویسد. برای انجام این کار، دوب بیان می‌کند که «فکر کردم نوربرت وینر یک فصل کتاب را در کاربرد در مهندسی برق بنویسد. من هم دربارهٔ این کاربردها چیزی نمی‌دانستم، اما ملاقات‌های متعددی با وینر داشتم که با مهندسین برق در M.I.T کارهای مشترک می‌کردند.» [۱٦] بالاخره پس از مذاکرات متعدد با دیگران، دوب به این نتیجه می‌رسد که خود به تنهایی کتاب را بنویسد و در آن، چندین فصل از نظریهٔ برآورد وینر را نیز به کتاب اضافه کند.
این کتاب ــ کتاب فرآیندهای تصادفی دوب [۱۰] ــ فقط یک کتاب نبود بلکه بنیان ریاضی احتمال را به طور سیستماتیک پایه‌ریزی کرد. در این کتاب، مفاهیم جدیدی مطرح شدند که امروزه احتمال‌دانان از آن‌ها به کرّات استفاده می‌کنند. به گفتهٔ دوب [۸ و ۹]، تا قبل از چاپ این کتاب و تک نگاشت کلموگرف، برای مدتی طولانی، نظریهٔ احتمال عبارت بود از صورت آرمانی و تخیلی برخی پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات. اما اندک اندک در نیمهٔ نخست این قرن، احتمال ریاضی بخشی معمولی از ریاضیات شد. ریاضی‌سازی احتمال ایده‌های نو می‌طلبید و به‌ویژه نیازمند وجود رهیافت جدیدی نسبت به ایدهٔ پذیرفتنی بودن یک تابع بود» [۱٦]. دوب ابراز می‌دارد که «پذیرش این ریاضی‌سازی آهسته صورت گرفت و با مقاومت رو به رو گردید. در واقع حتی اینک برخی از احتمال‌دانان از آن بیم دارند که قالب‌بندی ریاضی احتمال جاذبهٔ ذاتی‌اش یعنی جاذبه و افسون احتمال جهانِ واقع و جاذبهٔ دقت ریاضی را از آن ستانده باشد و البته حق با ایشان

۱) فهرست دانشجویان دوب به‌ترتیب سال فارغ‌التحصیلی آن‌ها در پیوست ۱ مقاله آمده است.
۲) شجره‌نامهٔ جوزف دوب در پیوست ۲ مقاله آمده است.

است. ولیکن باید تأکید کرد که بسیاری از اساسی‌ترین نتایج مبحث احتمال ریاضی از سرچشمهٔ غیر ریاضی احتمال جهانِ واقع جاری می‌شوند که هرگز حتی تعریفی نداشته است که همگان در آن متفق باشند. در حقیقت، ارتباط بین احتمالِ جهان واقع و احتمال ریاضی هم بلای جان و هم منبع الهامِ رشد احتمال ریاضی بوده است» [۸ و ۲۶]. دوب توضیح می‌دهد که در نوشتن این کتاب، حتی برای پیداکردن واژه‌ها بحث‌های مفصلی انجام می‌شد. «وقتی کتابم را می‌نوشتم بحث مفصلی با فلر داشتم. او می‌گفت که همه می‌گویند "متغیر تصادفی" و من گفتم که همه می‌گویند "متغیر شانسی" ما بایستی یک واژه در کتابهایمان به کار می‌بردیم! بنابراین تصمیم گرفتیم که مسأله را با یک رهیافت تصادفی حل کنیم، یعنی سکه را پرتاب کردیم و او برد! پس از آن، هر دو، واژهٔ "متغیر تصادفی" را به کار بردیم.

دوب جریان تدوین کتاب خود را چنین توضیح می‌دهد: «من کتاب فرآیندهای تصادفی را همانگونه نوشتم که همیشه مطالب ریاضی را می‌نوشتم، یعنی با یک ایدهٔ مبهم که چیزی را می‌خواهم پوشش بدهم، شروع کردم.» [۱۶] او سپس ضمن نوشتنِ کتاب، مطالب مورد نظر را پیدا می‌کند و در این فرآیند، به توسعهٔ نظریهٔ مارتینگل می‌پردازد. تعاریف در نظریه‌پردازی دوب نقش مهمی بازی می‌کنند. شاید بسیاری از ریاضیدانان را به خاطر قضیه‌هایی که ثابت کردند می‌شناسیم که دوب نیز قضیه‌های بسیاری ثابت کرده است. ولی چیزی که دوب را دوب کرده، نظریه‌پردازی و ایجاد نظریه‌های جدید است [۱۵]. کی لای چونگ معتقد است که "دوب مرد نظریه است نه مرد قضیه[۱]". نمی‌توان تنها چند نتیجهٔ او را مشخص کرد و دربارهٔ دستاوردهای او صحبت نمود» [۵]. به همین دلیل در این کتاب، دوب به توسعهٔ مفاهیم جداپذیری، مارتینگل (زیرمارتینگل، فوق مارتینگل)، زمان توقف، فرآیندهای تصادفی سازگار پرداخت. پل آندره مِیر[۲] بنیان‌گذار مکتب استراسبورگ در فرانسه، نویسنده کتاب احتمال و پتانسیل [۶] و یکی از ستاره‌های برجستهٔ ریاضی فرانسه که در سال ۱۹۳۴ به دنیا آمد و در ۳۰ ژانویه ۲۰۰۳ دار فانی را وداع گفت، دربارهٔ کتاب فرآیند تصادفی دوب می گوید «این کتاب را می‌توان به عنوان نقطه عطف در معرفی نظریهٔ احتمال با روح ریاضی مدرن در آن روز به حساب آورد. میر می‌گوید که «این کتاب انجیل نظریهٔ مدرن احتمال است» [۲ صفحه ۱۰۶۱]. او همینطور می‌گوید که «جو دوب و کیوشی ایتو اغلب کارهای لوی را به زبان دقیق نظریهٔ اندازه بازنویسی کردند [۲ صفحه ۱۰۶۱]، کتاب فرآیند تصادفی دوب و یا به قول آندره میر «انجیل نظریهٔ احتمال» مرجع اصلی در نظریهٔ فرآیندهای تصادفی و نظریهٔ احتمال شد بعد از چاپ این کتاب تعداد زیادی کتاب در نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی نوشته و چاپ شد.

