فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۶، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۶

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۸٦)

شمارهٔ پیاپی: ۳۹

فهرست مطالب

علیرضا سهیلی و محمد هادی مصلحی،

تعدیل وردشی شبکه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی ۱

محمد مشکوری،

بیان‌هایی از استقراء ۲۳

آرند هیتینگ،

جدال ۳۳

منوچهر میثاقیان،

اعداد اول در حلقهٔ اعداد صحیح گاوس ۴۵

مهدی رجبعلی‌پور،

دکتر حیدر رجوی ۵۵

ژان ـ پیرکاهان،

از سری‌های تیلر تا حرکت براونی، با منظره‌ای در مسیر بازگشت ٦۷

ژان ـ پیرکاهان،

گشت و گذاری پنجاه ساله ۸۵

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: حیدر رجوی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۱ تا ۲۲

تعدیل وردشی شبکه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی

علیرضا سهیلی و محمد هادی مصلحی

چکیده

در یک روش وردشی برای تعدیل شبکه، شبکهٔ تعدیل‌پذیر به عنوان نگارهٔ یک شبکهٔ ثابت یکنواخت روی یک دامنهٔ محاسباتی، تحت یک تبدیل مختصات مناسب بنا می‌شود. این تبدیل، مینیمم‌کنندهٔ یک تابعک معین می‌باشد که میزان خطا را در نتایج عددی اندازه می‌گیرد. دراین راستا یک تابع به اصطلاح نشانگر تجویز می‌شود تا تعدیل شبکه را کنترل کند. در این مقاله، یک تابعک تولید و تعدیل شبکه که تعریف آن بر نگاشت‌های همساز روی خمینه‌ها استوار است، تعریف شده و سپس یک فرم عمومی، با الهام از آن بیان می‌شود. این فرم عمومی به گونه‌ای است که اکثر تابعک‌های پیشنهادی برای تولید و تعدیل شبکه را می‌توان در آن قالب، امّا با توابع نشانگر مختلف بیان کرد.
معادلات اویلر ــ لاگرانژ متناظر با تابعک تعدیل شبکه، که در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی بیان شده و مستقل از زمان می‌باشند را معادلات تولید و تعدیل شبکه می‌نامند. از این معادلات با استفاده از معادلات شار گرادیان، معادلهٔ حرکت شبکه منتج خواهد شد. معادلهٔ حرکتِ شبکهٔ به‌دست آمده، شبکه را در هر گام زمانی تولید خواهد کرد. درنهایت قابلیت روش مذکور با بررسی نتایج عددی، مورد تجزیه و تحلیل قرارخواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: تعدیل شبکه، روش وردشی، اصل هم توزیعی، معادلات اویلر ــ لاگرانژ، معادلات شار گرادیان، تانسور متری

۱ مقدمه

در دنیای امروز طیف وسیعی از مسائل موجود در طبیعت و پدیده‌های فیزیکی با معادلات

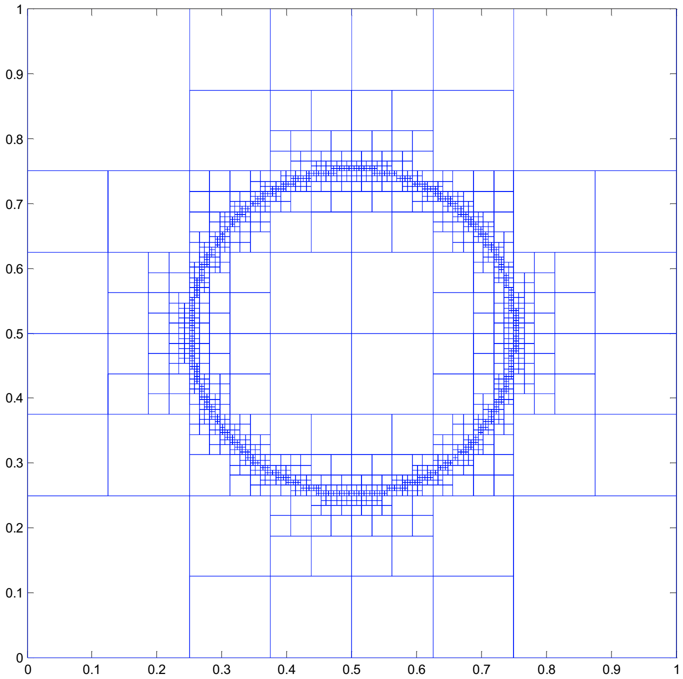
دیفرانسیل جزئی توصیف و شبیه‌سازی می‌شوند که بعضی از این مسائل از جمله حرکت امواج ، لایه های مرزی این امواج یا موجهای ناگهانی دارای تغییرات بزرگ و شوکهای مقطعی و ناگهانی هستند. لذا برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی توصیف کنندهٔ آنها که جواب‌های آنها تغییرات ناگهانی و سریع دارند، روش‌های معمولی حل عددی (تفاضل متناهی یا عناصر متناهی)، غالباً ناممکن و ناپایدار خواهند بود. از طرفی به کار گرفتن شبکه‌هایی با سلول‌های کوچک‌تر یا با گره‌های بیشتر برای تحت پوشش قرار دادن این تغییرات سریع، مقرون به صرفه نبوده و در بسیاری از موارد به ناکارآمدی روش منجر خواهد شد. بدین ترتیب استفاده از شبکهٔ تعدیل‌پذیر و قابل انطباق با تغییرات سریع موجود در جواب معادله دیفرانسیل جزئی ، به عنوان یک راهکار اساسی و انکارناپذیر در حل این معادلات مطرح شده و بنابراین روش‌های تعدیل شبکه شکل گرفتند. چندان که در ۲۰ سال گذشته با توسعهٔ تکنیک‌های مختلف تخمین خطا، استفاده از تعدیل شبکه به یک رویهٔ استاندارد در اغلب نرم افزارهای عددی تبدیل شده است.

دو طیف عمدهٔ روش‌های تعدیل، روش‌های «تظریف موضعی» و «شبکهٔ متحرک» هستند که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان بکار روند. در روش‌های تظریف موضعی، بعضی از سلول‌های شبکه که جواب فیزیکی در محدودهٔ آنها با تغییرات ناگهانی روبرو است، دوباره همانند یک شبکه با اندازهٔ h تقسیم‌بندی شده و در شبکهٔ اولیه به‌صورت موضعی قرار می‌گیرند و به روش $h-$ تظریف[1] معروفند (شکل ۱). اما در روش‌های شبکهٔ متحرک، شبکه و گره‌ها با گذر هر گام زمانی به‌طور خودکار در محل‌هایی که تغییرات ناگهانی وجود دارد متمرکز می‌شوند.

روش‌هایی که در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان، بر مبنای استفاده از شبکه‌های تعدیل‌پذیر متحرک پیاده‌سازی می‌شوند به دو دستهٔ ایستا و پویا تقسیم می‌شوند. در روش ایستا، شبکه در هر گام زمانی بصورت مجزا حرکت می‌کند و ارتباطی بین گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل و انتخاب شبکه وجود ندارد. در این روش جواب روی یک شبکهٔ غیر یکنواخت و در طول گام زمانی مجزا محاسبه می‌گردد. پس از طی یک یا چند مرحله، یک شبکه‌بندی مجدد صورت می‌گیرد، که ممکن است تعداد گره‌هایش با تعداد گره‌های شبکهٔ جدید تفاوت داشته باشد. متغیرهای وابسته از شبکهٔ قدیم به شبکهٔ جدید درونیابی و مقدار تابع در نقاط شبکهٔ جدید محاسبه می‌شود.

در روش پویا، معادلات دیفرانسیل جزئی فیزیکی (معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم) و معادلات شبکه را به‌عنوان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تواماً حل می‌کنند و بر خلاف روش‌های ایستا، درونیابی از متغیرهای وابسته از شبکهٔ قدیم به شبکهٔ جدید لازم نیست.

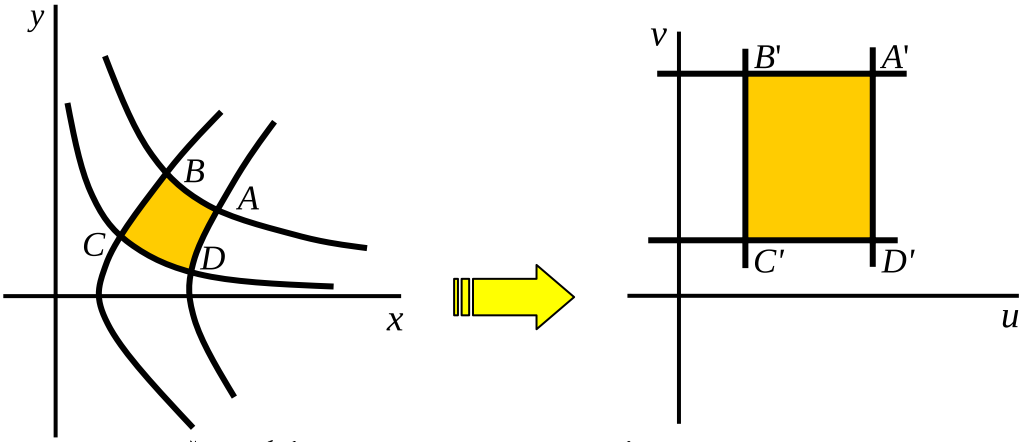
1) h_ refinement



شکل ۱. نمایشی از شبکه در روش تظریف موضعی

۲. مختصات فیزیکی و مختصات محاسباتی

هر سلول شبکه یک قسمت انتگرالی از مدل‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی می‌باشد. مسلماً کارآیی مدل‌های گسسته وقتی به طور فزاینده بالا می‌رود که آنها با استفاده از مختصات طبیعی (معمولی) که برای انجام محاسبات ریاضی مناسب است بنا شده باشند و یک طرح منظم از ارتباط بین گره‌های شبکه، مد نظر قرار گیرد. این امر با یک تبدیل مختصات محقق خواهد شد به شرطی که مرزهای دامنهٔ جدید، بوسیلهٔ خطوط موازی محورهای مختصات نشان داده شود. برای مثال نگاشت $w = z^{۲}$ (z نقطه‌ای در صفحهٔ xy و w نقطه‌ای در صفحهٔ uv است) تبدیل نشان داده شده در شکل ۲ را انجام می‌دهد به این معنی که مرز ناحیهٔ $ABCD$ را روی مرز ناحیهٔ $A'B'C'D'$ می‌نگارد.



شکل ۲. تبدیل ناحیهٔ $ABCD$ به $A'B'C'D'$ به‌وسیلهٔ نگاشت $w = z^2$

به مختصات اولی که جسم در آن قرار گرفته مختصات فیزیکی Ω_p و به مختصات دومی مختصات محاسباتی Ω_c گویند. البته در اینجا تبدیل مختصات توسط یک نگاشت معکوس پذیر

$$\begin{cases} x : \Omega_c \to \Omega_p \\ \vec{x} = x(\vec{\xi}) \end{cases}$$

با معکوس

$$\begin{cases} \xi : \Omega_p \to \Omega_c \\ \vec{\xi} = \xi(\vec{x}) \end{cases}$$

صورت می‌گیرد که نگاشت تعدیل نامیده می‌شود.

با استفاده از تابع نشانگر این نگاشت می‌تواند طوری ساخته شود که علاوه بر تطبیق مرزها، جنبه‌های مهم شبکه از قبیل تراکم، تعامد و همواری را نیز کنترل کند.

۳ توابع نشانگر در دو بُعد

همانطور که بیان شد در روش شبکهٔ متحرک برای حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، گره‌های شبکه در مکان‌هایی که تابع دارای تغییرات سریع و ناگهانی است متمرکز می‌شوند. برای شناسایی این مکان‌ها از توابعی به نام توابع نشانگر[1] استفاده می‌کنند. این توابع معمولاً بر اساس یک سری خواص فیزیکی و یا هندسی تعریف می‌شوند و در فضای دوبعدی می‌توانند طوری تعریف شوند که علاوه بر تراکم شبکه[2] در محل‌های مورد نظر، کنترل خواص دیگری از شبکه از جمله هم ترازی[3] با یک میدان جهتی و برقراری یک سطح عالی از تعامد، خطوط شبکه را نیز در دل خود جای دهند. رده‌ای از روش‌های تولید شبکهٔ تعدیل‌پذیر روش‌های وردشی هستند که هدف ما مطالعهٔ آنهاست. در این روش، تبدیل مختصات بین دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی، $\vec{\xi} = \xi(\vec{x})$ به‌عنوان مینیمم کنندهٔ

---

1) indicator 2) mesh concentration 3) conformity

یک تابعک معین که میزان خطا را در تخمین عددی جواب در مختصات فیزیکی اندازه می‌گیرد، معین می‌شود. در این مقاله، این تابعک به صورت کلی زیر داده می‌شود؛

$$I[\overrightarrow{\xi}] = \int_{\Omega_p} \sum_{i=1}^{2} (\nabla \xi_i)^T \; G_i^{-1} \; (\nabla \xi_i) \; d\overrightarrow{x}. \qquad (۱.۳)$$

می‌توان گفت در این صورت کلی تابعک پیشنهادی بسیاری از دانشمندان از قبیل «وینسلو»[1]، «داوینسکی»[2] و «برک بیل و سالتزمن»[3] با G_i های مختلف تأمین خواهند شد. G_i که یک ماتریس 2×2 ، معین مثبت و متقارن (البته در حالت کلی یک ماتریس نیمه معین مثبت) است، تابع نشانگر نامیده می‌شود. توابع G_i بسته به خواصی از شبکه مورد نظر که باید کنترل شوند، (از قبیل تراکم، همترازی، تعامد و ...) به طرق مختلف انتخاب می‌شوند. به‌علاوه گاهی اوقات توابع نشانگر در فضای دو بعدی را با تعمیم این توابع در فضای یک بعدی تعریف می‌کنند. مثلاً تابع «شبه طول کمان» که به‌صورت زیر تعریف می‌شود تعمیمی از تابع طول کمان در فضای یک بعدی است.

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u||^2}} [I + (\nabla u).(\nabla u)^T]$$

به‌علاوه خود تابع طول کمان در فضای دو بعدی نیز به شکل $[I + (\nabla u).(\nabla u)^T]^{\frac{1}{2}}$ است.

۴. گام‌های اصلی برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (وابسته به زمان) به روش شبکهٔ متحرک در دو بُعد

برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش شبکهٔ متحرک، گام‌های زیر را طی می‌کنیم

۱) پیدا کردن یک معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) برای یک تبدیل مختصات $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi}, t)$ در یک t ثابت. (یعنی معادله دیفرانسیلی که جواب آن تبدیل مختصات (نگاشت تعدیل) باشد.)

۲) ساختن یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت شبکه ($MMPDE$)[4] وابسته به زمان.

۳) گسسته‌سازی متغیرهای مکان معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی (معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در پی حل آن هستیم) و معادلات $MMPDE$ و در نظر گرفتن آنها به‌صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، یعنی در هر گام زمانی، ابتدا شبکه را با استفاده از گسسته‌سازی $MMPDE$ و حل عددی آن به‌دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی برای این شبکه را گسسته‌سازی نموده و حل می‌کنیم.

---

1) Winslow 2) Davinsky 3) Brackbill and Saltzman 4) Moving Mesh Partial Differential Equation

۱.۴ تراکم شبکه و اصل هم توزیعی در یک بُعد

یک تبدیل مختصات بین فضای فیزیکی x و فضای محاسباتی ξ به‌وسیلهٔ هم توزیع کردن یک تابع نشانگر $M(x,t,u) > ۰$ که به جواب معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی، $u = u(x,t)$، وابسته است معین می‌شود.

فرض کنید $x = x(\xi,t) : [۰,۱] \to [۰,۱]$ هم توزیعی نیاز دارد که (به ازای t ثابت)

$$\int_{x_i(t)}^{x_{i+۱}(t)} Mdx = \frac{\theta(t)}{N} \quad \text{یا} \quad \int_{۰}^{x_i(t)} M(x,t)dx = \frac{i}{N}\theta(t)$$

که $x_i(t)$ ها $i = ۱,۲,...,N$ بیانگر گره‌های شبکه تعدیل شده در زمان ثابت t هستند و معادلهٔ هم توزیع پیوستهٔ متناظر با این صورت گسسته به‌صورت

$$\int_{۰}^{x(\xi,t)} Mdx = \xi\,\theta(t)$$

است. با مشتق‌گیری نسبت به ξ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\int_{۰}^{x(\xi,t)} Mdx) = \theta(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(\int_{۰}^{x(\xi,t)} Mdx).\frac{\partial x}{\partial \xi} = \theta(t)$$
$$\Rightarrow \quad M\frac{\partial x}{\partial\xi} = \theta(t)$$

با مشتق‌گیری دوباره نسبت به ξ داریم

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(M\frac{\partial x}{\partial\xi}) = ۰ \qquad (۱.۴)$$

و این همان معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) است.
جالب است که با تعویض نقش متغیرهای وابسته و مستقل ξ و x معادلهٔ (۱.۴) به $\frac{\partial}{\partial x}(M^{-۱}\frac{\partial\xi}{\partial x}) = ۰$ تبدیل خواهد شد و این معادله نیز دقیقاً معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ از تابعک

$$I_{۱D} = \int_{\Omega_p} M^{-۱}(\frac{\partial\xi}{\partial x})^{۲}dx \qquad (۲.۴)$$

است که حالت یک بعدی از تابعک کلی (۱.۳) می‌باشد.
اما اصل هم توزیعی را به بیان دیگری نیز می‌توان مطرح کرد:
اگر شبکه روی Ω_c یکنواخت باشد سپس $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ ، تراکم نقاط شبکه را روی Ω_p اندازه می‌گیرد. بنابراین تراکم شبکه با یک تابع مشخص شده مناسب (تابع نشانگر M) متناسب است یعنی

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = [\theta(t)]M \quad (t \text{ ثابت})$$

که با مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به x به‌دست می‌آوریم $\frac{\partial}{\partial x}(M^{-۱}\frac{\partial\xi}{\partial x}) = ۰$

و با تعویض نقش متغیرهای x و ξ ، همان معادلهٔ (۱.۴) حاصل می‌شود.
با استفاده‌از معادلهٔ (۱.۴) چندین $MMPDE$ پیشنهاد و تجزیه و تحلیل شده‌اند [۷]، مثلاً

$$\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}}(\frac{\partial x}{\partial t}) = -\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \xi}(M\frac{\partial x}{\partial \xi})$$

که در آن پارامتر τ توسط کاربر تعریف می‌شود و به کنترل تراز همواری زمانی کمک می‌کند، به‌علاوه در عمل یک هموارکننده فاصله‌ای از تابع نشانگر M و شبکه ضروری خواهد بود. با گسسته‌سازی $MMPDE$ می‌توان شبکه را در هر گام زمانی محاسبه کرد.
گسترش اصل هم توزیعی یک بعدی به فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی خیلی آسان نیست، چرا که علاوه بر تعدیل و هموار، کنترل خواص دیگر شبکه از قبیل پیچش و این که شبکه خودش را قطع نکند، باید در فرمول بندی چند بعدی مورد توجه قرار گیرد. با این حال چند تعمیم دو بعدی و سه بعدی از هم توزیعی با درجه‌های موفقیت قابل تأمل و احتیاط آمیز، مطرح شده‌اند.
در بخش‌های بعدی یک روش «وردشی» را برای به‌دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی تولید شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) به‌کار برده و یک $MMPDE$ از آن با استفاده از معادلات شار گرادیان، نتیجه می‌گیریم.

۵ معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) برای یک تبدیل مختصات دو بعدی $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi}, t)$

یک روش برجسته در بین روش‌هایی که به‌وسیلهٔ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، شبکه را تولید می‌کنند «روش وردشی» است که استفاده از آن برای تولید شبکه‌های تعدیل‌پذیر، به‌طور وسیعی گسترش یافته است. در یک روش وردشی که می‌توان گفت رابطهٔ نزدیکی هم بااصل هم توزیعی در فضای یک بعدی دارد، تبدیل مختصات بین دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی، $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$ برای مینیمم کردن یک تابعک، موسوم به تابعک تعدیل شبکه، معین می‌گردد. تابعک تعدیل شبکه از ترکیب خطی یک یا چند تابعک که هر کدام نمایندهٔ یکی از خواص شبکهٔ مطلوب (شبکه‌ای که هدف رسیدن به آن است) از قبیل تراکم، همواری یا تعامد است، تشکیل می‌شود.
به‌عبارتی هر کدام از اجزای این ترکیب خطی، تابعکی است که میزان انحراف (و دور شدن) از برقراری کامل یکی از خواص شبکه از قبیل تعامد یا همترازی و ... را اندازه می گیرد و یا تابعکی است که تراکم شبکه را در دل خود دارد. طبیعی است که بهترین حالت این است که هر کدام از این انحراف‌ها صفر باشد و خواص مطلوب شبکه در حد آرمانی برآورده شود. ولی به دست آوردن شبکه‌ای که در نواحی با تغییرات زیاد هم جواب به نحو مطلوبی متراکم و هموار باشد و هم خطوط شبکه در این نواحی متعامد باشد، غیر ممکن است. لذا سعی بر این است که با برقرار کردن تعادلی

بین این خواص، نگاشتی برای تبدیل مختصات حاصل شود که همهٔ این خواص را به بهترین وجهی برآورده کند. از این رو، نگاشتی مورد نظر است که ترکیب خطی (عموماً محدّب) یک یا چند تابعک (که هر کدام مبیّن اندازه یکی از این انحراف‌ها یا کنترل تراکم شبکه می‌باشد) را مینیمم سازد. با تغییر مقدار ضرائب در این ترکیب خطی میزان برقراری خواص مربوطه به‌صورت دلخواه دارای شدت و ضعف خواهند داشت.
با این که تضمین وجود، یکتایی و معکوس‌پذیری و یا یک به یک بودن چنین نگاشتی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، در عمل روش وردشی نیازمند استفاده از ضرائب تعدیل (ضرائب در ترکیب خطی) به‌طور تجربی است چرا که قاعده خاصی برای تعیین این ضرائب وجود ندارد. به‌علاوه عموماً نگاشت‌هایی را برای تبدیل مختصات به‌کار گیرد که در یک به یک بودنشان اطمینانی نیست. به‌طور کلی یک به یک بودن نگاشت از این لحاظ حائز اهمیت است که تضمین می‌کند که شبکهٔ به‌دست آمده خودش را قطع نکند.

٦ تابعک تولید شبکه بر مبنای نگاشت‌های همساز

در اینجا یک تابعک تولید شبکه که تعریف آن بر نگاشت‌های همساز روی خمینه‌ها استوار است معرفی می‌شود. برای ایجاد یک درک کلی از تابعک تعدیل شبکه، معادلات دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه و ماهیت توابع نشانگر را بررسی می‌کنیم. این تابعک بر خلاف تابعک‌های پیشنهادی دیگر که خود ممکن است ترکیبی از چند تابعک باشند، یک تابعک تکی است و لذا از فرمول‌بندی ساده‌تری برخوردار خواهد بود. مهمتر این که نگاشت تعدیل (تبدیل مختصات) به‌دست آمده از این تابعک یک نگاشت همساز است و لذا از کلیهٔ ویژگی‌هایی که برای نگاشت‌های همساز مطرح می‌شود از جمله نظم و همواری برخوردار است. نگاشت‌های همساز علاوه بر فرمول‌بندی مختصر، سودمندی مهم دیگری هم دارند و آن این است که قضیه‌ای برای تضمین وجود و یکتایی آنها در حالی که یک به یک و حتی معکوس‌پذیرند، وجود دارد و این کارایی مولّدهای شبکه بر پایهٔ نگاشت‌های همساز را بیش از پیش مطمئن می‌سازد. به علاوه به‌دست گرفتن کنترل تراکم شبکه از طریق تعریف مناسب تانسور متریک برای دامنهٔ فیزیکی و این که می‌توان مطالب مذکور را به ابعاد بالاتر تعمیم داد، از مزیت‌های دیگر استفاده از این تابعک به‌عنوان تابعک تعدیل شبکه می‌باشد.

١.٦ نگاشت‌های همساز: تعریف و قضیهٔ وجودی

در این بخش نگاشت‌های همساز را معرفی و شرط کافی برای وجود و یکتایی آنها را بیان می‌کند. نگاشت‌های همساز توسط «فولر»[1] [۵] تعریف و نامگذاری شده‌اند. با این حال تا زمان کار اساسی «ایل»[2] و «سامپسون»[3][۴] این زمینه از ریاضیات مورد مطالعهٔ جدی قرار نگرفته بود.

1) Fuller 2) Eell 3) Sampson

فرض کنید M و N خمینه‌های ریمانی فشرده از بعد n به‌ترتیب با تانسورهای متری $g_{\alpha,\beta}$ و h_{ij} در مختصات موضعی $\overrightarrow{x}=(x^1,...,x^n)$ و $\overrightarrow{\xi}=(\xi^1,...,\xi^n)$ باشند. اگر $x:N\to M$ یک نگاشت C^1 باشد، چگالی انرژی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$e(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}h^{ij}(\xi)g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^j}$$

که $H=[h_{ij}]_{n\times n}$ و $H^{-1}=[h^{ij}]$.

انرژی کل متناظر با نگاشت x بصورت زیر خواهد بود (تابعک انرژی)؛

$$E[\overrightarrow{x}]=\int_N e(x)d\overrightarrow{\xi}$$

اگر $\overrightarrow{x}$ از کلاس C^2 ، $E[\overrightarrow{x}]<\infty$ و $\overrightarrow{x}$ یک نقطهٔ بحرانی E باشد، $\overrightarrow{x}$ همساز نامیده می‌شود.

معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ متناظر به صورت زیراست [۳]:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial\xi^k}\sqrt{h}\,h^{kj}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^j}+h^{kj}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M).\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^k}.\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^j}=0 \qquad \lambda=1,2 \qquad (1.6)$$

که $h=\det([h_{ij}])$ و $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M)$ ، نماد کریستوفل از نوع دوم است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M)=\frac{1}{2}\sum_\lambda g^{\alpha\lambda}[\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda}]$$

در زیر شرایط کافی برای وجود و یکتایی نگاشت‌های همساز صورت بندی می‌کنیم.
قضیهٔ زیر که به قضیهٔ HSY معروف است به‌وسیلهٔ «هامیلتون»[1] [۶] و «شون»[2] و «یائو»[3] [۹] بیان شده است.

قضیهٔ ۱.۶.(HSY) فرض کنید (M,ρ) و (N,γ) دو خمینهٔ ریمانی با مرزهای ∂M و ∂N و $\phi:M\to N$ یک دیفئومرفیسم باشد. برای هر نگاشت $f:M\to N$ که $f|_{\partial M}=\phi|_{\partial M}$ ، قرار می‌دهیم $E(f)=\int_X \|df\|^2dX$ (تابعک انرژی). در این صورت f همساز است اگر یک نقطه اکسترمال از E باشد.

قضیه ۲.۶. اگر انحناء (موضعی) N نامثبت و ∂N محدب باشد (نسبت به متر γ)، آنگاه یک نگاشت همساز یکتا $f:M\to N$ وجود دارد به طوری که f یک هموتوپی هم‌ارز با ϕ است. بدین معنی که، f را بتوان با بنا کردن یک خانواده پیوسته از نگاشت‌های $g_t:M\to N$ و $t\in[0,1]$ به ϕ تغییر شکل داد، به طوری که $g_0(x)=\phi(x)$ و $g_1(x)=f(x)$ و به ازای هر $x\in\partial M$ ، $g_r(x)=\phi(x)$. خاطر نشان می شود که قضیهٔ HSY برای دامنه‌های همبند n ـ بعدی نیز معتبر است.

1) Hamilton 2) Schoen 3) Yau

از این دو قضیه بر می‌آید که:
اولاً: f همساز است هر گاه یک اکسترمال از تابعک انرژی باشد. لذا نگاشتی که $E[f]$ را مینیمم سازد یک نگاشت همساز است و نگاشت همساز باید در معادلات اویلر ـ لاگرانژ متناظر با تابعک انرژی صدق کند.
ثانیاً: برای دو خمینهٔ ریمانی M و N، اگر انحناء موضعی N نامثبت و مرز N محدب باشد نگاشت همساز یکتایی از M به N وجود دارد.
ثالثاً: مینیمم‌سازی انرژی روی تمام نگاشت‌های f صورت می‌گیرد که با دیفئومرفیسم ϕ روی مرز یکی باشند.
رابعاً: نگاشت همساز یکتای f، با دیفئومرفیسم ϕ هم ارز هموتوپی است.
به بیانی ساده‌تر، برخی خواص ϕ قابل تعمیم به f هستند. از جمله در حالت $\dim M = \dim N = ۲$، خواص ناشی از دیفئومرفیسم بودن ϕ به f قابل تعمیم است و معکوس‌پذیری نگاشت همساز تضمین می‌شود[۹] (نگاشت یکتای f، که یک تناظر یک به یک بین Ω_C و Ω_P برقرار می‌کند را به‌عنوان نگاشت تبدیل مختصات در نظر می‌گیرند).

۲.۶ کاربرد قضیهٔ HSY

قضیهٔ HSY شرط کافی برای وجود و یکتایی نگاشت‌های همساز را بیان می‌کند. در این بحث، بهتر است تا خمینه‌های مطرح شده در قضیه با دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی را متحد قرار دهیم. فرض کنید $M = \Omega_P$ دامنه فیزیکی و $N = \Omega_C$ دامنهٔ محاسباتی باشد. بنابر قضیه ۱.۶ نگاشت همساز $\Omega_C \to \Omega_P$ موجود است اگر دو شرط زیر برآورده شوند (این نگاشت همساز را به‌عنوان نگاشت تبدیل مختصات در نظر می‌گیرند)؛
۱) انحناء Ω_P نامثبت باشد.
۲) $\partial\Omega_P$ محدب باشد.
شرط اول را می‌توان براحتی با تعریف یک تانسور متریک مناسب، مثلاً متریک اقلیدسی ($g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$: که $\delta_{\alpha\beta}$ تابع دلتای کرونکر است) روی Ω_P برآورد نمود چرا که انحنای فضای اقلیدسی با متر معمولی صفر است.
اگر علاوه بر آن مرز دامنهٔ فیزیکی ($\partial\Omega_P$) محدب نیز باشد نگاشت یکتای $\Omega_C \to \Omega_P$ همیشه موجود است و در حالتی که $\partial\Omega_P$ محدب نباشد، وجود و یکتایی نگاشت به هر حال قابل اطمینان نیست. با خطی کردن رابطهٔ (۱.۶) به‌عنوان معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه و گسسته‌سازی آن می‌توان نگاشت $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi})$ و در نتیجه شبکه را به دست آورد. از آنجایی که Ω_C یعنی دامنهٔ محاسباتی به‌دلخواه ساخته می‌شود، می‌توان آن را طوری ساخت که دو شرط قضیه برآورده شوند. لذا در عمل تابعک انرژی را برای نگاشت $\xi : \Omega_P \to \Omega_C$ مطرح کرده و معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ متناظر با آن را می‌نویسند و با توجه به برقراری دو شرط قضیه برای Ω_C وجود و

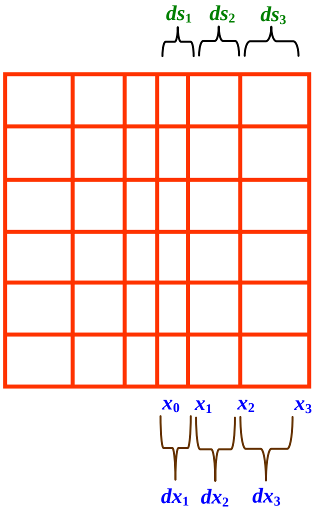
یکتایی نگاشت معکوس‌پذیر $\xi : \Omega_P \to \Omega_C$ تضمین می‌شود. سپس با تعویض نقش متغیرهای مستقل و وابسته در معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به‌دست می آید، که حل آن به معکوس $\overrightarrow{\xi} = \xi(\overrightarrow{x})$ یعنی $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi})$ منجر می‌شود. این معادله، معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه خواهد بود.