کتاب کلاسیک دیگری که به وسیلهٔ دوب نوشته شده، کتابِ «نظریهٔ پتانسیل کلاسیک و طرف احتمال آن» بود که اولین چاپ این کتاب [۱۱] ۸۴۶ صفحه‌ای، در سال ۱۹۸۴ به بازار آمد. این کتاب، بین علاقهٔ سابق دوب یعنی آنالیز مختلط و علاقهٔ بعدی او یعنی احتمال رابطه برقرار نمود.

---

1) Doob is a Theory man not a theorem man 2) Paul Andrè Meyer

یکی از مرورکنندگان این کتاب نوشت که «این کتابی بود که مدت‌ها انتظار چاپ آن به وسیلهٔ مؤلف می‌رفت، کتابی که به طور موازی نظریهٔ پتانسیل و قسمت نظریهٔ فرآیندهای تصادفی آن را توسعه داده است.» این کتاب به دو قسمت مجزا تقسیم می‌شود و هر کدام از قسمت‌ها، تقریباً نصف کتاب هستند. در این کتاب، قسمت اول به نظریهٔ پتانسیل عملگر لاپلاس (یعنی نظریهٔ کلاسیک پتانسیل) و قسمت دوم به تفسیر احتمالی پرداخته است. دانشجویان تحصیلات تکمیلی و محققین در احتمال یا آنالیز کلاسیک، از این کتاب خوب و مناسب مطالب بسیاری یاد می‌گیرند، کتابی که به وسیلهٔ استاد مسلم هر دو زمینه نوشته شده است» [۲۱ صفحه ۳].

بازگشت دوب به آنالیز مختلط و تلفیق آن با احتمال و نظریهٔ فرآیندهای تصادفی، خود بسیار جالب و جذاب است. دوب ابراز می‌دارد که «نگاه احتمالی کاکوتانی[1] به مسألهٔ دریکله در سال ۱۹۴۴، دو موضوع مورد علاقهٔ من یعنی نظریهٔ توابع مختلط و احتمال را با هم ترکیب کرد و من تصمیم گرفتم رابطهٔ بین این دو موضوع را بیشتر توسعه دهم. من به زودی فهمیدم توابعی مانند هارمونیک و زیرهارمونیک که دارای ویژگی میانگین خاصی هستند بایستی در نظریهٔ پتانسیل نقش کلیدی بازی کنند و این خواص میانگینی، کاربرد نظریهٔ مارتینگل را پیشنهاد می‌کند» [۱٦ صفحه ۱۳].

در سال ۱۹۵۵، جوزف دوب به سمپوزیم برکلی در احتمال و آمار دعوت شد. او برای این سمپوزیم سخنرانی آماده نکرده بود، اما بیان می‌کند که «من چند روز زودتر به برکلی رفتم ـ با یک فکر باز و یک دستگاه تایپ قابل حمل و نقل ـ و تصمیم گرفتم که وظیفهٔ خود را در سمپوزیم، با تعریف چیزی که امروز نظریهٔ پتانسیل مجرد نامیده می‌شود انجام دهم، یعنی با تعمیم توابع هارمونیک، زیرهارمونیک و فوق هارمونیک روی فضای مجرد که در خاصیت میانگینی خاصی صدق می‌کنند. این فرضیات قبلاً به وسیلهٔ محققین دیگر نیز بیان شده بودند اما در آن زمان، من از آنها بی‌اطلاع بودم. البته لازم است بگویم که هیچکدام از این مباحث ارتباطی با احتمال نداشت. به زودی فهمیدم که می‌توانم دربارهٔ نظریهٔ پتانسیل کلاسیک بیشتر و بهتر یاد بگیرم و به همین دلیل، به مطالعهٔ کارهای اساسی بریلوت[2]، کارتان[3] و دنای[4] پرداختم. عادت من که همیشه تعاریف را جدی می‌گیرم باعث شد که توپولوژی fine کارتان را با جزئیات به کار گیرم. من این توپولوژی را خیلی بیشتر توسعه دادم و آن را برای مطالعهٔ حد توابع در نقاط مرزی دامنهٔ تعریف به کار بردم. پس از آن، فکر کردم و هنوز فکر می‌کنم که توپولوژی fine بایستی کاربردی در نظریهٔ توابع مختلط جدا از کاربرد آن در قضیهٔ حد مرزی فاتو داشته باشد.» [۱٦ صفحه ۱۳]

کارهای عمیق دوب و هانت دربارهٔ نظریهٔ پتانسیل مجرد باعث گردید که بسیاری از ریاضیدان‌ها فکر کنند که نظریهٔ پتانسیل، یک زیرفصل نظریهٔ احتمال است. دوب می‌نویسد که برای شفاف کردن این موضوع در کتاب خود «سعی کردم این ایده را به چالش بکشم و به این منظور، ابتدا به معرفی نظریهٔ کلاسیک پتانسیل پرداختم و بعداً احتمال و بیشتر نظریهٔ مارتینگل را در فصل‌های آخر کتاب معرفی

1) Kakutani 2) Brelot 3) Cartan 4) Deny

نمودم.» نزدیکی نظریهٔ پتانسیل و نظریهٔ مارتینگل باعث تعجب دوب شد «من نیز متعجب شدم که دیدم نظریهٔ کلاسیک پتانسیل و نظریهٔ مارتینگل آنقدر به هم وابسته هستند که مفاهیمی مانند نامساوی‌های مارتینگلی که در ابتدا تصور می‌شد کاملاً نظریهٔ پتانسیلِ تصادفی هستند، دارای طرف مقابل غیراحتمالی‌اند» [۱٦ صفحه ۲۴].

دوب معتقد شد که باید نظریه‌ای وجود داشته باشد که این هر دو مطلب را بپوشاند اما به گفتهٔ خودش متأسفانه موفقیتی برای پیداکردن یک نظریه پیدا نکرد [۱٦ صفحه ۲۴].

آخرین کتاب دوب در سال ۱۹۹۴ و در نظریهٔ اندازه منتشر شد ــ زمانی که دوب ۸۴ سال داشت. دوب درمقدمه این کتاب نوشته است که «کتاب نشان می‌دهد که ... نظریهٔ اندازه‌ای که هر کس که می‌خواهد آنالیزدان بشود باید یاد بگیرد، چیست». شاتریه[1] در نقدی که بر این کتاب نوشته بیان می‌دارد که «این کتاب که توسط یکی از شاخص‌ترین احتمال‌دان‌های زنده نوشته شده یک کتاب جالب به کتاب‌های نظریهٔ اندازه اضافه کرده است. هر کتابخانهٔ جدی ریاضی باید این کتاب را داشته باشد. مدرسان درس نظریهٔ اندازه، به خصوص کسانی که متخصص آنالیز هستند، بایستی برای تدریس درس‌های آیندهٔ خود به این کتاب مراجعه کنند» [۷].

به گفتهٔ برک هلدر[2] و پروتر[3] [۲ صفحه ۱۰٦۲]، «در سال ۱۹۹۴، با وجود شگفتی خیلی‌ها، دوب به چاپ کتاب زیبا و کوچک نظریهٔ اندازه پرداخت. امیدواریم که در اینجا به نشان دادن شخصیت بسیار عالی و افتاده دوب در مقدمه ای که برای این کتاب نوشته اشاره کنیم. ما نمی توانیم از بازگویی اولین پاراگراف مقدمه این کتاب که برای دوب کلاسیک شده خودداری کنیم. او می‌گوید: این کتاب برای چاپ برنامه‌ریزی نشده بود ولی بهانه‌ای شد که از کامپیوتری که خریداری شده استفاده گردد، این به من این شانس را داد که ایده‌های خود را در مورد نظریهٔ اندازه که هر آنالیزدان بایستی بداند مرتب کنم و با جزئیات وارد موضوع گردم، وقتی که شپرینگر ورلگ[4] فکر کرد دیدگاه‌های این کتاب دارای مخاطب عام است و پیشنهاد چاپ آن را به من داد، من مجبور شدم با دقت بیشتری بنویسم و برای پیدا کردن غلط‌های آن search کنم، search مفید بود». [۲ صفحه ۱۰٦۳]

مِیِر در نقد این کتاب نوشت «تمام کتاب‌های جدید نظریهٔ اندازه کتاب‌های خوب هستند و برای دانشجویان با برنامه پدید آمده‌اند و اغلب مانند هم هستند. باید بگویم که کتابخانهٔ ما بایستی خریدن این کتاب‌ها را متوقف کند و این کتاب (دوب) را بخرد». مِیِر بیان می‌دارد که دوب به اندازه‌ای نوآور و خلاق است که در یکی از قدیمی‌ترین و منسجم‌ترین موضوع‌ها مانند نظریهٔ اندازه، مطالب بسیار تازه‌ای نوشته است. [۲ صفحه ۱۰٦۲]

دوب از زمان استخدام خود در سال ۱۹۳۵، عضو هیأت علمی دانشگاه ایلنوی در اربنا شمپین بود و در سال ۱۹۷۸ بازنشسته شد، ولی هم‌چنان در نوشتن کتاب و مقالات پژوهشی فعال بود.

1) Chatterji 2) Donald Burkholder 3) Philip Protter 4) springer-verlag

دوب عضو منتخب آکادمی ملی علوم[1] و آکادمی فرانسوی علوم[2] بود. وی همچنین افتخار ریاست «مؤسسهٔ آمار ریاضی»[3] در سال ۱۹۵۰ و ریاست انجمن ریاضی آمریکا را در سال‌های ۱۹۶۳ و ۱۹۶۴ به دست آورد و در سال ۱۹۸۱، از دانشگاه ایلنویز دکترای افتخاری علوم را دریافت نمود. علاوه بر این‌ها، دوب چندین جایزهٔ معتبر برای موفقیت‌های چشمگیرش به دست آورد که به طور خاص، می‌توان به «مدال ملی علم»[4] در سال ۱۹۷۹ و «جایزهٔ استیل»[5] انجمن ریاضی آمریکا در سال ۱۹۸۴ اشاره نمود. در نشست تابستانی انجمن ریاضی آمریکا که در اوجین انجام شد، گفته شد که «این جایزه به خاطر ... کار اساسی دوب در ایجاد رشتهٔ احتمال به عنوان شاخه‌ای از ریاضی و به خاطر تداوم تأثیر شگرف و عمیق دوب بر توسعهٔ احتمال» به وی اعطا می‌شود.

جوزف دوب ریاضیدان تأثیر شگفتی بر ریاضی قرن بیستم گذاشته و تأثیرگذاری او با قطعیت بیشتری در ریاضی، علوم و تکنولوژی ادامه پیدا خواهد کرد [۲ صفحهٔ ۱۰۶۱]. چندین مجلهٔ معروف مانند ژورنال ریاضی ایلینوی[6] که دوب یکی از بنیان‌گذاران آن بود [۳]، شمارهٔ ۵۰ خود را با هزار صفحه به دوب اختصاص داد.

تمام بزرگان نظریهٔ احتمال و فرآیندهای تصادفی مقالات جالبی به این ویژه‌نامه هدیه کردند. نشریات دیگری نیز از جمله ژورنال فرآیندهای تصادفی و کاربرد[7] و ژورنال احتمال کاربردی[8] و آنالز آو پروبابیلیتی[9] مقالاتی به یادگار دوب انتشار دادند [۲ صفحه ۱۰۶۱]. به گفتهٔ آندره میر ــ ستارهٔ ریاضی فرانسه ــ کتاب فرآیند تصادفی دوب «انجیل نظریهٔ مدرن» است. برکهولدر این کتاب را با کتاب سال ۱۸۱۲ لاپلاس در تاریخ ریاضی مقایسه کرده است. آندره میر ستارهٔ ریاضی فرانسه می‌گوید «شخصاً فکر می‌کنم که او یکی از ریاضی‌دانان واقعاً بزرگ قرن است» [۲ صفحه ۱۰۶۳].

دوب مسؤولیت‌های زیادی در زندگیش داشته و همه را به بهترین شکلی انجام داده است. او همسر و پدری وفادار بود و برای بسیاری از ریاضی‌دان‌ها نقش مربی[10] را داشته و به حق رهبر جهانی نوزاد تازه تولد یافتهٔ نظریهٔ مدرن احتمال [۲ صفحه ۱۰۶۳] است. با این وجود، تأثیر دوب بر شاگردانش تنها در ریاضی نبوده است و همانطور که از قول پل هالموس، وارن امبروس و دیوید بلک ول نقل شد، دوب تأثیر بسیار زیادی بر رفتار انسانی و توسعهٔ تفکر نقادی روشنفکرانه در آنها داشته است. هالموس کتاب معروف خود «می‌خواهم یک ریاضی‌دان باشم» را به وارن ــ امبروس، جو دوب و جان فون نیومن هدیه کرده و می‌نویسد که بدون آنها، این که الان هستم، نبودم. در همین کتاب، هالموس حتی به تأثیری که دوب بر عقاید سیاسی دانشجویانش گذاشته، اشاره می‌کند.