۷ فرمول بندی مترهای ریمانی

تاکنون تبدیل مختصات به‌دست آمده تعدیلی در شبکه ایجاد نکرده است و باید برای مورد استفاده قرار دادن ابزار نگاشت‌های همساز برای تولید شبکه‌های تعدیل‌پذیر باید مترهای ریمانی مناسب روی دامنه‌ها را تعریف نمود.
برای جا انداختن ایده، یک مثال ساده می آوریم. تلاش می‌کنیم تا یک شبکه در اطراف یک خط راست قائم در وسط دامنهٔ فیزیکی مربعی تولید کنیم.
دراینجا از یک نگاشت $\Omega_P \to \Omega_C$ استفاده خواهد شد. دامنهٔ محاسباتی برای این مسأله یک مستطیل است که با یک شبکه یکنواخت افراز و اندازهٔ آن به‌وسیلهٔ تعداد گره‌ها در هر کدام از جهت‌های ξ و η مشخص می‌شود. ابتدا می‌خواهیم مطمئن شویم که انحنای دامنهٔ محاسباتی، نامثبت است. با تعریف متر δ_{ij} برای آن، این امر به آسانی محقق خواهد شد. (زیرا انحناء در این صورت صفر خواهد بود).
قضیهٔ HSY هیچ محدودیتی را روی متریک فضای فیزیکی g_{ij} قرار نمی‌دهد. از این رو g_{ij} می‌تواند برای تعدیل شبکه به‌کار رود. به‌طور واضحتر، g_{ij} را می‌توان طوری بنا کرد که شبکه در محل یک خط راست قائم در وسط دامنهٔ فیزیکی مربعی متراکم شود در حالیکه با دور شدن از این خط قائم شبکه به حالت طبیعی (با خانه‌های مساوی) نزدیک شود[۹]. برای مثال مورد نظر، این متریک به‌وسیلهٔ

$$\begin{aligned} g_{۱۱} &= ۱ + f(x - x_{\circ}) \\ g_{۲۲} &= ۱ \quad g_{۱۲} = g_{۲۱} = \circ \qquad (۱.۷) \end{aligned}$$

داده می‌شود که در آن $x = x_{\circ}$ خطی است که شبکه در روی آن متراکم می‌شود و $f(x - x_{\circ})$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که



شکل ۳. تراکم شبکه در $x = x_\circ$ با استفاده از متر تعریف شده در (۱.۷)

موقعی که $x = x_\circ$ یک ماکزیمم داشته باشد و $f(x - x_\circ) \to \circ$ وقتی $(x - x_\circ) \to \infty$.
به‌عنوان مثال، f را می‌توان به‌صورت $f(x - x_\circ) = Ae^{-B(x-x_\circ)^2}$ در نظر گرفت که A و B اعدادی ثابت و مثبت هستند که مقدار و نرخ زوال $f(\circ)$ را کنترل می‌کنند.
شکل ۳ شبکهٔ به‌دست آمده از (۱.۷) را نشان می‌دهد. خانه‌های شبکهٔ شکل ۳ نسبت به متر اقلیدسی در اطراف خط $x = x_\circ$ جمع شده‌اند و حال آن که، نسبت به متریک g_{ij} با هم برابرند، بر اساس تعریف طول قوس در خمینه‌ها داریم؛

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + g_{22}(dy)^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx$$

پس با توجه به متریک g_{ij}

$$ds_1 = ds_2 = ds_3$$
$$\Rightarrow \quad g_{11}(x_1)(dx_1)^2 = g_{11}(x_2)(dx_2)^2 = g_{11}(x_3)(dx_3)^2$$

همانطور که دیده می‌شود $dx_1 < dx_2 < dx_3$ ، لذا $g_{11}(x_1) > g_{11}(x_2) > g_{11}(x_3)$. پس هر چه به خط $x = x_\circ$ نزدیک می‌شویم باید $g_{11}(x)$ افزایش یابد.
بدین ترتیب یک شبکه در دامنهٔ فیزیکی داریم که در اطراف $x = x_\circ$ جمع شده است ولی نسبت به متریک g_{ij} ، دارای خانه‌های با مساحت های برابر است و یک شبکهٔ محاسباتی خواهیم داشت که نسبت به متریک اقلیدسی دارای خانه‌های برابر است. این نتایج را می‌توان به یک منحنی دلخواه، نقطه یا هر ترکیبی از آنها گسترش داد. یعنی می‌توان شبکه را روی هر منحنی دلخواه، نقطه و یا ترکیبی از آنها متمرکز نمود. برای انجام این کار داوینسکی متریک g_{ij} فوق را تعریف نمود [۳].

فرض کنید محل‌های جذب (مکان‌هایی که شبکه به آن مکان‌ها گرایش دارد و در آنجا متراکم می‌شود)، به‌وسیلهٔ تابع $F(\overrightarrow{x}) = ۰$ که $\overrightarrow{x} = (x, y)$ داده شود. به عنوان مثال، فرض کنید محل‌های جذب به منحنی‌های مجزای $F_i(x) = ۰$ ، $i = ۱, ..., n$ مقید شوند، در این صورت $F(x) = F_۱(x) ... F_n(x)$. داوینسکی قرار داد:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f(F)\, \frac{F_{x^i} \;.\; F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲} \qquad (۲.۷)$$

که $f(F)$ یک تابع فاصله است. (متناسب با کوتاه‌ترین فاصله یک نقطهٔ داده شده تا منحنی $F(x) = ۰$ است.) به طوری که $f(F)$ افزایش می‌یابد وقتی که فاصله به صفر میل کند و $f(F)$ به صفر می‌رود وقتی که فاصله افزایش یابد.

قسمت نااقلیدسی $f(F)\, \frac{F_{x^i} \;.\; F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲}$ ، شامل یک عامل ضربی $f(F)$ ، که اندازهٔ متریک (g_{ij} ها) را کنترل می‌کند و یک عامل جهتی $\frac{F_{x^i} \;.\; F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲}$ که مقداری از $f(F)$ که باید با توجه به جهت حرکت از یک نقطه شبکه به نقطهٔ دیگر به δ_{ij} اضافه شود را اصلاح می‌کند.

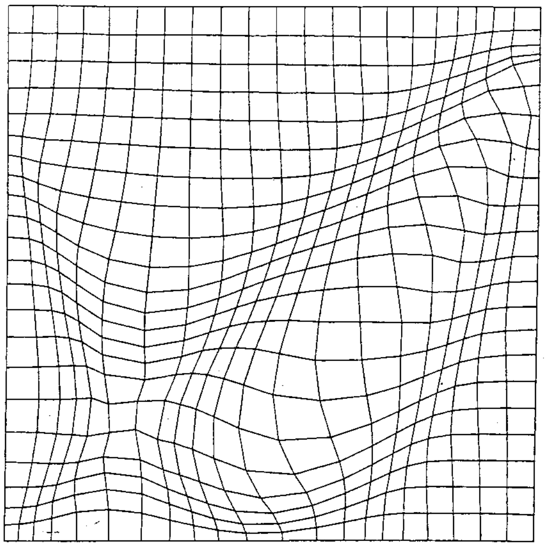
معادلهٔ (۲.۷) به محاسباتی پرهزینه برای محاسبهٔ کوتاه‌ترین فاصلهٔ هر گرهٔ شبکه، $x_۰$ ، از منحنی $F(x) = ۰$ نیاز دارد. هر گاه $F(x_۰)$ را فاصلهٔ $x_۰$ تا $F(x)$ در نظر بگیریم این محاسبات را به راحتی می‌توان حذف نمود. در مثالی که قبلاً بیان شد $F(x_۰)$ ، دقیقاً کوتاه‌ترین فاصله بین $x_۰$ و $F(x)$ بود. شکل ۳ مثالی از جذب شبکه به سهمی $y = ۳(x - ۰/۵)^۲$ و خط راست $y = x$ را نشان می‌دهد. از این رو $F = (y - ۳(x - ۰/۵)^۲)(y - x)$. دراین شکل شبکه از معادلات

$$\nabla.(\sqrt{g}G^{-۱}\nabla\xi) = ۰ \qquad [g_{ij}] = G$$
$$\nabla.(\sqrt{g}G^{-۱}\nabla\eta) = ۰ \qquad g = \det G$$

که در آن g_{ij} ها از (۲.۷) به‌دست آمده‌اند، محاسبه شده است.

بدین‌ترتیب ماتریس $G = \begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} \end{pmatrix}$ کنترل تراکم شبکه را بر عهده دارد و لذا می‌تواند به عنوان تابع نشانگر در نظر گرفته شود و چون G یک تانسور متریک و لذا معین مثبت و متقارن است [۱]، بنابراین تابع نشانگر در دو بعد به عنوان یک ماتریس ۲×۲ ، معین مثبت و متقارن تعریف خواهد شد.

ظاهراً داوینسکی اولین کسی بود که اهمیت علمی این حقیقت را کشف کرده که هیچ محدودیتی روی تانسورمتری $G = [g_{ij}]$ ضروری نیست تا معکوس پذیری نگاشت همساز را تضمین کند و این که چنین نگاشتی که از معادلات اویلر ـ لاگرانژ تعریف شده، می‌تواند به طور ویژه برای تعدیل شبکه استفاده شود و این تانسورهای متری می‌توانند به گونه‌ای انتخاب شوند که نقاط شبکه در ناحیه‌ای که جواب فیزیکی تغییرات سریع دارد، متراکم شوند و مهم‌تر این که یک شبکه که این چنین به‌دست آمده، از خواص مطلوب نگاشت همساز مخصوصاً نظم (قاعده) یا همواری برخوردار می‌شود.



شکل ۴. تراکم شبکه در یک سهمی $y = ۳(x - ۰/۵)^۲$ و
یک خط راست $y = x$ با استفاده از متریک تعریف شده در (۲.۷)

۸ تعریف تابعک تعدیل شبکه در یک فرم عمومی

«هانگ» و «راسل» با الهام گرفتن از تابعک تعدیل شبکه بر پایهٔ نگاشت‌های همساز، تابعک تعدیل شبکه خود را در یک فرم کلی به صورت زیر تعریف کردند[۸]:

$$I[\xi,\eta] = \frac{۱}{۲}\int_{\Omega_P} [\nabla\xi^T G_۱^{-۱}\nabla\xi + \nabla\eta^T G_۲^{-۱}\nabla\eta]\, dxdy \qquad (۱.۸)$$

که $G_۱$ و $G_۲$ ماتریس های معین مثبت متقارن یا همان توابع نشانگر هستند و
$\overrightarrow{\xi} = (\xi,\eta)$ ، $\overrightarrow{x} = (x,y)$ ، $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$
و $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$ تبدیل مختصات از دامنهٔ فیزیکی به دامنهٔ محاسباتی می‌باشد. با قرار دادن ماتریس‌های معین مثبت متقارن گوناگون به‌جای $G_۱$ و $G_۲$ در تابعک (۱.۸)، می‌توان تابعک‌های تعدیل شبکه مختلفی تعریف نمود. اما برای حصول نتایج قابل قبول، لازم است که تعریف $G_۱$ و $G_۲$ هدفمند و دارای پشتوانه‌های نظری و تجربی باشد. اکثر تابعک‌های تعدیل شبکه‌ای که تا به حال تعریف شده‌اند در این فرم کلی قابل طرح هستند. نگاشت $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$

که مینیمم ساز تابعک فوق است باید در معادلات اویلر ــ لاگرانژ مربوطه صدق کند. معادلات اویلر ــ لاگرانژ برای تابعک $I[\xi,\eta]$ عبارتند از:

$$\nabla.(G_1^{-1}\nabla\xi) = 0$$
$$\nabla.(G_2^{-1}\nabla\eta) = 0.$$

این معادلات، تبدیل مختصاتی را که برای تولید و تعدیل شبکه به‌کار می‌رود، معین می‌کنند.

۹ معادلهٔ حرکت شبکه

روش‌های وردشی بالا فقط برای تولید یک شبکهٔ تعدیل پذیر مستقل از زمان، متناسب با تابع نشانگرمربوطه بیان شده‌اند. اگر بخواهیم یک مسألهٔ وابسته به زمان را حل کنیم، برای هر گام زمانی به یک شبکهٔ تعدیل شده، احتیاج است. اولین راه برای حل این مشکل، این است که در هر گام زمانی، یک تابع نشانگر تعریف و با استفاده از روند بالا، شبکه تعدیل‌پذیر متناظر، تولید شود. این روش، عموماً یک روش مؤثر نخواهد بود. برای افزایش کارایی و به‌دست آوردن حرکت شبکهٔ هموار، هانگ و راسل، معادلهٔ شار گرادیان را برای تولید معادلهٔ دیفرانسیل جزئی حرکت شبکه به‌کار گرفتند که بدین ترتیب تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta I}{\delta\xi} \qquad , \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta I}{\delta\eta} \qquad (۱.۹)$$

و

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\,\nabla.(G_1^{-1}\nabla\xi) \qquad , \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\nabla.(G_2^{-1}\nabla\eta) \qquad (۲.۹)$$

که در آن τ یک عامل همواری زمانی است. حد معادلات سهموی فوق، وقتی $\tau \to 0$ ، معادلات اویلر ــ لاگرانژ برای مینیمم‌سازی تابعک تعدیل شبکه (۱.۸) است. با تغییر τ می‌توان یک تعادل بین تعدیل شبکه و همواری زمانی ایجاد کرد.
با افزایش τ حرکت شبکهٔ هموارتر و با کاهش τ ، تعدیل شبکهٔ دقیق‌تر می‌شود.
در محاسبات عملی، نقش متغیرهای وابسته و مستقل را عوض می‌کنند. بدین ترتیب معادلهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{x}}{\partial t} = &- \frac{\overrightarrow{x}_\xi}{\tau J}\{+\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{1}{Jg_1}(\overrightarrow{x}_\eta^T G_1\overrightarrow{x}_\eta)] - \frac{\partial}{\partial\eta}[\frac{1}{Jg_1}(\overrightarrow{x}_\xi^T G_1\overrightarrow{x}_\eta)]\}\\ &- \frac{\overrightarrow{x}_\eta}{\tau J}\{-\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{1}{Jg_2}(\overrightarrow{x}_\eta^T G_2\overrightarrow{x}_\xi)] + \frac{\partial}{\partial\eta}[\frac{1}{Jg_2}(\overrightarrow{x}_\xi^T G_2\overrightarrow{x}_\xi)]\} \quad (۳.۹)\end{aligned}$$

این معادله همان $MMPDE$ است که به همراه شرایط مرزی مناسب (معمولاً دیریکله) شبکه

تعدیل‌پذیر را در هر گام زمانی تولید می کند.

۱۰ نتایج عددی

در این بخش برخی از مباحث مطرح شده در بخش‌های قبلی را با استفاده از مثال‌های عددی، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور از MMPDE ی (۳.۹) وقتی $G_1 = G_2 = G$ استفاده می‌کنیم. بنابراین MMPDE

$$\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial t} = - \frac{\overrightarrow{x}_\xi}{\tau J}\{+\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\eta^T G \overrightarrow{x}_\eta)] - \frac{\partial}{\partial \eta}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\xi^T G \overrightarrow{x}_\eta)]\}$$
$$- \frac{\overrightarrow{x}_\eta}{\tau J}\{-\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\eta^T G \overrightarrow{x}_\xi)] + \frac{\partial}{\partial \eta}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\xi^T G \overrightarrow{x}_\xi)]\} \qquad (1.10)$$

را خواهیم داشت. اگر فقط به‌دست آوردن شبکهٔ تعدیل شدهٔ شبکه $N \times N$ مورد نظر باشد، از آنجایی که نقاط روی مرز مشخص هستند لذا $2 \times (N-2)^2$ مجهول خواهیم داشت. با گسسته‌سازی MMPDE ی (۱.۱۰) و پیاده‌سازی آن روی نقاط میانی شبکه، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی که شامل $2 \times (N-2)^2$ معادله و $2 \times (N-2)^2$ مجهول است، حاصل می‌شود که حل آن نقاط شبکه را در یک زمان دلخواه به‌دست می‌دهد.
اگر علاوه بر به‌دست آوردن نقاط شبکه در زمان دلخواه t، حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی نیز در آن زمان خواسته شود، معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی را گسسته‌سازی کرده و روی نقاط میانی شبکه پیاده‌سازی می‌کنیم. لذا در هر نقطهٔ شبکه سه مجهول x ، y و $u(x,y)$ را خواهیم داشت. با در نظر گرفتن توأمان معادلات به‌دست آمده از گسسته‌سازی MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با $3 \times (N-2)^2$ معادله و $3 \times (N-2)^2$ مجهول خواهیم داشت. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از حل کنندهٔ معادلهٔ دیفرانسیل معمولیِ «ode15s» در نرم‌افزار MATLAB استفاده می‌کنیم. نواحی فیزیکی و محاسباتی را نیز بدین طریق انتخاب می‌کنیم.

$$(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \qquad\qquad (\xi,\eta) \in [0,1] \times [0,1]$$

مثال ۱.۱۰. در این مثال $u(x,y)$ داده شده است. هدف اصلی پاسخ به این سؤال است که آیا MMPDE مطرح شده در رابطهٔ (۱.۱۰) می‌تواند شبکه را در محل‌هایی که $u(x,y)$ دارای تغییرات سریع است متمرکز کند یا نه؟ برای این کار شبکه ۱۶ × ۱۶ را در نظر گرفته و MMPDE را در بازهٔ زمانی [۵ و ۰] و با استفاده از ode15s در نرم‌افزار MATLAB حل می‌کنیم.
فرض کنید

$$u(x,y) = 1 + c.e^{-c^2((x-0/5)^2+(y-0/5)^2)} \quad , \quad c = 10$$

$u(x,y)$ در شکل (۵) رسم شده است.
تابع نشانگر را به دو روش ذیل انتخاب می‌کنیم.

الف :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{v}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = u(x,y) \quad , \quad c = 10$$

و λ_2 به چهار طریق نشان داده شده در شکل (٦) انتخاب می‌شود.

ب :

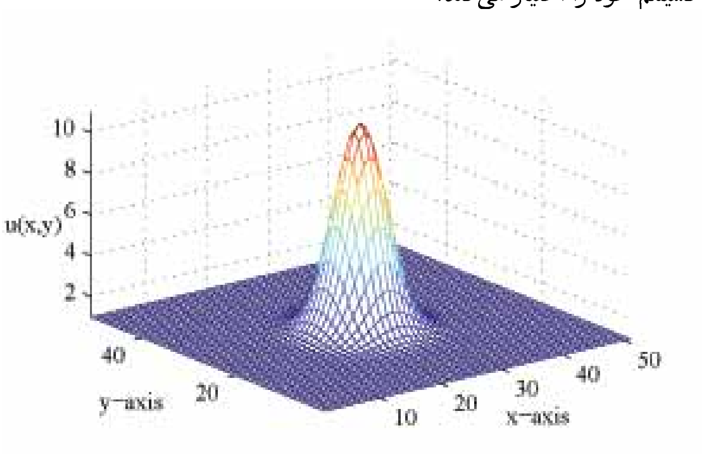
$$(a) \quad G = (\sqrt{1+|\nabla U|^2})I,$$

$$(b) \quad G = (\sqrt{1+U^2})I,$$

$$(c) \quad G = (\sqrt{1+|\nabla U|^2+U^2})I,$$

$(d) \quad G =$ تابع شبه طول کمان

نتایج به‌دست آمده برای روش الف در شکل (٦) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، شبکهٔ (a) که در آن $\lambda_2 = \lambda_1$ است، تراکم بهتری در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) دارد که تابع u در آن ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.



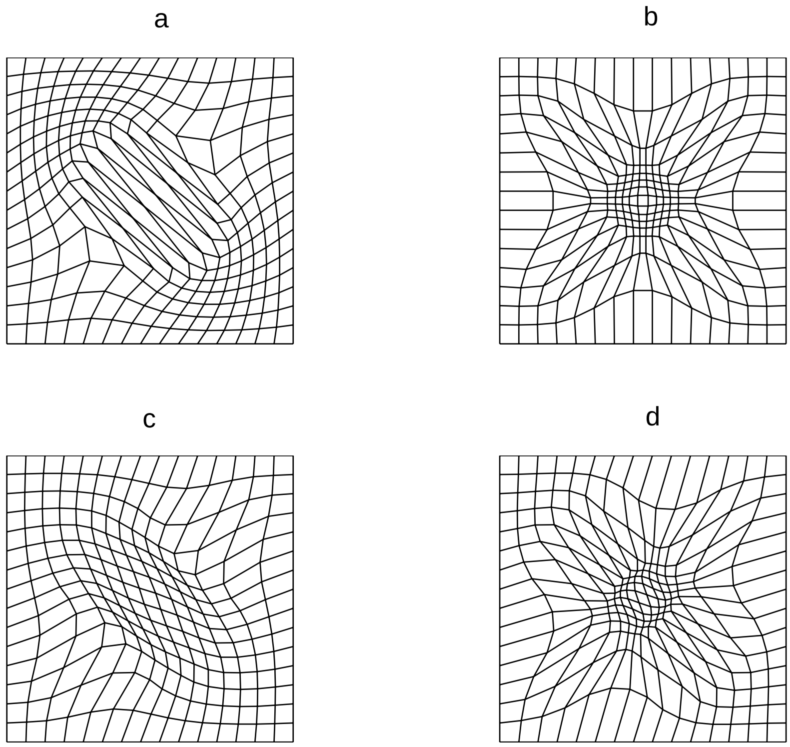
شکل ۵. رسم سه بعدی تابع $u(x,y)$ در مثال ۱.۱۰

نتایج به‌دست آمده برای روش ب، در شکل (۷) نشان داده شده است. همان طور که مشخص است به جز حالت (d) بقیهٔ حالات تراکم نسبتاً خوبی را در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) دارند. جالب این است که حالت‌های (a) و (c) مشابه هم هستند. از این امر می‌توان حدس زد که ترکیب تابع نشانگر (a) با (b) به صورتی که (c) را پدید آورد، چندان تأثیری در افزایش تراکم در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) ندارد.

مثال ۲.۱۰.(معادلهٔ برگر) در این مثال، روش حرکت شبکه در حل عددی مسائل مقدار مرزی و مقدار اولیه را برای معادلهٔ برگر دو بعدی زیر به‌کار می گیریم.

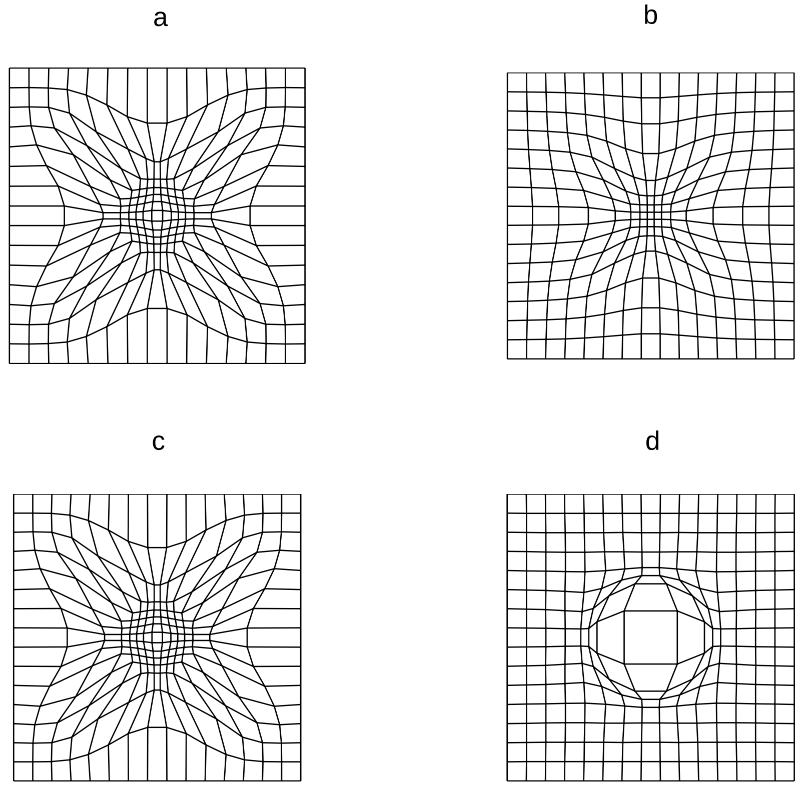
$$u_t = R\Delta u - uu_x - uu_y \quad , \quad (x,y) \in (۰,۱)\times(۰,۱) \quad , \quad R = ۰/۰۰۱$$

شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که جواب دقیق مسأله، $u(x,y,t) = (۱ + e^{\frac{x+y-t}{۲R}})^{-۱}$ باشد. در اینجا MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی (معادلهٔ برگر) گسسته سازی‌شده معادلات حاصل از MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی، همزمان در یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی قرار می‌گیرند. اگر یک شبکهٔ $N\times N$ داشته باشیم، از آنجایی که نقاط روی مرز مشخص هستند، تعداد نقاط داخلی شبکه، $(N-۲)^۲$ نقطه خواهد بود.



شکل ٦. شبکهٔ به‌دست آمده برای مثال ۱.۱۰ الف با انتخاب‌های متفاوت از $\lambda_۲$ و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$. $\lambda_۲ = \frac{۱}{\lambda_۱}$ (a) ، $\lambda_۲ = \lambda_۱$ (b) ، $\lambda_۲ = ۱$ (c) و (d) $\lambda_۲ = ۲\lambda_۱$.

در هر نقطه سه مجهول $u(x,y), y, x$ باید محاسبه شود. لذا دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی ما $۳ \times (N-۲)^۲$ مجهول و همین تعداد معادله خواهد داشت. دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مزبور را با استفاده از حل کنندهٔ دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی «ode15s» در نرم‌افزار MATLAB، که برای سیستم‌های سخت طراحی شده است حل کرده و از مقادیر $RTOL = ۱ \times ۱۰^{-۱۲}$ و $ATOL = ۱ \times ۱۰^{-۱۲}$ و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $R = ۰/۰۰۱$ استفاده می‌کنیم. نتایج عددی در شکل (۸) نمایش داده شده است.

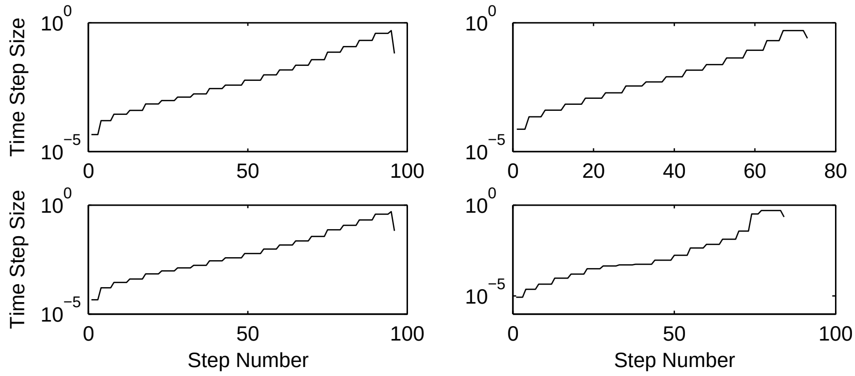


شکل ۷. شبکهٔ به‌دست آمده برای مثال ۲.۱۰ (ب) با $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$ و

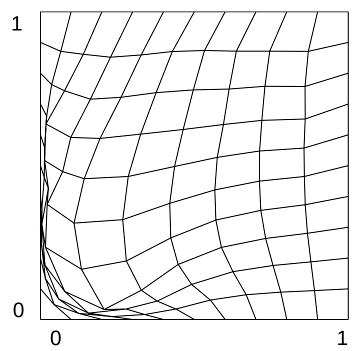
$(a)\ G = (\sqrt{۱ + |\nabla U|^۲})I$ $\quad (b)\ G = (\sqrt{۱ + U^۲})I$

$(c)\ G = (\sqrt{۱ + |\nabla U|^۲ + U^۲})I$ $\quad (d)\ G =$ تابع شبه طول کمان

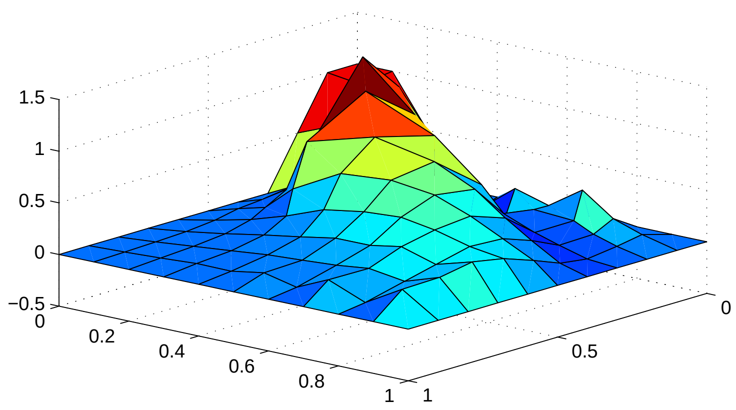
در چهار نمودار پایین نیز، چگونگی انتخاب گام‌های زمانی توسط ode15s در تولید چهار شبکهٔ بالایی به‌طور مجزا نشان داده شده است.



شکل ۸. چگونگی انتخاب گام زمانی در تولید شبکه برای مثال ۲.۱۰ (ب) به ازای $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$



شکل ۹. شبکه ۱۱×۱۱ تولید شبکه برای حل معادلهٔ برگر(مثال ۲.۱۰) در زمان $t = ۰/۲$ به ازای $R = ۰/۰۰۱$



شکل ۱۰. حل معادلهٔ برگر(مثال ۲.۱۰) در زمان $t = ۰/۲$ به ازای $R = ۰/۰۰۱$
و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$
$cputime = ۳/۹۳۳۶ \times ۱۰^{۳} s$

منابع

[1] W.M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd ed., Academic press, Inc., Orlando 1986.

[2] J.U. Brackbill and J.S. Saltzman, Adaptive zoning for singular problem in two dimensions, J. Comput. Phys. 46 (1982) 342-368.

[3] A.S Davinsky, Adaptive grid generation from harmonic maps on Riemannian manifolds, J. Comput. Phys. 95 (1991) 450-476.

[4] J. Eell and H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86, No.1, 109-160 (1964).

[5] F.B. Fuller, Harmonic Mappings, Proc. Natl. Acad. Sci.USA 40, 987-991 (1954).

[6] R. Hamilton, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 471, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1975.

[7] W. Huang, Y. Ren and R.D. Russel, Moving mesh based on moving mesh Partial differential equation, J. Compute. Phys. 113 (1994), pp. 279-290.

[8] W. Huang and R.D. Russel, Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems, SIAM J. Sci. Comput. 20 (1999) 998-1015.

[9] R. Schoen and S.T Yau, On univalent harmonic maps between surface, Invent. Math. 44, 265-278 (1978).

[10] A. Winslow, Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, J. Comput. Phys. 1 149-172 (1967).

علیرضا سهیلی و محمد هادی مصلحی
گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان
soheili@math.usb.ac.ir
moslehi@mhm.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸٦) صص. ۲۳ تا ۳۲

بیان‌هایی از استقراء

محمد مشکوری

چکیده
خوش‌ترتیب بودن[1] ω مجموعهٔ اعداد طبیعی، اجراء استقراء را روی آن امکان‌پذیر می‌کند، در این نوشته تلاش شده است با بیان‌های مختلف استقراء و وابستگی آن به ترتیب[2] روی این مجموعه و کاربردهای جالب استقراء روی مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، آشنا شویم.

مقدمه

بشر ریاضیات را با شمارش و اندازه‌گیری (طول، مساحت و ...) آغاز کرد. این دو ابزار محاسباتی باتوجه به مشخصهٔ آن‌ها، شمارش[3] روی متغیرهای گسسته[4] یا به عبارتی در محیطی گسسته قابل اجراست و اندازه‌گیری[5] روی متغیرهای پیوسته[6] یا به عبارتی در محیطی پیوسته مفهوم پیدا می‌کند.

با نگاهی به دستاوردهای بشر در علوم ریاضی که قدمت آن به اندازهٔ حیات اوست، می‌بینیم که این دستاوردها یا در محیطی گسسته یا در محیطی پیوسته بیان شده‌اند و در خیلی از موارد شاهد هستیم که پدیده‌هایی که در یک محیط گسسسته بررسی شده‌اند به محیط‌های پیوسته تعمیم داده شده‌اند و یا برعکس. با اشاره به موردی که اخیراً [۳] مورد توجه منطق‌دانان و متخصصین علوم کامپیوتر و ریاضی واقع شده، به بحث اصلی این نوشته که مرتبط با این موضوع است می‌پردازیم.

نظریهٔ محاسبه‌پذیری[7] و نظریهٔ پیچیدگی[8] دو شاخهٔ اصلی در منطق و علوم کامپیوتراند. نظریهٔ محاسبه‌پذیری، محدودیت و قابلیت‌های کامپیوتر را در انجام محاسبه بررسی، و نظریهٔ پیچیدگی چهارچوبی برای هزینه‌های محاسبه اعم از زمان و فضا را تعیین می‌کند.

الگوریتم عملیاتی این دو مقوله در محیط‌های گسسته (روی متغیرهای گسسته) نظیر مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و ... قابل پیاده شدن است و توانایی اجرائی در محیط‌های پیوسته (روی

1) Well-Order 2) Order 3) Counting 4) Discrete Variables 5) Measuring
6) Continous Variables 7) Computablity 8) Complexity

متغیرهای پیوسته) نظیر مجموعه اعداد حقیقی را ندارد. در صورتی که بسیاری از مسائل محاسباتی در علوم پایه، مهندسی و $\cdots$ در محیط‌های پیوسته مطرح می‌شوند. هدف اصلی محافل علمی مربوطه انتقال رهیافت سنتی محاسبه‌پذیری و پیچیدگی از محیط‌های گسسته به الگوریتمی عملیاتی روی محیط‌های پیوسته می‌باشد.[۳]

با توجه به این که مکانیزم محاسبه در علوم کامپیوتر متکی بر استقراء[۱] و تابع بازگشتی[۲] است، اولین قدم، انتقال استقراء و تابع بازگشتی به محیطی پیوسته نظیر $\mathbb{R}$ خواهد بود. هدف از این نوشته، بررسی مفهوم استقراء در محیط‌های مختلف، به خصوص در محیط پیوسته $\mathbb{R}$ و کاربرد آن می‌باشد [۴] و [۵].

می‌دانیم که استقراء روشی منطقی برای اثبات یک قانون از جزء به کل است. مکانیزم آن به این صورت است که ابتدا آن را برای مورد آغازی a اثبات می‌کنند و هرگاه بتوان ثابت کرد با فرض برقرار بودن این قانون برای تمام موارد ماقبل x، برای x نیز درست است، می‌توان نتیجه گرفت قانون مذکور برای تمام موارد از a به بعد درست است. مکانیزم اجرائی استقراء و کاربرد آن را، بسته به مجموعه و ساختار ترتیبی[۳] آن (محیط محاسباتی)، می‌توان به صورت‌های مختلف بیان کرد. در اینجا با موارد و کاربردهایی از آنها آشنا می‌شویم.