1) National Academy of Science 2) French Academy of Sciences 3) Institute of Mathematical Statistics 4) National Medal of Science 5) Steele Prize 6) Illinois J. Math. 50 (2006) 7) Stochastic Process. Appl 8) J. Appl. Probab 9) Anals of probability 10) mentor

هالموس و همسرش ویرجینیا هزینهٔ اهداء جایزهٔ دوب[1] انجمن ریاضی امریکا را پرداخت کردند. اولین جایزه دوب (که ابتدا جایزه کتاب نامیده شد) به ترستن[2] برای کتابش هندسه و توپولوژی سه بعدی[3] در سال ۲۰۰۵ اهدا شد.

دوب انسانی خانواده‌دوست بود که به خاطر همسرش، بعد از هاروارد به دانشگاه کلمبیا رفت و وقتی شغلی بسیار عالی در M.I.T به او پیشنهاد شد به خاطر همسرش آن را رد کرد. دوب همیشه با نژادپرستی مخالفت می‌کرد و در آن سال‌ها از دانشجوی سیاهپوست خود دیوید بلک ول حمایت جدی کرد. دوب بسیار متواضع بود تا جایی که حتی با افراط در تواضع، تبدیل به شکسته نفسی می‌شود. تاکنون با جملاتی که از او نقل کردیم، احتمالاً متوجه این موضوع شده‌اید که دوب تمام کارهای خود حتی نوشتنِ کتاب و خلق نظریه را بی‌اهمیت جلوه می‌داد و همیشه آنها را با شوخی برگزار می‌کرد؛ با این وجود هالموس بیان می‌دارد که اگر چه دوب را تحسین می‌کنم و فکر می‌کنم او بی‌نظیر است، اما فکر نمی‌کنم که او مدرس خوبی باشد، زیرا در تدریسش خیلی غیرجدی است و همیشه نگران است که مبادا به نظر مهم جلوه کند! [۱۲ صفحه ۵۱]
«بهترین زمان دوب وقتی است که درگیر یک مسأله است و گیر افتاده، در آن صورت اراده و جدیتش دیدنی است». او ادامه میدهد «دوب دارای یکی از خصوصیات مطلقاً ضروری برای معلمی است که می‌تواند چیزی را که یادگیرنده نمی‌گوید، ببیند.» [۱۲ صفحه ۵۱]. نگارنده به یاد می آورد زمانی که جو دوب به دعوت یکی از دانشجویانش جان والش[4] برای سخنرانی در «همایش هفتگی ریاضی»[5] به دانشگاه بریتیش کلمبیا آمده بود، زمانی که ۸۲ سال داشت، یک ساعت تمام ایستاده سخنرانی کرد (با تقاضای نشستن مخالفت کرد) و بعد از سخنرانی، هنوز سرحال بود. وقتی دوب از بزرگان ریاضی برای ما ریاضی‌دان‌های تازه‌کار سخن می‌گفت، با شنیدن نام هر کدام از آنها به هیجان می آمدیم اما او یکنواخت سخن می‌گفت و در موقع شنیدن سخنرانی‌اش، همان احساسی را داشتم که از پل هالموس نقل شده بود: «دوب شخصیتی آرام دارد. او به سادگی با همه کنار می‌آید و به نظر می‌رسد هیچ چیز را جدی نمی‌گیرد، ولی او همه چیز را یکسان جدی می گیرد.»
سنل[6] یکی دیگر از شاگردان دوب نقل می‌کند که یک ماه قبل از مرگ او به دیدنش رفته و وی هنوز رانندگی می‌کرد و مانند گذشته دربارهٔ سیاست، بچه‌هایش، کوهنوردی‌اش و باغچه‌اش صحبت می‌کرد. سنل نقل می‌کند که زمانی به زبان دوب نوشته بودم «زندگی یک فوق مارتینگل است» (یک بازی نامطلوب) و من تلاش کردم که در رابطه با آن چه بنویسم. همسرم پیشنهاد کرد که بهترین جوابِ این است که دوب، یک انسان خارق‌العادهٔ سرراست است! چانگ میگوید دوب سه کتاب و تقریباً نود مقاله نوشته، بعضی اوقات این گله‌گذاری شنیده می‌شود که نوشته‌های او سخت خوانده می‌شود. اگر نوشته‌های او را با فلر مقایسه کنیم این حرف تا اندازه‌ای درست است ... اما به یاد نویسندهٔ محبوب تایم افتادم که سبک بسیار خوبی در نوشتن داشت ولی محتوا نداشت! مطالب

1) Josef L. Doob Prize 2) William P. Thurston 3) Tree-dimensional Geometry and Topology 4) John B. Walsh 5) Collequim 6) Snell

دوب را به خاطر محتوایش باید خواند و به سبک نگارش آن توجه نکرد [۵ صفحهٔ ۳۵]. دوب انسانی متعادل بود و رفتار بسیار جذابی داشت. او به مدت ۵۰ سال، مسؤول برگزاری کوه‌پیمایی شنبه‌های دانشگاه ایلنوی بود که استادهای رشته‌های مختلف دانشگاه همراه با همسرانشان در آن شرکت می‌کردند. دوب از ایجاد چنین احساسی در بین همکاران دانشگاهی که ریاضی رشتهٔ برتری نسبت به رشتهٔ آنها است به شدت خودداری می‌کرد. [۲] او عاشق موسیقی، سیاست، کارهای خانه و آشپزی بود. می‌توان ادعا کرد که دوب نه تنها آنالیزدانی تمام عیار، بلکه انسانی تمام عیار بود. جو دوب و همسرش السی[۱] دارای سه فرزند به نام‌های استفان[۲]، پیتر[۳] و دبورا[۴] بودند. فرزند بزرگ دوب در مراسم بزرگداشت پدرش در دانشگاه ایلنوی در اربنا ــ شمپین می‌گوید: «در کودکی من قدردان پدرم نبودم. هیچ ایده‌ای نداشتم که چرا پدرم مرا تقریباً هر هفته به ماهیگیری می‌برد و چرا با خانواده در هر تابستان به یک جای ویژه می‌رفتیم. به یاد ندارم که کار او کودکی مرا به زحمت انداخته بود. چیزی که اکنون برایم با ارزش است این است که او مرا مستقل بار آورد. او کسی نبود که دنباله‌رو جماعت باشد. او همیشه نسبت به باورها و طرزتلقی‌های متعصبانه شک می‌کرد . . . او به من هیچکدام از توانایی‌های ریاضی خود را نداد اما به من یاد داد که چگونه چیزهایی را که خراب می‌شد، درست کنم. من از او یاد گرفتم که چگونه کارهای برقی، لوله‌کشی، نجاری را انجام دهم و حال به عنوان یک بزرگسال می‌توانم مشکلات خانگی و اتومبیل خود را تعمیر کنم. من یاد گرفتم که هر چه قدر هم سوسک‌ها را از بین ببرم تا در باغچه خیارها را از بین نبرند، و هرچه تلاش کنم که در نوشته‌های خود غلط پیدا نکنم و آن‌ها را تصحیح کنم، باز هم یک سوسک در باغچه و یک غلط در نوشتهٔ خود پیدا می‌کنم! او به من یاد داد که چگونه راه حل مسائل زندگی را پیدا کنم». البته می‌دانم که اگر پدرم ـ جوزف دوب این تعریف‌ها را می‌شنید، به شدت شرمنده می‌شد.

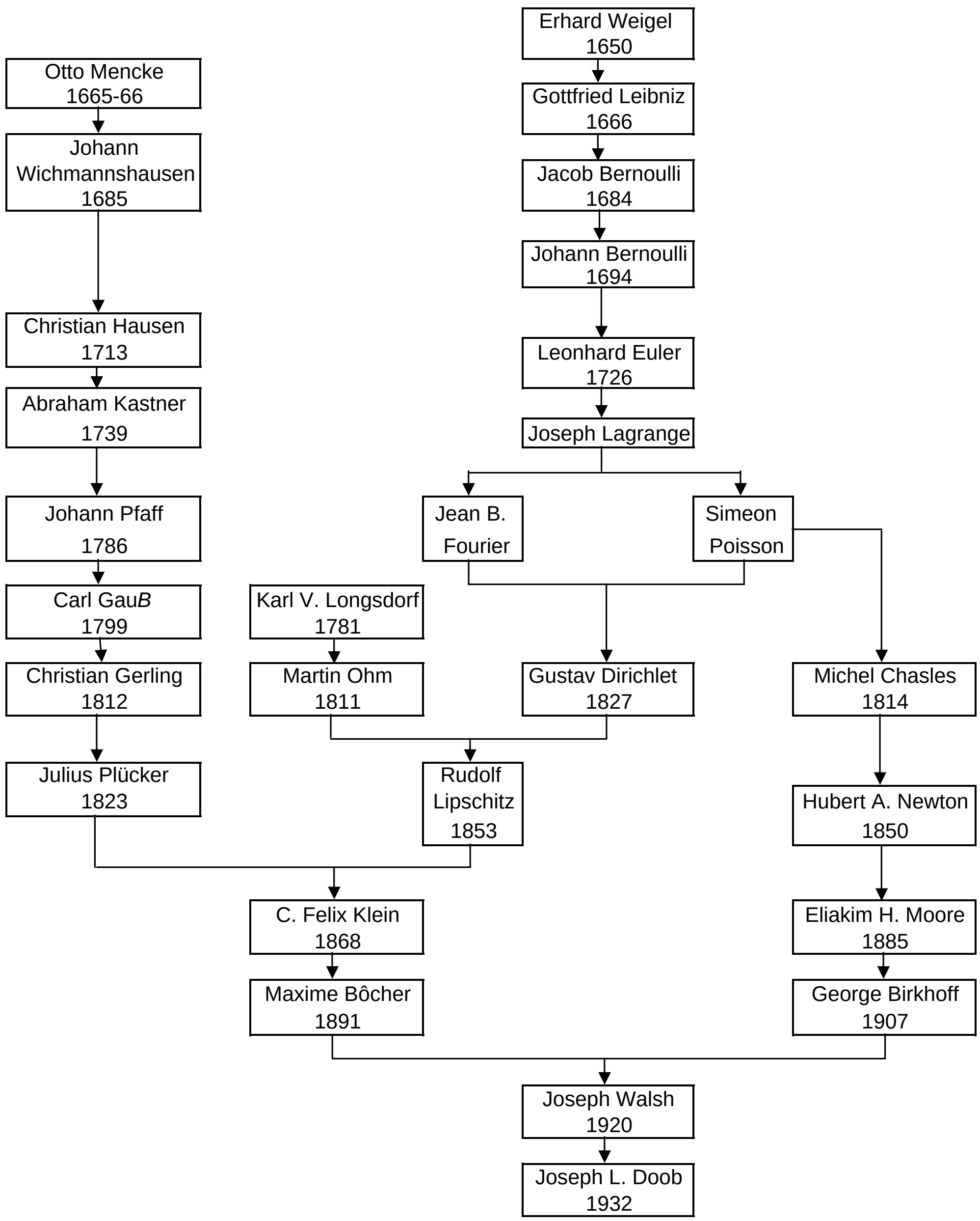
---

1) Elsie 2) Stephen 3) Peter 4) Deborah

پیوست ۱ ـ دانشجویان جوزف دوب

Halmos, Paul R.	1938	Invariants of certain stochastic transformation: The mathematical theory of gambling systems.
Ambrose, Warren	1939	Someproperties of measurable stochastic processes.
Blackwell, David H.	1941	Properties of Markov chains.
Kibbey, Donald E.	1942	Boundary values of analytic functions.
Kinney, John R.	1951	Continuity properties of sample functions of Markov processes.
Snell, J. Laurie	1951	Applications of Martingale system theorems.
Flanagan, Joseph E.	1953	Topics in information theory.
Chow, Yuan Shih	1958	The theory of martingales in an s-finite measure space indexed by directed sets.
Scalora, Frank S.	1958	Abstract martingale convergence theorems.
Abbott, James Harman	1959	Topics in information theory.
Paul, Earalil Matthew	1960	Density in the light of probability theory.
Rosenkrantz, Walter A.	1963	Probability and Fourier series.
Brosamler, Gunnar A.	1966	Potential theoretic analysis of a certain integral equation.
Walsh, John B.	1966	Probability and Dirichlet problem for multiply superharmonic functions.
Lamb, Charles W.	1969	Boundary Theory for Markov Chains
Thompson Mary Elinore Beattie	1969	Some Aspects of Optimal Stopping Theory

پیوست ۲ – شجره نامه علمی دوب



مراجع

[1] Bingham, N. H. Doob: *A Half Century On*, J. Appl. Probab. 42 (2005), pp. 257-266.