استقراء روی یک مجموعهٔ جزئاً مرتب[۴]:

فرض کنید رابطهٔ $\leq_R$ روی مجموعهٔ ناتهی X یک رابطهٔ ترتیب جزئی بوده، به طوری که هر زیرمجموعهٔ ناتهی D از X عضو کمین[۵] داشته باشد، یعنی

$$\exists a \in D, \ni \forall x \in D, \ \ x \leq a \to x = a.$$

در این صورت اگر $p(x)$ یک خاصیت ادعائی برای عناصر مجموعه X فرض شود و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X: \ \ p(x)\} \subseteq X$

الف: شامل تمام عناصر کمین X باشد و

ب: $\forall t \in X, \ \ I_t = \{x \in X: \ \ x < t\} \subseteq S \longrightarrow t \in S$

1) Induction

2) Recursion function $\forall X \neq \emptyset, \ \ni a \in X, \ f: X \longrightarrow X$ یک تابع باشد $\longrightarrow \exists C: w \longrightarrow X, \ni$ $C(\circ) = a, \ \forall n \in w, \ C(n^+) = C(n+۱) = f(c(n))$

3) Ordered Structure

4) $(\leq_R) R: X \to X$

رابطهٔ R را یک رابطهٔ ترتیب جزئی روی $X \neq \emptyset$ گویند، هرگاه دارای خواص زیر باشد،

$\forall x \in X, \ \ (x,x) \in R$(انعکاسی)$, \forall x,y \in X, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \longrightarrow x = y$(پادمتقارن)

$\forall x,y,z \in X, \ \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \longrightarrow (x,z) \in R$ ترایایی

5) minimal

آنگاه $X = S$، یعنی خاصیت $p(x)$ برای تمام عناصر X درست است.
گیریم $X - S \neq \emptyset$ پس بنا به فرض $X - S$ یک عنصر کمین $c \in X - S$ دارد، چون $c \notin S$ پس بنا بر (الف)، c نمی‌تواند عنصر کمین X باشد، بنابراین $\exists z \in X \quad \ni z < c.$
حال مجموعهٔ $I_c = \{x \in X : \quad x < c\} \subseteq X$ را در نظر بگیرید، $I_c \neq \emptyset$ زیرا $z \in I_c$. ادعا می‌کنیم $I_c \subseteq S$، گیریم $t \in I_c$ و $t \notin S$، پس $t \in X - S$، از طرفی $t \in I_c$، یعنی $t < c$ و این متناقض با عنصر کمین بودن c در $X - S$ است، پس

$$I_c = \{x \in X : \quad x < c\} \subseteq S$$

و بنابر (ب)، نتیجه می‌شود $c \in S$ که متناقض با فرض $c \in X - S$ است، بنابراین $X - S = \emptyset$، یعنی $X = S$.

یکی از کاربردهای جالب توجه اصل استقراء روی مجموعهٔ جزئاً مرتب که هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن عنصر کمین دارد، در نظریهٔ مقدماتی اعداد و در اثبات قضیهٔ اساسی حساب رخ می‌دهد. برای بیان و اثبات قضیه رابطه | روی $\mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \ a|b \longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \quad \ni b = ka$$

به سادگی می‌توان نشان داد | یک رابطه ترتیب جزئی روی $\mathbb{N}$ است. بدیهی است هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{N}$ تحت این ترتیب جزئی، عنصر کمین دارد. گیریم $p(x)$ خاصیت تجزیه‌پذیری $x \in \mathbb{N}$ به حاصلضربی از اعداد اول باشد، یعنی

$$S = \{x \in X : \ p(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : \ x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}, \ \ p_j \ \text{عدد اول} \ , \ r_j \in \mathbb{N} \quad j = 1, \cdots, k\}.$$

بدیهی است مجموعه اعداد اول، مجموعه تمام عناصر کمین $(\mathbb{N}, |)$ است و S شامل تمام اعداد اول می‌باشد. پس S شرط (الف) را دارد، حال گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $I_n = \{x \in \mathbb{N} : \ \ x|n, x \neq n\} \subseteq S$ *
اگر n اول باشد در این صورت $n \in S$ و حکم برقرار است، پس گیریم n اول نیست، بنابراین

$$\exists m, l \in \mathbb{N}, \ \ \ni \ n = ml$$

در نتیجه $m, l \in I_n$، بنابراین

$$m = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}, \qquad n = q_1^{r_1} \cdots q_l^{r_l}$$

به طوری که $p_i, \ i = 1, \cdots, k$ و $q_j, \ j = 1, \cdots, l$ اعداد اول‌اند و $r_i \in \mathbb{N}$ و $t_j \in \mathbb{N}$. در نتیجه، $n = ml = (p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k})(q_1^{r_1} \cdots q_l^{r_l}) \in S$. بنابراین $S = \mathbb{N}$. یعنی هر عدد طبیعی به حاصلضرب عامل‌های اول در $\mathbb{N}$ تجزیه می‌شود.

---

* توجه: $R = |$ رابطهٔ ترتیب جزئی روی $\mathbb{N}$ است و $x|n \equiv xRn \equiv (x, y) \in R \equiv x \leq_R n$

استقراء روی یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب[1]

گیریم $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب و $p(x)$ یک خاصیت ادعائی روی X، و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X: \quad p(x)\} \subseteq X$ دارای خواص زیر باشد.

الف: $a \in S$ (a کوچک‌ترین عنصر X)

ب: $\forall t \in X, \quad I_t = \{x \in X: \quad x < t\} \subseteq S \longrightarrow t \in S$

در این صورت $X = S$، یعنی تمام عناصر X دارای خاصیت $p(x)$ هستند.

خواننده با مکانیزم استقراء روی چنین محیطی کاملاً آشناست. از موارد مهم آن همان استقراء قوی[2] روی مجموعه خوش‌ترتیب اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با رابطه ترتیب جزئی کوچکتر یا مساوی معمولی است. $1 \in \mathbb{N}$ کوچک‌ترین عنصر $\mathbb{N}$ و اگر $p(n)$ یک خاصیت برای عناصر $\mathbb{N}$ و $S = \{n \in \mathbb{N}: \quad p(n)\}$ به طوری که

الف: $1 \in S$

ب: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{x \in \mathbb{N}: \quad x < n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S$

آنگاه $S = \mathbb{N}$.

استقراء روی یک مجموعهٔ کلاً مرتب[3]

گیریم $(X, \leq)$ یک مجموعه کلاً مرتب باشد، به طوری که هر زیرمجموعهٔ غیرتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم[4] است، اگر $p(x)$ یک خاصیت ادعائی روی عناصر X و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X: \quad p(x)\} \subseteq X$ دارای شرایط زیر باشد،

الف: $\exists a \in X, \ni \ I_a = \{x \in X: \quad x < a\} \subseteq S$

ب: $\forall y \in X, \quad I_y = \{x \in X: \quad x < y\} \subseteq S \longrightarrow \exists z \in X, \ni \ y < z,$
$I_z = \{t \in X : t < z\} \subseteq S.$

آنگاه $X = S$، یعنی تمام عناصر X دارای خاصیت $p(x)$ هستند.

گیریم $X \neq S$، پس $S' = X - S \neq \emptyset$ و برای هر x در S'، $a \leq x$ زیرا $I_a \subseteq S$، پس S' یک زیرمجموعه غیرتهی و از پایین کراندار X است. بنابراین دارای بزرگترین کران پایین در X است،

---

۱) Well-ordered، مجموعهٔ جزئاً مرتب $(X, \leq)$ را یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب گویند، هرگاه هر زیرمجموعهٔ غیرتهی آن نظیر، $\emptyset \neq A \subseteq X$ دارای کوچکترین عنصر باشد یعنی $\exists a \in A, \ni \forall x \in A, \ a \leq x$

2) Transfinite Induction

۳) Totally ordered مجموعه جزئاً مرتب $(X, \leq)$ را یک مجموعه کلاً مرتب گویند، هرگاه هر دو عنصر مختلف آن مقایسه‌پذیر باشند، یعنی، $\forall x, y \in X, \ x \neq y \longrightarrow x < y \ or \ y < x$

۴) $\alpha \in X$ را بزرگ‌ترین کران پایین A در X گویند، هرگاه α یک کران پایین A در X بوده و از هر کران پایین A در X بزرگتر یا مساوی باشد.

گیریم $c = infS'$، دو حالت وجود دارد $c \in S'$ یا $c \notin S'$. اگر $c \in S'$، آنگاه

$$\forall x \in S', c \leq x$$

پس برای هر $t \in X$ به طوری که $t < c$ بایستی $t \in S$، بنابراین $I_c = \{x \in X : x < c\} \subseteq S$ و طبق (ب) داریم $\exists z \in X, \ni \ c < z, \ \ I_z = \{t \in X : \ \ t < z\} \subseteq S$ و این نتیجه می‌دهد $c \in S$ که متناقض با فرض $c \in S'$ است. گیریم $c \notin S' = X - S$ پس $c \in S$ و برای هر x در X، اگر $x < c$، آنگاه $x \in S$ زیرا اگر $x \notin S$، آنگاه $x \in S'$ و متناقض با $c = infS'$ است، بنابراین $I_c = \{x \in X : \ \ x < c\} \subseteq S$ و طبق (ب)

$$\exists z \in X, \ni \ c < z, \ \ I_z = \{t \in X : \ \ t < z\} \subseteq S$$

بنابراین برای هر x در S'، $x \geq z$، یعنی $z \in X$ یک کران پایین $\emptyset \neq S' \subseteq X$ است و چون $c = infS'$ بایستی $z \leq c$ و این متناقض با فرض $c < z$ است. بنابراین $X = S$.
از کاربردهای جالب استقراء روی مجموعه‌های کلاً مرتب که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم است، می‌تواند استقراء روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با رابطهٔ کوچک‌تر یا مساوی معمولی $\leq$ باشد، که بیان آن چنین خواهد بود.

می‌دانیم $\mathbb{R}$ با ترتیب کوچک‌تر یا مساوی معمولی $\leq$ یک مجموعهٔ کلاً مرتب است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم در $\mathbb{R}$ است. گیریم $p(x)$ یک خاصیت ادعائی برای $\mathbb{R}$ باشد. اگر $S = \{x \in \mathbb{R} : \ \ p(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ دارای خواص زیر باشد،

الف: $\exists a \in \mathbb{R}, \ \ni \ I_a = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x < a\} = (-\infty, a) \subseteq S$

ب: $\forall y \in \mathbb{R}, \ \ I_y = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x < y\} = (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow$
$\exists z \in \mathbb{R}, \ \ni \ y < z, \ \ I_z = \{x \in \mathbb{R} : \ \ x < z\} = (-\infty, z) \subseteq S.$

آنگاه $S = \mathbb{R}$. یعنی $p(x)$ برای تمام اعداد حقیقی درست است.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که تحت شرایطی، مفهوم استقراء از محیط گسسته $\mathbb{N}$ به محیط پیوسته $\mathbb{R}$ منتقل می‌شود.

اکنون با چند کاربرد اصل استقراء در محیط پیوسته $\mathbb{R}$ در آنالیز مقدماتی آشنا می‌شویم.

۱ ــ قضیه بولتسانو[1].

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < \circ$، آنگاه

$$\exists c \in (a,b) \ \ni \ \ f(c) = \circ.$$

1) Bolzano 's Theorem

اثبات. گیریم $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. تابع $F:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} f(a) & ,\ x < a \\ f(x) & ,\ a \leq x \leq b \\ f(b) & ,\ x > b \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است F تابعی پیوسته است. گیریم برای هر x در (a,b)، $f(x) \neq 0$، حال مجموعه $S = \{x \in \mathbb{R}:\ \ \forall t \in I_x = (-\infty, x),\ F(t) < 0\}$ را در نظر بگیرید با توجه به فرض و تعریف داریم،

الف: $I_a = (-\infty, a) \subseteq S$.

گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $I_y = (-\infty, y) \subseteq S$. اگر $F(y) > 0$، چون F در y پیوسته است،

$$\exists \delta > 0,\ \ni \forall t \in (y-\delta, y+\delta),\quad F(t) > 0$$

و امّا $(y-\delta, y) \subseteq I_y$ و این با فرض $I_y \subseteq S$ متناقض است. پس $F(y) < 0$. بنابراین:

$$\exists \delta > 0,\ \ni \forall t \in (y-\delta, y+\delta),\quad F(y) < 0$$

حال قرار دهید $z = y + \delta$، بنابراین

ب: $\forall y \in \mathbb{R},\quad I_y \subseteq S \longrightarrow \exists z \in \mathbb{R},\ \ni y < z,\ I_z \subseteq S$

بنابراین $S = \mathbb{R}$، یعنی $\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) < 0$ و این متناقض با فرض $F(b) > 0$ است، در نتیجه $\exists c \in (a,b)\ \ \ni\ \ f(c) = 0$.

۲ ـ قضیهٔ هاینه ـ بورِل[1]:

برای هر a و b در $\mathbb{R}$، فاصله بسته $[a,b]$ فشرده[2] است، یعنی برای هر پوشش باز $[a,b]$ نظیر O، وجود دارد تعداد متناهی مجموعهٔ باز در O نظیر $o_1, o_2, \cdots, o_m$ به‌طوری که $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} o_i$.

اثبات: گیریم O یک پوشش باز $[a,b]$ و

$S = \{t \in \mathbb{R}:$ دارای یک زیرپوشش متناهی در O است $(-\infty, t) \cap [a,b]\}$

بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x < a$، آنگاه $(-\infty, x) \cap [a,b] = \emptyset$ پس،

الف: $\exists a \in \mathbb{R},\ \ni\ (-\infty, a) \subseteq S$

گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $(-\infty, y) \subseteq S$، اگر $y > b$ که حکم برقرار است، پس فرض کنید $y \in [a,b]$. چون $[a,b] \subseteq \cup O$ پس $o \in O$ به طوری که $y \in o$. چون o باز است، پس بازهٔ باز (α, β) وجود دارد که $y \in (\alpha, \beta) \subset o$. گیریم $z = y + \frac{1}{2}(\beta - y) \in (\alpha, \beta)$ پس وجود دارد $z \in \mathbb{R}$ به‌طوری که $y < z$ و

---

1) Heine–Borel 2) compact

$(-\infty,z) = (-\infty,y)\cup[y,z)$ و امّا $(-\infty,y)\subseteq S$، پس

$$\exists o_1, o_2, \cdots, o_m \in O,\ \ni\ (-\infty,y)\cap[a,b]\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} o_i$$

از طرفی $[y,z]\subseteq(\alpha,\beta)\subset o\in O$، بنابراین

$$\begin{aligned}(-\infty,z)\cap[a,b] &= \big((-\infty,y)\cup[y,z)\big)\cap[a,b]\\ &= \big((-\infty,y)\cap[a,b]\big)\cup\big([y,z)\cap[a,b]\big)\\ &\subseteq \big(\bigcup_{i=1}^{m} o_i\big)\cup o\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد،

ب: $\forall y\in\mathbb{R},\ \ (-\infty,y)\subseteq S\longrightarrow \exists z\in\mathbb{R},\ \ni\ y<z,\ \ (-\infty,z)\subseteq S.$

پس $S=\mathbb{R}$.

۳ ـ قضیه اشتراک کانتور:

هرگاه $I_n=[a_n,b_n]$ دنباله‌ای از بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد و برای هر n، $I_{n+1}\subseteq I_n$، آنگاه $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n\neq\emptyset$.

اثبات: گیریم $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n=\emptyset$، مجموعه

$$S=\{x\in\mathbb{R}:\ \ (-\infty,x)\cap\{b_n\}=\emptyset,\ \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x<a_1$، آنگاه $(-\infty,x)\cap\{b_n\}=\emptyset$. پس

الف: $\exists a_1\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,a_1)\subseteq S.$

گیریم $y\in\mathbb{R}$ و $(-\infty,y)\subseteq S$، بدیهی است وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ به طوری که $(y,+\infty)\cap\{a_n\}\neq\emptyset$ زیرا اگر برای هر n در $\mathbb{N}$، $(y,+\infty)\cap\{a_n\}=\emptyset$، آنگاه

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n\le y\le b_n$$

بنابراین $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n\neq\emptyset$ که خلاف فرض است. اگر $a_m\in(y,+\infty)$، آنگاه $z=a_m>y$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ (-\infty,z)\cap\{b_n\}=\emptyset$$

بنابراین

ب: $\forall y\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,y)\subseteq S\longrightarrow \exists z\in\mathbb{R},\ \ni\ y<z,\ (-\infty,z)\subseteq S$

در نتیجه بنابر استقراء، $S = \mathbb{R}$، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, (-\infty, x) \cap \{b_n\} = \emptyset$$

و این غیرممکن است. پس $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

۴ ـ قضیهٔ (بولتسانو ـ ویراشتراوس)[1]

هر زیر مجموعهٔ نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$ حداقل یک نقطهٔ حدی[2] (نقطه انباشتگی) دارد.

اثبات. گیریم زیرمجموعهٔ نامتناهی و کراندار X از $\mathbb{R}$ نقطه حدّی نداشته باشد. از این که X کراندار است پس وجود دارد $a, b \in \mathbb{R}$، به طوری که $X \subseteq [a, b]$. حال مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ \text{متناهی است}\ (-\infty, x) \cap X\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x اگر $x < a$، آنگاه $(-\infty, x) \cap X = \emptyset$. پس

الف: $\exists a \in \mathbb{R},\ \ni\ (-\infty, a) \subseteq S.$

گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $(-\infty, y) \subseteq S$ پس مجموعه $(-\infty, y) \cap X$ متناهی است. اگر $(-\infty, y) \cap X = \emptyset$، آنگاه چون y نقطه حدی X نیست پس وجود دارد $\delta > 0$، به طوری که $(y-\delta, y+\delta) \cap X = \emptyset$ و این نتیجه می‌دهد،

$$\exists z = y + \delta > y,\ \ni\ (-\infty, z) \cap X = \emptyset.$$

پس گیریم $(-\infty, y) \cap X = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ و $\delta = \frac{1}{2} min\{|y - c_i| :\ \ i = 1, 2, \cdots, n\}$، بنابراین $(y-\delta, y+\delta) \cap X = \emptyset$. در نتیجه وجود دارد، $z = y + \delta > y$ به طوری که

$$\begin{aligned}
(-\infty, z) \cap X &= \big((-\infty, y) \cup [y, z)\big) \cap X \\
&= \big((-\infty, y) \cap X\big) \cup \big([y, z) \cap X\big) \\
&= \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \cup \emptyset \\
&= \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}
\end{aligned}$$

پس $(-\infty, z) \subseteq S$، بنابراین

ب: $\forall y \in \mathbb{R},\ \ni\ (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow \exists z \in \mathbb{R},\ \ni\ y < z,\ (-\infty, z) \subseteq S$

---

1)Bolzano - Weierstrass 2) Limit Point (Accumulation Point)

گیریم $A \subseteq \mathbb{R}$، $a \in \mathbb{R}$ را نقطه انباشتگی A در $\mathbb{R}$ گویند، هرگاه

$$\forall r > 0,\ [(a - r, a) \cup (a, a + r)] \cap A \neq \emptyset$$

در نتیجه $S=\mathbb{R}$، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-\infty, x) \cap X \ \text{متناهی است}$$

و این غیرممکن است زیرا $(-\infty, b+۱) \cap X = X$ نامتناهی است پس X باید نقطه حدی داشته باشد.

۶ ـ قضیهٔ همگرایی یکنوا:

هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگرا است.

اثبات. گیریم دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار $\{a_n\}$ واگرا باشد. حال مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \ni \ (x, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x < a_۱$، آنگاه $(x, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$ زیرا $\{a_n\}$ صعودی است. پس $\exists a_۱ \in \mathbb{R}, \ \ni (-\infty, a_۱) \subseteq S$. گیریم $y \in \mathbb{R}$ و برای nی در $\mathbb{N}$ $(y, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$. پس وجود دارد $m \in \mathbb{N}$ و $a_m > y$، گیریم $z = y + \frac{۱}{۲}(a_{m+۱} - a_m)$، بدیهی است $y < z$ و $(-\infty, z) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$، بنابراین

ب: $\forall y \in \mathbb{R}, \ \ni \ (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow \exists z \in \mathbb{R}, \ \ni \ y < z, \ (-\infty, z) \subseteq S$

پس بنابر استقراء، $S=\mathbb{R}$. یعنی $\forall x \in \mathbb{R}, (x, \infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$ و این متناقض با فرض از بالا کراندار بودن $\{a_n\}$ است، پس $\{a_n\}$ همگرا است.
قضایای دیگری از آنالیز حقیقی را نیز می‌توان با استقراء روی $\mathbb{R}$ اثبات کرد.[۱] و [۲] و [۷]

مراجع

[1] Kalantari, Iraj (2004). *Induction over the Continumm* , Western Illinois University, Dept of Math(Kalantari @win.edu) .

[2] Zhang Jingzhong, *The Induction on a Continuous Variable,* International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Ic/89/157.

[3] *Internatinal Conference on Computability and Complexity in Analysis,* August 28-30, 2003, University of Cincinati, USA.

[4] Martin Hötzel Escardo, *Induction and Recursion on the real line,* Dept of Computing , Imperial College, London (1996).

[5] Martin Hötzel Escardo, Thomas Streicher, *Induction and Recursion on the partinal real line with application to real PCF,* Theoretical Computer science, (1997).

[6] W.L. Duren, JR, *Mathematical Induction in sets,* The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 8 (oct., 1957), pp. 19-22.

[۷] ساختار اعداد، مبانی ریاضیات، محمد مشکوری ـ دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۸۳).

محمد مشکوری
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده ریاضی
mohammad@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۳۳ تا ۴۴

جدال

آرند هیتینگ

مترجم: احسان ممتحن

اشخاص حاضر در گفتگو: کلاس، صورت، شهود، حرف، عملگرا، نماد

در این مباحثه*، ظاهراً صورت مدافع مکتب هیلبرت یعنی صورتگرایی، شهود مدافع مکتب براؤر یعنی شهودگرایی و کلاس مدافع مکتب راسل یعنی منطق‌گرایی است. به نظر می‌رسد که حرف نمایندهٔ مکتب بورباکی باشد چرا که هیتینگ منبع سخنان حرف را مقالهٔ ژان دیودونه ذکر می‌کند که یکی از بنیانگذاران بورباکی بوده است؛ این که می‌توان دیودونه یا حرف را نمایندهٔ رسمی مکتب بورباکی دانست هنوز برای من روشن نیست. اما علامت، واقعاً نمی‌دانم علامت نمایندهٔ کدام جریان فکری در فلسفهٔ ریاضی است، همانطور که کلاس هم می‌گوید موجود ناقلایی به نظر می‌رسد، شاید نمایندهٔ نومینالیسم یا حتی سمبولیسم باشد. به هر حال وی به نقش غالب زبان در علم معتقد است و از این نظر می‌تواند پیرو فلسفهٔ ریاضی لودویگ ویتگنشتاین نیز به حساب آید.(م)

کلاس: حالتان چطور است آقای شهود؟ مثل این که شهر را در این روز خوب تابستانی رها نکرده‌اید؟

شهود: ایده‌هایی داشتم و در کتابخانه بر روی آنها کار می‌کردم.

کلاس: زنبور پرکار! پیشرفتی هم داشته‌اید؟

شهود: کاملاً. چیزی می‌نوشید؟

کلاس: متشکرم. شرط می‌بندم که بر روی موضوع مورد علاقهٔ همیشگی‌تان کار می‌کردید، ردِ اصلِ طردِ شقِ وسط و سایر مطالب. من هرگز نفهمیدم که چرا منطق در همه جا باید مورد اعتماد باشد جز در ریاضیات؟

شهود: قبلاً راجع به این موضوع صحبت کرده‌ایم. این ایده که برای توصیف بعضی از انواعِ

اشیاء، ممکن است منطق دیگری مناسب‌تر از منطق متداول باشد گهگاه موردِ بحث قرار گرفته است.

اما نخستین بار براوِر بود که شیئی کشف کرد که واقعاً به منطق دیگری نیاز داشت، یعنی ساختمانِ ریاضی ذهنی[1] [ل. ایی. جی. براوِر ۱۹۰۸]. علت این است که در ریاضیات از همان آغاز با نامتناهی سروکار داریم، در حالی که منطق معمولی برای استدلال در بارهٔ گردآیه‌های متناهی ساخته شده است.

کلاس: می‌دانم، ولی در چشم من منطق عام است و در موردِ نامتناهی به همان خوبیِ متناهی کار می‌کند.

شهود: باید توجه داشته باشید که برنامهٔ براوِر چه بود [ل. ایی. جی. براوِر ۱۹۰۷]. این برنامه مشتمل بر پژوهش در ساختمان ریاضی ذهنی به معنای دقیق کلمه بود بی آن که پرسش‌هایی از قبیل این که آیا این اشیاء مستقل از دانش ما از آنها، وجود دارند، مطرح سازد. بهتر است این نکته را که این دیدگاه مستقیماً به رد اصل طردِ شقِ وسط منجر می‌شود با مثالی توضیح دهم.
اجازه دهید دو تعریف از اعداد طبیعی چون k و l را با هم مقایسه کنیم:

۱ــ k بزرگترین عدد اولی است که $k-۱$ نیز اول است، یا $k=۱$ هر گاه چنین عددی وجود نداشته باشد.

۲ــ l بزرگترین عدد اولی است که $l-۲$ نیز اول است، یا $l=۱$ هر گاه چنین عددی وجود نداشته باشد.

ریاضیات کلاسیک یکسره تفاوت آشکار در ویژگی‌های این دو تعریف را نادیده می‌گیرد. k را واقعاً می‌توان محاسبه کرد (k=۳)، در حالی که هیچ روشی برای محاسبهٔ l نداریم، چرا که هنوز دانسته نیست دنبالهٔ زوجهای اعداد اول دوقلو، p، $p+۲$ متناهی است یا خیر. بنابراین شهودگرایان (۲) را به عنوان تعریفِ یک عدد صحیح مردود می‌شمارند. آنها عدد صحیح را خوش تعریف می‌دانند بشرطی که روشی برای محاسبهٔ آن داده شده باشد. حال همین خط فکری به رد اصل طرد شق وسط منجر می‌شود، زیرا [با قبول این اصل] دنبالهٔ اعداد اول دوقلو چه متناهی باشد و چه نامتناهی، (۲)، عدد صحیحی را تعریف می‌کند.

کلاس: می‌توان چنین به اعتراض برخاست که دانش ما درباره وجود یا عدم وجودِ آخرین زوج از اعدادِ اولِ دوقلو صرفاً تصادفی و به‌طور کلی با چند و چونِ صدق ریاضی بی ارتباط است. یا تعداد نامتناهی از چنین زوج‌هایی وجود دارند، که در آن صورت $l=۱$ یا تعدادشان متناهی است، که در آن صورت l مساوی بزرگترین عدد اولی است که $l-۲$ هم اول باشد. در هر دو حالت فرض شده l تعریف می‌شود؛ چرا مهم است که واقعاً بتوانیم یا نتوانیم این عدد را محاسبه کنیم؟

شهود: استدلال شما سرشتی متافیزیکی دارد. اگر «وجود داشتن» به معنی «می‌تواند ساخته شود» نباشد، باید معنایی متافیزیکی داشته باشد. پژوهش در این معنی یا تصمیم در باب

1) mental mathematical construction

قابل دفاع بودن یا نبودن آن کارِ ریاضیات نیست. ما هیچ مخالفتی با ریاضیدانی که در خلوت هر نظریهٔ متافیزیکی را که دوست دارد می‌پذیرد، نداریم، اما برنامهٔ براؤر متضمن آن است که ریاضیات را چون موضوعی ساده‌تر و سرراستر از متافیزیک مورد مطالعه قرار دهیم. در بررسی ساختمان‌های ریاضی ذهنی «وجود داشتن» با «می‌تواند ساخته شود» باید هم معنی باشد.

کلاس: به بیانی دقیق‌تر، تا زمانی که ندانیم که آخرین زوج از اعداد اول دوقلو وجود دارند، (۲)، تعریف یک عدد صحیح نخواهد بود، اما همین که این مسأله حل شد، به یک باره، به یک تعریف بدل می‌شود. فرض کنید در اول ژانویهٔ ۱۹۷۰ ثابت شود که بینهایت عدد اول دوقلو وجود دارند؛ از آن لحظه $l = 1$. آیا پیش از آن هم $l = 1$ بوده است؟ [منگر، ۱۹۳۰]

شهود: یک قضیهٔ ریاضی، مؤیدِ این واقعیت است که ساختمان ریاضی معینی حاصل شده است. واضح است که قبل از آن که این ساختمان ساخته شود، ساخته نشده بوده است. اگر این مطلب را در مورد مثال شما اعمال کنیم می‌بینیم که پیش از اول ژانویه ۱۹۷۰[1] ثابت نشده بوده که $l = 1$. اما منظور شما این نیست. چنین به نظرم می‌رسد که برای آن که معنای پرسش شما روشن شود باید باز به مفاهیم متافیزیکی رجوع کنید: به جهانی از اشیاء ریاضی، که مستقل از دانش ما وجود دارند، جایی که "$l = 1$" به معنای مطلقِ کلمه درست است. اما تکرار می‌کنم، ریاضیات نباید به مفاهیمی از این دست متکی باشد. در واقع همهٔ ریاضیدانان و حتی شهودگرایان متقاعد شده‌اند که به تعبیری ریاضیات حامل حقایق جاودان است، ولی وقتی برای تعریف دقیقِ این تعبیر تلاش می‌شود، در هزارتوی دشواری‌های متافیزیکی گرفتار می‌آییم. تنها راه پرهیز از آنها آن است که آنها را از ریاضیات کنار بگذاریم. منظور من از گفتن این که ما ساختمان‌های ریاضی را به معنای دقیق کلمه مطالعه می‌کنیم و برای این مطالعه منطق کلاسیک بسنده نیست همین بود.

کلاس: دوستانمان صورت و حرف هم آمدند. دوستان! مشغول بحث بسیار جالبی دربارهٔ شهودگرایی هستیم.

حرف: مگر می‌توانستید با دوست خوبِ قدیمی‌مان آقای شهود راجع به چیز دیگری صحبت کنید؟ او کاملاً در آن غرق شده است.

شهود: وقتی مسحور زیبایی موضوعی شدید، زندگیتان را وقف آن کنید!

صورت: حق با شماست! فقط متحیرم چطور در چیز نامشخصی مثل شهودگرایی می‌تواند زیبایی وجود داشته باشد. هیچ یک از عبارات شما خوش تعریف نیست، و قوانین دقیق استنتاج را هم ارائه نمی‌دهید. بنابراین این که کدام استدلال صحیح و کدام ناصحیح است برای همیشه در پردهٔ ابهام باقی می‌ماند [ر. کارناپ ۱۹۳۴ صفحهٔ ۴۱، ۱۹۳۷ صفحهٔ ۴۶، و. دوبیسلاو ۱۹۳۲ صفحه‌های ۵۷ و ۷۵]. در زبان روزمره هیچ کلمه‌ای معنی کاملاً ثابتی ندارد؛ همیشه قدری تفاوت برداشت وجود دارد، و هرچه مفهوم مجردتر باشد این مقدار نیز بیشتر است. این موضوع

۱) این مقاله در سال ۱۹۵۶ انتشار یافته و مسألهٔ فوق همچنان حل نشده باقی مانده است.(م)

مردم را دربارهٔ نظرات یکدیگر و همچنین در استدلال‌های ریاضی غیرصوری به اشتباه می‌اندازد. تنها راه دست یافتن به نظم و استحکام مطلق آن است که همهٔ معناها را از گزاره‌های ریاضی جدا کنیم و گزاره‌ها را فی نفسه، چون دنباله‌هایی از نمادها، بی‌اعتنا به معنایی که ممکن است داشته باشند مورد توجه قرار دهیم. آنگاه صورتبندی قواعد معین برای استنتاج قضایای جدید از آنهایی که تا به حال دانسته شده‌اند و اجتناب از عدم اطمینانی که حاصلِ ابهام زبان است ممکن می‌شود.

شهود: من اختلاف بین صورتگرایان و شهودگرایان را عمدتاً ناشی از اختلاف سلیقه می‌دانم. شما نیز در آنچه هیلبرت فراریاضیات می‌نامید از استدلال پرمعنایی استفاده می‌کنید، اما قصد شما کنار گذاشتن این استدلال‌ها از ریاضیات صرفاً صوری و محدود کردن خودتان به ساده‌ترین استدلالهای ممکن است. ما بر خلاف شما، به وجه صوری ریاضیات علاقمند نیستیم، بلکه دقیقاً به آن گونه از استدلال که در فراریاضیات[۱] ظاهر می‌شود علاقمندیم، تلاش می‌کنیم که آن را تا دوردست‌ترین نتایجش توسعه دهیم. این برتری نهادن ناشی از این اعتقاد است که اینجا را یکی از بنیادیترین توانایی‌های ذهن آدمی می‌یابیم.

صورت: اگر شما با صورتگرایی دعوایی ندارید، من نیز با شهودگرایی دعوایی نخواهم داشت. صورتگرایان جزو صلح‌جوترین افراد بشر هستند. هر نظریه‌ای می‌تواند صوری و سپس موضوعی برای روش‌های ما شود. به همین ترتیب ریاضیات شهودگرا نیز می‌تواند بدین شکل بیان شود و خواهد شد [ر. کارناپ ۱۹۳۴ صفحهٔ ۴۴، ۱۹۳۷ صفحهٔ ۵۱].