[2] Burkholder, Donald; Protter, Philip. *Joseph Leo Doob, 1910–2004*. Stochastic Process. Appl. 115 (2005), no. 7, 1061–1072.

[3] Burkholder, Donald. *Foreword* [Special volume in memory of Joseph Doob (1910–2004)]. Illinois J. Math. 50 (2006), no. 1-4,

[4] Burkholder, Donald. *Joseph Leo Doob* (1910–2004). Illinois J. Math. 50 (2006), no. 1-4,

[5] Chung, Kai Lai. *Probability and Doob*. Amer. Math. Monthly 105 (1998), no. 1, 28–35.

[6] Dellacherie, P. A. Meyer. *Probabilites et Potentiel*, Chapitres I IV, Hermann, Paris, 1975 (English translation: Probabilities and Potential A, North-Holland, Amsterdam, 1978, Chapters I to IV).

[7] Doob, J. L. *Measure theory*. Graduate Texts in Mathematics, 143. Springer-Verlag, New York, 1994. xii+210 pp. ISBN: 0-387-94055-3 (Reviewer: S. D. Chatterji) 28-01 (60A10)

[8] Doob, Joseph L. *The development of rigor in mathematical probability (1900–1950)*. Development of mathematics 1900–1950 (Luxembourg, 1992), 157–170, Birkh?user, Basel, 1994. (Reviewer: S. D. Chatterji)

[9] Doob, J. L. *The development of probability in the 20th century* Joint University. of British Columbia, Simon Fraser University Mathematics Colloquium, May 7 1992

[10] Doob, J. L. *Stochastic processes*. Reprint of the 1953 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. viii+654 pp. ISBN: 0-471-52369-0

[11] Doob, J. L. *Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations*. Ann. Probab. 17 (1989), no. 3, 815–821. (Reviewer: Kiyosi It)

[12] Doob, J. L. *Commentary on probability. A century of mathematics in America, Part II, 353–354, Hist. Math., 2,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[13] Doob, J. L. *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer, New York (1984).

[14] Halmos, Paul R., *I Want To Be A Mathematician An Automathography*, Springer-Verlag. New York 1985

[15] Malliavin, Paul. *Integration and Probability.* Springer-Verlag New York, Inc. 1995

[16] Meyer, P. A. *Measure Theory by J.L. Doob.* Reviewed by P.A. Meyer, Bull. Amer. Math. Soc. 31 (1994), pp. 233-235.

[17] Singer, I.M., Wu, H. *A Tribute to Warren Ambrose.* Notices of the AMS, Volume 43, Number 4 page 425-427 April 1996.

[18] Snell, J.L., *A Conversation with Joe Doob*, currently available at the URL http://www.dartmouth.edu/chance/Doob/conversation.html. See alternatively the published version of Snell's article in Statist. Sci. 12(4) (1997) 301-311.

[19] Snell, J.L. Laurie Obituary: *Joseph Leonard Doob.* J. Appl. Probab. 42 (2005), no. 1, 247–256.

[20] 1984 Steele Prizes awarded at summer meeting in Eugene, Notices Amer. Math. Soc. 31 (6) (1984), 567-569.

[21] Wu, Jang-Mei. *Doob's contribution to function theory.* Illinois J. Math. 50 (2006), no. 1-4, 1019–1028

[22] Department of Mathematics at MIT: Course 18, Major, www-math.mit.edu

[23] Full Mac Tutor biography. www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/biographies/doob.html

[24] Mathematics Genealogy Project Unversity of North Dakota www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu

[۲۵] دوب، جوزف، ترجمه عطاالله تقاء، سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی (۱۹۰۰ ـ ۱۹۵۰)، نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲.

[۲۶] شورای عالی برنامه‌ریزی، مشخصات دکتری رشته ریاضی، کمیته برنامه‌ریزی ریاضی، وزارت علوم و آموزش عالی.

[۲۷] ظهوری زنگنه، بیژن، نظریه فرآیندهای تصادفی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۷۴.

[۲۸] گفتگو با مایکل اتیا، ترجمه سیامک کاظمی، رشد آموزش ریاضی، سال سوم، شماره ۱۰، تابستان ۱۳٦۵، صص ۸ تا ۱۸.

بیژن ظهوری زنگنه
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
zangeneh@sharif.edu

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۷ (پاییز ۱۳۸۵) صص. ۹۱ تا ۹۷

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی آقای دکتر محمد صال مصلحیان که در ذیل مسائل آمده است، ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده، که باید همراه با حل کامل مسأله باشد، در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

مسألهٔ ۷۱: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد و به ازای یک عدد طبیعی k، $A^k = \circ$. ثابت کنید $A^n = \circ$.

حل مسألهٔ ۷۱: (سارا سعیدی مدنی دانشجوی کارشناسی دانشگاه الزهرا)
اگر $k \leq n$، حکم برقرار است. (زیرا اگر $A^k = \circ$، آن گاه $A^k.A^{n-k} = A^n = \circ$.) پس فرض کنیم $n < k$.
فرض کنید چندجمله‌ای مشخصهٔ A به صورت زیر باشد

$$f(x) = det(xI - A) = x^n + c_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + c_\circ.$$

طبق قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون، $f(A) = \circ$. پس

$$A^n + c_{n-۱}A^{n-۱} + \ldots + c_۱A + c_\circ = \circ \qquad (۱)$$

ابتدا فرض می‌کنیم $c_\circ \neq \circ$، $A^{k-۱}$ را در (۱) ضرب می‌کنیم. داریم

$$A^{k+n-۱} + c_{n-۱}A^{k+n-۲} + \ldots + c_۱A^k + c_\circ A^{k-۱} = \circ$$
$$c_\circ A^{k-۱} = \circ$$
$$A^{k-۱} = \circ$$

دوباره (۱) را در A^{k-2} ضرب می‌کنیم

$$\begin{gathered}A^{k+n-2}+c_{n-1}A^{k+n-3}+\ldots+c_1A^{k-1}+c_0A^{k-2}=0\\ c_0A^{k-2}=0\\ A^{k-2}=0\end{gathered}$$

با ادامهٔ همین روش با ضرب (۱) در A^{k-n-1} داریم

$$\begin{gathered}A^{k-1}+c_{n-1}A^{k-2}+\ldots+c_1A^{k-n}+c_0A^{k-n-1}=0\\ A^{k-n-1}=0\end{gathered}$$

همچنین با ضرب (۱) در A^{k-2n} خواهیم داشت

$$A^{k-n}+c_{n-1}A^{k-n-1}+\ldots+c_1A^{k-2n+1}+c_0A^{k-2n}=0$$

به همین ترتیب با ضرب (۱) در $A^{k-(k-n)}$ داریم

$$\begin{gathered}A^{2n}+c_{n-1}A^{2n-1}+\ldots+c_1A^{n+1}+c_0A^{n}=0\\ A^{n}=0\end{gathered}$$

حال اگر $c_1 \neq 0$، ابتدا با ضرب A^{k-2} در (۱) شروع می‌کنیم و به همین ترتیب اگر $c_j \neq 0$، با ضرب $A^{k-(j+1)}$ در (۱) آغاز می‌کنیم.
به این ترتیب از هر حالت نتیجه می‌شود که $A^n = 0$.

مسألهٔ ۷۸:
فرض کنید M و N دو ماتریس $n \times n$ باشند به طوری که $M^n = 0 = N^n$ و $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$. ثابت کنید M و N متشابه هستند.

حل مسألهٔ ۷۸: (سارا سعیدی مدنی دانشجوی کارشناسی دانشگاه الزهرا)
اثبات: فرض کنیم $M_n(F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در میدان F باشد. طبق فرض مسأله، $M, N \in M_n(F)$. می‌دانیم نظیر هر ماتریس یک عملگر خطی روی F^n وجود دارد و بالعکس، یعنی $M_n(F) \cong L(F^n, F^n)$. پس نظیر M و N دو عملگر خطی T و S موجودند که $S : F^n \to F^n, T : F^n \to F^n$ و با توجه به فرض مسأله داریم: $T^n = 0$، $T^{n-1} \neq 0$، $S^n = 0$ و $S^{n-1} \neq 0$. اگر B پایهٔ مرتب و استاندارد F^n باشد، داریم $[T]_B = M$ و $[S]_B = N$.
ابتدا نشان می‌دهیم برای هر عملگر خطی U روی F^n که $U^n = 0$ ولی $U^{n-1} \neq 0$، پایهٔ مرتبی

چون B برای F^n موجود است که ماتریس U در پایهٔ مرتب B، به صورت رو به رو است:

$$[U]_B = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ \\ ۱ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \dots & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \circ & \circ & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & ۱ & \circ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

برهان: فرض کنیم $V = F^n$. از آن جایی که $U^{n-۱} \neq \circ$، پس $\alpha \in V$ای هست که $U^{n-۱}(\alpha) \neq \circ$ ولی $U^n(\alpha) = \circ$ و $U^{n-۲}(\alpha) \neq \circ, \dots, U^۲(\alpha) \neq \circ$. (زیرا اگر $U(\alpha) = \circ$، آن گاه $U^{n-۱}(\alpha) = \circ$. که این تناقض است. به همین ترتیب در مورد $U^{n-۲}(\alpha), \dots, U^۲(\alpha)$.)
قرار می‌دهیم: $\beta_۱ = \alpha$، $\beta_۲ = U(\alpha)$، $\cdots$، $\beta_n = U^{n-۱}(\alpha)$. واضح است که β_iها متمایزند. ادعا می‌کنیم که $B = \{\beta_۱, \dots, \beta_n\}$ یک پایهٔ مرتب برای V می‌باشد. برای اثبات این ادعا کافی است نشان دهیم که $(۱ \leq i \leq n)\beta_i$ها مستقل خطی‌اند. (چون تعدادشان با بعد V برابر است.)
پس طبق تعریف مجموعهٔ مستقل خطی، فرض کنیم

$$c_۱\beta_۱ + \dots + c_۱\beta_n = \circ \quad (c_۱, \dots, c_n \in F)$$

داریم

$$\begin{aligned} &c_۱\alpha + c_۲U(\alpha) + \cdots + c_nU^{n-۱}(\alpha) = \circ \\ &U^{n-۱}(c_۱\alpha + \dots + c_nU^{n-۱}(\alpha)) = U^{n-۱}(\circ) = \circ \\ &U^{n-۱}(c_۱\alpha) + \dots + U^{۲(n-۱)}(c_n\alpha) = \circ \\ &c_۱U^{n-۱}(\alpha) + c_۲U^n(\alpha) + \dots + c_nU^{۲(n-۱)}(\alpha) = \circ \\ &c_۱U^{n-۱}(\alpha) = \circ \\ &c_۱ = \circ \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} &c_۲U(\alpha) + \dots + c_nU^{n-۱}(\alpha) = \circ \\ &U^{n-۲}(c_۲U(\alpha) + \dots + c_nU^{n-۱}(\alpha)) = \circ \\ &c_۲U^{n-۱}(\alpha) + \cdots + c_nU^{۲n-۳}(\alpha) = \circ \\ &c_۲U^{n-۱}(\alpha) = \circ \\ &c_۲ = \circ \end{aligned}$$

با ادامهٔ همین روش نتیجه می‌شود که $c_n = \circ$. در نتیجه برای هر i، $۱ \leq i \leq n$، $c_i = \circ$، پس β_iها مستقل خطی‌اند. پس ادعایمان ثابت شد. [حال ماتریس تبدیل خطی U در پایهٔ مرتب B را تشکیل می‌دهیم: این ماتریس یک ماتریس $n \times n$ است و ستون‌های آن مختصات $U(\beta_i)$ در پایهٔ B می‌باشد.)

$$U(\beta_۱) = U(\alpha) = \circ.\alpha + ۱.U(\alpha) + \circ.U^۲(\alpha) + \cdots + \circ.U^{n-۱}(\alpha)$$

پس

$$[U(\beta_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1} .$$

همچنین

$$U(\beta_2) = U^2(\alpha) = 0.\alpha + 0.U(\alpha) + 1.U^2(\alpha) + 0.U^3(\alpha) + \cdots + 0.U^{n-1}(\alpha)$$