کلاس: به بیان دقیقتر، ریاضیات شهودگرا باید چون بخشی از ریاضیات مطالعه شود. در ریاضیات نتایج فرض‌های داده شده را موردِ پژوهش قرار می‌دهیم؛ فرض‌های شهودگرایانه ممکن است جالب باشند ولی حق انحصارطلبی ندارند.

شهود: ما هم، چنین ادعایی نکرده‌ایم؛ اگر شما حُسن برداشت ما را بپذیرید، به همین قانع هستیم. اما باید علیه این ادعا که شهودگرایی از فرض‌های کم و بیش دلخواه و معینی آغاز می‌کند اعتراض کنم. موضوع شهودگرایی، [یعنی] اندیشهٔ ریاضی سازنده[۲]، قضایایش را به طور یکتا مشخص می‌سازد و آن را در کنار و نه در درون ریاضیات کلاسیک جای می‌دهد که موضوع دیگری را، حال هر چه که هست، مطالعه می‌کند. به این دلیل، توافق صورتگرایی و شهودگرایی توسط صوری سازیِ ریاضیات شهودگرا نیز ناممکن است. این درست است که حتی در ریاضیات شهودگرا نیز بخش تمام شدهٔ یک نظریه می‌تواند صوری شود. مفید خواهد بود که لحظاتی به معنای این صوری سازی بیاندیشیم. می‌توانیم یک نظام صوری را توصیف زبانی اندیشهٔ ریاضی، در زبانی به‌ویژه مناسب، در نظر بگیریم. اگر این دیدگاه را بپذیریم، با مانع ابهام بنیادی زبان برخورد می‌کنیم. چون معنای یک کلمه هرگز نمی‌تواند به اندازه کافی دقیق تثبیت شود که امکان هر گونه بدفهمی را منتفی سازد، هرگز نمی‌توانیم به لحاظ ریاضی مطمئن باشیم که نظام صوری، اندیشه‌های ریاضی ما را به طور صحیحی بیان می‌کند.

1) meta mathematics 2) constrution Mathematical thought

با این وصف اجازه دهید دیدگاه دیگری اتخاذ کنیم. می‌توانیم خودِ نظام صوری را چون ساختار ریاضی به غایت ساده‌ای در نظر بگیریم که اشیاءاش (علائم نظام) با دیگر ساختارهای ریاضی غالباً بسیار پیچیده مربوط شده‌اند. به این طریق صورتبندی‌ها می‌توانند در درون ریاضیات عملی گردند و به ابزار ریاضی نیرومندی بدل گردند. البته، هرگز نمی‌توان اطمینان یافت که نظام صوری به تمامی، حوزه‌ای از اندیشهٔ ریاضی را نمایش می‌دهد، در هر لحظه، کشف روش‌های جدید استدلال ممکن است ما را به توسعهٔ نظام صوری ناگزیر سازد.

صورت: چند سالی است که با این وضعیت آشنا شده‌ایم. قضیهٔ ناتمامیت گودل نشان داد که هر نظام صوری سازگار از نظریه اعداد می‌تواند به طور سازگار به طرق مختلف توسعه یابد.

شهود: تفاوت در آنجاست که شهودگرایی مستقل از صورتگرایی که تنها می‌تواند از پی ساختمانِ ریاضی بسط یابد به پیش می‌رود.

کلاس: آنچه مرا بیشتر سردرگم می‌سازد آن است که به نظر می‌رسد شما دو نفر اصولاً از هیچ آغاز می‌کنید. به نظر می‌رسد که شما مشغول بنای دژهایی در هوا هستید. چطور می‌توانید دریابید که استدلالتان صحیح است اگر محک خطاناپذیرِ منطق را در اختیار نداشته باشید؟ دیروز با نماد صحبت می‌کردم که هنوز از هر دوی شما نسبی‌گراتر است. او چنان ناقلاست که هیچ استدلالی گیرش نمی‌اندازد و هرگز به نتیجهٔ محکمی نمی‌رسد. من از چنین سرنوشتی برای همهٔ آنانی که پشتیبانی منطق، یعنی عقل سلیم را به کناری نهاده‌اند هراسانم.

علامت: موی جن را آتش زدید و یکباره سروکله‌اش پیدا شد. داشتید غیبت مرا می‌کردید؟

کلاس: به بحث دیروز اشاره می‌کردم. امروز به مواضع این دو نسبی‌گرای نفرین شدهٔ دیگر حمله برده‌ام.

علامت: من نیز راغبم در این کار به شما بپیوندم، اما نخست اجازه دهید پاسخ مخالفانتان را بشنویم. لطفاً با دوست من عملگرا آشنا شوید، او نیز به موضوع بحث علاقمند خواهد شد.

صورت: حالتان چطور است؟ شما نیز فیلسوفِ علم هستید؟

عملگرا: من از متافیزیک متنفرم.

شهود: خوش آمدی برادر!

صورت: اِه، من ترجیح می‌دهم که در حالِ حاضر از مواضع خودم دفاع نکنم، چون بحث ما عمدتاً به شهودگرایی مربوط است و ممکن است به آسانی سردرگم شویم. ولی از این که دربارهٔ منطقِ شهودگرا دچار اشتباه شوید هراسناکم. در واقع این [منطق] نیز صورتبندی شده و کارهای باارزشی توسط عدهٔ زیادی از مصنفین در این حوزه انجام گرفته است. به نظر می‌رسد که این مطلب ثابت کند که شهودگرایان به منطق بیش از آنچه فکر می‌کنید ارج می‌نهند، هرچند که آن، منطقی متفاوت از منطقی است که شما با آن مأنوس هستید.

شهود: متأسفم که مجبورم مأیوستان سازم. منطق زمینی نیست که من بر آن بایستم. و چطور

می‌تواند باشد؟ منطق، خود به یک زیر بنا نیاز دارد که بایستی شامل اصلهایی باشد با پیچیدگی بسیار بیشتر و سرراستی بسیار کمتر از اصل‌های خودِ ریاضیات. یک ساختمان ریاضی باید چنان سرراست و بیواسطه به ذهن [برسد] و نتایجش چنان روشن باشند که هیچ نیازی به زیربنایی از هرسنخ نباشد. می‌توان بدون استفاده از هیچ منطقی خیلی خوب فهمید که آیا استدلالی درست است یا نه؛ یک وجدانِ روشنِ علمی کافی است. بله، این درست که منطق شهودگرا گسترش یافته است. برای نشان دادن اهمیت این منطق اجازه دهید با مثالی موضوع را توضیح دهم. فرض کنید که A بیانگر خاصیتِ عاد شدن یک عدد صحیح توسط عدد ۸، B همین خاصیت منتها توسطِ عددِ ۴، و C همان خاصیت توسط عدد ۲ باشد. می‌توانیم $۸a$ را به صورت $۲a \times ۴$ بنویسیم؛ می‌بینیم که بنا بر این ساختمان ریاضیِ P، A موجب B است $(A \to B)$. ساختمانِ مشابه Q نشان می‌دهد که $B \to C$. با نخست تأثیردادن P و سپس Q (عطفِ P و Q) خواهیم داشت $۸a = ۲ \times (۲ \times ۲a)$ که نشان می‌دهد $A \to C$. اگر برای A، B، C خواص دیگری را جانشین کنیم این نتیجه‌گیری همچنان درست باقی می‌ماند: اگر ساختمان P، $A \to B$ و Q، $B \to C$ را نشان دهد، آنگاه عطف P و Q، $A \to C$ را نشان می‌دهد. یک قضیهٔ منطقی به‌دست آورده‌ایم. فرآیندی که این قضیه از آن به‌دست آمد به ما نشان می‌دهد که این قضیه با قضایای ریاضی تفاوت اساسی ندارد، فقط کلی‌تر است، به همان معنی کلی‌تر که به طور مثال «جمعِ اعداد صحیح خاصیت تعویض‌پذیری دارد» گزارهٔ کلی‌تری است از «۲ + ۳ = ۳ + ۲». برای هر قضیهٔ منطقی موضوع همین است: قضیهٔ منطقی یک قضیهٔ ریاضی است منتها با کلیّتی فوق‌العاده بیشتر؛ به بیان بهتر، منطق بخشی از ریاضی است، و به هیچوجه نمی‌تواند چون زیربنایی برای ریاضیات به خدمت گرفته شود. دستِ کم این برداشتی است از منطق که من به آن رسیده‌ام؛ ممکن و مطبوع است که بتوان شکل‌های دیگری از منطق را برای مقاصد دیگری بسط داد.

منطقی که هم‌اکنون آن را توصیف کردم منطق ریاضیِ صوری شده است. نظام صوری ناشی از آن خواص ویژه و منحصر به‌فردی دارد، که وقتی با نتایج دیگر نظام‌های منطق صوری مقایسه شود بسیار جالب است. این واقعیت به پژوهش‌هایی منجر می‌شود که آقای صورت به آنها اشاره کرد، که هرچند جالب‌اند اما ارتباط نامستحکم و دوری با ریاضیاتِ شهودگرا دارند.

حرف: به اعتقاد من همهٔ این مشکلات خیالی یا تصنعی هستند. ریاضیات چیز کاملاً چیز ساده‌ای است. علائمی تعریف می‌کنیم و قواعدی برای ترکیب آنها به‌دست می‌دهیم؛ تمام شد و رفت.

صورت: شما به برخی از شیوه‌های استدلال نیازمندید تا سازگاری نظام صوریتان را ثابت کنید.

حرف: چرا باید بخواهم این مطلب را ثابت کنم؟ نباید فراموش کرد که نظام‌های صوری برای کاربردهایشان ساخته می‌شوند و عموماً نیز مفید بودن خود را به اثبات می‌رسانند؛ اگر هر فرمولی در نظام‌های صوری قابل استنتاج می‌بود توضیح این واقعیت دشوار می‌شد. بدین طریق به قضاوتی عملی در بارهٔ سازگاری دست می‌یابیم که برای کارِ ما کافی است. آنچه در شهودگرایی با آن مخالفم

این عقیده است که ریاضیات با نامتناهی سروکار دارد. من می‌توانم علامتی چون α بنویسم و آن را عدد اصلی اعداد صحیح بنامم. سپس می‌توانم قواعدی موافقِ قواعدی که آقای کلاس برای این مفهوم بکار می‌برد برای کار با آن وضع کنم. به محض اینکه مفهومِ نامتناهی واردِ صحنه می‌شود ابهام و سردرگمی در استدلال رخنه می‌کند. بنابراین همهٔ نظرات شهودگرایانه در بارهٔ نامتناهی تا درجه‌ی بالایی از ابهام برخوردارند، حتی این نکته نیز قابل پرسش است که آیا علامتی چون $10^{10^{10}}$ معنی دیگری بجز شکلی بر کاغذ که بر طبق قواعدی معین با آن کار می‌کنیم دارد [ژ. دیودونه ۱۹۴۹].

شهود: البته متناهی‌گرایی افراطی شما بالاترین امنیت را در برابر کژفهمی تضمین می‌کند، اما به نظر ما موجب انکار مفهوم ناشناسی می‌شود که پذیرش آن ممکن نیست. بچه‌ها در دبستان می‌فهمند که اعداد طبیعی چه هستند و این واقعیت که دنبالهٔ اعداد طبیعی می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد را می‌پذیرند.

حرف: اعتقاد بر این است که اینها را می‌فهمند.

شهود: مخالفتی نیست، زیرا هر ارتباطی که توسط زبان انجام گیرد می‌تواند چون اعتقاد تعبیر شود. همچنین اقلیدس در گزارهٔ ۲۰ام از کتابِ IX، همانجا که ثابت کرد مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی‌اند، می‌دانست در بارهٔ چه سخن می‌گوید. این برداشت مقدماتی از اعداد طبیعی که برای هر موجود متفکری آشناست در ریاضیات شهودگرا بنیادی است. مدعی هیچگونه قطعیت یا تعیّنی مطلق برای آن نیستیم، که امری نامحقق است، اما سخن ما اینست که [اعداد طبیعی] به اندازهٔ کافی واضح هستند که ریاضیات را بتوان بر آنها استوار ساخت.

حرف: مخالفت من از این جهت است که شما نه تنها فرض‌های بسیار کمی، آنگونه که آقای کلاس می‌پندارد نپذیرفته‌اید، که بسیار بیشتر از اندازه فرض می‌گیرید. شما از اصل‌های مشخصی آغاز می‌کنید که آنها را بطور شهودی، بی آنکه توضیحی ارایه دهید واضح می‌دانید و دیگر شیوه‌های استدلال را بدون ارایهٔ علتی برای این سَره ـ ناسَره کردن، مردود می‌شمارید. به عنوان مثال به نظر بیشتر مردم اصلِ طردِ شقِ وسط دستِ کم همانقدر واضح است که اصل استقرای کامل. چرا اولی را رَد و دومی را تأیید می‌کنید؟ چنین انتخابِ بی‌دلیلی به نظام شما سرشتی کاملاً جزمی می‌دهد.

شهود: در حقیقت باید گزاره‌های شهودگرایانه برای کسانی که آنها را چون گزاره‌هایی در بابِ امورِ واقع می‌نگرند جزمی بنظر آید، اما آنها به این شکل معنی نمی‌شوند. ریاضیات شهودگرا همانگونه که کمی پیش از این برای آقای کلاس توضیح دادم، مبتنی بر ساختمانهای ذهنی است؛ یک قضیهٔ ریاضی صرفاً یک واقعیت تجربی را، یعنی موفقیت یک ساختمانِ مشخص را بیان می‌دارد. «۲ + ۲ = ۱ + ۳» باید چون کوتاه‌نوشتِ این جمله بازخوانی شود که «من ساختمان‌های ذهنی‌ای توسط ۲ + ۲ و ۱ + ۳ ایجاد کرده‌ام و دریافته‌ام که این دو به نتیجه‌ای مشابه منجر می‌شوند». حال به من بگویید در کجا عنصر جزمیت می‌تواند وارد شود؛ نه در خودِ ساختمانِ ذهنی،

چرا که به‌وضوح بنا به سرشت خود همچون یک فعالیت است، و نه دیگر در گزاره‌هایی که راجع به این ساختمان‌ها ساخته می‌شوند زیرا که آنها صرفاً نتایج تجربی را بیان می‌کنند.

حرف: در عین حال شما مدعی هستید که این ساختمان‌های ذهنی به گونه‌ای به حقیقت منجر می‌شوند، آنها بازی فالِ ورق نیستند، بلکه به یک معنی برای نوع بشر ارزشمند هستند در غیر این صورت در زحمت دادن به دیگران با ریاضیات بر خطایید. درست در همین دعوی است که من عنصر جزمیت را می‌بینم. شهود ریاضی، الهام بخش شما با حقایق عینی و جاودان است؛ به این معنی دیدگاه شما نه تنها جزم‌گرایانه بلکه حتی از سنخِ الهیّات است. [ه. ب. کوری ۱۹۵۱، صفحهٔ ٦]

شهود: در وهلهٔ نخست، اندیشه‌های ریاضی من به زندگی فکری ــ فردی من تعلق دارند و به ذهنِ من محدود شده‌اند، در مورد اندیشه‌های دیگر نیز این موضوع صادق است. عموماً متقاعد شده‌ایم که آدمهای دیگر اندیشه‌های شبیه به ما دارند و وقتی که اندیشه‌هایمان را با کلمات بیان می‌کنیم قادر به فهم آنها هستند، اما درعین حال می‌دانیم که هیچوقت مطمئن نیستیم که کاملاً مطالبمان را فهمانده‌ایم. از این دیدگاه، ریاضیات فرق اساسی با موضوعات دیگر ندارد؛ اگر شما به این علت ریاضیات را جزمگرایانه می‌دانید باید مابقی استدلالات بشری را نیز جزمی بدانید. ویژگی اندیشهٔ ریاضی آنست که حامل حقیقتی در بارهٔ جهانِ خارج نیست، بلکه تنها با ساختمان‌های ریاضی سروکار دارد. اکنون باید بین فعالیت صرف ریاضی و ارزش آن فرق بنهیم. برای ساختن نظریه‌های ریاضی به هیچ پیش‌فرض فلسفی نیاز نیست، اما ارزشی که برای این فعالیت قائل می‌شویم به دیدگاه فلسفی ما بستگی دارد.

علامت: اینطور که شما با زبان برخورد می‌کنید در گذشته باقی می‌مانید. زبانِ ابتدایی این سرشتِ غیرِ قابلِ پیش‌بینی و غیرثابتی را که شما بیان می‌کنید دارد و زبان روزمره نیز عمدتاً به همان‌گونه است، ولی همین که اندیشهٔ علمی آغاز می‌گردد صوری سازی زبان نیز شروع می‌شود. در دهه‌های اخیر نمادگرایان این فرآیند را مطالعه کرده‌اند. هنوز این راه به پایان خود نرسیده است زیرا زبان‌های اکیداً صوری شدهٔ بیشتری تازه در حالِ شکل‌گیری هستند.

شهود: اگر واقعاً صوری‌سازی زبان راه و رسم علم باشد، ریاضیات شهودگرا به این معنا از کلمه به علم تعلق ندارد. بلکه ترجیحاً پدیده‌ای از زندگانی و فعالیتِ طبیعی آدمی است، که خود چون موضوعی برای مطالعه بر روی روش‌های علمی گشوده است؛ و عملاً نیز با این شیوه‌ها یعنی صوری‌سازی استدلال شهودگرایانه و روش‌های علمی موردِ مطالعه قرار گرفته است، اما روشن است که این بررسی به ریاضیات شهودگرا و به نتایج آن تعلق ندارد. چنین آزمونی علمی از ریاضیات شهودگرا هرگز قادر به ارائهٔ توصیفی دقیق و کامل از آن نخواهد بود، همان‌طور که به‌وضوح می‌توان دید، قادر به ارائهٔ یک نظریهٔ کامل از پدیده‌های دیگر هم نیست. هر چه که این ملاحظات فرا شهودگرایانه امیدوارکننده و جالب هم باشند، نمی‌توانند بخشی از خودِ ریاضیات شهودگرا تلقی گردند. البته این نکته‌ها، همانطور که چند لحظه پیش توضیح دادم قابل اعمال به صوری سازی

درونِ ریاضیات نیستند.

عملگرا: اجازه دهید آنچه را که آقای نماد هم‌اکنون گفت موردِ تأکید قرار دهم. علم، بوسیلهٔ صوری سازی زبان به پیش می‌رود؛ علم از این شیوه استفاده می‌کند چرا که کارآمد است. به ویژه زبان‌های کاملاً صوری شدهٔ مدرن بسیار مفید واقع شده‌اند. آرمان یک دانشمند مدرن، فراهم آوردن زرّادخانه‌ای از نظام‌های صوریِ مفید است، که از میان آنها برای هر نظریه، نظامی که نتایج تجربی را صحیح‌تر نمایش می‌دهد انتخاب کند. نظام‌های صوری باید با این محک مفید بودن موردِ قضاوت قرار گیرند نه با تعبیرهای دلخواه و مبهم که به دردِ استدلال‌های متافیزیکی یا جزمگرایانه می‌خورند.

شهود: کاملاً معقول به نظر می‌رسد که یک نظام ریاضی را بر اساسِ مفید بودنش مورد داوری قرار دهیم. می‌پذیرم که از این دیدگاه، شهودگرایی، حتی بختِ کمتری برای پذیرفته شدن دارد، زیرا تأکید بر چند اشارهٔ مختصر که امکان دارد در فیزیک استفاده شده باشد ساده‌اندیشانه خواهد بود [ژ. ل. دِستوچِز ۱۹۵۱]؛ به نظر من [ریاضیات شهودگرا] برای مفید واقع شدن در فلسفه، تاریخ و دیگر علوم انسانی بختِ بیشتری دارد. در حقیقت ریاضیات، از دیدگاهِ شهودی، مطالعهٔ کارکردهای معینی از ذهنِ بشر است، و تنها از این جنبه شبیه به این علوم است. ولی آیا واقعاً سودمندی تنها معیارِ ارزشمندی است؟ به آسانی می‌توان بسیاری از فعالیتهای سودمند چون هنرها، ورزش‌ها و تفریحاتِ سالم را ذکر کرد که به هیچ وجه پشتیبانِ علم نیستند. ما مدعی ارزشی از این دست برای شهودگرایی هستیم که قبل از شروع تعریف کردنش دشوار است ولی آشکارا به هنگام کار با این موضوع احساس می‌شود. می‌دانید که چطور فیلسوفان در مسألهٔ تعریف مفهومِ ارزش در هنر به زحمت افتاده‌اند؛ با این حال هر فرد تحصیل کرده‌ای این ارزش را احساس می‌کند. ارزش ریاضیاتِ شهودگرا وضعیتی مشابه دارد.

صورت: برای بیشترِ ریاضیدانان این ارزش به طرز ناخوشایندی از این حقیقت متأثر شده است که شما ارزشمندترین نتایج ریاضی را نابود می‌سازید؛ یک روش ارزشمند برای مبانی ریاضی باید تا آنجا که ممکن است نتایج این دانش را حفظ کند [د. هیلبرت ۱۹۲۲]. این امر حتی به کمک روش‌های ساختنی نیز عملی است؛ زیرا امکانِ تعریف‌های سازنده سوای آنچه که مورد حمایت شهودگرایان است وجود دارد. به همین خاطر، حتی تعداد معدودی از شهودگرایان واقعی نیز با تثبیت شدن تعریف ساختپذیری موافق نیستند. رادیکال ترین مثال، رد مفهوم نقیض توسط گریس است، که دیگرِ شهودگرایان آن را به عنوان مفهومی کاملاً روشن می‌پذیرند [هـ. فرویدنتال ۱۹۳۶؛ گ. ف. س. گریس ۱۹۴۶ A، صفحهٔ ۲۴]. از سوی دیگر محتمل بنظر می‌رسد که برداشتی محتاتانه‌تر از ساختپذیری به حفظِ بخش‌های حیاتی ریاضیات کلاسیک بیانجامد.

شهود: وقتی شهودگرایان دربارهٔ زبان صوری نشده صحبت می‌کنند، باید واگرایی‌های اندکی را میان عقاید آنان انتظار داشت. اگر چه این واگرایی‌ها زودتر و پرتنش‌تر از آنچه پیش‌بینی می‌شد به پا خواسته است، به هیچ روی نگران کننده نیستند، زیرا همگی آنها به قسمت‌های کم اهمیت‌تر

مربوطند و بر ایده‌های بنیادی که در بارهٔ آنها توافقِ کامل وجود دارد تأثیر نمی‌گذارند. اما دربارهٔ آسیب رساندن به ریاضیات که مرا بدان متهم کردید، باید آن را چون نتیجهٔ ناگزیر [نگرشِ] خاص ما در نظر گرفت. این کار، همچنین می‌تواند چون دور ریختن زیورآلات زائد که در ظاهر زیبا، اما در باطن خود توخالی هستند تلقی شود، و به لطفِ موهبت‌های ظریف و شیوه‌های نازک اندیشانه‌ای که شهودگرایان به یاری آنها اندیشهٔ ریاضی را غنی ساخته‌اند دستِ کم تا اندازه‌ای جبران شده است.

صورت: بحث ما، شکل بحثی در بارهٔ ارزش‌ها را به خود گرفته است. من از حرف‌های شما چنین نتیجه می‌گیرم که حاضرید برداشت‌های دیگر از ریاضیات را قدر نهید، اما [در عین حال] مدعی ارزشی فی نفسه برای برداشت خودتان هستید. درست است؟

شهود: کاملاً، تنها بحثِ قاطع در مبانی ریاضی که من مخالف آن هستم اینست که ریاضیات کلاسیک معنایی واضح دارد، باید اعتراف کنم که این مطلب را نمی‌فهمم. ولی حتی کسانی که می‌گویند آن را می فهمند باید قادر به فهمیدن دیدگاه ما و ارج نهادن به کارِ ما [نیز] باشند.

حرف: به کمک پارادوکس‌ها نشان داده شده است که ریاضیات کلاسیک کاملاً واضح نیست.

صورت: بله، اما نقد شهودگرایانه بسیار بیش از آنچه که برای اجتناب کردن از پارادوکسها لازم است پیش می‌رود؛ آقای شهود هنوز به آنها چون استدلالی در تایید برداشت خود اشاره نکرده است و بدون شک به نظر او سازگاری، چیزی جز محصول جانبی نیست.

علامت: آقای شهود، شما فعالیت خود را چون ساختمان ذهنی توصیف می‌کنید، اما فرآیندهای ذهنی تنها از خلالِ اعمالی که نتیجه‌ی آنهاست قابل مشاهده‌اند و در مورد شما در خلال کلامی که می‌گویید و فرمولهایی که می‌نویسید. آیا این بدان معنی نیست که تنها راه مطالعهٔ شهودگرایی مطالعه کردنِ نظام صوریی است که شهودگرایی می‌سازد؟

شهود:هنگام نگاه به درختی که آنجاست می‌پذیرم که درختی را می‌بینم، آموزشی قابل توجه لازم است تا این عقیده را با این دانش که در واقع امواج نور به چشمان من می‌رسند و مرا به ساختن تصویری از آن درخت سوق می‌دهند جانشین سازم. به طریقی مشابه، در گفتگو با شما، متقاعد می‌شوم که من عقاید خود را به شما می‌گویم، اما شما به من می‌آموزید که در واقع من ارتعاشاتی در هوا تولید می‌کنم که باعث می‌شود شما عملی انجام دهید، به عنوان مثال تولید کردنِ ارتعاشی دیگر. در هر دو حالت نخستین نگرش از نوع طبیعی است، دومین [نگرش] یک ساختمان ذهنی است. اغلب فراموش می‌شود که صدقِ چنین ساختمانهایی به وضعیت فعلی علم بستگی دارد و کلمه‌های « در واقع » باید به شکلِ «مطابق با دیدگاه دانشمندان معاصر» ترجمه شود. بنابراین ترجیح می‌دهم از این ایده پیروی کنم که هنگام بیان ریاضیات شهودگرا، من اندیشه‌هایی را به شنوندگانم منتقل می‌کنم، این کلمات نباید به معنای نظامی فلسفی بلکه باید به معنای رایج در زندگی روزمره در نظر گرفته شوند.

علامت: پس شهودگرایی، به عنوان شکلی از تعامل میان آدمیان، پدیده‌ای اجتماعی است و مطالعهٔ آن به تاریخ تمدن تعلق دارد.

شهود: مطالعهٔ آن، نه انجام آن. در این نکته با آقای عملگرا موافقم که *نخست زندگانی بعد فلسفه*[1] و اگر دوست داریم می‌توانیم دومی را به دیگران واگذاریم. اجازه دهیم آنان که پس از ما می‌آیند بپرسند چرا این ساختارهای ذهنی را ساخته‌ام و چطور می‌توانند در فلسفه‌ای تعبیر شوند؛ از ساختن آنها به این دلیل خاطر که به طریقی به وضوحِ اندیشهٔ بشری کمک خواهند کرد خرسندم.

عملگرا: این خطای مشترک فیلسوفان است که راجع به چیزهایی که می‌دانند، به صورت ناقص صحبت می‌کنند و نزدیک است که ما نیز در این دام گرفتار آییم. آیا آقای شهود مایلند به ما نمونه‌هایی از استدلال شهودگرا ارایه دهند تا بلکه ما قادر به قضاوت در بارهٔ کیفیت این مطلب شویم؟

شهود: یقیناً، حتی به این نتیجه رسیده‌ام که چند درسگفتار به شما بصیرت بهتری راجع به آن خواهد داد تا بحث‌های طولانی. ممکن است از آقایان محترمی که علاقمند به توضیحات من هستند تقاضا کنم با من به کلاس درس بیایند؟

مراجع

[1] L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Thesis, Amesterdam 1907.

[2] L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor wijsbegeerte 2, 1908.

[3] R. Carnap, *Logissche syntax der Sprache*, Wien 1934.

[4] R. Carnap, *The logical syntax of language*, London 1937.

[5] H. B. Curry, *Outlines of formalist philosophy of Mathematics*, Amesterdam 1951.

[6] J. L. Destouches, *Sur la mecanique classique et l'intuitionnisme*, Proc. Akad. Amesterdam Ser. A 54, pp. 74-79= Indagationes math. 13, pp. 74–79.

[7] J. Dieudonne, *L'axiomatiques modernes*, Congres intern. de philosophie des sciences, Paaris 1949. (Actualites scientifiques et industrielles 1137, Paris 1951.)

[8] W. Dubislav, *Die Philosophie der Mathematik in Gegenwart*, Berlin 1932.

[9] H. Freudenthal, *Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln*, Compositio maath. 4, pp. 112–116.

[10] G. F. C. Griss, *Idealistische Filosofie*, Een humanistische levens- en wereldbeschouwing, Arnhem 1946.

1) Primum vivere, deinde philosophari

[11] G. F. C. Griss, *Negationless intuitionistic mathematics I*, Proc. Akad. Amsterdam 49, pp. 1127–1133=Indagaationes math. 8, pp. 675–681.

[12] D. Hilbert, *Neubegrundung der Mathematik*, Abhandl. mat. Seminar Hamburg Univers. 1, pp. 157–177.

[13] K. Menger, *Der Intuitionismus*, Blätter deutsch. Philosophie 4, pp. 311–325.

مترجم: احسان ممتحن
دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم گروه ریاضی
پست الکترونیک momtahan_e@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۴۵ تا ۵۴

اعداد اول در حلقهٔ اعداد صحیح گاوس

منوچهر میثاقیان

چکیده

حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی به تعبیری نخستین گسترش حلقهٔ اعداد صحیح معمولی $\mathbb{Z}$ است. حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی $\mathbb{Z}[i]$ شباهت‌هایی به $\mathbb{Z}$ دارد، از جمله یک حلقهٔ اقلیدسی و در نتیجه یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا[۱] است. با توجه به اهمیت اعداد اول، بررسی اعداد اول در $\mathbb{Z}[i]$ نیز از اهمیت ویژه‌یی برخوردار است.

در این مقاله به دو پرسش زیر پاسخ می‌دهیم:

- کدام یک از اعضای $\mathbb{Z}[i]$ اول هستند؟
- شرط لازم و کافی برای آن که عدد اول $y \in \mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}[i]$ نیز اول باشد چیست؟

۱. مقدمه

اعداد اوّل در مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، مهمترین مجموعهٔ عددی را تشکیل می‌دهند که همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند و هستند. در واقع این اعداد اساسی‌ترین مصالح ساختمانی در نظریه اعداد و بلکه تمامی ریاضیات هستند. یک خاصیت بنیادین حلقهٔ اعداد صحیح این است که حلقهٔ اقلیدسی است. اوّلین گسترش این حلقه، $\mathbb{Z}[i]$، باز هم یک حلقهٔ اقلیدسی و بنابراین یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا(UFD) است. این حلقه به حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی معروف است. طبیعی است که بپرسیم اعداد اول در $\mathbb{Z}[i]$ چه اعدادی هستند؟ به عبارت دیگر چگونه می‌توانیم مشخص کنیم که عدد $z \in \mathbb{Z}[i]$ اوّل است یا نه؟ آیا عدد اوّل $p \in \mathbb{Z}$ باز هم در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل است؟ در این نوشتار به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهیم.

۲. پیش‌نیازها و یادآوری‌ها

در سرتاسر این نوشتار $\mathbb{Z}$ حلقهٔ اعداد صحیح را نمایش می‌دهد. عدد صحیح $p > ۱$ را یک عدد اوّل

1) Unique factorization domain (UFD)

در $\mathbb{Z}$ می‌گوییم هرگاه تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند.

تعریف ۲.۱. عدد صحیح m را یک مقسوم علیه عدد صحیح n می‌گوییم و می‌نویسیم $m|n$ اگر و تنها اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به گونه‌یی که $n = km$

تعریف ۲.۲. فرض می‌کنیم m یک عدد صحیح مثبت است. دو عدد صحیح a و b را هم ارز به پیمانهٔ m می‌گوییم هرگاه m یک مقسوم علیه عدد $a - b$ باشد. این مفهوم را به صورت $a \equiv b(m)$ می‌نویسیم. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbb{Z}$ تعریف می‌کند. با مسامحه رده‌های هم‌ارزی این رابطه را به صورت $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, m - ۱\}$ نشان می‌دهیم. این مجموعه با جمع و ضرب به پیمانهٔ m یک حلقهٔ جابجایی یکدار تعریف می‌کند. اگر $m = p$ یک عدد اوّل باشد در این صورت هر ردهٔ هم‌ارزی غیرصفر وارون‌پذیر است. یعنی $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ یک هیأت می‌شود. تعداد عناصر غیرصفر $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ برابر است با $p - ۱$. از این رو داریم:

قضیهٔ کوچک فرما. برای عدد صحیح a که بر p بخش پذیر نباشد،

$$a^{p-۱} \equiv ۱(p)$$

به نتایج سادهٔ زیر هم نیاز داریم:

لم ۲.۱. اگر برای اعداد صحیح و مثبت a و b داشته باشیم $ab = ۱$، در این صورت $a = b = ۱$.

اثبات ساده است و به عنوان تمرین مقدماتی واگذار می‌شود.

لم ۲.۲. برای اعداد صحیح و نامنفی a و b اگر $a + b = ۱$ آنگاه $b = ۰$ و $a = ۱$ یا $b = ۱$ و $a = ۰$. اثبات ساده است و به عنوان تمرین مقدماتی واگذار می‌شود.

قضیه ۲.۱. فرض کنیم p یک عدد اوّل است. اگر $p|ab$ دراین صورت $p|a$ یا $p|b$.

این قضیه در هر حلقهٔ اقلیدسی معتبر است. مطالعهٔ مقدماتی حلقهٔ $\mathbb{Z}$ که تعریف حلقه‌های اقلیدسی و اثبات قضیهٔ فوق را در بردارد جزٔ مطالب آشنادر سطح دبیرستان است. به عنوان مثال، رجوع شود به بند ۲ از فصل ۳ صفحات ۱۶۴ تا ۲۰۳ کتاب شرح ریاضیات جدید [۳].

تعریف ۲.۳. فرض کنیم p یک عدد اوّل است. عدد z را یک ریشهٔ اوّلیه به پیمانهٔ p گوییم. هرگاه $z^{(p-۱)} \equiv ۱(p)$ و $p - ۱$ کوچکترین عدد مثبت با این خاصیت باشد. مثلاً عدد ۳ یک ریشهٔ اوّلیه به پیمانهٔ ۵ است امّا ۴ یک ریشهٔ اوّلیه به پیمانهٔ ۵ نیست زیرا $۴^۲ \equiv ۱(۵)$ و $۴ = ۱ - ۵ > ۲$. فرض کنیم برای عدد اوّل p، z یک ریشهٔ اوّلیه به پیمانهٔ p باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $۱ \leq a < p$ یک و تنها یک عدد صحیح $۱ \leq i \leq p - ۱$ وجود دارد به گونه‌یی که $a \equiv z^i(p)$.

۳. قانون تقابل درجه دوم

قانون تقابل درجه دوم یکی از زیباترین و در عین حال قویترین مفاهیم در نظریه اعداد است که صورت‌های مختلف و متفاوتی دارد. یکی از ساده‌ترین و معمولی‌ترین اشکال آن را که در این جا نیاز داریم بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم p یک عدد اوّل در حلقهٔ $\mathbb{Z}$ است. عدد صحیح $a \in \mathbb{Z}$ را یک **ماندهٔ درجه**

دوم به پیمانهٔ p می‌گوییم هرگاه عدد صحیح $x \in \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد که

$$x^{۲} \equiv a(\mathrm{mod}P)$$

یعنی $x^{۲} - a$ بر p بخش‌پذیر باشد.
مثلاً برای $p = ۷$، عدد ۲ یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ ۷ است زیرا

$$۳^{۲} = ۹ \equiv ۲(۷)$$

امّا ۳ یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ ۷ نیست، همچنان که می‌توان نشان داد که معادلهٔ $x^{۲} \equiv ۳(۷)$ جواب ندارد. (کافی است که همهٔ اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را در معادلهٔ بالا قرار داد و ملاحظه کرد که هیچکدام صدق نمی‌کند.)

تعریف ۳.۲. فرض کنیم p یک عدد اوّل در $\mathbb{Z}$ است. نماد(تابع) لژاندر که به صورت $(\frac{\circ}{P})$ نشان داده می‌شود، برای هر عدد صحیح $a \in \mathbb{Z}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} a \text{ یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ } p \text{ است} \\ ۰ & \text{اگر } a \text{ بر } p \text{ بخش‌پذیر است} \\ -۱ & \text{اگر } a \text{ ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ } p \text{ نیست} \end{cases}$$

مثلاً $(\frac{۲}{۷}) = ۱$، $(\frac{۳۵}{۷}) = ۰$ و $(\frac{۳}{۷}) = -۱$.

قضیه اویلر. فرض کنیم p یک عدد اوّل فرد است. دراین صورت برای عدد صحیح a داریم:

$$a^{(\frac{p-۱}{۲})} \equiv (\frac{a}{p})(\mathrm{mod}p)$$

اثبات. فرض کنیم z یک ریشهٔ اوّلیه به پیمانهٔ p است. هر عدد صحیح a هم‌ارز یک توان z است، بخصوص a یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ p است اگر هم‌ارز یک توان زوج z باشد. فرض کنیم a یک ماندهٔ درجه دوم (به پیمانهٔ p) است یعنی $(\frac{a}{p}) = ۱$. بنابراین داریم:

$$a \equiv z^{۲k}(\mathrm{mod}p)$$

برای هر عدد صحیح و مثبت k بنابر قضیهٔ کوچک فرما داریم:

$$a^{(\frac{p-۱}{۲})} \equiv (g^{۲k})^{(\frac{p-۱}{۲})} \equiv (g^{p-۱})^{k} \equiv ۱^{k} \equiv ۱(\mathrm{mod}p) \equiv (\frac{a}{P})(\mathrm{mod}p).$$

حالا فرض کنیم a ماندهٔ درجه دوم نیست یعنی $(\frac{a}{P}) = -۱$. این واقعیت که a یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ p نیست به این معنی است که a هم‌ارز یک توان فرد z به پیمانهٔ p است. بنابراین داریم:

$$a \equiv \xi^{۲k+۱}(\mathrm{mod}p)$$

برای یک عدد صحیح و مثبت k. با استفاده از قضیهٔ کوچک فرما داریم:

$$a^{(\frac{p-1}{2})} \equiv (z^{2k+1})^{(\frac{p-1}{2})} \equiv (z^{p-1})^k.z^{(\frac{p-1}{2})} \equiv z^{(\frac{p-1}{2})}(\text{mod}p)$$

واضح است که $z^{(\frac{p-1}{2})}$ هم‌ارز ۱ و ۱− است امّا چون $\frac{p-1}{2} < p-1$ و z یک ریشهٔ اوّلیه است پس $z^{(\frac{p-1}{2})}$ نمی‌تواند هم‌ارز ۱ باشد در نتیجه:

$$a^{(\frac{p-1}{2})} \equiv z^{(\frac{p-1}{2})} \equiv -1(\text{mod}p) \equiv (\frac{a}{p})(\text{mod}p)$$

و اثبات تمام است.

نماد لژاندار یک تابع ضربی است. دقیقتر این تابع دارای خواص زیراست.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم p یک عدد اوّل باشد. برای هر دو عدد صحیح $a, b \in \mathbb{Z}$ داریم:

الف) $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$

ب) $a \equiv b(\text{mod}p) \Longrightarrow (\frac{a}{p}) = (\frac{b}{p})$

اثبات. اگر p یکی از اعداد a یا b را بشمارد، قضیه بدیهی است. بنابراین فرض کنیم p هیچکدام از اعداد a یا b را نشمارد. در این صورت:

الف) بنابر قضیهٔ اویلر داریم:

$$\begin{aligned}
(\frac{ab}{p}) \equiv &\quad (ab)^{(\frac{p-1}{2})}(\text{mod}p) \\
\equiv &\quad (a)^{(\frac{p-1}{2})}(b)^{(\frac{p-1}{2})}(\text{mod}p) \\
\equiv &\quad ((a)^{\frac{p-1}{2}}(\text{mod}p))((b)^{\frac{p-1}{2}}(\text{mod}p)) \\
= &\quad (\tfrac{a}{p})(\tfrac{b}{p})
\end{aligned}$$

ب) بی‌درنگ از تعریف نتیجه می‌شود. اثبات تمام است.

قضیه (قانون تقابل درجه دوم). اکنون صورتی از قانون تقابل درجه دوم گاوس را می‌آوریم که نیازمان را برطرف خواهد کرد.

فرض کنیم p یک عدد اوّل فرد است. دراین صورت

$$(\tfrac{-1}{p}) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1(\text{mod}4) \\ -1 & p \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}$$

اثبات. فرض کنیم $p \equiv 1(\text{mod}4)$، در این صورت $p = 4k+1$ برای یک عدد صحیح k. از این جا خواهیم داشت $\frac{p-1}{2} = 2k$ و بنابر قضیه اویلر داریم:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{-1}{p})(\text{mod}p)$$

$$۱=(-۱)^{۲k}\equiv(\frac{-۱}{p})(\mathrm{mod}p)\Longrightarrow(\frac{-۱}{p})=۱$$

یعنی -۱ یک ماندهٔ درجه دوم به پیمانهٔ p است.
اگر $p\equiv ۳(\mathrm{mod}۴)$ در این صورت برای یک عدد صحیح k داریم:

$$p=۳+۴k$$

یعنی $\frac{p-۱}{۲}=۲k+۱$ و مجدداً بنابر قضیه اویلر داریم

$$(\frac{-۱}{p})\equiv(-۱)^{(\frac{p-۱}{۲})}(\mathrm{mod}p)\equiv-۱(\mathrm{mod}p)$$

بنابراین $(\frac{-۱}{p})=-۱$

قضیه ۳.۲. عدد اوّل $p\in\mathbb{Z}$ را می‌توان به صورت مجموع مربع‌های دو عدد صحیح نوشت اگر و تنها اگر $p=۲$ یا $p\equiv ۱(\mathrm{mod}۴)$.

اثبات. اگر $p=۲$ در این صورت $p=۱+۱=۱^۲+۱^۲$. اگر $p=x^۲+y^۲$ در این صورت x و y هر دو نمی‌توانند زوج باشند و چون p اوّل است هر دو می‌توانند فرد باشند اگر $x^۲=y^۲=۱$ و بنابراین $p=۲$.

فرض کنیم p عدد اوّل فردی است. اگر $p=x^۲+y^۲$ در این صورت یکی از اعداد x یا y فرد و دیگری زوج است. فرض کنیم $x=۲k$ و $y=۲l-۱$ است.

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}p&=(۲k)^۲+(۲l-۱)^۲\\&=۴k^۲+۴l^۲-۴l+۱\\&=۴(k^۲+l^۲-l)+۱\end{aligned}$$

یعنی $p\equiv ۱(\mathrm{mod}۴)$.

برعکس فرض کنیم $p\equiv ۱(\mathrm{mod}۴)$. بنابر قضیه تقابل درجه دوم اعداد صحیح x و t وجود دارند به گونه‌یی که $pt=x^۲+۱$ و $۱\leq t<p$.

اگر $t=۱$ حکم تمام است و اگر $t\geq ۲$، عدد صحیح $y\in\mathbb{Z}$ را می‌توان یافت به طوری که $y\equiv x(\mathrm{mod}\ t)$ و $\frac{-t}{۲}<y<\frac{t}{۲}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$y^۲\equiv x^۲(\mathrm{mod}\ t)$$

$$۱\equiv ۱(\mathrm{mod}\ t)$$

از این جا خواهیم داشت:

$$y^۲+۱\equiv x^۲+۱\equiv ۰(mod\ t)$$

یعنی $y^۲ + ۱ = rt$ برای عدد صحیح $۱ \leq r < t$. و چون داریم $x^۲ + ۱ = pt$، از ضرب پهلو به پهلوی این دو هم‌ارزی خواهیم داشت:

$$(y^۲ + ۱)(x^۲ + ۱) = prt^۲$$

حاصلضرب سمت چپ این رابطه برابر است با

$$(y^۲ + ۱)(x^۲ + ۱) = (x - y)^۲ + (xy + ۱)^۲$$

یعنی

$$(x - y)^۲ + (xy + ۱)^۲ = prt^۲$$

با توجه به روابط بین x و y واضح است که هر دو عامل $(x - y)^۲$ و $(xy + ۱)^۲$ بر $t^۲$ بخش‌پذیرند. بنابراین داریم.

$$(\frac{x - y}{t})^۲ + (\frac{xy + ۱}{t})^۲ = rp$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که ضریب کوچکتری از $p(r < t)$ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو مربع نوشت. اگر $r = ۱$ حکم تمام است و اگر $r \geq ۲$ روش بالا را می‌توان تکرار کرد تا ضریب کوچکتری از p را به صورت حاصل جمع دو مربع بتوان نوشت. واضح است که پس از تکرار با پایانی به ضریب ۱ می‌رسیم و برهان تمام است.

۴. حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی

فرض کنیم i واحد انگاری است، یعنی در رابطهٔ اساسی $i^۲ = -۱$ صدق می‌کند. قرار می‌دهیم

$$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni | m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

این مجموعه با جمع و ضرب برگرفته از هیأت اعداد مختلط یک حلقهٔ جابجایی یکدار است. این حلقه که $\mathbb{Z}$ را به صورت یک زیرحلقه در بر دارد به حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی معروف است. تابع ν، نرم، را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \{۰, ۱, ۲, \ldots, n, \ldots\}$$
$$\nu(m + ni) = m^۲ + n^۲$$

این تابع دارای خواص زیر است:

(۱) برای هر عدد صحیح گاوسی $z = m + ni \neq ۰$ داریم $\nu(z) \geq ۰$ و برعکس اگر $\nu(z) \neq ۰$

آنگاه $z \neq ۰$.
(۲) برای همهٔ اعداد صحیح گاوسی $z_۱$ و $z_۲$ داریم:

$$\nu(z_۱z_۲) = \nu(z_۱)\nu(z_۲)$$

به کمک این نرم می‌توان نشان داد که $\mathbb{Z}[i]$ یک حلقهٔ اقلیدسی و بنابراین یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتا است.

تعریف ۴.۱. عدد $z = m + ni \in \mathbb{Z}[i]$ را وارون پذیر(یا یکان) می‌گوییم هرگاه عدد $z^{-۱} = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ وجود داشته باشد که

$$zz^{-۱} = ۱$$

لم ۴.۱. مجموعهٔ یکان‌ها (وارون پذیر) در حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$ برابر است با

$$U = \{-۱, ۱, -i, i\}$$

اثبات . فرض کنیم $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ یکان است. بنابراین $z^{-۱} = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ وجود دارد به طوری که

$$zz^{-۱} = ۱$$

از این جا داریم:

$$\nu(zz^{-۱}) = \nu(z)\nu(z^{-۱}) = \nu(۱)$$
$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = ۱$$

از این رابطه بنابر لم ۲.۱ خواهیم داشت $a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲ = ۱$ و بنابر لم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $a = \pm ۱$ یا $b = \pm ۱$ یعنی $z = \pm ۱$ یا $z = \pm i$.

تعریف ۴.۲. عدد $z = m + ni \in \mathbb{Z}[i]$ را اوّل می‌گوییم هرگاه از برابری زیر

$$m + ni = (a + bi)(c + di)$$

نتیجه بگیریم یکی از عامل‌های سمت راست یکان است. به عنوان مثال، ۵ در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل نیست زیرا می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه کرد

$$۵ = (۱ + ۲i)(۱ - ۲i)$$

همین طور $z = ۳ + ۴i$ اوّل نیست زیرا

$$۳ + ۴i = (۲ + i)^۲$$

امّا ۳ و $z = ۲ + i$ اوّل هستند. مثلاً برای $z = ۲ + i$ اگر داشته باشیم

$$z = ۲ + i = (a + bi)(c + di)$$

آنگاه باید داشته باشیم

$$\nu(۲ + i) = \nu(a + bi)\nu(c + di)$$
$$۵ = (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲)$$

از این جا با توجه به این که ۵ در $\mathbb{Z}$ عددی اوّل است نتیجه می‌گیریم که $a^۲ + b^۲ = ۱$ یا $c^۲ + d^۲ = ۱$ یعنی $a + bi$ یا $c + di$ باید یکان باشد.

قضیهٔ ۴.۱. عدد اوّل $p \in \mathbb{Z}$ در حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$ اوّل است اگر و تنها اگر $p \equiv ۳ (\mathrm{mod} ۴)$

اثبات. فرض کنیم p در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل است. اگر $p \not\equiv ۳ (\mathrm{mod} ۴)$ در این صورت $p = ۲$ یا $p = ۱ (\mathrm{mod} ۴)$. بنابراین براساس قضیه ۳.۲، p را می‌توان بصورت مجموع دو مربع کامل نوشت یعنی $p = m^۲ + n^۲$ و از این جا خواهیم داشت:

$$p = m^۲ + n^۲ = (m + ni)(m - ni)$$

یعنی p در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل نیست که خلاف فرض ماست. برعکس فرض کنیم $p \equiv ۳ (\mathrm{mod} ۴)$. اگر p در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل نباشد در این صورت p را می‌توان در $\mathbb{Z}[i]$ به صورت زیر تجزیه کرد:

$$p = (a + bi)(c + di)$$

این رابطه نتیجه می‌دهد که

$$\nu(p) = \nu(a + bi)\nu(c + di)$$
$$p^۲ = (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲)$$

چون p در $\mathbb{Z}$ اوّل است بنابراین مطابق قضیه ۲.۱ باید داشته باشیم

$$p|(c^۲ + d^۲) \quad \text{یا} \quad p|(a^۲ + b^۲)$$

فرض کنیم $p|a^۲ + b^۲$ یعنی $pt = a^۲ + b^۲$ برای یک عدد صحیح t. از این جا خواهیم داشت:

$$a^۲ + b^۲ \equiv \circ (\mathrm{mod} p)$$

یا

$$a^۲ \equiv -b^۲ (\mathrm{mod}\ p)$$

و بنابر قضیه ۳.۱(ب) خواهیم داشت:

$$(\frac{a^۲}{p}) = (\frac{-b^۲}{p})$$

اگر بند الف قضیه ۳.۱ را در مورد رابطهٔ اخیر به کار بگیریم خواهیم داشت:

$$(\frac{a^۲}{p}) = (\frac{a}{p})^۲ = (\frac{-۱}{p})(\frac{b}{p})^۲$$

چون همواره $(\frac{a}{p}) = \pm ۱$ و $(\frac{b}{p}) = \pm ۱$ (حالت پیش پا افتادهٔ $(\frac{a}{p}) = ۰$ یا $(\frac{b}{p}) = ۰$ نمی‌تواند این جا پیش بیاید). بنابراین

$$(\frac{a}{p})^۲ = (\frac{b}{p})^۲ = ۱$$

یعنی $(\frac{-۱}{p}) = ۱$ و بنابر قضیهٔ تقابل درجه دوم خواهیم داشت $p \equiv ۱ (\bmod ۴)$ که خلاف فرض است. بنابراین p در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل است.

قضیهٔ ۴.۲. عدد صحیح گاوسی $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ با $ab \neq ۰$ اوّل است اگر و تنها اگر $\nu(z)$ در $\mathbb{Z}$ اوّل باشد.

اثبات. فرض کنیم $z = a + bi$ در $\mathbb{Z}[i]$ اوّل است. اگر $\nu(z) = a^۲ + b^۲$ در $\mathbb{Z}$ اوّل نباشد در این صورت عدد اوّل p در $\mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $p | a^۲ + b^۲$ یعنی $a^۲ + b^۲ = pq$ که در آن q یک عدد صحیح در $\mathbb{Z}$ است و $q > ۱$. در $\mathbb{Z}[i]$ رابطهٔ بالا برابر است با

$$(a + bi)(a - bi) = pq$$

چون $\mathbb{Z}[i]$ اقلیدسی است بنابر قضیه ۲.۱ نتیجه می‌شود که

$$(a + bi) | p \quad \text{یا} \quad (a + bi) | q$$

فرض کنیم $a + bi | p$ یعنی $p = z(a + bi)$ که در آن $z \in \mathbb{Z}[i]$، بنابراین اگر قرار دهیم $z = c + di$ آنگاه: $p = (c + di)(a + bi)$. از این جا خواهیم داشت:

$$\nu(p) = \nu(c + di)\nu(a + bi)$$

یا

$$p^۲ = (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲).$$

نظر به این که $(a^۲ + b^۲) = pq$ رابطهٔ اخیر نتیجه می‌دهد که

$$p = q(c^۲ + d^۲)$$

بنابراین $p = q$ یا $p = c^۲ + d^۲$. اگر $p = q$ در این صورت $c^۲ + d^۲ = ۱$ یعنی $z \in U$ که غیر ممکن است (زیرا p یک عدد صحیح در $\mathbb{Z}$ است نه در $\mathbb{Z}[i]$). و اگر $p = c^۲ + d^۲$ در این صورت $q = ۱$ که خلاف $q > ۱$ است. بنابراین $\nu(z)$ در $\mathbb{Z}$ اوّل است. اگر $a + bi | q$ در این صورت چنانچه q اوّل است، استدلال بالا را تکرار می‌کنیم و اگر q اوّل نیست در این صورت q یک فاکتور اوّل دارد و

استدلال بالا قابل تکرار است. بنابراین با تکرار تعدادی متناهی از استدلال بالا حکم ثابت می‌شود.
برعکس فرض کنیم برای $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$، $\nu(z)$ در $\mathbb{Z}$ اوّل است. اگر z اوّل نباشد در این صورت

$$z = a + bi = (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i)$$

در این جا خواهیم داشت:

$$\nu(z) = \nu(\alpha + \beta i)\nu(\gamma + \delta i)$$

یا

$$\nu(z) = (\alpha^۲ + \beta^۲)(\gamma^۲ + \delta^۲)$$

چون $\nu(z)$ اوّل است، رابطهٔ بالا نتیجه می‌دهد که

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۱ \quad \text{یا} \quad \gamma^۲ + \delta^۲ = ۱$$

و بنابر لم ۲.۲ نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta i$ یا $\gamma + \delta i$ یکان است یعنی $z = a + bi$ اوّل است.

مراجع

[1] Ireland, K. and Rosen, M., "A Classical Introduction to Modern Number Theory", 2^{nd} Edition, Springer-Verlag, 1990.

[2] Silverman, J.H. , "A firendly Introduction to Number theory", 2^{nd} Edition, Prentice Hall, 2001.

[۳] شادمان، ا.، للهی، ک. و واحدی آملی، ع. ا. ،«شرح ریاضیات جدید» چاپ دوم، انتشارات علوی، تهران، ۱۳۶۹.

منوچهر میثاقیان

Manouchehr Misaghian
Mathematics Department
Johnson C. Smith Univ.
Charlotte, Nc 28216
USA
E-mail: mmisaghian@Jcsu.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۵۵ تا ۶۵

دکتر حیدر رجوی

مهدی رجبعلی‌پور

استاد حیدر رجوی در خانواده‌ای که بر اثر آشوب‌های دوران سلطنت احمدشاه و اوایل سلطنت رضاشاه ناچار به ترک سلماس و اقامت در تبریز شد به دنیا آمد و پس از پایان تحصیلات ابتدائی و متوسطه در تبریز، و تحصیلات دانشگاهی در تهران و مینسوتا[1]، خدمات علمی و پژوهشی خود را در مراکز پژوهشی و دانشگاهی پرینستون[2]، شیراز، ایلی‌نوی[3]، تورنتو[4]، هالیفاکس[5]، نیوهمشایر[6]، و واترلو[7] ادامه داد. استاد هم اکنون دوران «آزادپژوهی» خویش را در دانشگاه واترلو می‌گذراند به این معنی که آزادانه در کارهای پژوهشی آن دانشگاه و همزمان (بدون هیچ گونه پایبندیِ اجباری به آن محل) در فعالیت‌های علمی و فرهنگی سراسر دنیا چه به صورت مسافرت و چه به صورت ارتباط رایانه‌ای به دلخواه خود شرکت می‌کند.

اینجانب که از سال ۱۳۴۵ افتخار شاگردی استاد را داشته‌ام مایهٔ خوشوقتیِ خود می‌دانم چند صفحه‌ای در معرفی ایشان بنویسم و امیدوارم قلم ناتوانم همت کند. مقالهٔ خود را در دو بخش تهیه کرده‌ام: بخش اوّل برخی از آنچه ریاضیدانان جهانی در مورد استاد گفته‌اند و بخش دیگر خاطرات شخصی‌ام جهت تکمیل بخش نخست.

شماره ۳۸۳ مجلهٔ معتبر جهانی «جبر خطی و کاربردهای آن» در سال ۲۰۰۴ میلادی به گرامیداشت هفتادمین سال تولد استاد اختصاص یافت. این مجله از دو سال جلوتر به استقبال این امر رفت و از چهار تن متخصص در این رشته تقاضا کرد کار ویراستاری و انتشار شمارهٔ مزبور را بر عهده بگیرند:

۱) **راجندرا باتیا**[8] از دهلی‌نو[9] که کتاب‌های کلاسیکش در نظریهٔ جبر خطی و ماتریس‌ها شهرت جهانی دارد؛

۲) **پیتر رزنتال**[10] از تورنتو که علاوه بر تألیف دو کتاب مرجع در نظریهٔ عملگرها و جبر خطی، مقالات متعددی با همکاری دکتر رجوی و دیگران تألیف کرده است؛

---

1) Minnesota 2) Princeton 3) Illinois 4) Toronto 5) Halifax 6) New Hampshire 7) Waterloo 8) Rajendra Bhatia 9) New Delhi 10) Peter Rosenthal

۳) و ۴) **ماتیاژ املادیچ**[1] و شاگرد سابقش **پیتر شمرل**[2] از استادان و پژوهشگران بنام دانشگاه لوبلیانای[3] اسلونی[4]. این چهار نفر مقدمه‌ای در ۱۵ صفحه بر آن نوشته‌اند که در اینجا ترجمهٔ صفحهٔ اوّل آن را عیناً می‌آورم:

«حیدر رجوی هفتادساله شده؟ بهش نمیاد؛ خیلی سرحاله!»، «نه، او نمی‌تونه هفتاد سالش باشه؛ هنوز داره مثل ساعت کار می‌کنه!»، «هفتاد؟ شوخی نکن؛ اصلاً به قیافه‌اش نمی‌خوره!»

واقعیت دارد؛ حیدر رجوی در ۲۷ دیماه ۱۳۸۳ به هفتادسالگی می‌رسد ولی همچنان سرزنده، خلاق و بانشاط به کار خود ادامه می‌دهد. بیشتر ما که پا به شصت سالگی می‌گذاریم کمابیش کُند می‌شویم. اما حیدر استثناء است. رشد آثار علمی حیدر نشان می‌دهد که خلاقیتش تابعی صعودی از سن اوست.

به گواهی اکثر کسانی که با او کار کرده‌اند، پژوهش در کنار او سرشار از لطف است. وی ریاضیدانی است مطلع و بافراست. عاشق فکر کردن و گفتگو درباره ریاضیات و کار گروهی است. اگر بارها تیرش به سنگ بخورد و یا حتی خطا و سستی نتیجه‌ای که به سختی به دست آورده و گروه همکارش را برای جهش از آن سکو به قله بالاتر آماده کرده، آشکار شود، ذره‌ای از حرارتش کاسته نمی‌شود. با خوشروئی به همه کمک می‌کند و با هیچکس رقابتی ندارد. همواره از روحیه بالائی برخوردار است: لذت ریاضیات، بخشی از لذت کلی زندگی اوست. از معدود کسانی است که درباره‌اش واژه «پرجوش و خروش» به مفهوم واقعی صدق می‌کند. سخنرانی‌هایش عالی هستند: بدون استثناء جذاب و واضح و همگی توام با طعمی از لطیفه‌های حیدری. روی همرفته در زمرهٔ دلپذیرترین آدم‌ها است. دیدار از او و همسرش اورسلا[5] نعمت بزرگی است. به ویژه هر دو آشپزهای قابلی هستند. کمترین دستاورد ملاقات با آنها بهره‌مندی از غذاهای سنتی ایرانی دست پخت حیدر و اورسلا است.

ویراستاران یاد شده پس از ذکر چکیده‌ای که ترجمه کردیم به جزئیات زندگی استاد می‌پردازند. یادآور می‌شوند که علیرغم رشد و نمو در یک محیط آذری زبان، چنان به زبان و ادبیات فارسی علاقمند شده بود که می‌رفت آینده خود را در آن رشته رقم بزند؛ فقط در سال آخر دبیرستان بود که ناگهان به سوی ما ریاضیدانان چرخید و این برای جامعهٔ ما سعادتی بود. از تسلط وی بر زبان‌های آذری (مادری)، فارسی و انگلیسی یاد می‌کنند. از اولین مقاله‌اش در مجله وزین «ترانزَکشِنزِ انجمن ریاضی آمریکا»[7] می‌نویسند که حاصل پایان نامهٔ فوق لیسانس (کارشناسی ارشد) وی از دانشگاه مینسوتا بود و سرانجام از اخذ درجهٔ دکتری از همان دانشگاه در سال ۱۹۶۲ میلادی (۱۳۴۱ ایرانی). البته نوشته‌اند که قبلاً لیسانس (کارشناسی) خود را با رتبهٔ اوّل از دانشگاه تهران گرفته و قلباً به شاگردیِ استادانی همچون علی افضلی‌پور، تقی فاطمی، محمدعلی نوریخالیچی و منوچهر وصال مفتخر شده بود.

---

1) Matiaz Omladic 2) Peter Semrel 3) University of Ljubljana 4) Slovenia 5) Ursula

6) Transactions of the American Mathematical Society

[تا آنجا که ذهن من از گفته‌های استاد به یاد می‌آورد پس از اخذ لیسانس ریاضی از دانشگاه تهران مدتی در همان دانشگاه به کار مشغول بود تا با استفاده از بورس شاگرد اوّلی به آمریکا رفت.] می‌خوانیم که استاد یکسال به صورت پسادکتری در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ[1] پرینستون مشغول بود و در سال ۱۳۴۲ برای خدمت به وطن به ایران برگشت. تا سال ۱۳۵۲ در استخدام دانشگاه شیراز (پهلوی سابق) بود و در این مدت چهار بار به صورت فرصت مطالعاتی یا مرخصی بدون حقوق به دانشگاههای ایلی‌نوی و تورونتو مسافرت کرد که آخرین سفرش منتهی به مهاجرت دائمی او به کانادا و استقرارش در دانشگاه دالهوزی[2] شد. در دانشگاه دالهوزی، حیدر رجوی و پیتر فیلمور[3] (همشاگردی سابقش از دانشگاه مینسوتا) دست در دست هم، گروه پژوهشی فعالی در نظریهٔ عملگرها به وجود آوردند و به بخش ریاضی آنجا رونق بخشیدند. از آنجا که بازنشستگی در سن ۶۵ سالگی امری اجباری و استاد از واژه «بازنشستگی» بیزار بود [و منهم به همین دلیل به جای آن، واژه من‌درآوردی «آزادپژوهی» را خاص استاد رجوی جعل کردم]، لذا استاد در سن ۶۳ سالگی (۱۳۷۷ ایرانی) از کار رسمی انصراف داد و به عنوان استاد ممتاز همچنان به راهنمائی رساله‌ها، سرپرستی اعضای پسادکتری و تدریس گهگاهی ادامه داد و تا سال ۱۳۸۳ که محل آزاد پژوهی خود را از دانشگاه دالهوزی به دانشگاه واترلو تغییر داد اوقاتی را نیز در دانشگاه نیوهمشایر آمریکا، که یکی از پایگاه‌های پژوهشیِ مألوف او بود، گذراند.

حیدر هر کجا بوده دوستان و همکاران را به شرکت در ناهار دسته‌جمعی روزهای سه‌شنبه در یکی از رستوران‌های دور و بر دانشگاه تشویق می‌کرده است. این امر به نام او و پیتر فیلمور ثبت شده و مقررات مربوط به خود را دارد. باب پره، استاد جبر دانشگاه دالهوزی با طبعی شاعرانه و شعری طنزآمیز [که ترجمهٔ آن به فارسی در بضاعت اینجانب نیست]، در ۱۳۶۸، شانزدهمین سالگرد ناهار سه‌شنبه و نقش حماسی حیدر را گرامی داشته است.

گرچه حیدر در آمریکای شمالی ماند ولی تأثیر عمیق خود را از طریق شاگردان قدیمش مانند مهدی رجبعلی‌پور [شرمنده! خودم هستم] و علی اکبر جعفریان [قبلاً دانشگاه صنعتی شریف و فعلاً دانشگاه نیوهیون[4] آمریکا] در ایران برجا گذاشت و هرگز ارتباطش را با اینان و برخی شاگردان دیگر قطع نکرد. حیدر در سال‌های اقامت خود در شیراز که از نظر علمی تنها بود به نظریه گراف روی آورد و با همکاری دکتر مهدی بهزاد [که بعداً با خواهرزاده دکتر رجوی ازدواج کرد] چند مقاله در رشته مزبور نوشت و از این راه «عدد اردیش»[5] خود را از ∞ به ۲ رسانید. دکتر بهزاد درباره تأثیر دکتر رجوی بر ریاضیات ایران چنین می‌گوید: «گرچه توقف حیدر در ایران کوتاه بود ولی تأثیرش بر ریاضیات ایران عمیق بوده است. از معدود کسانیست که شاخهٔ آنالیز تابعی را در ایران رواج داد. در تأسیس انجمن ریاضی ایران به سال ۱۳۵۰ نقش حیاتی داشت. ... بالاخره حیدر رجوی (از دانشگاه‌دالهوزی) و فریدون شهیدی (از دانشگاه پردو[6]) و کامران وفا (از دانشگاه هاروارد[7]) اولین

1) Institute for Advanced Studies 2) Dalhousie University 3) Peter Fillmore 4) The University of New Haven 5) Erdös Number 6) Purdue University 7) Harvard University

کسانی بودند که به عضویت افتخاری انجمن ریاضی ایران برگزیده شدند.»
تعداد مقالات دکتر رجوی در هفتادمین سال تولدش به ۱۳۵ می‌رسید که همچنان رو به رشد است. دو کتاب مرجع در شاخه جبر خطی و نظریهٔ عملگرها نیز با همکاری یار دیرینه‌اش پیتر رزنتال تألیف کرده است. کتاب اوّلی در سال ۱۳۵۲ توسط اشپرینگر ورلاگ[1] منتشر و در سال ۱۳۸۲ توسط انتشارات دوور[2] تجدید چاپ شد. کتاب دوم نیز در سال ۱۳۷۹ توسط اشپرینگر ورلاگ به چاپ رسید. همه مقاله‌ها بدون استثناء در مجلات معتبر بین‌المللی چاپ شده‌اند که بیست و سه تایشان به تنهایی و بقیه‌شان با همکاریِ تعداد زیادی از ریاضیدانان سراسر جهان نوشته شده‌اند که گویای توانائی وی در کار گروهی و جذب دیگران به همکاری با خود می‌باشد.

اینک با ذکر خاطرات شخصی خود از استاد، به بخش دوم مقاله می‌پردازم.

بازتاب خاطرات تلخ خانوادهٔ استاد از مهاجرت اجباری به تبریز چنان تأثری در ذهن وی به جا گذاشته بود که من همیشه فکر می‌کردم خود استاد در این فرار از سلماس شرکت داشته است. ولی با مطالعه تاریخ آشوب‌های آذربایجان غربی و مقایسه آن با تاریخ تولد استاد در سال ۱۳۱۳ متوجه شدم که فتنه‌های روس و انگلیس در سال ۱۳۰۹ با از بین رفتن اسماعیل سیمیتقو توسط ارتش رضاشاه برای همیشه پایان پذیرفت و آذربایجان تا ظهور دموکرات‌ها برای مدتی از آرامش نسبی برخوردار بود. پدر استاد رجوی همراه با همسر اوّلش که خاله استاد بوده و یکی دو تن از برادران استاد بر اثر آشوب‌های غرب آذربایجان مجبور به فرار از زادگاه خود سلماس شده و به تبریز مهاجرت می‌کنند. دکتر رجوی تاریخ دقیقِ تولد پدرش را نمی‌دانست. با این حال می‌دانست که پدرش در سالِ ۱۲۴۶ خورشیدی (۱۸٦۷ میلادی) به دنیا آمده بود. گاه به طنز در موردِ برادرهای بزرگترش، که هیچ وقت ندیده بود، می‌گفت اینقدر می‌دانم که اگر الان زنده بودند مرده بودند! پس از مرگ همسر اوّل، پدر استاد با خواهرزن خود ازدواج می‌کند که استاد ثمره این ازدواج دوّم است. استاد همیشه می‌گفت که به تقلید از خواهر ـ برادرهای قبلی‌اش مادرش را «خالجان» صدا می‌زده و حتی تا چند سال پیش که مادرشان فوت کرد با همین عنوان خطاب می‌شد.

خاطرات کودکی استاد حاکی از نوعی رفاه نسبی است و به نظر می‌رسد حجره پدر رونق کافی داشته است. از گروه اوّل برادران، کاظم رجوی و دیوان شعر فارسی‌اش شهرت دارند و برداشت من و ویراستاران شمارهٔ ویژهٔ مجله جبر خطی فوق‌الاشاره دال بر افتخار خانواده و استاد به وجود چنین برادری بوده است. استاد حیدر رجوی با این رفاه نسبی توانست استعداد و شکوفائی خود را در تحصیل به ویژه ریاضیات و ادبیات فارسی به ظهور برساند. با ظهور دموکراتها در تبریز مدتی هم خود را با سیاست درگیر کرد ولی از کلاس دوازدهم (۱۳۳۱ خورشیدی) تغییر روش داد و تصمیم گرفت زندگی خود را وقف یاددهی و یادگیری ریاضیات کند.

همانطور که گفتیم لیسانس (کارشناسی) ریاضی خود را (در سال ۱۳۳۵) از دانشگاه تهران (شاید هم دانشسرایعالی تهران!) با رتبهٔ اوّل اخذ کرد و (با بورس شاگرد اولی) برای تحصیل در

1) Springer Verlag 2) Dover Publications

دوره‌های فوق لیسانس (کارشناسی ارشد) و دکتری ریاضی به آمریکا سفر کرد. پس از بازگشت به ایران به هیأت علمی دانشگاه شیراز پیوست و با حمایت آقای دکتر منوچهر وصال که معاون آموزشی وقت دانشگاه بود برای نوگشائی دوره فوق لیسانس ریاضی کمر همت بست. اینجانب به تشویق آقای دکتر وصال که در درس آنالیز ریاضی دانشگاه تهران شاگردشان بودم برای دوره فوق‌لیسانس ریاضی دانشگاه شیراز ثبت‌نام کردم و پس از مصاحبه‌ای با استاد رجوی در تابستان ۱۳۴۵ در زمره اولین دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی آن دانشگاه قرار گرفتم. این دوره با ثبت نام تعدادی از دانش آموختگان کارشناسی ریاضی سال‌های ۱۳۴۴ و ۱۳۴۵ دانشگاه تهران و تنی چند از جاهای دیگر شروع شد. در همین زمان مؤسسه ریاضیات مرحوم مصاحب هم در داخل دانشسرایعالی (دانشگاه تربیت‌معلم فعلی تهران) دوره‌ای مشابه فوق‌لیسانس را با نامی دیگر شروع کرد و البته دانشگاه تهران هم یک سالی می‌شد که دوره فوق‌لیسانس را باز کرده بود. همه ما به نحوی در استخدام بخش ریاضی بودیم آنهایی که سال‌های قبل استخدام شده بودند با این که لیسانس داشتند، عنوان مربی داشتند، نوبت که به ما که رسید، آسمان تپید، مربی لیسانس ممنوع شد، و ما را به عنوان کمک مربی به کار گرفتند. (با وجود این تحصیل در دانشگاه شیراز یکی از خوش‌ترین ایام زندگی همهٔ ما محسوب می‌شد.)

در این دوره دکتر رجوی درس‌های آنالیز و آنالیز تابعی، و دکتر بهزاد درس‌های نظریهٔ گراف، دکتر میرباقری درس‌های جبر و دکتر بهبودیان هم درس‌هایی در آمار را تدریس می‌کردند.

کاملاً معلوم بود که شخصیت دکتر رجوی با این که هیچ سمتی نمی‌پذیرفت در امور بخش تأثیرگذار بود. رفاه دانشجویان تحصیلات تکمیلی سرلوحه کارهای او بود و این دوره را نه تنها برای من که خانواده‌ام تنگدست بودند بلکه برای همه دانشجویان دیگر به دوره‌ای از خاطرات خوش و ماندگار مبدل ساخت.

از دانشجویان دوره لیسانس که چشم بپوشم بقیه اعضای بخش ریاضی آن زمان را می‌شد به سه نسل تقسیم کرد: نسل دانشجویان که ما بودیم و سمتمان در بخش مربی یا کمک مربی بود (دو سال بعد که فوق لیسانس گرفتیم همه مربی شدیم)؛ نسل استادان جوان شامل دکتر رجوی، دکتر بهزاد، دکتر بهبودیان و غیره و بالاخره نسل استادان ارشد که (در بخش ریاضی) فقط آقای دکتر وصال را داشتیم.

اولین چیزی که جلب توجه ما دانش‌آموختگان دانشگاه تهران را می‌کرد امکان صحبت «دانشجو» با «استاد» بود و این که دانشجو می‌توانست در حضور استاد «بخندد». حیدر می‌گفت استاد مشاور فقط برای راهنمائی درسی یا پژوهشی دانشجو خلق نشده بلکه باید در انتخاب کیف و کفش و کلاه هم به او کمک کند. این اخلاق حیدر قدرتی به او می‌داد که ما حتی سالها پس از خودمانی شدن و کار مشترک با او خطهای قرمز را رعایت می‌کردیم و اوامرش را مطیع بودیم. رابطهٔ استاد ـ شاگردی ماده کشناکی بود که به جای شکل صلب هندسی، شکلی توپولوژیکی و انعطاف‌پذیر داشت و از انسجامی برخوردار بود که هیچگاه از هم گسیخته نمی‌شد. خیلی‌ها پرروشدن دانشجو را

بهانه قرار داده و از نزدیک شدن او به خود جلوگیری می‌کردند (مخصوصاً در دانشگاه‌های دیگر ایران) ولی حیدر می‌خواست خلاف این مطلب را اثبات کند و قواعد شفاهی و ننوشته‌ای هم بر این روابط وضع کرده بود. استاد از تمام توانش برای بالندگی ما کمک می‌گرفت؛ از تسلطش بر زبان فارسی در اصلاح گفتار و نوشتار ما (فارسی زبانان!) و بر زبان عربی در آوردن شاهد و مثال بر ادعاهایش؛ از خط خوشش و قواعد رسم‌الخطش؛ فراموش نمی‌کنم در دانشگاه تورنتو می‌خواستم صفحه اول رساله دکترایم را به شعری در مورد مادر مزین کنم که حیدر تصادفاً آن سال به تورنتو آمده بود و با حوصله مدادی را با مهارت خاص (مشابهٔ قلم نی ریز) تراش داد و آن شعر را برایم نوشت.

حیدر تمام مسائل و گرفتاری‌های ما را زیر نظر داشت و زیر بار مدیریت‌ها و مسئولیت‌های اداری نرفتن به هیچوجه دلیلی بر کنار کشیدن از خدمات اجتماعی و کمک‌های پدرانه او نبود. در آداب و معاشرت، مقررات خاص خود را اعمال می‌کرد. از تمجید و تعریف و تعارف بیزار بود. هرکس زودتر به در اطاق می‌رسید می‌بایست بدون تعارف عبور کند و اگر چند نفر با هم می‌رسیدند، نفر دست راست می‌بایست به راه خود ادامه دهد. قانون «دست راست» که بین دانشگاهیان ایرانی به نام او ثبت شده کم‌کم به لایه‌های دیگر اجتماع هم نفوذ کرد. هر وقت مشکلی برای ما پیش می‌آمد با ضمانت‌ها (و به قول خودش بیمه‌ها) ما را به کار دلگرم می‌کرد؛ مخصوصاً در مسئله سربازی ما خیلی کمک کرد که خللی در کار و تحصیل و اعزام ما به خارج ایجاد نشود. برای هر تخلفی جریمه‌ای تعیین کرده بود. هر یک دقیقه تأخیر دانشجو ۵ ریال جریمه‌اش بود ولی اگر خودش یا سخنران دیگر تأخیر می‌کرد این جریمه در تعداد حاضران در جلسه که منتظر او مانده بودند ضرب می‌شد. اگر کسی حرف رکیکی حتی به صورت سه نقطه (...) بیان می‌کرد جریمه می‌پرداخت و متأسفانه نرخش یادم نیست. در این مورد خاطره جالبی دارم. یکی از کمک مربی‌ها (فرض کنید (a)) از بچگی شعر (در حقیقت معر) می‌گفت و هر از گاهی دیوانی تنظیم می‌کرد و سالی که از آن می‌گذشت دلش را می‌زد و پاره‌اش می‌کرد؛ و باری دیگر دیوانی دیگر و سالی دگر تکرار می‌شد. یک روز که (a) وارد اطاق مربیان می‌شد مشاهده کرد یکی از مربیان که به طنز خود را (i) می‌نامید خلوت کرده و عمیقاً به نوشتن هجویه‌ای علیه مربی دیگری (فرض کنید (b)) سرگرم است؛ فیل (a) یاد هندوستان می‌کند و در ساختن هجونامه مفصلی به (i) کمک می‌کند. (البته این دو مربی سابقه هجو یکدیگر را داشتند و هرازگاهی ما را در بازار عکاظ خود جمع می‌کردند و شاهکارهای خود را می‌خواندند!) چون دو مربی (i) و (b) یکی دو سالی از کمک مربی (a) بزرگتر بودند قرار شد از شراکت (a) حرفی به میان نیاید مخصوصاً که (a) با (b) الفت خاصی پیدا کرده و همخانه بودند. روز بعد که بازار عکاظ تشکیل و هجونامه قرائت شد بی‌دلیل همه چشم‌ها به سوی (a) خیره شد و انگشت‌ها به سمت او اشاره رفت. البته (a) انکار می‌کرد و (i) هم بدش نمی‌آمد همه افتخار را از آن خود کند. گذشت و صبح جمعه (b) از خواب بیدار شد و (a) را تهدید کرد تا هجونامه‌ای به همان اندازه یا بیشتر بر علیه (i) نسازد با او درس نمی‌خواند که البته اینجا هم به شرط محرمانه بودن نام همکارتوافق شد. هرچه از سعدی و عبید و ایرج میرزا آموخته بودند به کار گرفتند و قصیده طویلی

در برزخِ میانِ شعر و معر ساختند و روز بعد توسط(b) به بازار عکاظ تقدیم شد. آن بازار عکاظ که ما داشتیم با این قصیده ترکید و ترکش‌های لطیف (ابیات بدون سه نقطه) آن تا نسل دکتر رجوی بالا رفت. خوشبختانه کسی جرأت نمی‌کرد قسمت‌های دیگر قصیده را نقل قول کند چون جریمه با گوینده بود نه سراینده و گرنه حیدر می‌بایست دستور تخریب سعدیه را هم صادر کند! یکی از کمک مربی‌ها (فرض کنید (c)) هجونامه را گرفت و رونویس کرد. در حقیقت از دانشگاه تهران که با هم بودیم کارش همین بود. شعر لطیف «بی تو مهتاب شبی باز از آن کوچه گذشتم» و یا شعر «مادر» را برای اولین بار از او شنیدم. هر وقت خسته می‌شدیم (c) کاغذی تا شده از جیب بیرون می‌آورد و گوش جان را با شعری می‌نواخت. گاهی احساسی بود، گاهی طنز و گاهی هم خارج از خط. حالا این هجویه (a)+(b) هم به گنجینه او اضافه شده بود. آقای (c) ادعا می‌کرد شاعر نیست ولی شعر خوب را می‌شناسد؛ (a) و (b) این ادعا را قبول داشتند و افتخار می‌کردند که قصیده‌شان به فهرست گزیده‌های او اضافه شده است. ابیاتی که جریمه نداشت توسط (c) برای حیدر خوانده شد و حیدر را تحریک کرد که بقیه‌اش را از زبان (a) یا (b) بشنود که البته (a) هم به کلی منکر بود و (b) هم از خواندن اشعار برای استاد پرهیز می‌کرد. برخی از این شعرها مقایسه‌ای بین دو جو علمی دانشگاه تهران و دانشگاه شیراز و استادان تازه از فرنگ برگشته‌ای مانند آقای دکتر بهزاد بود؛ به ویژه عدم درک خودمان را از اهمیت دادن دکتر بهزاد به انتشارات به طنز کشیده بودند و حیدر که سابقه مزاح با او داشت از این اشعار حسن (سوء!) استفاده را می‌کرد. چیزی نگذشت که اولین مقالهٔ محمودیان که هنوز فوقش را تمام نکرده بود مشترک با آقای دکتر بهزاد در یک مجله بین‌المللی چاپ شد و ما فهمیدیم که باید شوخی را کنار بگذاریم.

از این موضوع دهسالی گذشت و فکر می‌کنم سال ١٣٥٦ بود. نسل مربی ــ کمک مربی‌ها همگی خارج رفته، دکترایشان را گرفته و به ایران برگشته بودند. من سه سالی بیشتر در کانادا در همان دانشگاه دالهوزی به صورت پسادکتری با حیدر گذرانده بودم و به ایران برگشته بودم و در دانشگاه رضاشاه سابق با دکتر بهزاد همکاری می‌کردم. حیدر هم برای دیدار خویشان به ایران آمده بود. دکتر بهزاد همهٔ ما را در رستورانی دعوت کرده بود. طبق معمول قسمت‌های نرم هجونامه (a)+(b) در فضای دوستانه به چرخش درآمد؛ البته (a) حاضر بود و (b) غایب. ناگهان (c) کاغذ تاشده‌ای از جیب بغلش درآورد و از حیدر خواست که (a) قصیده را به طور کامل بخواند. همه فکر می‌کردند حیدر ملاحظهٔ سن و سال و ریش و زن و بچه و دوستی‌های چندساله و رفت و آمدهای خانوادگی را کرده و قسمت‌های ناشنیده شعر را تحمل می‌کند. همه وساطت کردند که (a) بخواند و آن بیچاره هم به شرط دادن «امان نامه» حاضر به خواندن شد. (یادآور شوم از آنجا که (c) نمی‌توانست چند برگه کاغذ را سال‌ها در جیب بغلش نگه دارد معلوم بود که آن شب با نقشهٔ کامل آمده بود!) قصیده که خوانده شد، استاد عین تاکسیمتر تعداد «سه نقطه»های قصیده را اعلام و به نرخ روز جریمه را تعیین کرد. هرچه (a) فریاد زد بابا امان‌نامه داده‌ای حالیش نشد و جواب داد تو خودت می‌بایست بدانی که این سیاهی با امان‌نامه سفید نمی‌شود. هرچه (a) خواست شراکت (b) را برای تخفیف جرمش به میان بکشد اثری نبخشید و فی‌المجلس تمام جریمه از (a) گرفته شد. شیراز که بودیم آخر سال با

پول جریمه‌ها سوری داده می‌شد و همه اعضای بخش از آن متمتع می‌شدند ولی از این نمد چیزی به ما نرسید.

غرض از این داستان چیز دیگری بود؛ رفتار ما با دانشجویان و رفتار آنها با ما. استادان به بهانه‌های مختلف از نزدیک شدن به دانشجویان پرهیز می‌کردند و فکر می‌کردند اگر رویشان باز شود دیگر نمی‌توان کلاس را کنترل کرد. از خودم که آدم مظلوم و بی‌زبانی بودم و اگر بیشتر هم بگویم حمل بر خودستایی خواهد شد چشم بپوشم، در مورد هر یک از افرادی که در این داستان شیطنت می‌کردند، تحقیق کنید، شاگردانشان آنها را اسوه اخلاق و انسانیت می‌دانند. بنابراین، این میز و صندلی کلاس و جوانی، طبیعتی دارند که از این شیطنت‌ها گریز و گزیری نیست. بهانه می‌کنند که تعداد دانشجویان آنقدر زیاد شده است که فرصتی برای این‌گونه ارتباطات نگذاشته است. من فکر نمی‌کنم همه دانشجویان انتظار داشته باشند صبح تا شب با آنها گپ بزنید و چت کنید و اگر هم تک و توکی توقعی داشته باشند، می‌توان ندیده گرفت. دانشجو دنبال الگو می‌گردد. همه که از شهرهای بزرگ نیامده‌اند، یکی هم مثل من از گوشه دهات آمده تا الگویی برای خودش پیدا کند و کجا محیطی امن‌تر از دانشگاه. اگر ما استادان در سرلوحهٔ کارمان قرار دهیم که هر سال یکی دو نفر از دانشجویان خوب دورهٔ کارشناسی و سه چهار نفر از دورهٔ کارشناسی ارشد و تقریباً همهٔ آنهایی که در دورهٔ دکتری با ما سر و کار دارند، مورد توجهِ خاص قرار دهیم، به این منظور رسیده‌ایم. دانشجو انتظار ندارد بیهوده مورد ملاطفت قراربگیرد ولی قلب پاک و چشم نگران او به دنبال مساوات و انسانیت‌هاست.

به سال ١٣٥٢ برگردم و از خاطراتی که با حیدر در هالیفاکس دارم صحبت کنم. از تورنتو با خانواده‌هایمان به سوی هالیفاکس حرکت کردیم و تقریباً اولین ایرانیانی بودیم که به آن بخش از کانادا پا می‌گذاشتیم. در روزنامه‌ای خوانده بودیم که از هر هشت ایرانی یک نفر در خدمت ساواک بود و ما به جز فرزندانمان که کانادائی هم محسوب می‌شدند چهار نفر بودیم. منتظر بودیم هشت نفر بشویم که ساواکی را بشناسیم. اینها گرچه شوخی بود ولی همانطور که گفتم حیدر بی‌آن که سروصدایی بکند از بی‌عدالتی‌ها و زورگوئی‌هایی که در دانشگاه اعمال می‌شد رنج می‌برد و عکس‌العملش طنزهای این گونه و نپذیرفتن هرگونه مسئولیت اداری و نهایتاً مهاجرت بی سر و صدا به کانادا بود. هشتمین نفری که در هالیفاکس به ما پیوست پسر نازنینی بود که همیشه او را «نفر هشتم» می‌نامیم و دوستی ما با همهٔ بعد مسافت و گذشت زمان ادامه دارد. تا نفر شانزدهم نیز حساب ایرانی‌ها را نگه داشته بودیم ولی در سال ١٣٥٤ چنان جمعیت ایرانی‌ها افزایش یافت که دیگر حساب از دستمان در رفت.

دکتر رجوی از کمبودها نمی‌نالید و دست روی دست نمی‌گذاشت. در شیراز که همصحبتی پیدا نمی‌کرد با دکتر بهزاد در مسائل گراف کار می‌کرد. به تورنتو که رفت با پیتر رزنتال همرشته‌ای جوانترش آشنا شد و دوستی ناگسستنی آنها به تولید مقالات متعدد و کتابهای مفیدی که ذکرشان رفت منتهی شد؛ دوستی‌ای که آثار پر خیر و برکت آن به شاگردان حیدر هم سرایت کرد. استاد

قدرت عجیبی در به هم پیوستن افراد مختلف داشت و من مطمئنم اگر در همان کار سیاست باقی مانده بود سیاستمدار قابلی می‌شد و با حسن خلقی که در او سراغ دارم به احتمال زیاد محبوب. حالا آنچه اتفاق افتاده این است که یک ریاضیدان محبوب برای ما مانده است. با قدرت خارق‌العاده خود افراد را دور خود جمع می‌کرد، مسألهای را مطرح می‌ساخت، نظرات مختلف را جمع می‌بست، آنها را می‌پخت، و صورت مسأله را تغییر می‌داد و با اصلاح جدید دوباره به میان می‌انداخت. این عمل ممکن بود ساعت‌ها، روزها و هفته‌ها ادامه یابد تا مطلب قابل چاپی از آن بیرون آید. گاه می‌شد که دست اندرکاران مقاله‌ای آنقدر زیاد می‌شدند که نوشتن نام مؤلفان امکان‌پذیر نبود؛ اسمی جعلی به عنوان مؤلف اختیار می‌شد و از دست اندرکاران واقعی در پاورقی سپاسگزاری می‌شد. من دو تا از این مقاله‌ها را به یاد دارم. این را هم اعتراف می‌کنم که من به دلائل مختلف از سهیم شدن در این گونه کارهای گروهی عاجز بودم؛ یک دلیل این که حافظهٔ خوبی نداشتم که در پژوهش‌های شفاهی شرکت کنم؛ دوم این که اگر یکی در آن جمع لهجه می داشت نمی‌توانستم حرف‌هایش را دنبال کنم؛ سوم هیچوقت قادر به فکر ممتد نبودم، هروقت مدتی روی یک مطلب فکر می‌کردم می‌بایست آنرا کنار بگذارم و مطلب متفاوتی را پیش بکشم و به مطلب اول فرصت دهم به طور ناخودآگاه در ذهنم به ورز بیاید. (حرف خنده‌داری است ولی خودم باور دارم!)

همانطور که گفتم از یکصد و سی و پنج مقاله فهرست شده استاد در شمارهٔ ویژهٔ جبرخطی و کاربردهای آن فقط ۲۳ تایشان به تنهایی نوشته شده بود؛ بقیه را با همکاری افراد زیر نوشته بود که تنوع نام‌ها گویای آن جاذبه‌ایست که در حیدر سراغ داریم. من این نام‌ها را به ترتیب تاریخی که در زندگی حیدر پیدا شده‌اند فهرست می‌کنم و ملیت آنها تا حدودی از نوع اسم همکاران مشخص می‌شود (اگر در تلفظشان مشکل داشتید به املای لاتین‌شان مراجعه کنید): مهدی بهزاد، پیتر رزنتال، چندلر دیویس[۱] (هرسه از استادان اینجانب در شیراز و تورنتو)، اریک نردگرن[۲]، ویلیامز[۳]، هریسون[۴]، مهدی رجبعلی‌پور، گوستافسون[۵]، پل هالموس[۶]، علی اکبر جعفریان، دان هدوین[۷]، فانگ[۸]، لاری[۹]، چوی[۱۰]، مورفی[۱۱]، گروئنفلدر[۱۲]، باب پره[۱۳] (شاعر دالهوسی)، پیتر فیلمور، جان بورواین[۱۴]، اوبراین[۱۵]، اورهون[۱۶]، کاتاوولوس[۱۷]، ماتس[۱۸]، ماتیاژ اوملادیچ، لامبرو[۱۹]، لانگ‌ستاف[۲۰]، ژونگ[۲۱]، مسعود خلخالی، مک دونالد[۲۲]، احمد سرور[۲۳]، لومر[۲۴]، گورالنیک[۲۵]، کوشیر[۲۶]، لیوشیتس[۲۷]، مایکل ادلشتاین[۲۸]، تن[۲۹]، سیگلر[۳۰]، درنووشک[۳۱]، کوکل بوکوشک[۳۲]،

---

1) Chandler Davis 2) Eric Nordgren 3) J. P. Williams 4) K.J. Harrison 5) W. Gustafson 6) Paul R. Halmos 7) Don Hadwin 8) C.K. Fong 9) C. Laurie 10) M.D. Choi 11) G.J. Murphy 12) L. Grünenfelder 13) Bob Paré 14) J. Borwein 15) R. O'Brien 16) M. Orhon 17) A. Katavolos 18) B. Mathes 19) M. Lambrou 20) W. Longstaff 21) Y. Zhong 22) G. MacDonald 23) Ahmed R. Surour 24) G. Lumer 25) R. Guralnick 26) T. Košir 27) L. Livshits 28) Michael Edelstein 29) K.K. Tan 30) G. Cigler 31) R. Drnovšek 32) D. Kokol-Bokovšek

لافی[۱]، هو[۲]، هولبروک[۳]، پیتر شمرل، تم[۴]، شولمان[۵]، هلادنیک[۶]، حسین محبی، برنیک[۷]، لو[۸]، مورای[۹]، اریک روزنتال[۱۰] (برادر پیتر روزنتال) و اوکنینسکی[۱۱]. یادآور می‌شود که فهرست مقالات دو سال اخیر را نداریم و احتمالاً فهرست بالا باید بیشتر هم شده باشد.

دانش آموختگانی که رسالهٔ دکتری خود را با حیدر نوشته‌اند به شرح زیرند: سینگ ــ چئونگ اونگ[۱۲] (۱۳۵۸)، ترنس کوین[۱۳] (۱۳۷۱)، یونگ ژونگ[۱۴] (۱۳۷۱)، الکساندر سیمونیچ[۱۵] که همزمان نرم‌افزار معروف «وین ادیت»[۱۶] را هم برای «تک» اختراع کرد (۱۳۷۳)، الکا مرواها[۱۷] (۱۳۷۵)، محمدتقی جهاندیده که فعلاً در دانشگاه صنعتی اصفهان است (۱۳۷۶) و بامداد یاحقی که فعلاً در پژوهشگاه علوم بنیادی است (۱۳۸۱).

علاوه بر انتشار شمارهٔ ویژهٔ جبر خطی و کاربردهای آن همایش‌های زیر نیز به مناسبت گرامیداشت هفتادمین سال تولد استاد حیدر رجوی برگزار شده است.

۱ ــ سومین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن و کارگاه نابرابری‌های عملگری؛ ۵ تا ۹ دیماه ۱۳۸۳ با همکاری دانشگاه‌های کرمان و رفسنجان (ایران).

۲ ــ همایش جبر خطی، ۲۴ تا ۲۵ اردیبهشت ۱۳۸۴ با همکاری دانشگاه لوبلیانا در هتل گلف بلد (اسلوونی).

یادآور می‌شویم که دانشگاه پهلوی سابق اولین کنفرانس ریاضی کشور را در فروردین ۱۳۴۹ برگزار کرد که سنگ بنای انجمن ریاضی ایران در خلال آن همایش گذاشته شد. این همایش به همت دکتر مهدی بهزاد، دکتر حیدر رجوی، دکتر جواد بهبودیان، شادروان دکتر میرباقری و شادروان دکتر جان ویلکر به سرپرستی و پشتیبانی استاد منوچهر وصال و البته همکاری و دوندگی‌های سایر اعضای بخش ریاضی آن دانشگاه که ما هم قطراتی از آن بودیم برگزار شد.

شرح حال حیدر را با وصفی از علاقه‌های هنری و ورزشی‌اش به پایان می‌رسانیم. حیدر تبحر خاصی در چشم‌بندی داشت. در مهمانی‌ها نه تنها بچه‌ها بلکه بزرگترها را هم شیفتهٔ کارهای خود می‌کرد. کتاب‌های متعددی را در این رابطه مطالعه می‌کرد و به ویژه از چشم‌بندی‌های هودینی[۱۸] معروف حکایت‌ها داشت. پشت صحنهٔ بعضی از این چشم‌بندی‌ها را برای ما تشریح می‌کرد و بعضی را هم برای نگه داشتن هیجان از ما پنهان می‌کرد. ادعا می‌کرد کارهای بزرگتر هم می‌تواند بکند ولی هزینه‌شان بالاست. برای بچه‌ها سرگرمی‌ها و بازی‌های دیگری هم داشت. شیراز که بود اضافه وزن داشت و خودش می‌گفت چند تا صندلی شکسته است. اوایل، منکر علاقه خود به غذاهای سنتی نبود ولی یک روز تصمیم گرفت وزنش را کم کند و به تندرستی خود توجه کند.

---

1) T. Laffey 2)) J. Hou 3) J. Holbrook 4) P.K. Tam 5) V. Shulman 6) M. Hladnick 7) J. Bernik 8) J.L. Lu 9) N.V. Murray 10) Eric Rosenthal 11) J. Okninski 12) Sing-Cheong Ong 13) Terrance Quinn 14) Yong Zhong 15) Aleksander Simonic 16) WinEdit 17) Alka Marwaha 18) Houdini

تنها ورزش مورد علاقه‌اش راهپیمائی بود و به کمک آن و رژیم جدی غذائی به سرعت از وزن خود کاست. روزی چند کیلومتر پیاده می‌رفت و در روزهای تعطیل به دوازده کیلومتر هم می‌رسید. یکبار در نیوهمشایر دونفری به یک راه‌پیمائی یازده کیلومتری اقدام کردیم که از توضیحاتش در مسیر معلوم بود قبلاً هم این مسیر را طی کرده است. از گرما رنج می‌برد و از سرما لذت؛ تا با او بودم من هم سرما را تحمل می‌کردم ولی سال ۱۳۸۱ که بدون او در تورنتو بودم احساس کردم برخلاف حیدر هیچ چیز نمی‌تواند جای آفتاب گرم و هوای خشک کوهستان‌های اطراف کرمان را برای من بگیرد؛ استخوان‌های من دیگر تاب سرمای کانادا را ندارند و نمی‌دانم چگونه باید بین آب و هوای مطلوب کرمان و زیارت حیدر و بچه‌ها و نوه‌هایم در استان اونتاریو جمع اضداد کنم.

مهدی رجبعلی پور
دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی
radjab45@mail.uk.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸٦) صص. ٦۷ تا ۸۳

از سری‌های تیلر تا حرکت براونی، با منظره‌ای در مسیر بازگشت*

ژان - پیرکاهان

ترجمه: ارسلان شادمان

این مقاله دعوت به یک گردش است. نقطهٔ عزیمت ما در این سفر، بُرِل [۱] و شعار تحریک آمیزی است که در سال ۱۸۹٦ با این مضمون عنوان کرد: «دایرهٔ همگرایی یک سری تیلر [۲] در حالت کلی یک برش [۳] برای این سری است». این ادعا پیامدهای فراوانی داشت. ما هم در گردشِ خود، برخی از آثار برخاسته از آن شعار را مشاهده خواهیم کرد، تأثیر آن را بر ادامهٔ کارهای خودِ برل خواهیم دید و با تعبیرهای گوناگون آن آشنا و روبرو خواهیم شد. از جمله، تعبیر به کمک نظریهٔ بئر [۴]، تعبیرهای احتمالاتی، دست آورد اشتاینهاوس [۵] و تعامل آن با نظریهٔ وینر [٦] درمورد حرکت براونی را ملاحظه خواهیم کرد. به اینجا که می‌رسیم، سال ۱۹۳۳ است و چشم‌انداز، با کتاب مبانی احتمالاتِ کولموگوروف [۷] [K] دگرگون می‌شود. اما نظریهٔ حرکت براونی [۸] با کارهای پُل لِوی [۹] منزلت می‌یابد و از ظرافت برخوردار می‌شود. ناوردایيِ مسیرهای حرکتِ براونيِ مسطح تحت نمایش‌های همدیس [۱۰]، آخرین بخشِ عنوانِ مقالهٔ ما را توجیه می‌کند: منظره‌ای در مسیر بازگشت.

---

*) Jean Pierre Kahane, Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour, in: Development of Mathematics 1900 - 1950, Birkhauser, Basel, 1994, (pp. 415 - 429).

1) Borel 2) Taylor

۳) cut یا coupure. منظور این است که ادامهٔ تحلیلی تابع مورد بحث به دامنهٔ وسیع‌تری ناشدنی است. م.

4) Baire 5) Steinhaus 6) Wiener 7) Kolmogorov 8) Brownian motion 9) Paul Lévy

10) conformal representations

آثار برل در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۹۷ ـ ۱۸۹٦ راجع به سری‌های تیلر آن گونه که وی در سال ۱۹۱۲ تحلیل می‌کند.

جمله‌ای که قبلاً نقل کردیم، برگرفته از یادداشت ۱۸۹٦ برل [Bo3] و یا از مقالهٔ ۱۸۹۷ متعاقب آن [Bo4] نیست، بلکه ما آن را از نوشتار سال ۱۹۱۲ وی [Bo6]، که نخستین جمعبندی آن کارهاست، برگرفته‌ایم.

به چه دلیل ادعای مورد بحث، تحریک آمیز است؟ از آن رو که تا آن زمان، سری‌های تیلر توسیع‌ناپذیر، استثنائی تلقی می‌شدند. پوانکاره[1] مثالی از آن را ارائه کرد، مثال او سری $\sum_{1}^{\infty} 2^{-n} x^{3^n}$ بود [Po]. در همان سال، آدامار[2] گزارهٔ کلی‌تری بیان می‌کند به این صورت: «سری $\sum b_\mu x^{c_\mu}$ دایرهٔ همگرایی خود را به عنوان خط تکین[3] می‌پذیرد هرگاه نسبت $(c_{\mu+1} - c_\mu)/c_\mu$ همواره بزرگتر از عدد ثابتی باشد» [Ha]. البته این شرط با شرط بهین بسیار فاصله دارد (قضیه‌ای از فابری[4]، [Fa1] ص 382، حاکی است که حکم قضیهٔ آدامار با فرض $\lim\,(c_\mu/\mu) = \infty$، نیز برقرار است). با این حال، شرط کافی بیان شده در قضیهٔ آدامار در مباحث دیگری نیز سودمند است و در منابع ریاضی به عنوان «شرط حفره‌پذیری آدامار[5]» معروف است [Zy].

مقالهٔ پوانکاره با صراحت به نظریهٔ امتداد تحلیلی وایرشتراس[6] [We] ارجاع می‌دهد و برای آن که توابع غیرقابل توسیع روی یک مجموعهٔ مفروض را به دست آوَرَد، به سری‌هایی از کسرهای گویا به شکل $\sum A_n (x - a_n)^{-1}$ متوسل می‌شود. رسالهٔ آدامار [Ha] عمدتاً راجع به جستجوی قطب‌ها و رفتار مقایسه‌ای دنبالهٔ ضرایب تیلر تابع مفروض در همسایگی دایرهٔ همگرایی است: بنابراین حالت «طبیعی» ظاهراً همان است که امتداد تحلیلی ممکن باشد. رسالهٔ خود برل [Bo1]، که از پوانکاره الهام گرفته است، توسیع سری‌های کسرهای گویا را بررسی می‌کند (اما به یک مفهوم کاملاً نو که الهام بخش دانژوا[7] در کارهای ۱۹۲۱ روی مفهوم شبه ـ تحلیلی[8] شد، [De] صفحات 76 تا 84 و یادداشت‌های صفحات 34 تا 37 را ببینید). در اواخر ۱۸۹٦ برل یادداشتی «راجع به ناحیهٔ جمع‌پذیری یک سری تیلر» [Bo2] منتشر می‌کند و در آن تبدیلی (که به تبدیل بُرل[9] مشهور شد) همراه با یک فرایند جمعبندی را معرفی می‌کند که به نام خود او معروف است[10]. چند هفته بعد و با عنوان مرموز «راجع به سری‌های تیلر» یادداشت دیگری در آکادمی علوم پاریس منتشر می‌کند و

---

1) Poincaré

۲) Hadamard نام او را هادامار نیز می‌نویسند. م.

۳) singular line تعبیر آن همان است که در مورد برش توضیح دادیم. زیرنویس ۴ صفحهٔ پیش دیده شود.م.

4) Fabry 5) Hadamard's lacunarity condition 6) Weierstrass theory of analytic continuation 7) Denjoy 8) quasi-analyticity 9) Borel transformation 10) Borel summation process

اعلام می‌کند که: هنگامی که ضرایب دلخواه باشند، دایرهٔ همگرایی یک برش است [Bo3]. در نامه‌ای به میتاگ ـ لفلر[1] که موضوع مقالهٔ [Bo4] است، نظر خود را در این زمینه شرح می‌دهد.

برل در نوشتار ۱۹۱۲، فصل مربوط به توابع یک متغیر مختلط، به وضوح نشان می‌دهد که انگیزهٔ اصلی وی در ابداع فرایندهای جمع‌بندی، در نظریهٔ سری‌های واگرا و در «روش نوینی» که «یک تابع تام را به یک سری تیلر مفروض وابسته می‌سازد» یعنی در تبدیل برل، توسیع تحلیلی توابعی بوده است که با سری تیلرشان بیان می‌شوند. امروز که به این‌ها توجه می‌کنیم می‌بینیم پیشرفت‌های اساسی و مهمی هستند. با این وصف، مهمترین پیامد از دید برل هیچ یک از اینها نیست. به تحلیل خود او ([Bo6]، جلد اول، ص 154) نگاه کنیم:

« نتیجه‌ای که به نظر من مهمتر است این است: یک سری تیلر دایرهٔ همگرایی خود را، در حالت کلی، به عنوان یک برش می‌پذیرد. . ..

مشکل اصلی آن است که پیش از ارائه برهان، معنای این جمله روشن شود. . .. می‌توان سری را به بینهایت گروه متوالی از جمله‌های سری تقسیم کرد و به هر گروه نقطه‌ای از دایرهٔ همگرایی را وابسته کرد که این نقطه فقط به ضرایب این گروه وابسته باشد؛ این نقاط یک مجموعهٔ E تشکیل می‌دهند. هر نقطه از مجموعهٔ مشتق، E'، یک نقطهٔ تکین خواهد بود. از همین جا روشن است که اگر ضرایب متوالی به طور تصادفی انتخاب شوند، یعنی مستقل از ضرایب قبلی، احتمال آن که مجموعهٔ E روی دایرهٔ همگرایی چگال باشد برابر واحد است.»

در تمام این نقل قول، کلمات کلیدی عبارتند از به طور کلی، به طور تصادفی، مستقل از، احتمال برابر واحد. بُرل شهودی روشن از آنها داشت اما هم برای برل و هم برای دیگران ده‌ها سال زمان لازم بود تا این واژه‌ها به مفاهیم ریاضی صورتبندی شده و منظم تبدیل شوند. برای خودِ برل، این مسأله به نقطهٔ عزیمت نظریهٔ احتمالات شمارایِ وی، یعنی نظریهٔ جدید احتمالات به عنوان توابع σ ـ شمارا از پیشامدها [Bo5]، تبدیل شد.

در این جا نکته‌ای از خودِ برل بر برهان فوق را، به گونه‌ای که در نامه به میتاگ ـ لفلر نوشته بود [Bo4] می‌افزاییم. در پایان آن نامه، جملهٔ زیر دیده می‌شود: «بنابراین، روی دایره، بینهایت کمان مستقل می‌توان یافت که حاصلجمع آنها از هر عدد مفروضی بیشتر است، لذا، در حالت کلی، هر نقطهٔ دایره، متعلق به بینهایت کمان است.»

این جمله در واقع قسمت مشکل «لم بُرِل ـ کانْتِلّی»[2] است که می‌گوید: اگر پیشامدهایی مستقل باشند و اگر حاصل جمع احتمال‌های آن‌ها واگرا شود، آنگاه تقریباً به طور حتم بینهایت تا از آن‌ها به وقوع می‌پیوندند. بدین ترتیب لم برل ـ کانْتِلّی از همان زمان ۹۷ ـ ۱۸۹۶ به کار رفته است؛ حال آن که در کتاب‌های مشروح احتمالات، نظیر [Re] معمولاً این لم را به مقالهٔ ۱۹۰۹ برل [Bo5] و مقاله‌ای از کانتلی [Ca] به تاریخ ۱۹۱۶ ارجاع می‌دهند.

1) Mittag-Leffler 2) Borel-Cantelli's Lemma

پیش از آن که به گردش خود ادامه دهیم، نخستین درسی را که راجع‌به نحوهٔ تولید و زایش نظریه‌ها و مفاهیم می‌گیریم، می‌آوریم. در هر دوره، مسائل مهم آن دوره مطرح‌اند، سپس قضایای پیش بینی شده و پیش‌بینی نشده‌ای که به این مسائل جواب می‌دهند مطرح می‌شوند، که گاهی مورد فراموشی آیندگان قرار می‌گیرند. پس از آن، ابزارهایی پدید می‌آیند که در اثبات این قضایا مورد استفاده قرار می‌گیرند، یعنی لم‌ها. در مورد برخی از این لم‌ها، به تدریج آیندگان می‌بینند که دامنهٔ استعمال آن‌ها فراتر از قضیه‌ای است که لم به خاطر آن پدید آمده است و آن‌ها را با عنوان لم به خاطر می‌سپارند (مانند لم برل ـ کانتلی، لم فاتو[1]) و یا آن‌ها را با نام قضایا می‌خوانند (مانند قضیهٔ لبگ[2]). پس از این‌ها، آن مفاهیمی که چارچوب مناسبتر و استعمال ساده‌تری برای ابزارهای فوق را فراهم سازند، مطرح می‌شوند (نظیر σ ـ جمعپذیری، احتمال، استقلال و . . . در مورد برل؛ اندازه، انتگرال و . . . در مورد لبگ و فاتو). وقتی این مفاهیم به شکل صوری درآیند، به تعاریف می‌انجامند و در آموزش نظریه‌ها نقطهٔ شروع را به تعاریف اختصاص می‌دهند. امّا از حیث تاریخی، تعاریف، نقطهٔ به ثمر رسیدن تلاش‌هایی **می‌باشند** که در طول قرون و اعصارصورت گرفته‌اند، و نمی‌توان به اهمیت و غنای آن‌ها پی برد مگر آن که هم در نظریه‌هاو هم در کاربردها، حداقل بخشی از نتایج و تأمّلات و تفکراتی را که موجب پیدایش آن تعریف شده‌اند، بازیابی کرد.

اکنون که به این شکل نفسی تازه کردیم، مدتی هم در یک مسیر فرعی راه‌پیمایی کنیم.

معنای «در حالت کلی» چیست؟

بی‌گمان، «درحالت کلی» برای برل به معنای امروزی «تقریباً به طور حتم» است؛ یعنی یک مفهوم احتمالاتی است. هم‌چنین است برای فابری که در ۱۸۹۷ (در واقع چند روز پس از یادداشت دسامبر ۱۸۹۶ برل) اثبات جدیدی (البته تلنگرهای اثبات) برای حکم برل ارائه کرد [Fa2] (رهیافت فابری را می‌توان در ص 61 از [HM] مطالعه کرد). با این وصف، اگر خود را به سری‌های تیلر با ضرایب صحیح محدود کنیم، اصطلاح «به طور کلی» را می‌توان به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ای عدد اصلی تعمیم داد. در ۱۹۱۸، هاوسدورف ملاحظه می‌کند که در این مورد، سری‌های تیلر قابل توسیع مجموعه‌ای شمارا و سری‌های تیلر غیرقابل توسیع مجموعه‌ای ناشمارا تشکیل می‌دهند و در نتیجه بسیار غنی‌ترند [Hau2].

بالاخره، «در حالت کلی» را می‌توان از دید توپولوژی تعبیر کرد. پولیا همین کار را در ۱۹۱۸ انجام داد [Po1]: در یک توپولوژی مناسب مجموعهٔ سری‌های تیلر توسیع‌ناپذیر یک مجموعهٔ باز و چگال تشکیل می‌دهند (می‌توان ص 68 از کتاب [HM] را نیز دید).

در ادامهٔ کارهای پولیا، به نظر من کار کیرشت[3] و اشپیلراین[4] در ۱۹۳۳ از همه پخته‌تر است [KS]. مجموعهٔ توابع تمامریخت در قرص یکهٔ باز را به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده مجهز می‌کنیم، که بدین ترتیب به یک فضای فرِشه[5] تبدیل می‌شود. با الهام

1) Fatou 2) Lebesgue 3) Kierst 4) Szpilrajn 5) Fréchet

دائمی از ریاضیدانان لهستانی آن زمان، که به ویژه توسط ماژورکیویچ[1] آشکار می‌شد، کیرشت و اشپیلراین مسأله را از دید رده‌های بئر نگاه کردند، یعنی به جستجوی ویژگی‌هایی پرداختند که روی یک اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز برقرارند. امروزه، چنین ویژگی‌هایی را ژنریک یا شبه ـ مطمئن می‌نامند. این دو ریاضیدان ویژگی‌های ژنریک دیگری را نیز نشان می‌دهند، هم در مورد توابع تمامریخت در قرص یکه و هم در مورد توابع تام و توابع ناقص ریخت.

با شروع از این دیدگاه، گردش دیگری نیز پیش روی ما قرار می‌گیرد. این سه دیدگاه، احتمالاتی، نظریهٔ مجموعه‌ای، توپولوژیکی در نظریه‌های گوناگون ریاضی چگونه وارد می‌شوند؟ اگر فقط به آنالیز همساز، یا به نظریهٔ سری‌های دیریشله، یا به قضایای برهمنهش[2] هم بسنده کنیم، جا دارد گردش‌های علمی جالبی انجام دهیم.

اما به مسیر اصلی برگردیم و راه را از برل به سوی اشتاینهاوس، وینر و پل لوی ادامه دهیم.

دیدگاه اشتاینهاوس

با وجود آن که امروز مشابهت بین اندازهٔ لبگ (۱۹۰۴) و احتمالات شمارای برل (۱۹۰۹) بر ما آشکار است، ترجمهٔ یکی به دیگری از نظر تاریخی یک روزه انجام نشده است. نخستین صورتبندی که موجب اتحاد بین احتمال روی مجموعهٔ بخش‌های نامحدود شیر یا خط از سویی و اندازهٔ لبگ روی بازهٔ $[0, 1]$ از سوی دیگر گردید، متعلق به هـ. اشتاینهاوس است (۱۹۲۳). جا دارد در این‌جا بخشی از مقدمهٔ او [St] را بیاوریم:

«آقای ا. بُرِل نخستین کسی بود که به اهمیت مطالعه در احتمالات شمارا پی برد و کاربردهای این رشته را در حساب نشان داد، از جمله قضیهٔ زیر که به «تناقض برل[3]» معروف است توجه آنالیزدانان را به خود جلب کرده است:

احتمال آن که بسامد رقم 0 در بسط دوتایی یک عدد تصادفی برابر با $\frac{1}{2}$ باشد، برابر یک است؛ منظور از بسامد رقم صفر حد کسری است که صورت آن تعداد دفعاتی است که این رقم در بین n رقم اول بسط عدد ظاهر می‌شود و مخرج آن عدد n است.

این قضیه را در نوشته‌های سایر نویسندگان به شکل زیر می‌توان دید:

تقریباً همهٔ اعداد α این ویژگی را دارند که بسامد صفرها در بسط دوتایی آن‌ها برابراست با $\frac{1}{2}$. در اینجا معنای تقریباً همه این است که اندازهٔ لبگ αهایی که ویژگی مورد بحث را ندارند برابر صفر است. برای آن که این حکم ثابت شود، کافی است که برهان اولیهٔ برل را در نظر بگیریم، فکر او را کاملاً حفظ کنیم و فقط برهان را به طور مناسب تغییر دهیم.

هدف این یادداشت آن است که دستگاهی متشکل از چند اصل موضوع[4] احتمالات شمارا برقرار

1) Mazurkiewicz 2) superposition 3) Borel Paradox

۴) بُرل از واژهٔ Postulat استفاده می‌کند نه از واژهٔ axiome. م.

کند تا در این گونه پژوهش‌ها یک بار برای همیشه امکان ترجمهٔ یک تعبیر به تعبیر دیگر فراهم شود.»

اشتاینهاوس در ارجاع به برل، از [Bo5] صفحات 259 تا 260 و در ارجاع به «سایر نویسندگان» از هاوسدورف[1] [Hau1] صفحات 419 تا 422 نام می‌برد.

اشتاینهاوس در مقاله‌ای که به سال ۱۹۲۹ نوشت و در سال ۱۹۳۰ منتشر کرد [St 2] به این موضوع باز می‌گردد، تا احتمال آن را که یک سری تیلر دایرهٔ همگراییش را به عنوان برش بپذیرد، بررسی نماید. مرجع اصلی او برلِ ۱۸۹۶ است و اینجاست که برای نخستین بار حکم برل معنای ریاضی دقیقی می‌یابد. اشتاینهاوس یک سری

$$\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

با شعاع همگرایی ۱ را در نظر می‌گیرد، و سری‌هایی را که از روی آن با تغییر فاز تصادفی به دست می‌آیند به شکل

$$\sum c_n e^{2\pi i \varphi_n} z^n \qquad (S)$$

مطرح می‌کند، جایی که φ_nها متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که به شکل یکنواخت روی $[0, 1]$ توزیع شده‌اند. لااقل امروز مطالب را می‌توانیم به این گونه مطرح کنیم. کار اشتاینهاوس شامل مراحل زیر است:

الف) φ_nها را به شکل توابعی از یک متغیر حقیقی $\varphi \in [0, 1]$ در نظر می‌گیرد؛

ب) نشان می‌دهد که توسیع‌ناپذیریِ سری (S) متناظر با یک مجموعهٔ برل از مقادیر φ است؛

پ) نشان می‌دهد که این مجموعه با اندازهٔ پُر[2] است.

مرحلهٔ الف) ساده و در عین حال فنی است، که از پرتاب سکه الهام می‌گیرد. در بسط دوتایی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0/\varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{13}\cdots \\
\varphi_2 &= 0/\varphi_{21}\varphi_{22}\varphi_{23}\cdots \\
\varphi_3 &= 0/\varphi_{31}\varphi_{32}\varphi_{33}\cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

و

$$\varphi = 0/\varphi_{11}\varphi_{21}\varphi_{12}\varphi_{31}\varphi_{22}\varphi_{13}\varphi_{41}\varphi_{32}\cdots$$

1) Hausdorf 2) full measure

به این شکل، با φ می‌توان کل دنبالهٔ (φ_n) را کدگزاری کرد. بنابراین می‌توان اندازهٔ لبگ روی $[۰, ۱]$ را به یک احتمال روی $[۰, ۱]^{\mathbb{N}}$ تبدیل کرد.

مرحلهٔ ب) با مشکل مفهومی مواجه نیست. مطلب بر سر این است که برای یک نقطهٔ دایرهٔ همگرایی، منظم بودن برای سری (S) به شکل فرمول‌هایی ترجمه شود.

اما برعکس، مرحلهٔ پ) کاملاً اصیل و ابتکاری است. در این مرحله نشان می‌دهد که اگر احتمالِ واقعیتِ موردِ بحث، مثبت باشد، آنگاه الزاماً برابر ۱ است. به عبارت دیگر، در این حالت خاص (که اساساً با حالت کلی هم‌ارز است) قانون همان قانون معروف صفر ـ یک کولموگوروف است [Ko].

در نتیجه دایرهٔ همگرایی (S) تقریباً به طور حتم، یک برش است.

اما شیوهٔ عمل اشتاینهاوس فوایدی بسیار وسیع‌تر از حل مسألهٔ فوق دارد. کلید این رهیافت، کدگذاری (φ_n) به کمک φ است. دنبالهٔ (φ_n) نمونهٔ بارزی از متغیرهای تصادفی مستقل است. هر دنباله از متغیرهای تصادفیِ مستقل را می‌توان به شکل یک دنبالهٔ $X_n(\varphi_n)$ تعبیر کرد، هر ویژگی قابل تعبیر با احتمالات (احتمالپذیر[1]) را می‌توان به صورت یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر φ تعبیر کرد و احتمال آن را با اندازهٔ لبگ این مجموعه از φها یکی گرفت. در این مرحله، همهٔ مفاهیمی را که برل در ۱۸۹۶ با محتوای شهودی مطرح کرده بود، می‌توان دقیقاً به شکل صوری به دست آورد و اثباتی **خدشه‌ناپذیر برای آن ارائه نمود.** به علاوه، همهٔ مسائل نظریهٔ احتمالات را می‌توان اساساً و به شکل ملموس به اندازهٔ لبگ تحویل نمود.

در طول سال‌های دههٔ ۲۹ ـ ۱۹۲۰، نمونهٔ بارز سری‌های با متغیر تصادفی مستقل به صورت سری‌های رادِماخِر[2] مطرح می‌شد، سری‌هایی که رادماخر در ۱۹۲۲ ارائه کرد [Ra] (همگرایی تقریباً همه‌جای این سری‌ها را خودِ رادماخر و واگرایی تقریباً همه‌جای آن‌ها را خینچین[3] و کولموگوروف در سال ۱۹۲۵ بررسی کردند [KK]). از سال ۱۹۳۰ به بعد، سری‌های اشتاینهاوس مورد توجه قرار گرفت و متغیرهای φ_n، یا متغیرهای اشتاینهاوس، امکان مطالعهٔ توابع مستقل را با تمام کلیت فراهم کردند [SKR].

ملاقات با حرکت براونی

نظریهٔ فیزیکی حرکت براونی مدیون اینشتین[4] است و به سال ۱۹۰۵ برمی‌گردد[Ei]. کاربرد این نظریه در تعیین بُعد اتمی، یعنی عدد آووگادرو[5]، کار ژان پِرَن[6] است که در مقاله‌ای مبسوط به سال ۱۹۰۹ [Pe1] و یک کتاب چاپ ۱۹۱۲ [Pe2] تشریح کرده است. نوربرت وینر[7] به توصیهٔ راسل[8]، به مطالعهٔ کار اینشتین می‌پردازد و کارهای ژان پرن به ویژه توصیف وی از مسیرهای براونی توجه وینر را جلب می‌کند. از پرن [Pe1] نقل کنیم:

1) Probabilisable 2) Rademacher 3) Khinchine 4) Einstein 5) Avogadro's number
6) Jean Perrin 7) Norbert Wiener 8) Russel

«مسیر آنچنان به سرعت و به کرّات در خود می‌پیچد که امکان ندارد بتوانیم درخودپیچی‌های آن را تعقیب کنیم و مسیر مورد ملاحظه همواره بینهایت ساده‌تر و کوتاهتر از مسیر واقعی است. هم‌چنین سرعت متوسط یک ذره در یک مدت زمانی مفروض (خارج قسمت تغییر مکان بر تغییر زمان) هم از حیث مقدار و هم از حیث جهت به شکل حیرت‌انگیزی در حال تغییر است و هنگامی که زمان مشاهده تنزل می‌کند هیچ حدی ندارد . . . این یکی از آن مواردی است که ناچار باید به فکر توابع پیوسته‌ای باشیم که مشتق ندارند، توابعی که ممکن است عده‌ای به خطا گمان برند محصول کنجکاوی سادهٔ ریاضیدانانند، حال آن که طبیعت، مطالعهٔ این توابع را هم به خوبی توابع مشتقپذیر، توصیه می‌کند».

به بیان امروزی، فیزیک، مُدِلی را تحمیل می‌کند. حرکت براونی باید به شکل یک فرایند گاوسی[۱] (X_t) با نموهای مانا، که نموهای آینده مستقل از گذشته‌اند، تشریح شود. از اینجا یک نرمال‌سازی به دست می‌آید، به این شکل که واریانس[۲] X_t برای $t > \circ$ باید (صرف نظر از یک ضریب) برابر با t باشد.

قانون (X_t) تحول سرتاسری[۳] پدیده را بیان می‌کند. هر یک از مسیرها، مسیری از $X(t,\omega)$ به ازای ωهای ثابت است. برنامهٔ وینر، که از اینشتاین و ژان پرن الهام گرفته بود، آن بود که $X(t,\omega)$ را به عنوان نسخه‌ای از فرآیند (X_t) در نظر بگیرد که تقریباً به طور حتم پیوسته است، و تقریباً به طور حتم هیچ جا مشتق‌پذیر نیست. در مقالات متعددی روی این موضوع (به ویژه [Wi1] و [PW] فصل ۹)، وینر نوشته‌هایی از ژان پرن را نقل می‌کند که به توابع مشتق‌ناپذیر در مبحث مسیرهای براونی پرداخته است.

بخش آغازی برنامه در ۱۹۲۳ طی مقالهٔ بنیادی فضای دیفرانسیل [Wi1] انجام شد. در واقع، راستش را بگوییم، وینر تابع $X(t,\omega)$ را به شکل صریح نمی‌سازد، بلکه یک اندازه روی مجموعهٔ توابع پیوسته می‌سازد و از آن یک فضای احتمال به وجود می‌آورد؛ به این ترتیب هر یک از توابع این فضا نقش ω را ایفا می‌کند. همهٔ ساز و برگ اندازه و انتگرال در فضاهای تابعی به کار گرفته می‌شود. ویژگی‌های سری فوریهٔ این فرآیند، که امروز سری فوریه ـ وینر[۴] نامیده می‌شود، ثابت می‌شوند: از جمله ثابت می‌شود که ضرایب مورد نظر، متغیرهای تصادفی گاوسی مستقل‌اند و واریانس آن‌ها برابر با وارونِ بسامد[۵] است.

به مناسبت تحقیق بزرگ دیگری، آنالیز همساز تعمیم یافته[۶]، وینر در سال ۱۹۳۰ مجدداً به حرکت براونی باز می‌گردد [Wi2]، و بیان آن را اندکی ساده می‌کند و نشان می‌دهد که توابع پیوسته‌ای که احتمال روی آنها متمرکز است، تقریباً به طور حتم در یک شرط هولدر[۷] مرتبه $\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند

---

1) Gaussian process 2) variance 3) global evolution 4) Fourier-Wiener series
5) frequency 6) Generalized hormonic analysis 7) Hölder condition

بخش پایانی این برنامه با همکاری پاله[1] و زیگموند[2] فقط در سال ۱۹۳۳ به انجام می‌رسد [PWZ]؛ آنان ثابت می‌کنند که تقریباً به طور حتم، هنگِ پیوستگیِ $X(t,\omega)$ها به شکل $\mathrm{O}(\mathrm{h}^{\alpha})$ به ازای هر $\alpha < \frac{1}{2}$ است و در جهت عکس، تقریباً به طور حتم برای هر t، داریم

$$\overline{\lim_{h\to \circ}}\ \frac{|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|}{|h|^{\alpha}} = \infty,$$

به ازای هر $\alpha > \frac{1}{2}$، یعنی مشتق‌ناپذیری به یک معنای بسیار قوی برقرار است.

بدون تردید مقدمهٔ [PWZ] نوشتهٔ وینر است و در آن نقشِ بنیادین برل و اهمیت دیدگاه اشتاینهاوس، به خوبی روشن شده است. شروع این مقدمه چنین است:

«ورود مفهوم تصادف در آنالیز، پیش از همه کار برل است. نظریهٔ او با عنوان احتمالات شمارا [3] راجع به کمیت‌هایی است که به یک دنبالهٔ نامتناهی از انتخاب‌ها و به مقدار میانگین آنها بستگی دارند. در ساده‌ترین حالت، این انتخاب‌ها از میان دو حالت صورت می‌پذیرند که می‌توان آنها را به شکل علامت + و علامت − مطرح کرد. بنابراین مسائلی از قبیل احتمال همگرایی سری‌های

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} \pm C_n$$

و توزیعِ حاصلجمعِ این سری‌ها، به مقولهٔ این افکار مربوط می‌شوند. مسائلی از این دست با تفصیل در مقالات متعددی در دو مجلهٔ *Fundamenta Mathematicae* و *Studia Mathematica* درج شده‌اند که نام‌های اشتاینهاوس و رادماخر را می‌توان در زمرهٔ مؤلفین این مقالات مشاهده کرد. به ویژه تحویل این مسائل به مسائلی در باب انتگرال لبگ مدیون اشتاینهاوس است.»

سپس در همین اثر با تأکید بیشتر به کارهای پاله و زیگموند راجع به سری‌های تصادفی از نوع

$$\sum_{۱}^{\infty} \pm f_n(t)$$

اشاره می‌شود، که سری‌های فوریه ــ رادماخر[4] و سری‌های تیلر ــ رادماخر[5] حالت خاص آنند، هم‌چنین سری‌های

$$\sum_{۱}^{\infty} e^{۲\pi i\varphi_n} f_n(t)$$

1) Paley 2) Zygmund

3) probabilités dénombrables؛ از مقدمهٔ [PWZ] به زبان انگلیسی نقل قول شده است، اما اصطلاح فرانسوی مورد بحث عیناً به زبان فرانسوی آمده است. م.

4) Fourier-Rademacher series 5) Taylor-Rademacher series

(که سری‌های فوریه ــ اشتاینهاوس [1] و سری‌های تیلر ــ اشتاینهاوس [2] حالت خاص آن هستند) مطرح می‌شوند که تاریخ انتشار آنها از سال ۱۹۳۰ تا سال ۱۹۳۲ است [PZ]. فایدهٔ این سری‌ها در تولید مثال‌های نقض مورد توجه قرار گرفته و حق مطلب ادا شده است.

پس از این اشارات، سرانجام حرکت براونی ارائه می‌شود:

«باوجود این، مباحثی برای فیزیکدانان پیش می‌آید که در آنها توابع حاوی عنصری تصادفی خودنمایی می‌کند. حرکت براونی، یعنی حرکت یک ذرهٔ معلق در یک سیال تحت تأثیر بی‌نظمی‌های چسبندگی ملکولی این سیال، به شدت ماهیت تصادفی دارد تا جایی که به نظر می‌رسد این ذره حتی سرعت هم ندارد. پرَن که یک فیزیکدان بود، به خوبی توضیح داده است که چگونه حرکت براونی، بررسی توابع پیوستهٔ مشتق‌ناپذیر وایرشتراس را الزام‌آور می‌کند، و برل هم رابطهٔ این موضوع با نظریهٔ احتمالات شمارای خود را توضیح می‌دهد. مؤلفه‌های تغییر مکان این ذره، وقتی به عنوان تابع زمان مطالعه شوند، توابعی تصادفی هستند اما به معنایی کاملاً متفاوت با آنچه زیگموند و پاله مطرح کرده بودند. وینر نظریهٔ این توابع تصادفی را به شکل ریاضی قطعی درآورد که بر پایهٔ انتگرال لبگ بنا شده است....
هدف این مقاله آن است که خلاء بین نظریهٔ PZ و نظریهٔ W را پر کند».

به این مناسبت، وینر نقطهٔ عزیمت خود را تغییر می‌دهد. در [PWZ] نیز نویسنده از حرکت براونی شروع می‌کند تا سری فوریه ــ وینر را مطالعه کند. اما به عنوان نتیجه‌ای از همکاریش با پاله که در سال ۱۹۳۴ اتفاق افتاده بود، اکنون $X(t,\omega)$ با سری فوریه ــ وینر تعریف می‌شود. این سری به شکل

$$\sum_{1}^{\infty} \xi(\omega_n) f_n(t)$$

است که در آن $\xi(\omega_n)$ها متغیرهای گاوسی نرمال شدهٔ مستقل هستند و $f_n(t)$ها مضاربی از سینوس‌ها و کسینوس‌های کمان‌های چندگانه‌اند. از حیث صوری، این سری شبیه سری‌هایی است که پاله و زیگموند در نظر می‌گرفتند و بررسی آن‌ها هم به شیوه‌ای نزدیک به شیوهٔ آن دو می‌تواند انجام شود.

از نظر مفهومی، جهش قابل ملاحظه‌ای به وقوع پیوسته است. به جای آن که اندازه‌ای روی یک فضای توابع در نظر بگیریم (که این فضا به عنوان فضای احتمال مطرح می‌شد)، اکنون وینر از یک مدل اشتاینهاوس عزیمت می‌کند و بدین ترتیب بلافاصله دنباله‌های ω_n را که مستقل هستند و به طور یکنواخت روی $[0, 1]$ توزیع شده‌اند در نظر می‌گیرد (این همان φ_nهای اشتاینهاوس است)، و به عنوان فضای احتمال با همان شیوهٔ اشتاینهاوس، بازهٔ $[0, 1]$ از خط حقیقی را در نظر می‌گیرد که به اندازهٔ لبگ مجهز شده است.

---

1) Fourier-Steinhaus series   2) Taylor-Steinhaus series

او به این ترتیب ساختاری از $X(t,\omega)$ را موسوم به تابع تصادفی اساسی معرفی می‌کند و آن را با $\psi(t,\alpha)$ نمایش می‌دهد، که البته این‌ها در فصول آخر کتابش با پاله که در سال ۱۹۳۴ منتشر کرد آمده‌اند. [PW]

به ظاهر با این شیوه تمام نظریهٔ احتمال به آنالیز توابع یک متغیر حقیقی و اندازهٔ لبگ روی $[0,1]$ تبدیل می‌شود. وینر به مسلک اشتاینهاوس درمی‌آید و لبگ به توجیه برل و اینشتین می‌پردازد.

نقش جدید و حرکت آفرین احتمالات

ظاهر فریبنده است. نخست آن که ۱۹۳۳ سال انتشار کتاب کولموگوروف [Ko] مشهور به *Grundbegriffe* است که در آن احتمالات به عنوان یک نظریهٔ مستقل مطرح می‌شود. سپس و به ویژه، موضوعات این نظریه با غنا و تنوع خود که از دنیای فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد، بیمه و غیره می‌آیند، به سویی می‌روند که نقش محرک را در خود آنالیز کلاسیک نیز برعهده گیرند. این همان مطلبی است که با مطرح کردن منظره‌ای در مسیر بازگشت می‌خواهیم بگوییم. برای آن که سردرگم نشویم، بحث خود را به حرکت براونی و سری‌های تیلر محدود می‌کنیم.

آخرین اثر مهم وینر راجع به حرکت براونی، آشوبِ همگن[1] [Wi3] است، یعنی نظریهٔ آشوب احتمالاتی که امروز به اندازهٔ آشوب تعیّنی[2] معروف نیست اما نقش قابل ملاحظه‌ای ایفا کرده است.

در این زمان است که پُل لِوی وارد صحنه می‌شود. از همان نخستین یادداشت راجع به موضوع [Le2]، او شیفتهٔ حرکت براونی در صفحه است و بررسی هندسی آن را برعهده می‌گیرد. نخستین مقالهٔ مفصل او چاپ ۱۹۳۹ است [Le3]. در حقیقت، پیش از آن تاریخ، پل لوی در کتاب خود [Le1] که در ۱۹۳۷ منتشر ساخت، به انشای حرکت براونیِ خطی به عنوان حالت خاصِ فرآیندهای با نمو مستقل پرداخت. در آنجا نقش تابع $\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}$ در بررسیِ هنگ پیوستگی و تخمین تقریباً به طور حتم آن روشن می‌شود. او به باشلیه[3] [Ba1,2] و وینر [Wi1] ارجاع می‌دهد و آنها را به عنوان بنیانگذار نظریه مطرح می‌کند و از خینچین [Kh] به عنوان واضع قانون لگاریتم تکراری نام می‌برد. از اسمولوچوفسکی[4] بی‌اطلاع است. به نظر نمی‌رسد که کارهای پاله و وینر را بشناسد؛ در هر حال، باید گفت که آن‌ها را نقطهٔ عزیمت خود قرار نمی‌دهد. پل لوی خود را به دست شهود هندسی و احتمالاتی می‌سپارد، از دید او فایدهٔ تحویل احتمالات به اندازهٔ لبگ و یا هرگونه مبانی نظری دیگر، باید مانند فایدهٔ نظریهٔ اصل موضوعی هیلبرت در هندسهٔ اقلیدسی قلمداد شود.

در مقالهٔ ۱۹۳۹ وی، نوآوری‌هایی اساسی دیده می‌شود، از قبیل انتگرال‌های تصادفی $\int_0^1 Y(t)dX(t)$ و $\int_0^1 (dX(t))^2$، که در آن $X(t)$ و $Y(t)$ دو نسخهٔ مستقل از حرکت براونی روی

1) homogeneous chaos 2) deterministic chaos 3) Bachelier 4) Smoluchowski

خطاند (لذا $(X, Y)(t)$ یک نسخه از حرکت براونی در صفحه است)، او هم‌چنین نشان می‌دهد که مساحت خم به دست آمده صفر است و هندسهٔ این خم را تشریح می‌کند. با وجود این، فقط در مقالهٔ ۱۹۴۷ بود که لِوی، در مجله‌ای که ریاضیدانان چندان به آن دسترسی ندارند [Le4]، ناوردایی مسیرها تحت نمایش‌های همدیس را خاطر نشان می‌سازد، ظاهراً معلوم می‌شود که لوی مدت‌ها بود این پدیده را می‌شناخت. به عنوان فرعی بر این قضیه، به تعبیر اندازهٔ همساز[1] می‌پردازد و آن را به شکل احتمال دسترسی حرکت براونی تعبیر می‌کند، نتیجه‌ای که کاکوتانی[2] چندی پیش ثابت کرده بود [Ka]، و البته پس از کارهای پولیا[3] [Pol] سر زبان‌ها افتاده و جزء فرهنگ عامه (فولکلور) شده بود. تأثیر مذاکراتی که پل لوی با دامادش لوران شوارتس[4] داشته است در این زمینه محسوس است، همان گونه که در ملاحظه‌ای پس از این فرع بیان می‌کند:

«طی مذاکره‌ای که در ۱۹۴۱ با ل. شوارتس داشتم، اطلاع یافتم که این فرع قبلاً نیز شناخته شده بود. اما آقای شوارتس نتواست برایم مرجعی فراهم کند و از آنجا که می‌توان این فرع را مستقیماً ثابت کرد، نمی‌دانم قضیهٔ راجع به نمایش همدیس تازگی دارد یا خیر به این دلیل تا امروز صبر کردم و انتشار آن را به تأخیر انداختم.»

اگر از دو کتاب پل لوی [Le1] و [Le5] بگذریم، پر جاذبه‌ترین نوشته‌های او در این زمینه تک نگاری است که با عنوان حرکت براونی در سال ۱۹۵۴ منتشر ساخت [Le6]، کتابی که می‌توان آن را مانند یک داستان خواند مشروط بر آن که خود را به شهود نویسنده بسپاریم.

توجه ویژه به حرکت براونی در صفحه، در نیمهٔ دوم قرن بیستم روبه تزاید بوده است. برای آن که بتوانیم دریابیم تا چه اندازه این موضوع امروز هم فعال است، کافی است به خطابه و کارهای لوگال[5] [LG] رجوع کنیم. این مبحث با اندازهٔ همساز ارتباطی نو و پویا یافته است؛ از جمله، شبیه‌سازی رشد اشیاء مسطحی را که توسط ذرات براونی بمباران می‌شوند و این ذرات جذب آنها می‌گردند، مشاهده خواهیم کرد [WS]. از سوی دیگر فایدهٔ حرکت براونی در آنالیز کلاسیک نیز همواره مورد تأیید بوده است [Kah]، [Bu]، [*Pe*]، [*De*]. به عنوان مثال، قضیهٔ پیکار[6] راجع به توابع تام متناظر با یکی از ویژگی‌های مسیرهای براونی در پیچش حولِ دو نقطه است. رده‌های هاردی[7] قرص یکه، H^p، را هم می‌توان به وسیلهٔ رفتار عناصر آنها روی مسیرهای براونی تعریف و هم می‌توان بررسی نمود. به طور خلاصه، همهٔ ناورداهای همدیس را می‌توان به منزلهٔ ناورداهایی برای مسیرهای براونی که بدون قانون زمانِ سیر هستند در نظر گرفت. به این علت است که، در هندسهٔ یک متغیر مختلط، حرکت براونی از ژئودزیک‌ها هم سودمندتر به نظر می‌رسد (به عنوان مثال، اگر به وسیلهٔ یک تابع **مدولی**[8] بخواهیم قرص یکه را روی پوشش جهانی[9] یک صفحه با دو سوراخ در هر نقطه، نمایش دهیم،

1) harmonic measure 2) Kakutani 3) Polya 4) Laurent Schwartz 5) Le Gall
6) Picard 7) Hardy cfasses 8) Modular function 9) universal cover

ژئودزیک‌های هندسهٔ پوانکاره به راه‌های پیچیده‌ای تبدیل می‌شوند، حال آن که مسیرهای براونی خیلی ساده فقط به مسیرهای براونی تبدیل خواهند شد). حرکت براونی وسیله‌ای است که با آن می‌توان در عین حال، اندازهٔ همساز، مجموعه‌های با ظرفیت لگاریتمیِ [1] صفر، مرز مارتین [2] و حتی ژئودزیک‌ها را «دید». به عنوان مثال، تمرین زیر را که مدیون آدرین دووادی [3] هستم در نظر می‌گیریم. در هندسهٔ پوانکارهٔ نوار، یک ژئودزیک در نظر می‌گیریم که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند و فرض می‌کنیم که A و B هر دو به یک لبهٔ نوار تعلق دارند. نشان دهید که این ژئودزیک در قرص (اقلیدسی) بر قطر AB قرار دارد. اثبات: مورچه‌ای در نظر می‌گیریم که از یک نقطهٔ M متعلق به این ژئودزیک حرکت خود را شروع می‌کند و هر وقت بخواهد از نوار خارج شود مجبور می‌شود بایستد. این مورچه، همان قدر شانس دارد روی پاره‌خط AB بایستد که روی بقیهٔ مرز. اگر اجازه دهیم این مورچه در نیم‌صفحه‌ای که به خط گذرنده بر AB محدود می‌شود گردش کند، آنگاه شانس بیشتری خواهد داشت که پاره‌خط AB را تلاقی کند تاآن که بقیهٔ مرز را. بنابراین، این مورچه بین پاره‌خط AB و ژئودزیک نیم‌صفحهٔ پوانکاره که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند، قرار خواهد گرفت، یعنی نیمدایرهٔ اقلیدسی به قطر AB.

بدون شک ادامهٔ بحث [تأکید بر اهمیت احتمالات.م] بیفایده است. امروز شهودِ احتمالی، همه جا مطرح است، حتی در آنالیز کلاسیک. در این گردش، که در بخشی از تاریخ ریاضیات نیمهٔ اول قرن بیستم انجام گرفت، دیدیم که یک مسأله آنالیز گسترش احتمالات را برانگیخت و اکنون می‌بینیم که حرکت براونی آنالیز را تحت تأثیر قرار می‌دهد. باید اضافه کنم که گردش تصادفی در بسیاری از حوزه‌های مربوط به زندگی، علوم و بدون تردید مربوط به تاریخ ریاضیات خالی از فایده نیست.

سپاسگزاری. از همکار ارجمندم آقای دکتر علی آبکار، که نسخهٔ دستنویس ترجمه را مطالعه فرمودند و در جهت ویرایش متن، تذکرات سودمندی به مترجم دادند، صمیمانه سپاسگزارم. همهٔ این نکات به جا بود و بادیدهٔ منت رعایت شد. هم‌چنین از هیأت تحریریهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، به خاطر مطالعهٔ معرفی و نقد کتاب‌های گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ و گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰ بذل توجه به برخی از توصیه‌های مندرج در آن، از جمله سفارش این مقاله برای ترجمه و درج در فرهنگ و اندیشه ریاضی، تشکر می‌کنم.

مراجع

[Ba1] L. BACHELIER: Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 17 (1900), 21–86.

[Ba2] L. BACHELIER: Théorie mathématique du jeu. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 18 (1901), 143–210.

1) logarithmic capacity 2) Martin boundary 3) Adrien Douady

[Bo1] E. BOREL: Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 12 (1885), 9–55.

[Bo2] E. BOREL: Sur la région de sommabilité d'une série de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 123 (oct. 1896), 348.

[Bo3] E. BOREL: Sur les séries de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 123 (déc. 1896), 1051–1052.

[Bo4] E. BOREL: Sur les séries de Taylor. *Acta Math.* 20(1897), 243–247.

[Bo5] E. BOREL: Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 26 (1909), 247–271.

[Bo6] E. BOREL: *Oeuvres*, tome I. Paris, CNRS, 1972.

[Bu] D.L. BURKHOLDER: Brownian motion and classical analysis. *Probability. Proceedings of symposia in pure mathematics* 31 (1977), 5–14.

[Ca] F.P. CANTELLI: La tendenza ad un limite nel senzo del calculo delle probabilita. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 16 (1916), 191–201.

[Da] B. DAVIS: Brownian motion and analytic functions (special invited paper). *Ann. Prob.* 7 (1979), 913–932.

[De] A. DENJOY: *Un demi–siècle (1907–1956) de notes communiquées aux Académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei,* volume l: *la variable complexe*, 221+58 p. Paris, Gauthier–Villars, 1957.

[Ei] A. EINSTEIN: Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierter Teilchen. *Annalen der Physik* 19 (1905), 371–381.

[Fa1] E. FABRY: Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* (3), 13 (1896), 367–399.

[Fa2] E. FABRY: Sur les séries de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 124 (janv. 1897), 142–143.

[Ha] J. HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J . Math. Pures* & *Appl.* (4) 8 (1892), 101–186.

[HM] J. HADAMARD & S. MANDELBROJT: La série de Taylor et son prolongement analytique. *Scientia*, Gauthier–Villars, Paris, 1926.

[Hau1] F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[Hau2] F. HAUSDORFF: Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen. *Math. Zeitschrift* 4 (1919), 98–103.

[Kah] J. P. KAHANE: Brownian motion and classical analysis, *Bull. London Math. Soc.* 8 (1976), 145–155.

[Ka] S. KAKUTANI: Two dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Math. Inst. Osaka* 21 (1945), 138–140.

[Kh] A. KHINTCHINE: *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Springer, t. 2, 4 (1933), 1–77.

[KK] A. KHINTCHINE & A.N. KOLMOGOROV: Ueber Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. *Mat. Sbornik* 32 (1925), 668–77.

[KS] S. KIERST & E. SZPILRAJN: Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes. *Fund. Math.* 21 (1933), 276–294.

[Ko] A.N. KOLMOGOROV: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin, Springer, 1933.

[Le1] P. LÉVY: *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Paris, Gauthier Villars, 1937.

[Le2] P. LÉVY: Mouvement brownien et schémas géométriques. *C. R. Acad. Sci. Paris* 207 (1938), 1152–1154.

[Le3] P. LÉVY: Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.* 62, 3 (1940), 487–550.

[Le4] P. LÉVY: Trois théorèmes sur le mouvement brownien. *Ass. franc. avanc. sciences*, Supplt. à l'Intermédiaire des recherches mathématiques, fasc. 9 (1947), 124–126.

[Le5] P. LÉVY: *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Paris, Gauthier–Villars, 1948.

[Le6] P. LÉVY: *Le mouvement brownien.* Mémorial Sc. Math. 126 (1954), Paris, Gauthier–Villars.

[LG] J. F. LEGALL: *Some properties of planar Brownian motion.* Cours à la XXe école d' été de probabilités de Saint–Flour (1990).

[PW] R.E.A.C. PALEY & N. WIENER: *Fourier transforms in the complex domain.* A.M.S. Coll. Publ. 19, Providence, 1934.

[PWZ] R.E.A.C. PALEY, N. WIENER & A. ZYGMUND: Notes on random functions. *Math. Z.* 37 (1933), 647–668.

[PZ] R.E.A.C. PALEY & A. ZYGMUND: On some series of functions.
(1) *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 26 (1930), 337–357.
(2) *Ibid*, 458 - 474.
(3) *Ibid*, 28 (1932), 190–205.

[Pe] K.C. PETERSEN: Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation. *London Math. Soc.* Lecture Note Series 28 (1977), Cambridge Univ. Press.

[Pe1] J. PERRIN: Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de Chimie et de Physique* (2) 18 (1909), 5–114.

[Pe2] J. PERRIN: *Les atomes.* Paris, 1912.

[Po] H. POINCARÉ: Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Amer. J. Math.* 14 (1892), 201–221.

[Pol1] G. PÓLYA: Ueber die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. *Acta Math.* 41 (1916–1918), 99–118.

[Pol2] G. PÓLYA: Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die lrrfahrt im Strassennetz. *Math. Annalen* 84 (1921), 149–160.

[Ra] H. RADEMACHER: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.* 87 (1922), 112–138.

[Re] A. RENYI: *Calcul des probabilités.* Paris, Dunod, 1966.

[SKR] H. STEINHAUS, M. KAC & C. RYLL–NARDZEWSKI: Sur les fonctions indépendantes. *Studia Math.* 6 (1936), 46–58, 59–66, 89–97, 7 (1938), 1–15, 96–100, 9 (1940), 121–132, 10 (1948), 1–20, 11 (1949), 133–144, 12 (1951), 102–107, 13 (1953), 1–17.

[St1] H. STEINHAUS: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. *Fund. Math.* 4 (1923), 286–310.

[St2] H. STEINHAUS: Ueber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürlich Grenze ist. *Math. Zeitschrift* 31 (1930), 408–416.

[We] K. WEIERSTRASS: *Zur Funktionenlehre.* Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, août 1880, 719–743.

[Wi1] N. WIENER: Differential space. *J. Math. and Phys.* 7 (1923), 131–174.

[Wi2] N. WIENER: Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* 55 (1930), 117–258.

[Wi3] N. WIENER: The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.* 60 (1938), 897–936.

[WSI] T.A. WITTEN & L.M. SANDER: Diffusion limited aggregation, a kinetic critical approach. Phys. Rev. Lett. 47 (1981), 1400–1463.

[WS2] T.A. WITTEN & L.M. SANDER: Diffusion limited aggregation. Phys. Rev. B. 27 (1983), 5686 - 5697.

[Zy] A. ZYGMUND: On a theorem of Hadamard. *Ann. Soc. Polon. Math.* 21 (1948), 52–69.

ترجمه: ارسلان شادمان
دانشگاه کردستان
achademan@gmail.com

JEAN - PIERRE KAHANE
Mathématique, Bât. 425
Université Paris - Sud
F - 91405 Orsay Cedex

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۸۵ تا ۸۹

گشت و گذاری پنجاه ساله

ژان ـ پیر کاهان

خطابهٔ ژان ـ پیر کاهان[1] روز ۲۸ ژوئن ۱۹۹۹ در جلسهٔ تشریفاتی آکادمی علوم پاریس به مناسبت پذیرش اعضای جدید

مترجم: ارسلان شادمان

برای آن که خود را معرفی کنم، به فکر افتادم که با عاریه گرفتن جمله‌ای از لوران شوارتس[2] به شما بگویم که خود را «درگیر و دار زمانه» چگونه می‌دیده‌ام. هر کس نگاهی ویژهٔ خود به مسائل عمدهٔ زمان خویش و آینده دارد. نگاهِ من هم الهام‌بخش کارهایم در ابعاد گوناگون بوده است؛ هم از نظر شغلی و حرفه‌ای، هم از نظر اتحادیهٔ صنفی و سندیکایی و هم از نظر سیاسی. اما انگیزهٔ آکادمی علوم برای آن که مرا در آستان خود بپذیرد، به این دلایل نبوده است، گو آن که آکادمی توجه عمیقی نسبت به اندرکُنش‌های بین علوم، جامعه و سیاست داشته باشد. بنابراین، گشت و گذار خود را به ریاضیات بسنده می‌کنم.

من خیلی مدیون دانشسرای عالی (اکول نرمال) هستم. استادان برجسته‌ای از جمله هانری کارتان[3] را در آنجا داشتم. اما پیش از آنان به نفوذ و تأثیر دانشجویان پیش از خود و رفقایم می‌اندیشم. شاید هانری کابان[4] به یاد نداشته باشد که جهت‌گیری و پرورش مرا در امر آموزش رقم زده است. در واقع او به من توصیه کرد به گروه مطالعاتی درس (شهادتنامه) حساب دیفرانسیل و انتگرال ملحق شوم. به این ترتیب مرا متصدی رفع اشکال و حل مسألهٔ آن درس نمود که البته من برای این کار توسط دانشجویان انتخاب شده بودم. با همین دانشجویان بود که من شغل خود را یاد گرفتم. پیش‌کسوتان و رفقایم مرا با کتاب‌های خوبی آشنا ساختند. من به عنوان تماشاچی شیفتهٔ نظم و زیبایی ساختارهای عمدهٔ آنالیز به شیوه‌یی که بورباکی[5] تنظیم کرده بود شدم. دوست من ژرژ پواتو[6] کتاب «سری‌های مثلثاتی» تألیف زیگموند[7] را به من هدیه داد که کتابی است زیبا و از نوعی

---

1) Jean-Pierre Kahane 2) Laurent Schwartz 3) Henri Cartan 4) Henri Cabannes
5) Bourbaki 6) Georges Poitou 7) Zygmund

کاملاً متفاوت. دانیل کاستلر[1] موجب آشنایی من با زولم مندلبروت[2] شد و این آشنایی سرنوشت شغلی مرا به عنوان ریاضیدان تعیین نمود. هنگامی که به ملاقات زولم مندلبروت رفتم، از آثار علمی او هیچ شناختی نداشتم و هیچگاه قبل از آن در درس او حضور نیافته بودم. ولی شخصیت او بی درنگ مرا مجذوب کرد. همراه وی، ریاضی به هیچ وجه آن بنای با شکوه به شیوهٔ بورباکی نبود. برعکس، باغی بود پر از گوشه‌های پنهان و گذرگاه‌های مخفی که مندلبروت در آن با شور و شعف ارتباطاتی فراوانی حرکت می‌کرد. او یک محاسبه‌دان بسیار قوی بود و همواره آمادگی داشت تا قصه‌ای یا مسأله‌ای را بازگو کند. یکی از این مسائل الهام‌بخش من شد. آن مسأله این است: در آنالیز فوریه[3]، طیف یک تابع تعریف می‌شود. چه ارتباطی بین طیف تابع و رفتار موضعی آن وجود دارد؟ اگر این شرط را به طیف تابع تحمیل کنیم که در مجموعهٔ مفروضی قرار داشته باشد و به تابع این شرط را که در همسایگی یک نقطه بسیار مسطح شود، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع باید همه جا صفر شود؟ به زبان آن زمان، مسأله یک مسألهٔ «شبه تحلیلی[4]» است. اگر یک نوع نظم در بازه‌یی به تابع تحمیل شود آیا این نظم را الزاماً همه جا خواهد داشت؟ هنگامی که رسالهٔ دکتری خود را در CNRS تهیه می‌کردم، جواب‌های قطعی به برخی مسائل از این نوع را یافتم. بعدها در دههٔ ۱۹۶۰، زولم مندلبروت، پل مالیاون[5] و من همراه با عده‌ای بلورشناس و فیزیکدان نظری در یک پروژه RCP در مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS) دور هم جمع شدیم. عنوان طرح ما «مسائل مخلوط راجع به تبدیل یافته‌های فوریه» بود.واژهٔ مخلوط ناظر به آن بود که در این مسائل، هم تابع f و هم تبدیل‌یافتهٔ فوریهٔ آن F هر دو دخیل بودند. از سوی دیگر چندین رشتهٔ علمی در این مسائل نقش متقابل ایفا می‌کردند. در واقع رابطهٔ بین f و F همهٔ وجود مرا به خود مشغول ساخته است. چند سال پیش، ژان مارک لِوْ ـ لوبلون[6] علاقهٔ مرا مجدداً برانگیختند، به این ترتیب که مسألهٔ جدیدی ناشی از نامساوی‌های هایزنبرگ[7] مطرح کرد. آن مسأله این است: چه وقت یعنی به ازای کدام یک از معادلات شرودینگر[8] می‌توان نامساوی هایزنبرگ وابسته به حالت اساسی را با یک نامساوی در جهت عکس تکمیل نمود؟

به اوایل سال‌های ۱۹۵۰ برمی‌گردم. ابزاری که برای بررسی شبه تحلیلی بودن در اختیار داشتم نوعی تبدیل لاپلاس[9] بود که اجازه می‌داد تبدیل فوریه را به برخی توابع با فرکانس‌های مختلط توسیع دهم. یک روز با برنارد مالگرانژ[10] در این زمینه صحبت می‌کردیم و او برایم روشن ساخت که این مطلب راجع به توابع میانگین ـ متناوب است، مفهومی که توسط ژان دلاستر[11] و لوران شوارتس مطرح شده و نظریهٔ کلی آنها را لوران شوارتس منتشر ساخته است. او اضافه کرد که روش من موجب می‌شود این نظریه به گونه‌ای چشمگیر ساده شود.

بدین ترتیب بود که لوران شوارتس به طور طبیعی عضو هیأت داوران رسالهٔ دکتری من شد.

---

1) Daniel Kastler 2) Szolem Mandelbrojt 3) Fourier 4) quasi-analyticité
5) Paul Malliavin 6) Jean Marc Lévv-Leblond 7) Heisenberg 8) Schrödinger
9) Laplace 10) Bernard Malgrange 11) Jean Delastre

از آنجا که در آن زمان علاوه بر رسالهٔ اصلی رسالهٔ دومی هم برای جلسهٔ دفاع به داوطلب ارجاع می‌شد، لوران شوارتس به من پیشنهاد کرد که موضوع رسالهٔ دوم من ارائهٔ نظریهٔ جبرهای گلفاند[۱] باشد. این نظریه بسیار زیباست و جبرهای عملگرها، جبرهای توابع و جبرهای پیچشی را یکجا در بر می‌گیرد. از سوی دیگر نوربرت وینر[۲] اهمیت جبرهای اخیر را در آنالیز همساز نشان داده بود. ظاهراً ساده‌ترین این جبرها جبر مرکب از دنباله‌های جمعپذیر روی $\mathbb{Z}$ است. اما این جبر به ظاهر ساده در حقیقت بسیار اسرارآمیز است و تبدیل‌یافتهٔ فوریهٔ آن متشکل از توابعی است که حاصل‌جمع سری‌های مثلثاتی مطلقاً همگرا هستند. جبر اخیر در آن زمان خیلی کم مورد مطالعه و بهره‌برداری قرار گرفته بود. این موضوع پس از آن که ایتچاک کاتسنلسون[۳] و پل مالیاون پنداره‌های مربوطه را حل کرده و ابزارهای نوین را برایش بسط داده بودند، در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ به موضوعی بسیار عامه‌پسند تبدیل شد. نقش من آن بود که نخستین نتایج این نظریه را فراهم سازم و نخستین ابزارهای آن را بیاورم که باید گفت برخی از این دستاوردها غیرمنتظره بود. در این زمان من در مُنپلیه[۴] بودم و سمینار تخصصی کوچکی به سال ۱۹۵۸ در آن شهر نقطهٔ آغاز رسالهٔ کاتسنلسون شد. به این مناسبت من توان روش‌های توپولوژیک به شیوهٔ بئر[۵] را کشف کردم و نشان دادم که می‌توان آنها را جایگزین قضایای وجودی نمود و بعدها در موارد عدیده‌ای این روش‌ها را به کار گرفتم. این شیوهٔ خوبی برای رام کردن مسائل غول‌پیکر است که البته لهستانی‌ها در این زمینه استادی خود را ثابت کرده بودند.

رافائل سالم[۶] نیز مرا با شیوه‌ای دیگر برای رام کردن مسائل غول‌پیکر آشنا ساخته بود و آن استفاده از احتمالات بود. این موضوع به کار پاله[۷] و زیگموند در سال‌های ۱۹۳۰ بر می‌گردد و گمان می‌کنم که من دنباله‌روی اصلی آنها بودم. می‌توان سرفصل جدیدی مطرح کرد مثلاً با تغییر تصادفی علامت جمله‌های یک سری از توابع. هم‌چنین می‌توان یک شئ تصادفی طبیعی مانند حرکت براونی را مطالعه کرد. پدیده‌هایی که در آنالیز کلاسیک غیرعادی هستند به پدیده‌هایی تقریباً مطمئن تبدیل می‌شوند از قبیل مشتق‌ناپذیری توابع پیوسته. سالم مطالب عمدهٔ دیگری را نیز به من الهام کرد از قبیل مجموعه‌های بی نقص (یا parfait) و اعداد ویژه‌ای که در سری‌های مثلثاتی دخیل هستند، و تا آن جا پیش رفت که توانستیم کتابی مشترک در این زمینه تألیف کنیم. این کتاب مانند یک کتاب گیاه‌شناسی است که گونه‌هایی از درختان و بوته‌های نادر را که در باغ می‌روییدند در برمی‌گیرد و او این کتاب را به سبک خویش نوشت، سبکی روشن و دربرگیرندهٔ جزئیات. من هم همواره تلاش کرده‌ام این روش را پیش گیرم.

برخلاف آن که با مندلبروت، سالم و کاتسنلسون بسیار نزدیک و وابسته بودم، پل لوی[۸] را فقط به مناسبت‌های نادری ملاقات کردم. اما حال که به زمان گذشته می‌نگرم می‌بینم که او الهام‌بخش اصلی کارهای من بوده است. منبع کاری که روی جبرهای وینر انجام داده بودم، مقاله‌ای از لوی

1) Gelfand 2) Norbert Wiener 3) Yitchak Katznelson 4) Montpellier 5) Baire
6) Raphaël Salem 7) Paley 8) Paul Lévy

به چاپ ۱۹۳۴ بود. در آن مقاله مسألهٔ توابعی که به عنوان عملگر عمل می‌کنند مطرح می‌شود و یک جواب جزئی مسأله توسط قضیهٔ وینر ــ لوی داده شده است. در ۱۹۵۴ هنگامی که کتاب او راجع به حرکت براونی در مجموعهٔ «مموریالِ علوم ریاضی» منتشر شد، این کتاب را با شور و هیجان خواندم و بیست سال پس از آن این سعادت نصیبم شد که پدیده‌ای را کشف کنم که از چشم او پنهان مانده بود. اما یگانه بازدید من از خانهٔ او در سال ۱۹۵۸ بیشترین و بادوام‌ترین آثار را به جا گذاشت. او مرا به خاطر آن دعوت کرد که به مفهوم متغیرهای زیرگاوسی علاقه‌مند شده بود و این مفهوم را من وارد کرده بودم. سپس از دو موضوع برایم صحبت کرد که به نظرش شایان توجه بودند: یکی از آنها نظریهٔ عمومی ضرب‌های تصادفی بود که در آن زمان از این موضوع بی‌تفاوت گذشتم، و موضوعِ دیگر مسألهٔ شگفت‌انگیزی بود بدین مضمون که یک دایره را با کمان‌هایی تصادفی بپوشانیم. در زمینهٔ اخیر بی‌درنگ سهم کوچکی ایفا کردم و مقاله‌ای منتشر ساختم. وانگهی این دو موضوع به هم مربوط‌اند و از آن زمان به بعد ذهن مرا شدیداً به خود مشغول کرده‌اند. در کتاب سال ۱۹٦٨ که من راجع به توابع تصادفی نوشتم هر دو مسأله مطرح شده‌اند. اما توجه من به این دو مسأله با دخالت بنوا مندلبروت[1] تجدید شد. همین که کتاب مشترک من و سالم در ۱۹٦٣ منتشر شد، بنوا مندلبروت به من گفت که ما داریم روی موضوع‌های مشترکی کار می‌کنیم. تا آن زمان من فقط می‌دانستم که بنوا برادرزادهٔ زولم مندلبروت است. منظور بنوا مندلبروت کار روی مجموعه‌های نازک، روی خم‌های نامنظم، اندازه‌ها و ابعاد هاوسدورف بود. او نظریه‌هایی راجع به رابطهٔ بین فرآیندهای لوی و بازه‌های تصادفی داشت. من این ارتباط را تا سال‌های ۱۹۸۰ آن قدرها خوب درک نکردم که بتوانم روی آنها کار کنم تا آن که در آن سال‌ها به مسألهٔ پوشش‌های تصادفی در چهارچوبی کلی حمله‌ور شدم. او حدس زده بود که فرآیندهای لوی به گونه‌ای بسیار طبیعی مجموعه‌های سالم را تولید می‌کنند. او به‌ویژه این مسائل را به دیدگاهی از توربولانس به شیوهٔ کولموگوروف[2] وابسته می‌کرد، و این دیدگاه در ۱۹۷۴ وی را به شکل‌دهی مسائلی بسیار جالب راجع به آنچه امروز افکنه‌های ضربی یا cascades multiplicatives می‌نامند کشانده بود. راه‌حل‌هایی که همراه با ژاک پیریِر[3] برای این مسائل یافتیم، آثار متعددی را در پی داشته‌اند و با افکار اوریل فریش[4] و جئورجیو پاریزی[5] راجع به «آنالیز چند فراکتالی» وارد رزنانس و تشدید متقابل شده‌اند. حاصل‌ضرب وزن‌های تصادفیِ مستقل موضوع اصلی مطالعهٔ من بین سال‌های ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۰ بوده‌اند و اکنون به شکل یک نظریهٔ واحد در آمده‌اند. آنها به ظهور اندازه‌های تصادفی انجامیده‌اند که علاوه بر توربولانس می‌توانند به شکل‌های متعدد دیگری نیز تعبیر شوند و معدنی سرشار از مسائل را فراهم نموده‌اند.

بدین ترتیب من بنوا را با عمویش در این امر شریک می‌دانم که بین ریاضیدانان بیشترین تأثیر را روی من داشته‌اند. من از شوارتس، سالم، پل لوی و کاتسنلسون که کارهای مشترک فراوانی را با هم

1) Benoît Mandelbrot 2) Kolmogorov 3) Jacques Peyrière 4) Uriel Frisch 5) Georgio Parizi

انجام داده‌ایم، همچنین از مالیاون صحبت کردم. اما دربارهٔ شاگردانم و کسانی که کار مرا دنبال می‌کنند صحبت زیادی به میان نیاوردم. تعداد آنان زیاد است و بسیاری از آنان خیلی خوب هستند و به جای آن که از خود بگویم شایسته‌تر بود وقت جلسه را به آنان اختصاص می‌دادم.

یکی از ریاضیدانانی که در خاتمه می‌خواهم نام ببرم، ریاضیدان سوئدی آرنه برلینگ[1] است. او یک ریاضیدان بزرگ و مرد سختگیری بود. من همیشه با او رابطهٔ خوبی داشته‌ام زیرا هیچوقت کار مشترکی با هم انجام ندادیم. اما تصمیم گرفتم او را وادار کنم مقالات و کارهای مخفی خود را منتشر نماید و با تأثیر و دخالت من تعدادی از کارهای او شناخته شدند. دو سال پیش در بزرگداشت و یادوارهٔ او شرکت کردم و نکتهٔ ظریفی از نظریهٔ اعداد اول تعمیم یافتهٔ او را تکمیل کردم که نقطهٔ برخورد آنالیز همساز و نظریهٔ اعداد است.

گشت و گذار خود را به عنوان ریاضیدان که مایل بودم برای شما نقل کنم به پایان می‌رسانم. من یک ریاضیدان حرفه‌ای، یک پیشه‌ور خوب در ریاضیات هستم. اما یک آماتور نیز هستم. من دوست دارم کارهایی را که دیگران هم انجام می‌دهند کشف کنم و دوست دارم پروانه‌وار به همه جا سر بکشم. البته در سن و سال کنونی کمتر و کمتر حرفه‌ای هستم. امیدوارم بیشتر و بیشتر آماتور باشم، آماتور و علاقه‌مند به هر آنچه در ریاضیاتِ گذشته‌ها و در ریاضیات امروز زیبا و سودمند است.

ترجمه: ارسلان شادمان
دانشگاه کردستان
achademan@gmail.com

---

1) Arne Beurling