پس

$$[U(\beta_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

با ادامهٔ این روند خواهیم داشت

$$U(\beta_{n-1}) = U(U^{n-2}(\alpha)) = U^{n-1}(\alpha) = 0.\alpha + \cdots + 0.U^{n-2}(\alpha) + 1.U^{n-1}(\alpha)$$

$$[U(\beta_{n-1})]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

و نیز

$$U(\beta_n) = U(U^{n-1}(\alpha)) = U^n(\alpha) = 0 = 0.\alpha + \cdots + 0.U^{n-1}(\alpha)$$

$$[U(\beta_n)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

بنابراین

$$[U]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = A$$

بنابراین، پایه‌ای مانند B'_1 و نیز پایه مرتبی مانند B'_2 برای V موجود است که $[S]_{B'_2} = A$ و $[T]_{B'_1} = A$. طبق قضیه‌ای در جبر خطی، ماتریس‌های یک تبدیل خطی متشابهند، پس

$$M = [T]_B \approx [T]_{B'_1} = A \Rightarrow M \approx A$$

$$N = [S]_B \approx [T]_{B'_2} = A \Rightarrow N \approx A$$

بنابراین $M \approx N$.

مسألهٔ ۸۱: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که به عددی مانند a همگراست. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

حل مسألهٔ ۸۱: (الله‌کرم شفیعی دانشجوی کارشناسی ارشد، مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان)
می‌دانیم اگر $x_n > 0$ و $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ آنگاه $\lim_n \sqrt[n]{x_n} = l$. اینک فرض کنید $x_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. در این صورت

$$\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_n \frac{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim_n a_{n+1} = a$$

پس $\lim_n \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \lim_n \sqrt[n]{x_n} = a$.

مسألهٔ ۸۸: فرض کنید X یک فضای متریک و فشرده و $f : X \to X$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید زیرمجموعه Y از X وجود دارد بطوری که $f(Y) = Y$.

حل مسألهٔ ۸۸: (الله‌کرم شفیعی دانشجوی کارشناسی ارشد، مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان)
فرض کنید $x_0 \in X$ دلخواه باشد. قرار دهید: $(n \in \mathbb{N})$ $x_{n+1} = f(x_n)$ و $x_1 = x_0$. مجموعه Y را گردایهٔ تمام xهایی تعریف کنید که زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ وجود داشته باشد که به x همگرا باشد. نشان می‌دهیم $f(Y) = Y$.
فرض کنید $\alpha \in f(Y)$. پس $\beta \in Y$ هست که $\alpha = f(\beta)$. چون $\beta \in Y$، زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_{n_k} \to \beta$. چون f پیوسته است، $x_{n_k+1} = f(x_{n_k}) \to f(\beta) = \alpha$. اما $\{x_{n_k+1}\}$ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ است، پس $\alpha \in Y$.

بالعکس، فرض کنیم $\alpha \in Y$. پس زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_{n_k} \to \alpha$. بنابراین $f(x_{n_k-1}) \to \alpha$. چون X فشرده است، پس $\{x_{n_k-1}\}$ زیردنباله‌ای مانند x_{n_l} دارد که به نقطه‌ای مانند β در X همگرا است. چون f پیوسته است پس $f(x_{n_l}) \to f(\beta)$. از طرفی $f(x_{n_l})$ زیردنبالهٔ دنبالهٔ همگرای $\{f(x_{n_k-1})\}$ است، بنابراین $f(x_{n_l}) \to \alpha$. پس $\alpha = f(\beta)$. اما $\{x_{n_l}\}$ زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ نیز هست پس $\beta \in Y$. بدین ترتیب، $\alpha \in f(Y)$. □

مسألهٔ ۸۹: فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبتی باشند که $abc = 1$. ثابت کنید

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3.$$

حل مسألهٔ ۸۹: (الله‌کرم شفیعی دانشجوی کارشناسی ارشد، مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان)

به وضوح $a^{۲}(a-۱)\geq a-۱, b^{۲}(b-۱)\geq b-۱, c^{۲}(c-۱)\geq c-۱$ بنابراین

$$\begin{aligned} a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}-a^{۲}-b^{۲}-c^{۲} &= a^{۲}(a-۱)+b^{۲}(b-۱)+c^{۲}(c-۱) \\ &\leq (a-۱)+(b-۱)+(c-۱) \\ &(a+b+c)-۳ \end{aligned}$$

از طرفی بنا به نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی، $a+b+c\geq ۳\sqrt[۳]{abc}\geq ۳$. پس

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}-a^{۲}-b^{۲}-c^{۲}\geq ۰.\square$$

مسألهٔ ۹۶: فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و برای هر $x\in R$ عدد طبیعی n موجود باشد که $x^{n}=x$. ثابت کنید هر ایده‌آل اول در R، یک ایده‌آل بیشین است.

حل مسألهٔ ۹۶: (سعید هاشمی، بخش ریاضی، دانشگاه رازی کرمانشاه)
فرض کنید $P\neq R$ ایدآل اول R باشد. نشان می‌دهیم P بیشین است. برای این منظور فرض کنید $P\not\subseteq J$. پس $x\in J$ وجود دارد که $x\notin P$. بنا به فرض عدد طبیعی $n>۱$ وجود دارد که $x(x^{n-۱}-۱)=۰\in P$.
از آنجایی که P اول است و $x\notin P$ پس باید $x^{n-۱}-۱\in P$. بنابراین $x^{n-۱}-۱\in J$. از طرفی $x\in J$ بنابراین $x^{n-۱}\in J$. پس $۱=x^{n-۱}-(x^{n-۱}-۱)\in J$ بنابراین $J=R$ پس P در R بیشین است.$\square$
به عنوان مثالی جالب برای این سؤال مجموعهٔ $P(X)$، مجموعهٔ توانی X را در نظر بگیرید. اعمال جمع و ضرب را روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall A,B\in P(X)\qquad \begin{aligned} &A+B=A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)\\ &A.B=A\cap B\end{aligned}$$

در این صورت $(P(x),\Delta,\cap)$ حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار است. در این حلقه مجموعهٔ تهی $\emptyset$ عنصر یک حلقه می‌باشد. توجه کنید که برای هر $A\in P$ داریم:

$$A^{۲}=A.A=A\cap A=A$$

بنابر این شرایط مسأله با $n=۲$ صدق می‌کند. بنابراین هر ایدآل اول این حلقه، ایدآلی بیشین است.

نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۱۱۵۹–۹۱۷۷۵، گروه ریاضی،
دکتر محمد صال‌مصلحیان

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 25, No. 2, Fall 2006

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: