فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۷، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۷
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۷)
شمارهٔ پیاپی: ۴۰

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: وارن امبروز

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۱ تا ۱۴

قضیهٔ گلدی

احمد حقانی و منصور معتمدی

مقدمه

در دانش نامهٔ آزاد اینترنتی ویکی پدیا[1] و در ذیل «قضیهٔ گلدی» چنین آمده است: «در ریاضیات، قضیهٔ گلدی یک نتیجهٔ ساختاری بنیادی در نظریهٔ حلقه‌هاست که در دههٔ ۶۰–۱۹۵۰ میلادی توسط آلفرد گلدی[2] (۲۰۰۵–۱۹۲۰) به اثبات رسید. قضیهٔ گلدی در مورد حلقه‌های نویتریِ دارای حلقهٔ کسرها که یک حلقهٔ نیم سادهٔ آرتینی و از این رو بنا بر قضیهٔ آرتین ــ ودربورن ساختار شناخته شده‌ای دارند، نتیجه‌ای را به دست می‌دهد.... قضیهٔ گلدی امروزه بدین گونه بیان می‌شود که حلقه‌های نیم اوّل راستِ گلدی تنها آن‌هایی‌اند که دارای حلقهٔ کسرهای راست نیم سادهٔ آرتینی هستند». نویسندگان این مقاله که هر دوی آن‌ها در مکتب گلدی در دانشگاه لیدز درس خوانده‌اند برای ادای دین به مرحوم استاد گلدی نوشتار حاضر را تقدیم خوانندگان فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی می‌نمایند. اهمیت، تأثیر و راه‌گشایی قضیهٔ گلدی در جبر، به ویژه در نظریهٔ حلقه‌ها فراوان بوده است و به طور قطع انجام پژوهش‌های بسیاری در جبر و دستیابی به نتایج مهمی در این زمینه را باید مدیون قضیهٔ گلدی دانست. بیان وابستگی نتایج دیگران به قضیهٔ گلدی و نقش آن در تحولات بعدی که تا به امروز ادامه دارد، خود می‌تواند مضمون نوشتهٔ بلند دیگری باشد. در واقع دانشگاه واریک در فروردین ۱۳۸۵ در بزرگ‌داشت گلدی میزبان کنفرانسی سه روزه بود که در آن شرکت کنندگان و از جمله احمد حقانی غالباً به ارائهٔ آن بخش از دستاوردهای خود پرداختند که به قضیهٔ گلدی وابسته بود. در این مقاله می‌کوشیم زمینه‌های پیدایش قضیهٔ گلدی و مفاهیمی را که در اثبات آن به کار رفته است، آشکار سازیم. در این مورد فرض می‌شود که خواننده با قضیهٔ ساختاری آرتین ــ ودربورن آشنایی دارد. در آن چه که در پی خواهد آمد مقصود از حلقهٔ کسرها، حلقهٔ کسرهای کلاسیک است که لزوماً با حلقهٔ کسرها به معنایی دیگر یکی نیست.

۱. حلقهٔ کسرها

در سال‌های پایانی سدهٔ نوزدهم میلادی گرل[3] از اعضای مکتب امی نویتر[4] مفهوم کسر در اعداد

1) Wikipedia 2) A.W. Goldie 3) H. Grell 4) E. Noether

را به دامنه‌های صحیح دلخواه، یعنی حلقه‌های تعویض‌پذیر بدون مقسوم علیه صفر، تعمیم داد. هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح R شامل تمام دسته‌های هم‌ارزی است که با تعریف یک رابطهٔ هم‌ارزی بر حاصل ضرب دکارتی به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب ساختن هیأت کسرها به همان سادگی ساختن $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{Z}$ است. مهم‌تر آن که این هیأت همواره وجود دارد و به طور یکتا مشخص می‌شود. در مورد حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، اما، چنین نیست و وجود حلقهٔ کسرها وابسته به برقراری شرطی موسوم به شرط اُرِ[1] است. پیش از بیان و شرح این شرط، یادآوری چند تعریف ضروری می‌نماید.

تعریف. از این پس فرض می‌کنیم حلقهٔ R واحددار است و لزوماً تعویض پذیر نیست. عضو $a \neq ۰$ را یک مقسوم علیه راست صفر می‌نامیم، هرگاه $۰ \neq b \in R$ وجود داشته باشد که $ba = ۰$. اگر $۰ \neq c \in R$ وجود داشته باشد که $ac = ۰$، گوییم a یک مقسوم علیه چپ صفر است. عضوی را که مقسوم علیه راست صفر و هم‌چنین مقسوم علیه چپ صفر نباشد، یک عضو منظم می‌نامیم. حلقهٔ R را که لزوماً تعویض پذیر نیست یک دامنه می‌نامیم، هرگاه هر عضوِ ناصفرِ آن منظم باشد.

وان دِر واردن[2]، پس از حضور در کلاس‌های درس امی نویتر در گوتینگن، در ۱۹۲۷ میلادی کتاب معروف خود «جبر مدرن»[۲۱] را به رشته تحریر در آورد. وی در بخشی از این کتاب، پس از اثبات این که هر دامنهٔ صحیح تعویض پذیر را می‌توان در یک هیأت نشاند، این پرسش را مطرح می‌کند که آیا هر دامنهٔ تعویض ناپذیر را می‌توان در یک حلقهٔ تقسیمی نشاند؟ ملسف[3] که توسط کلموگرف[4] از این پرسش آگاه شده بود توانست به آن پاسخ دهد. نامبرده نخست مثالی از یک دامنهٔ تعویض پذیر ارائه داد که نیم گروه ضربی آن را نمی‌توان در یک گروه نشاند [۱۷] ملسف در مقاله‌ای که دو سال پس از آن منتشر کرد یک شرط لازم و کافی برای نشاندن یک نیم گروه در یک گروه را به دست آورد. وان دِر واردن در ویرایش دوم کتاب خود در یک پانوشت با ارجاع به مقالهٔ ملسف یادآور شده است که دامنه‌ها را لزوماً نمی‌توان در یک حلقهٔ تقسیمی نشاند. چنین دامنه‌هایی را امروزه دامنه‌های ملسف می‌نامند. به هر حال مثال ملسف به ویژه نشان می‌دهد که یک دامنه لزوماً دارای حلقهٔ کسرها نیست.

اُرِ با رهیافتی متفاوت توانست یک شرط لازم و کافی برای وجود حلقهٔ کسرها بیابد [۱۹]. پیش از ادامه لازم است به تعریف حلقهٔ کسرها بپردازیم.

تعریف. حلقهٔ Q یک حلقهٔ کسرهای (راست) حلقهٔ R نامیده می‌شود هرگاه

الف) $R \subseteq Q$،

ب) هر عضو منظم c دارای وارون $c^{-۱}$ در Q باشد،

پ) هر عضو Q را بتوان به شکل $ac^{-۱}$ نوشت که در آن a و c عضوهای R هستند و c در R منظم است.

1) Ore 2) B. L. Vander Warden 3) Malsev 4) Kolmogrov

اینک اگر توجه کنیم که $c^{-1}a$ یک عضو Q است، باید a_1 و c_1 (منظم) در R وجود داشته باشند که $c^{-1}a = a_1c_1^{-1}$، یا این که $ca_1 = ac_1$. بنابراین یک شرط لازم برای وجود حلقهٔ کسرها برقراری شرطی است بنام شرط اُرِ که می‌توان آن را به شکل زیر بیان کرد.

شرط اُرِ. اگر S مجموعهٔ عضوهای منظم حلقهٔ R، $a \in R$ و $d \in S$، آن گاه

$$aS \cap dR \neq \emptyset$$

اهمیت شرط اُرِ در کافی بودن آن برای وجود حلقهٔ کسرهاست.

قضیهٔ ۱. حلقهٔ R دارای حلقهٔ کلی کسرهای (راست) است اگر و تنها اگر در شرط اُرِ صدق کند.

این قضیه، نخست برای دامنه‌ها اثبات شد و سپس دبریل[1] آن را در حالت کلی اثبات کرد [۸]. خواننده برای اثبات می‌تواند مرجع [۱] را ببیند. اگر R یک دامنه باشد، شرط اُرِ هم ارز با این گزاره است که برای عضوهای ناصفر a و c اشتراک دو ایدال راست اصلی aR و cR ناصفر باشد. در این حالت هر عضو ناصفر حلقهٔ R در حلقهٔ کسرهایش وارون پذیر است، پس حلقهٔ کسرهای یک دامنه، به شرط وجود، یک حلقهٔ تقسیمی است. اینک لازم است دامنه‌ای مثال زده شود که در شرط اُرِ صدق نمی‌کند.

مثال. فرض کنیم K یک هیأت و $K < x, y >$ جبر تعویض‌ناپذیر و آزاد روی K باشد. می‌توان نشان داد که اشتراک دو ایدال $xK < x, y >$ و $yK < x, y >$ برابر با صفر است و از این رو این حلقه در شرط اُرِ صدق نمی‌کند.

از طرف دیگر اُرِ مثال‌هایی از دامنه‌های تعویض ناپذیر ارائه داد که درشرط اُرِ صدق می‌کنند [۱۹].

این دامنه‌ها را توسیع‌های اُرِ می‌نامند. فرض کنیم R یک دامنه و d یک مشتق آن باشد. یک مشتق حلقهٔ R یک هم‌ریختی گروه جمعی R است که تساوی $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$ برای هر دو عضو a و a' برقرار باشد. اُرِ نشان داد که برای هر مشتق dی حلقهٔ R حلقه‌ای به‌نام حلقهٔ چندجمله‌ای‌های کج $R[y, d]$ ساخته می‌شود که هر عضو آن ترکیب خطی متناهی از توان‌های y و ضرایب در R است. این ضرایب در سمت راست نوشته می‌شوند. هم چنین ry برابر با $yr + d(r)$ تعریف می‌شود. اُرِ نشان داد که اگر R یک حلقهٔ تقسیمی باشد، آن گاه $R[y, d]$ در شرط اُرِ صدق می‌کند و از این رو دارای حلقهٔ کسرهاست. بدیهی است که $R[y, d]$ یک توسیع R است. نتیجه اُرِ بعدها به شکل تعمیم یافته زیر در آمد.

قضیهٔ ۲. هرگاه حلقهٔ R در شرط اُرِ صدق کند، آن گاه برای هر مشتق dی حلقهٔ R، $R[y, d]$ نیز در شرط اُرِ صدق می‌کند. برای اثبات (رک ۴). یکی از مثال‌های توسیع اُرِ و شاید با اهمیت‌ترین آن‌ها جبر کوانتومی یا جبر وایل[2] است.

مثال (جبر کوانتومی یا جبر وایل) فرض کنیم k یک هیأت با مشخصهٔ صفر باشد و $R = k[x]$. اگر d

1) P. Dubreil 2) Wyle

مشتق‌گیری معمولی نسبت به x باشد، توسیع $R[y,d]$ که می‌توان آن را با $k[x,y,d]$ نشان داد جبر کوانتومی یا جبر وایل نامیده می‌شود. سبب پیدایش و نام‌گذاری این جبر دنباله‌ای از مقاله‌هاست که در آن دیراک[1] سعی کرده است، با تعبیر خود، مکانیک کوانتومی را توضیح دهد [۷]. هم‌چنین لیتلوود[2] نشان داده است که شرط اُرِ در مورد این جبر برقرار است [۱۹].

در پی‌گیری مطالعهٔ حلقهٔ کسرها و اثبات قضیهٔ گلدی توجه به تعریف زیر ضروری است.

تعریف. ایدال راست E در حلقهٔ R را اساسی می‌نامیم و می‌نویسیم $E \leq_e R$، هرگاه اشتراک E با هر ایدال ناصفر R، ناصفر باشد.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم R یک حلقه و S مجموعهٔ عضوهای منظم آن باشد. اگر R در شرط اُرِ صدق کند و Q حلقهٔ کسرهای آن باشد، آن‌گاه

الف) اگر $d_1, d_2, \ldots, d_n \in S$، آن گاه $d_1R \cap d_2R \cap \ldots \cap d_nR$، شامل یک عضو منظم است،

ب) برای $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ و $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$، عضو $d \in S$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $x_i = c_i d^{-1}$ (وجود مخرج مشترک)،

پ) اگر A یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $AQ = \{ad^{-1} : a \in A, d \in S\}$،

ت) اگر B یک ایدال راست Q باشد، آن‌گاه $B = (B \cap R)Q$،

ث) اگر A و B ایدال‌های راست R باشند، آن‌گاه $AQ \cap BQ = (A \cap B)Q\}$،

ج) اگر E یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $E \leq_e R$، اگر و تنها اگر $EQ \leq_e Q$.

اثبات. الف) کافی است حالت $n = 2$ را بررسی کنیم. فرض کنیم $d = d_2$ و $a = d_1$ در این صورت به موجب برقراری شرط اُرِ $c \in S$ و $b \in R$ وجود دارد که $d_1c = db = d_2b$. بنابراین $d_1c \in d_1R \cap d_2R$ یک عضو منظم است.

ب) نخست توجه می کنیم که (الف) نشان می‌دهد اگر $d \in d_1R \cap d_2R \cdots \cap d_nR$ آن گاه $d = d_1a_1 = d_2a_2 = \cdots = d_na_n$ و بنابراین $d_i^{-1} = a_i d^{-1}$، $1 \leq i \leq n$. اگر قرار دهیم $x_1 = a_1d_1^{-1}$، $x_2 = a_2d_2^{-1}$، $\cdots$، $b_ix_n = a_2d_2^{-1}$ وجود دارد که $(i = 1, 2, \ldots, n) d_i^{-1} = b_i d^{-1}$ از این جا نتیجه می‌گیریم که $x_1 = a_1b_1d^{-1}$ و $x_2 = a_2b_2d^{-1}$ و $\cdots$ $x_n = a_nb_nd^{-1}$.

پ) فرض کنیم $x \in AQ$، پس $x = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$ که در آن $x_i \in Q$ و $a_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. برای هر i، $b \in R$ و $d \in S$ هست که $x_i = b_id^{-1}$، پس $x = (a_ib_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)d^{-1}$.

ت و ث). اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

ج) فرض کنیم $E \leq_e R$ و $B \neq 0$. یک ایدال راست Q باشد. به موجب (ت)، $B = (B \cap R)Q$.

---

1) P. A. M. Dirac   2) D. E. Littlewood

پس $(B \cap R) \cap E \neq O$ که نتیجه می‌دهد $(B \cap R)Q \cap EQ \neq O$ زیرا که بنا به (ث) $(B \cap R)Q \cap EQ = (B \cap R \cap E)Q$ در نتیجه $EQ \leq_e Q$. به عکس فرض کنیم $EQ \leq_e Q$ که در آن E یک ایدآل راست R است. اگر $A \neq O$ یک ایدآل راست R باشد، $AQ \cap EQ \neq O$ اما $AQ \cap EQ = (A \cap E)Q \neq O$ و بنابراین $A \cap E \neq O$.

۲. پژوهش‌های جیکوبسن[1]

در دههٔ چهارم سدهٔ بیستم میلادی، یکی از وجوه پژوهش در نظریهٔ حلقه‌های تعویض ناپذیر مطالعهٔ ساختاری حلقه‌ها بدون گذاشتن هیچ قیدی بر روی آن‌ها بوده است. در این مورد موفق‌ترین رهیافت از آنِ جیکوبسن بود. گلدی در پژوهش‌های نخستین خود تحت تأثیر آثار جیکوبسن به ویژه کتاب ماندگار وی [۱۴] قرار داشت. یکی از مفاهیم اصلی کارهای جیکوبسن را می‌توان این گونه بیان کرد: فرض کنیم R یک حلقه و M یک ایدآل راست ماکسیمال آن باشد، قرار می‌دهیم.

$$(M : R) = \{x \in R : Rx \subseteq M\}$$

ایدآل دو طرفهٔ I را یک ایدآل اولیهٔ راست R می‌نامیم هرگاه مشمول در یک ایدآل (راست) ماکسیمال M باشد به طوری که $I = (M : R)$. حلقهٔ R را یک ایدآل اولیهٔ (راست) می‌نامیم، هرگاه ایدآل صفر یک ایدآل اولیهٔ (راست) آن باشد. به سبب این که $(M : R)$ همواره یک ایدآل دو طرفهٔ R است، دانسته می‌شود که حلقه‌های ساده، یعنی حلقه‌های ناصفری که تنها ایدآل ناصفرشان R است، حلقه‌های اولیه هستند. می‌توان نشان داد که جبر کوانتومی یک حلقهٔ ساده است. یکی از مهم‌ترین ایدآل‌های دو طرفه در هر حلقه اشتراک تمام ایدآل‌های اولیهٔ (راست) آن حلقه است. این ایدآل را رادیکال جیکوبسن R می‌نامند و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهند. جیکوبسن حلقه‌هایی را که در آن $J(R) = \circ$، نیم‌ساده می‌نامد. به سبب این که همواره $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است، با هر حلقه می‌توان یک حلقهٔ نیم‌ساده ساخت. جیکوبسن هم‌چنین نشان داد که هر حلقهٔ نیم‌ساده را می‌توان در حاصل ضرب مستقیم حلقه‌های اولیه نشاند به طوری که تصویر آن بر روی هر یک از عامل‌های ضرب، پوشا باشد (زیر حاصل ضرب مستقیم). از ابداعات دیگر جیکوبسن، تعریف یک توپولوژی بر روی مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اولیهٔ حلقهٔ R است. این توپولوژی با توپولوژی زاریسکی که بر مجموعه ایدآل‌های اول یک حلقهٔ تعویض‌پذیر تعریف می‌شود مطابقت دارد. جیکوبسن این توپولوژی را فضای ساختاری R نامیده است. نخستین مقالهٔ گلدی در نظریهٔ حلقه‌ها مطالعهٔ خواص حلقه‌های نیم ساده است که در آن بررسی فضاهای ساختاری یک حلقه را به مطالعهٔ فضای ساختاری ایدآل‌های دوطرفهٔ آن (به عنوان حلقه‌های بدون واحد) کاهش می‌دهد. این نتایج در کتاب جیکوبسن با پانوشتی که به کارهای گلدی استناد می‌شود درج شده است.[۱۴]

1) N. Jacobson

۳. دامنه‌های نویتری

در اوایل دههٔ پنجم سدهٔ بیستم میلادی باز هم علاقه به حلقهٔ کسرها در محافل جبری به وجود آمده بود. تاماری[1] نشان داد که جبر پوشی[2] یک جبرِ لیِ متناهی ـ بعد در شرط اُرِ صدق می‌کند و از این رو حلقهٔ کسرهای آن وجود دارد [۲۰]. جبر پوشی نقش اساسی در مطالعهٔ نظریهٔ جبرهای لی دارد و خواص جبری آن شناخته شده است. این جبرها دامنه‌های نویتری نیز هستند. در همان سال‌ها آمیتسر[1] نشان داد که هر دامنه اتحاد چندجمله‌ای[2] (حلقه‌هایی که بسیاری از خواص حلقه‌های تعویض‌پذیر را دارا هستند) در شرط اِرِ صدق می‌کنند [۳]. در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان که در سال ۱۹۵۴ میلادی در آمستردام هلند برگزار شد، جیکوبسن، در ملاقات با گلدی، وی را تشویق کرد که حدسیهٔ معروف خود راجع به حلقه‌های نویتری را ثابت کند.

حدسیه جیکوبسن. اگر R یک حلقهٔ نویتری راست و چپ باشد، آن گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty}(J(R)^n = 0$. این حدسیه در مورد حلقه‌های تعویض پذیر R درست است (قضیهٔ اشتراک کرول[3]). هرشتاین[4] با ارائهٔ یک مثال نشان داده که اگر R نویتری راست باشد، اما نویتری چپ نباشد این حدسیه برای آن درست نیست و مسألهٔ اصلی هنوز مفتوح است. در بررسی این حدسیه لازم بود که به مطالعهٔ حلقه‌های اولیهٔ نویتری پرداخته شود. گلدی در این مسیر ابتدا دامنه‌های سادهٔ نویتری را در نظر گرفت. وی با کارهای اُرِ، مقالهٔ لیتلوود، جبر کوانتومی و نتایج تاماری آشنا بود و توانست با استفاده از شرط اُرِ نشان دهد که هر دامنهٔ نویتری دارای حلقهٔ کسرهاست. گلدی این نتیجه را در سال ۱۹۵٦ اثبات کرد. در این جا اثباتی ساده از آن آورده می‌شود. هم چنان که پیش‌تر گفته شد، برقراری شرط اُرِ در دامنه‌ها بدین معنی است که برای هر دو عضو ناصفر a و c، $aR \cap cR \neq 0$. فرض کنیم $aR \cap cR = 0$. نشان می‌دهیم که در این صورت مجموع $aR + caR + c^2aR + \dots c^naR$ برای هر $n \geq 1$ یک مجموع مستقیم است. در واقع اگر این گونه نباشد، $r_0, r_1, \dots, r_n$ در R وجود دارند که همگی صفر نیستند و

$$ar_0 + car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = 0$$

پس

$$car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = -ar_0$$

اما فرض شده است که $aR \cap cR = 0$، پس $r_0 = 0$ و

$$car_0 + car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = 0$$

از آن جا که $c \neq 0$ و R یک دامنه است، می‌توان c را حذف کرد. پس

1) D. Tamari 2) envelopping algebra 3) S. A. Amitsur 4) polynomial identity domain

3) W. Krull 4) I. N. Herstein

$$ar_0 + ca_2 + \cdots + c^{n-1}ar_n = 0$$

و ادعا به استقرا اثبات می‌شود. اما وجود این مجموع‌های مستقیم ایجاب می‌کند که زنجیر افزایشی

$$aR \subset aR \oplus caR \subset aR \oplus caR \oplus c^2aR \subset \cdots$$

اکید و از این رو R نویتری نباشد که چنین نیست.

گلدی در ملاقاتی که با براور[۵]، از پیش‌گامان مطالعهٔ جبرهای متناهی بعد و کاشف نمایش‌های مدولار داشت این نتیجه را به اطلاع وی رساند و توضیح داد که در گام بعد باید ماتریس‌ها بر دامنه‌ها را در نظر گرفت و بدین ترتیب مورد تشویق و تأیید قرار گرفت. آن چنان که گلدی خود بارها به همکاران و دانشجویان خود اظهار می‌داشت، پس از کار مستمر بر روی نمایش حلقه‌ها سرانجام وجود عضوهای منظم در ایدآل‌های راست اساسی مطرح می‌شود. از این پس ادامهٔ کار چندان مشکل نبوده است.

۴. حلقه‌های اول

حلقهٔ اول حلقه‌ای است که حاصل ضرب هر دو ایدآل ناصفر آن، ناصفر باشد. آشکار است که دامنه‌ها، حلقه‌های اولند، لیکن مثال حلقهٔ ماتریس‌های $n \times n$ $(n > 1)$ با درآیه‌ها در یک حلقهٔ تقسیمی، نشان می‌دهد که، حلقه‌های او ل لزوماً دامنه نیستند. می‌دانیم حلقهٔ ماتریس‌ها با انتخاب درآیه‌ها از یک دامنه، حلقه‌های اول هستند. اما آیا هر حلقهٔ اول به این شکل است. پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ اول نویتری وجود دارد و افزون بر آن حلقه‌ای ساده و آرتینی است. برای مثال $M_n(\mathbb{Q})$ حلقهٔ کسرهای $M_n(\mathbb{Z})$ است. در ادامه، فرض می‌کنیم که R یک حلقهٔ اول نویتری راست است. اگر R دارای حلقهٔ کلاسیک کسرها باشد باید در شرط اُرِ صدق کند. بنابراین اگر $c \in R$، a و c منظم باشد، $c_1 \in R$ و a_1 وجود دارند که $ca_1 = ac_1$ و c_1 منظم است، به ویژه اگر $a \neq 0$، $ca_1 = ac_1$ یک عضو ناصفر $cR \cap aR$ است. بنابراین در ابتدا، اگر بتوان، باید ثابت کرد که: اگر c یک عضو منظم حلقهٔ R و اگر $a \in R$، آن گاه

$$cR \cap aR \neq 0 \qquad (*)$$

درستی این بیان، پیش‌تر در مورد دامنه‌ها به اثبات رسیده است. آیا نباید با رهیافت مشابهی به اثبات آن پرداخت؟ پاسخ مثبت است. نخست یکی از مفاهیم اصلی را که در اثبات قضیهٔ گلدی به کار می‌رود و علاوه بر آن به تنهایی در گسترش و تعمیق نظریهٔ حلقه‌ها و مدول‌ها مؤثر بوده مورد توجه قرار می‌دهیم [۹].

تعریف. ایدآل U در حلقهٔ R یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه اشتراک هر دو ایدآل ناصفر R، مشمول در U ناصفر باشد.

---

1) R. Brauer

از استدلال بیان شده در بخش ۳ چنین نتیجه می‌شود که هر ایدآل ناصفر یک دامنهٔ نویتری، یکنواخت است، اما در مورد حلقه‌های اول نویتری نتیجهٔ ضعیف‌تری وجود دارد.

لم ۱. هر ایدآل راست و ناصفر یک حلقهٔ اول نویتری شامل یک ایدآل راست یکنواخت است.

اثبات. فرض کنیم چنین نیست و I یک ایدآل ناصفر راست حلقهٔ R است که شامل هیچ ایدآل راست یکنواختی نیست. پس I شامل دو ایدآل ناصفر I_1 و I'_1 است که $I_1 \cap I'_1 = 0$. اینک I_1 شامل ایدآل راست یکنواختی نیست، زیرا در غیر این صورت I شامل چنین ایدآل راستی خواهد بود که تناقض است. پس باید دو ایدآل راست I_2 و I'_2 مشمول در I_1 وجود داشته که $I_2 \cap I'_2 = 0$ به علاوه چون $I_1 \cap I'_1 = 0$ و $I'_2 \subset I_1$، نتیجه می‌گیریم که $I'_1 + I'_2$ یک مجموع مستقیم است. با ادامهٔ این روند ایدآل‌های راست I'_1، I'_2، I'_3، $\cdots$ ساخته می‌شوند به طوری که

$$I'_1 \oplus I'_2 \oplus I'_3 \oplus \ldots$$

یک مجموع مستقیم نامتناهی از ایدآل‌های راست ناصفر است که با شرط نویتری بودن R تناقض دارد.

اینک فرض کنیم I یک ایدآل راست ناصفر R و Ω مجموعهٔ تمام مجموع‌های مستقیم ایدآل‌های راست یکنواخت در I باشد. بنا به لم قبل Ω تهی نیست و از این رو باید دارای یک عضو ماکسیمال باشد. بنابراین I شامل یک مجموع مستقیم متناهی ماکسیمال است. در این جا ماکسیمال بدین معنی است که نمی‌توان جمع‌وند دیگری به آن افزود تا مجموع جدید هم‌چنان مستقیم باشد. از آن جا که هر مجموع مستقیم ماکسیمال از ایدآل‌های راست یکنواخت R باید در R اساسی باشد، روشی برای ساختن ایدآل‌های راست اساسی به دست می‌آید.

گلدی نشان داد که در حلقهٔ R تعداد جمع‌وندها در هر مجموع مستقیم ماکسیمال ایدآل‌های راست یکنواخت، مشمول در I یک ناوردای I است. اثبات این ادعا شبیه اثبات ناوردایی عدد اصلی یک پایه برای فضاهای برداریِ متناهی ــ بعد است. این ناوردا، اینک در متون به بعد یکنواخت، بعد گلدی یا رتبه گلدی موسوم شده است [۲] ــ ادعای $(*)$ اینک با توجه لم زیر به اثبات می‌رسد.

لم ۲. اگر c یک عضو منظم حلقهٔ R باشد، آن گاه cR یک ایدآل راست اساسی R است.

اثبات فرض کنیم c یک عضو منظم R باشد. از آن جا که R نویتری فرض شده است، بعد گلدی آن متناهی و برابر با عدد n است. پس ایدآل‌های راست یکنواخت U_1، U_2، $\ldots$، U_n وجود دارند به طوری که $U_1 \oplus U_2 \ldots \oplus U_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال است. اما c یک عضو منظم و هر U_i یکنواخت می‌باشد پس $cU_i \neq 0$، $i = 1, \ldots, n$ و از طرفی هر ایدآل ناصفر راستِ مشمول در cU_i باید به شکل cI باشد که $I \subset U$ یک ایدآل راست R است. چنان‌چه cJ ایدآل ناصفر راست دیگری مشمول در U_i باشد، $I \cap J \neq 0$، زیرا که U_i یکنواخت است. به سبب منظم بودن c داریم

$$cI \cap cJ = c(I \cap J) \neq 0$$

بنابراین cU_1، cU_2، $\cdots$ ایدآل‌های راست یکنواخت R هستند. از آن جا که بعد گلدی R برابر با n

فرض شده است، نتیجه می‌گیریم که $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \ldots \oplus cU_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال دیگر در R است. حال فرض کنیم L یک ایدآل راست R باشد، در این صورت L شامل یک ایدآل راست یکنواخت مانند V بوده و از آن جا که $V \neq 0$ و $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \ldots \oplus cU_n$ ماکسیمال است داریم

$$0 \neq (cU_1 \oplus cU_2 \ldots \oplus cU_n) \cap cv \subseteq cR \cap L$$

که لم را اثبات می‌کند.
لم فوق ایجاب می‌کند که اگر c یک عضو منظم باشد $cR \cap aR \neq 0$ و در نتیجه عضوهای ناصفر $b_2 \in R$ و b_1 وجود دارند به طوری که $cb_1 = ab_2$. اما برای اثبات برقراری شرط، باید بتوان b_1 و b_2 را چنان انتخاب کرد که b_2 در R منظم باشد، به عبارت دیگر باید نشان دهیم که

$$E = \{x \in R : ax \in R\}$$

شامل یک عضو منظم است. اما E یک ایدآل راست R است. از طرفی به سبب منظم بودن c، با توجه به لم قبل به سادگی می‌توان نشان داد که E نیز در R اساسی است. برای نیل به هدف نهایی اثبات حدسیه زیر کافی به نظر می‌رسد.

حدسیه: هر ایدآل راست اساسی شامل یک عضو منظم است.
باید توجه کرد که انتظار داریم Q حلقهٔ کسرهای R، یک حلقهٔ ساده و آرتینی باشد. فرض کنیم E یک ایدآل راست اساسی R باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۱ (ج) EQ یک ایدآل راست اساسی Q است. به سبب این که Q یک حلقهٔ ساده و آرتینی است، هر ایدآل راست آن یک جمع‌وند آن است، از این رو اساسی بودن QE نتیجه می‌دهد که $EQ = Q$، به ویژه به ازای یک $a \in E$، $ac^{-1} = 1$ و در نتیجه $c = a \in E$. اینک قضیهٔ زیر اثبات شده است.

قضیهٔ ۴. اگر حلقه R دارای حلقهٔ کسرها باشد که ساده و آرتینی است آن گاه هر ایدآل راست اساسی R شامل یک عضو منظم است.

۵. نتیجهٔ اساسی

هدف اصلی این بخش اثبات حدسیهٔ بخش قبل است. یادآوری چند تعریف ضروری به نظر می‌رسد. فرض کنیم a یک عضو حلقهٔ R باشد. پوچ‌ساز راست a ایدآل راست $r(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ است. پوچ ساز چپ a به طریق مشابه تعریف می‌شود. آشکار است که a منظم است اگر و تنها اگر $r(a) = l(a) = 0$. عضو a را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای یک عدد طبیعی مانند n، $a^n = 0$. ایدآل I را پوچ می‌نامیم، هرگاه هر عضو آن پوچ‌توان باشد. از اثبات لم بعد صرف‌نظر می‌کنیم.

لم ۳. اگر R یک حلقهٔ اول نویتری باشد، شامل ایدآل پوچ ناصفر نیست.

لم ۴. فرض کنیم R یک حلقهٔ اول نویتری باشد. اگر a یک عضو R باشد، عدد طبیعی n وجود دارد که $a^nR \oplus r(a^n)$ در R اساسی است.

اثبات. به علت نویتری بودن R، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n > N$، $r(a^n) = r(a^{n+1})$. نشان می‌دهیم که برای چنین nای، مجموع $a^nR \oplus r(a^n)$ یک مجموع مستقیم است. عضو $x \in R$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a^nx \in r(a^n)$، پس $a^{2n}x = 0$ و به موجب ماکسیمال بودن $r(a^n)$، داریم $x \in r(a^{2n}) = r(a^n)$. از این جا لازم می‌آید که $a^n = 0$ پس برای هر $n \leq N$، $a^nR \cap r(a^n) = 0$. اینک باید نشان دهیم که $a^nR \oplus r(a^n)$ در R اساسی است. اگر چنین نباشد، ایدآل راست ناصفر I وجود دارد که $I \cap (a^nR \oplus r(a^n)) = 0$. در این صورت مجموع

$$a^nI + a^{2n}I + \cdots + a^{kn}I$$

برای هر $k \geq 0$ یک مجموع مستقیم است. برای اثبات این ادعا، به استقرا فرض می‌کنیم برای $k - 1$ مجموع داده شده مستقیم باشد و $x \in a^nI \cap (a^{2n}I + \cdots + a^{kn}I)$، آن گاه $x = a^ny = a^{2n}z$ که در آن $y \in I$ و $z \in R$. بنابراین $a^n(y - a^nz) = 0$ و $y - a^nz \in r(a^n)$، از این قرار

$$y \in I \cap (a^nR + r(a^n)) = 0$$

به ویژه $x = a^ny = 0$. از آن جا که حلقهٔ نویتری نمی‌تواند شامل یک مجموع مستقیم نامتناهی باشد، اثبات کامل است.

اینک تمام ابزارهای لازم برای اثبات حدسیه را در اختیار داریم.

قضیهٔ ۵. ایدآل راست و ناصفر I در حلقهٔ اول و نویتری R اساسی است اگر و تنها اگر شامل یک عضو منظم باشد.

اثبات. بنا به لم ۲ شرط کافی است. فرض کنیم E یک ایدآل راست ناصفر R باشد. از لم ۳ نتیجه می‌شود که E شامل یک عضو غیرپوچ توان x است. به علاوه $n \geq 0$ وجود دارد که $x^nR \cap r(x^n) = 0$. فرض کنیم $a_1 = x^n$ در این صورت $r(a_1) \cap E = 0$ یا $r(a_1) \cap E \neq 0$. در حالت دوم استدلال را با $r(a_1) \cap E = 0$ تکرار و $a_2 \in r(a_1) \cap E$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_2 \cap r(a_2) = 0$. شرایط انتخاب a_1 و a_2 ایجاب می‌کند که مجموع

$$a_1R + a_2R + (r(a_1) \cap r(a_2) \cap E)$$

یک مجموع مستقیم باشد. اگر $r(a_1) \cap r(a_2) \cap E \neq 0$، روند فوق را ادامه می‌دهیم. در مرحلهٔ kام مجموع مستقیم

$$a_1R \oplus \cdots \oplus a_kR \oplus (r(a_1) \cap \cdots r(a_k) \cap E)$$

که در آن $0 \neq a_k \in r(a_1) \cap \cdots r(a_{k-1}) \cap E$ به دست می‌آید. به سبب نویتری بودن R این روند باید در مرحله‌ای مثلاً در مرحلهٔ kام متوقف شود، یعنی

$$r(a_1) \cap r(a_k) \cap E \neq 0$$

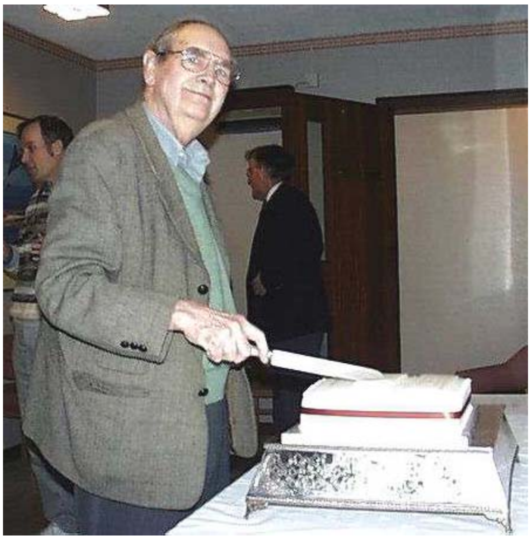
اگر فرض کنیم که E اساسی است، خواهیم داشت

$$r(a_1) \cap \cdots \cap r(a_k) = 0$$

قرار می‌دهیم $c_1 = a_1 + a_2 + \cdots a_k$. از مستقیم بودن $a_1R \oplus \cdots \oplus a_kR$ نتیجه می‌شود که

$$r(c_1) = r(a_1) \cap \cdots r(a_k) = 0$$

به موجب لم ۴ به ازای nای، $c_1^nR \oplus r(c_1^n)$ یک ایدآل راست اساسی است. فرض کنیم $c = c_1^n$. به علت این که $r(c_1^n) = 0$ داریم $r(c) = r(c_1) = 0$. نشان می‌دهیم که هم‌چنین $l(c) = 0$. اگر $0 \neq z \in l(c)$ آن‌گاه $r(z)$ شامل ایدآل راست اساسی $cR \oplus r(c)$ است و از این رو خود یک ایدآل راست اساسی است. مجدداً لم را این بار برای z به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که برای عدد طبیعی m، $z^mR \cap r(z^m) = 0$. به سبب این که $r(z) \subseteq r(z^m)$ و $r(z)$ اساسی است، نتیجه می‌گیریم که $z^m = 0$. بنابراین تمام عضوهای $l(c)$ پوچ‌توان هستند. بنا به لم ۳، $l(c) = 0$ و c یک عضو منظم E می‌باشد.



آلفرد گلدی در مراسم بزرگداشت ۸۰ سالگی

۶. حلقه‌های گلدی

از آن چه که تاکنون بیان و ثابت شد نتیجه می‌شود که حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ اولِ نویتری وجود دارد. گلدی علاوه بر این نشان داد که این حلقه، ساده و آرتینی است. اثبات این قسمت به مطالب دیگری نیاز دارد که از پرداختن به آن صرف نظر می‌کنیم. در مورد عکس این نتیجه چه

می‌توان گفت؟ یعنی اگر حلقهٔ کسرهای حلقه‌ای موجود، ساده و نیم‌آرتینی هم باشد، آیا حلقه اول و نویتری است؟ پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که می‌توان توصیف کاملی از حلقه‌هایی که حلقهٔ کسرهای آن وجود دارد، ساده و آرتینی است به دست داد. اگر به اثبات مطالب توجه کنیم، دانسته می‌شود که از ویژگی نویتری بودن برای اطمینان از برقراریِ دو شرط استفاده شده و از آن دو شرط بقیهٔ نتایج به دست می‌آیند. این دو شرط عبارتند از

۱) هر مجموعِ مستقیم ایدآل‌های راستِ ناصفرِ حلقه، متناهی است.

۲) شرط فزاینده روی ایدآل‌های راست پوچ‌ساز وجود دارد.

گلدی در مقاله‌ها و در کلاس‌های درس خود، حتی پس از سالیان طولانی با تواضع کامل چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های دارای شرط (۱) و (۲) می‌نامید. دیگر ریاضی‌دانان آن‌ها را حلقه‌های گلدی نامیدند. اکنون می‌توان قضیه را در حالت کلی آن چنین بیان کرد.

قضیه ٦. حلقهٔ R دارای حلقهٔ کسرهای ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر R اول و گلدی باشد.

قضیهٔ فوق محتوای کامل قضیه‌ای نیست که در [۹] به اثبات رسیده است. زیرا گلدی فرض کرده بود که R دارای حلقهٔ کسرهای راست و چپ است. بنابراین مشابه شرط‌های (۱) و (۲) نیز باید برقرار باشد. لازم به ذکر است که لزور[1] و کروا[2] قضیه فوق را در ۱۹۵۹ اثبات کرده‌اند. چنان چه به اثبات‌های بیان شده توجه کنیم درمی‌یابیم که از شرط اول بودن تنها از نداشتن ایدآل پوچ‌توان ناصفر استفاده شده است. ایدآل I در حلقهٔ R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای عدد طبیعی مانند n، $I^n = 0$. حلقهٔ R نیم اول نامیده می‌شود هرگاه ایدآل صفر تنها ایدآل پوچ‌توان آن باشد. گلدی در ۱۹٦۰ قضیهٔ فوق را به شکل زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۷ (قضیه گلدی). حلقهٔ R دارای حلقهٔ کسرهای نیم ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر نیم اول و گلدی باشد.

مراجع

[۱] جان بیچی، دروس مقدماتی حلقه‌ها و مدول‌ها، ترجمه احمد حقانی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.

[۲] م. معتمدی، بعد فضای برداری و بعد گلدی، نشر ریاضی ۱۳۷۱، ۲۲—۱۸.

[3] A. S. A. Amitsur, Prime rings having polynomial identities with arbitrary coefficients, Proc, London Mathematical. Soc. (3)(17) (1967), 470-486.

[4] P. M. Cohn, Algebra Vol 2. John Wiley & Sons, 1977.

1) C. Lesieur 2) R. Croisot

[5] S. C. Coutinho and J. C. McConell. The quest for the quotient rings (of non-commutative rings), Amer. Math. Monthly 110 (2003), 298-313.

[6] S. C. Coutinho, Quotient rings of non-commutative rings in the first half of the 20^{th} century, Archive for history of exact sciences, vol. 58 number 3, March 2004, 225-281.

[7] P. A. M. Dirac, On Quantum Algebra, Roy. Soc. Proc. A, 110 (1926) 412-418.

[8] P. Dubreil, Sur les problem d'immersion et theorie des modules, C. R. Acad. Sci, Paris 216 (1943) 625-627.

[9] A. W. Goldie, The structure of prime rings with ascending chain conditions, Proc. London Math. Soc., 8(1958) 581-608.

[10] A. W. Goldie, Semiprime rings with maximal conditions, Proc. London Math. Soc, 10 (1960) 201-209.

[11] H. Grell. Beziehungen Zwichen Idealen Verchiedover Ringen, Math. Ann., 97 (1927).

[12] N. Jacobson. A topology for the set of primitive ideals in arbitrary rings, Proc. Nat. Acad. Sci. 31 (1945), 333-338.

[13] N. Jacobson, The radical and semisimplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. 67 (1945) 300-320.

[14] N. Jacobson. The structure of rings, Amer. Math Soc. Providence (1956).

[15] C. Lesieur and r. Croisot. Sur les anneaux premiers noetheries a gouche. Ann. Ecole. Norm. Sup 76 (1959) 161-183.

[16] D. F. Littelwood, On the classification of algebras. Proc. London Math. Society (2) 35 (1953), 200-240.

[17] A. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field. Math. Ann. 113 (1937), 686-691.

[18] Malcev. Über die Einbettung Von assoziation in Gruppen. rec. Math Moscou 6 (1939) 331-336.

[19] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials. Ann. Math. 34 (1933), 480-508.

[20] D. Tomari, On the embedding of Brikhoff-Witt rings in quotient fields. Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 197-202.

[21] B. L. Vander-Warden, Modern Algebra I, II (Berlin 1930,31).

[22] B. L. Vander-Warden, On the source of my book Modern Algebra, Historica Mathematica 2(1975) 31-40.

احمد حقانی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
aghagh@cc.iut.ac.ir

منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی
motamedi_ m@scu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۱۵ تا ۴۶

مسائل راهبردی در آنالیز همساز و کاربردهای آنها

علیرضا مدقالچی

چکیده

یکی از مسائل عمده در ریاضیات قرن هجدهم پیدا کردن معادلهٔ مسألهٔ فیزیکی ارتعاش یک فنر بود که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (c ثابت است) شد و حل این معادله منجر به سری‌های فوریه شده است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ میلادی در اثر ماندگار بورکارت جمع‌آوری شده است. از این تاریخ به بعد گسترش وسیع سری‌های فوریه روی گروه دایره ($\mathbb{T}$) و گروه جمعی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) متمرکز شده است. کتاب زیگموند کتاب استانداردی در مورد سری‌های فوریه روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ یعنی آنالیز همساز روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ است. بالاخره کتاب بوخنر اثری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی $\mathbb{R}$ است. این کتاب حاوی محاسبات بسیار ارزنده‌ای است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز باارزش هستند.

صدای تولید شده از ارتعاش یک تار، ستونی از هوا، ترکیبی از تعدادی از صداهای خالص یا «همساز» است. در مطالعات فیزیک ـ ریاضی قرن‌های هجدهم و نوزدهم تعیین این مؤلفه‌ها [آنالیز همساز] و بازسازی موسیقی حاصل از مؤلفه‌ها [ترکیب همساز] یکی از مسائل اکوستیک بوده است. چنین مسائلی در اکثر پدیده‌های فیزیکی که یا متناوب و یا دارای تناوب‌های پنهان، هستند وجود دارد. وینر بحث روشن‌گرانه‌ای در مورد کارهای فیزیک‌دانان دارد. او در مقالهٔ خود که در ۱۹۳۰ میلادی منتشر شد توابعی متناوب روی $\mathbb{R}$ و حتی توابعی از $L^2(\mathbb{R})$ را مورد مطالعه قرار داده است. تابع‌های روی $\mathbb{T}$ [توابع متناوب روی $\mathbb{R}$] و توابع روی $\mathbb{R}$ [تابع‌های با تناوب پنهان] در بعضی حالات روی $\mathbb{T}^n$ و $\mathbb{R}^n$ تحلیل و ترکیب را نشان می‌دهد. سری‌های فوریه روی $\mathbb{T}$ و تبدیل‌های فوریه روی $\mathbb{R}$ از این نوع مسائل هستند.

در آنالیز همساز مدرن، به جای $\mathbb{T}$ و $\mathbb{R}$ یک گروه توپولوژیک فشردهٔ موضعی G می‌نشیند و فضایی از تابع‌ها روی G مورد بحث قرار می‌گیرد.

قبلاً در دو مقالهٔ توصیفی تحت عناوین «آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده و به کجا می‌رود» و «پژوهش در ریاضیات» در این مفاهیم سخن گفته‌ایم. در دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی در مقاله‌ای مروری در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک بحث کرده‌ایم. در این مقاله آنالیز همساز را از منظر دیگری مورد بحث قرار می‌دهیم. آنالیز همساز نه تنها روی گروه‌های توپولوژیک، بلکه روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک و ابرگروه‌های توپولوژیک و گروه‌واره‌ها کاملاً گسترش یافته است.

مبحث‌های مطالعهٔ آنالیز همساز به شرح زیر است و ما فقط دربارهٔ گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها بحث می‌کنیم.

الف) گروه‌های توپولوژیک

۱ــ توسعهٔ آنالیز همساز بعد از مسألهٔ پنجم هیلبرت [هر گروه اقلیدسی موضعی یک گروه لی است] و نظریهٔ نمایش

۲ــ وجود اندازهٔ پایای چپ [اندازهٔ هار] روی گروه‌های توپولوژیک فشردهٔ موضعی

۳ــ نظریهٔ نمایش و کاربردهای آنها و کارهای ویل، فون نویمن و ویگنر

۴ــ میانگین‌های پایا[1] و توابع تقریباً متناوب

۵ــ جبرهای فون نویمن یا جبر عملگرها

۶ــ جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس

۷ــ توابع تقریباً متناوب

ب) نیم گروه‌ها

ایدهٔ نیم‌گروه‌های جبری به زمان‌های دور و تعریف اعمال روی مجموعه‌ها برمی‌گردد، ولی ریشهٔ آنالیز روی نیم گروه‌ها را می‌توان در کارهای هارولد بور در سال‌های ۱۹۲۵ و ۱۹۲۶ یافت، زمانی که او توابع تقریباً متناوب را روی خط حقیقی سرشت نمایی کرد. در ۱۹۲۷ بوخنر سرشت‌نمایی تحلیلی از توابع تقریباً متناوب ارائه داد و سرانجام فون نویمن و بوخنر در ۱۹۳۴ نظریهٔ توابع تقریباً متناوب را روی گروه توپولوژیک دلخواه G توسیع دادند. در مبحث گروه‌ها به طور مفصل در این مورد بحث خواهیم کرد. بالاخره گسترش توابع تقریباً متناوب و فشرده‌سازی به نیم‌گروه‌ها باعث توسعهٔ نیم‌گروه‌های توپولوژیک شد، بعدها مفهوم فشرده‌سازی ضعیف مورد توجه قرار گرفت و ابرلین[2] اولین کسی است که در ۱۹۴۹ این مفهوم را روی نیم‌گروه‌ها توسعه داد. از آن زمان به بعد آنالیز روی نیم‌گروه‌ها به صورت یک رشتهٔ کامل با محتوی محض و کاربردی درآمده است.

---

1) invariant means 2) Eberlin

ج) ابر گروه‌های توپولوژیک

ایدهٔ ابرگروه‌های توپولوژیک به دهه‌های قبل برمی‌گردد ولی آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها در واقع با مطالعهٔ فضای اندازه‌های بورل و منظم و تبدیل آن به یک جبر پیچشی روی G/H و $G//H$ با مقالهٔ مفصل جویت در ۱۹۷۵ و مقاله‌های دانکل و اسپکتر شروع شده است. این مقاله‌ها، به ویژه مقالهٔ جویت، آنالیز همساز روی گروه‌ها را تا اندازهٔ زیادی روی ابرگروه‌ها گسترش داده‌اند. از آن زمان به بعد مقاله‌های زیادی در این موضوع چاپ شده است.

د) گروه واره‌ها

مفهوم گروه‌واره در ۱۹۲۷ در کارهای براندت معرفی شد. در واقع، گروه‌واره کوچک‌ترین کاتگوری با وارون است. هر گروه یک گروه‌واره است ولی عکس آن درست نیست. اگر R یک نسبت هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد، در این صورت R یک گروه‌واره با ضرب $((x,y),(y,z)) \longrightarrow (x,z)$ و وارون $(x,y)^{-1} = (y,x)$ است. امروزه محقق شده است که بین گروه‌واره‌ها، نیم‌گروه‌های وارون و جبرهای عمل‌گری رابطه‌های مهمی وجود دارد. در این مقاله، در این باره بحث نمی‌کنیم و خواستاران اطلاعات بیشتر در این زمینه را به کتاب آلن ـ پاترسون ارجاع می‌دهیم.

ه) نتیجه‌های جدید

در آخرین بخش مقاله نتیجه‌های جدید خود را در مورد تعمیم جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس روی نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها ارائه می‌دهیم و میانگین‌پذیری جبرهایی را روی نیم‌گروه‌ها بررسی می‌کنیم. چند نتیجهٔ دیگر در مورد تانسور نیم‌گروه‌ها را می‌آوریم. سرانجام، مختلط‌سازی $L^{1}(G)$ را بررسی می‌کنیم. این نتیجه‌ها حاصل کار نگارنده با دانشجویان و همکاران است که در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۶ چاپ شده‌اند.

رده‌بندی موضوعی مقاله: 43.03، 43A05، 43A20، 43A30، 43A60، 43A65.

کلمات کلیدی: گروه توپولوژیک، نمایش، فشرده‌سازی، نیم گروه، ابرگروه، C^* ـجبر گروهی، جبر فوریه، جبر فوریه استیلتیس، ابرگروه تانسوری.

۱. مقدمه

در مقالهٔ [۵٦] اشاره کردیم که ریشه‌های آنالیز همساز کلاسیک در حل معادلهٔ حرارت و متعلق به فوریه است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ در اثر ماندگار بورکات [10] مورد بررسی قرار گرفته است. کتاب‌های زیگموند [55] و بوخنر (نگاه کنید به [22] صفحهٔ ۲۸۲) را می‌توان آثاری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی $\mathbb{R}$ دانست به ویژه کتاب ارزشمند بوخنر حاوی محاسبات بسیار

ارزشمندی است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز مفید هستند. تعیین همسازی‌ها و ترکیب آنها یکی از مسائل مهم در آنالیز فوریه است که ریشه در مسایل فیزیکی و اکوستیک دارد. این مبحث منجر به بررسی تابع‌های متناوب و حتی تابع‌هایی در $L^2(\mathbb{R})$ شده است که در سال ۱۹۳۰ در مقالهٔ وینر آمده است [52]. از این رو، می‌توان آنالیز همساز را بررسی جبرهای توابع روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ [دایره واحد] دانست.

در آنالیز همساز مدرن، به جای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ گروه فشردهٔ موضعی G می‌نشیند و فضاها و جبرهای توابع روی G مورد بحث قرار می‌گیرند. امروزه بحث عمدهٔ آنالیز همساز بررسی این فضاها و یا جبرها مثل فضاها و یا جبرهای $L^1(G)$، $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$، $L^\infty(G)$، $M(G)$، $A(G)$، $VN(G)$، $L^p(G)\hat{\otimes}L^q(G)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$، $\cdots$ است. مطالعهٔ فضاهای توابع روی نیم‌گروه‌ها، ابرگروه‌ها و گروه‌واره‌ها از دیگر پیشرفت‌های سال‌های اخیر است.

تعریف‌های مقدماتی

گروهG به همراه یک توپولوژی را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم اگر اعمال جبری $(x,y) \longrightarrow xy$، $x \longrightarrow x^{-1}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشند. مثال‌های ساده عبارتند از $(\mathbb{R},+,|\cdot|)$ [گروه جمعی $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی]، $(\mathbb{T},.,|\cdot|)$ [گروه ضربی دایره با توپولوژی معمولی]، گروه گسستهٔ $\mathbb{Z}$.

به طور مسلم مثال‌های گروه‌های توپولوژیک بسیار غنی‌تر از این مثال‌های ساده است. در واقع، اساس گروه‌های توپولوژیک، گروه‌های لی است که گروه‌هایی توپولوژیک با ساختار تحلیلی هستند. این گروه‌ها توسط سوفس‌لی و فلیکس کلاین و دیگران تحت عنوان «نظریهٔ گروه‌های پیوسته» مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

از دیدگاه کلاین هر هندسه، فضای همگنی است که می‌توان در آن اشیاء را بدون تغییر شکل حرکت داد. در نتیجه، هر هندسه با یک گروه طولپایی مشخص می‌شود. این گروه‌ها، گروه‌های لی یا گروه تبدیلات هستند [6].

تعریف. اندازهٔ λ را روی یک گروه توپولوژیک، هار[1] پایای چپ [راست] می‌نامیم اگر $\lambda(xE)=\lambda(E)$ [$\lambda(Ex)=\lambda(E)$] به ازای هر $x \in G$ و هر مجموعهٔ بورل E. مثلاً، اندازهٔ هار روی گروه جمعی $\mathbb{R}$ اندازهٔ لبگ و روی گروه جمعی گسستهٔ $\mathbb{Z}$، اندازهٔ شمارشی و روی گروه ضربی $\mathbb{R}\setminus\{0\}$، $\frac{dx}{|x|}$ است. در واقع، اگر λ یک اندازهٔ پایای چپ باشد آنگاه $I(f)=\int_E f\,d\lambda$ یک انتگرال پایای چپ است یعنی $I({}_xf)=I(f)$ که در آن ${}_xf(y)=f(xy)$.

محاسبهٔ اندازهٔ پایای چپ روی گروه‌های خاص ریشه‌ای طولانی دارد. فروبنیوس و شور بین ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ روی گروه‌های متناهی میانگین‌های زیادی ساخته‌اند [30]، و شور انتگرال‌های پایا

1) Haar

روی $SO(n)$ [گروه متعامد خاص از ماتریس‌ها] و $O(n)$ [گروه متعامد] را محاسبه کرده است. سرانجام ویل انتگرال‌های پایا روی $U(n)$ [گروه یکانی از ماتریس‌ها] را ساخته است. در ادامه بعضی از این گروه‌ها را بررسی خواهیم کرد.

سرآغاز پیدایش گروه‌های توپولوژیک را می‌توان سال ۱۹۳۰ دانست. برای گروه‌های شمارای دوم وجود اندازهٔ پایای چپ را هار در ۱۹۳۳ ارائه داد. این اندازه از آن پس به اندازهٔ هار معروف شد [30]، برهان یکتایی این اندازه از آنِ فون نویمن است [41]. ویل شرط شمارش‌پذیری را از این قضیهٔ وجودی حذف کرد و به طور منظم گروه‌های توپولوژیک و اندازهٔ هار را مورد مطالعه قرار داد [51]. سرانجام ثابت شد که گروه توپولوژیک G اندازهٔ هار یکتا دارد اگر و فقط اگر فشردهٔ موضعی باشد [22]. اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم که جزئیات آنها را می‌توان در [29] و [22] یافت.

(i) روی گروه متناهی G با تعداد اعضای n، $I(f)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G} f(x)$ یک انتگرال پایای راست و نیز چپ است. و در نتیجه $\lambda(E)=\frac{1}{n}c(E)$ اندازهٔ هار راست و چپ است که در آن $c(E)$ تعداد اعضای E است.

(ii) در مورد گروه جمعی $\mathbb{R}$، $I(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ روی $C_c(\mathbb{R})$ انتگرال پایای چپ است و اندازهٔ هار متناظر همان اندازهٔ لبگ معمولی است.

(iii) فرض کنید G یک گروه نامتناهی و گسسته و $C_c^+(G)$ مجموعهٔ تمام توابع نامنفی بر G باشد که همه جا صفرند به‌جز تعداد متناهی نقطه. اگر $f\in C_c^+(G)$، آن‌گاه

$$f=\sum_{k=1}^{n} a_{k a_k^{-1}}\delta=\sum_{k=1}^{n} a_k\delta_{a_k^{-1}}$$

که در آن $\delta(e)=1$ و $\delta(x)=0$ وقتی که $x\neq e$. زیرا

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{k_{a_k^{-1}}}\delta(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\delta(a_k^{-1}x)=\begin{cases} a_i & \text{به‌ازای هر } x=a_i,\\ 0 & \text{به‌ازای هر } x\neq a_i\,, \end{cases}$$

پس، $I(f)=\sum_{k=1}^{n} a_k I(a_k^{-1}\delta)=(\sum_{k=1}^{n} a_k)I(\delta)$. در این صورت با فرض $I(\delta)=1$، اندازهٔ هار اندازهٔ شمارشی است.

(iv) فرض کنید G یک گروه توپولوژیک با ویژگی‌های زیر باشد.

الف) G زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^n$ است.

ب) اگر $x,y\in G$، xy تابعی مانند F است که اگر $x=(x_1,\dots,x_n)$ ، $y=(y_1,\dots,y_n)$، $F(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ تصویر نگاشت F از $G\times G\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ به $G\subseteq\mathbb{R}^n$ است.

ج) فرض کنید F_j تصویر F به مختص jام است، $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ و $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ بر $G\times G$ موجود و پیوسته است.

د) فرض کنید $\sigma_a : G\longrightarrow G$ و $\delta_a : G\longrightarrow G$ انتقال‌های چپ و راست باشد، یعنی

$\sigma_a(x) = ax$ و $\delta_a(x) = xa$، $S(a)$ و $D(a)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(a) = |J(\sigma_a)|, \quad D(a) = |J(\delta_a)|$$

که در آن $J(\tau)$ ژاکوپین τ است. می‌دانیم $J(\sigma_a \circ \sigma_b) = J(\sigma_a).J(\sigma_b)$، و در نتیجه،

$$S(ab) = S(a)S(b) \quad (a, b \in G)$$

به طریق مشابه، $\delta_{ab} = \delta_b \circ \delta_a$ و از این رو

$$D(ab) = D(a)D(b)$$

و بالاخره، اگر e عضو واحد G باشد، $S(e) = D(e) = ۱$. پس S و D هم‌ریختی‌های پیوسته از G به گروه ضربی $(۰, \infty)$ هستند.

ادعا می‌کنیم که انتگرال‌های:
$I_s(f) = \int_G f(x)\frac{۱}{S(x)}dx, \quad I_d(f) = \int_G f(x)\frac{۱}{D(x)}dx \quad (f \in C_c(G))$ [به ترتیب انتگرال‌های راست و چپ هستند.] برای اثبات، فرمول تغییر متغیر در انتگرال چندگانه را به کار می‌بریم، داریم:

$$\int_{\sigma_a(G)} \varphi(x)dx = \int_G (\varphi \circ \sigma_a)(y)|J(\sigma_a)(y)|dy$$

حال اگر قرار دهیم $\varphi =_{a^{-۱}} f\frac{۱}{S}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_s({}_{a^{-۱}}f) &= \int_G {}_{a^{-۱}}f(x)\frac{۱}{S(x)}dx = \int_G \\ (({}_{a^{-۱}}f) \circ \sigma_a)(y)\frac{۱}{S\circ\sigma_a(y)}S(a)dy & \\ &= \int_G f(y)\frac{۱}{S(y)}dy = I_s(f) \end{aligned}$$

پس با توجه به سایر خاصیت‌ها، $I_s(f)$ انتگرال هار چپ است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $I_d(f)$ انتگرال هار راست است.

فرض کنید λ اندازهٔ هار چپ روی گروه فشردهٔ موضعی G باشد در این صورت به‌ازای عضو ثابت $x \in G$ و مجموعهٔ بورل $E \subseteq G$

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$$

یک اندازهٔ هار چپ روی G تعریف می‌کند. پس بنابر قضیهٔ یکتایی، عدد مثبت Δ وجود دارد که

$$\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$$

به‌وضوح دیده می‌شود که

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-۱}})}{I(f)} \quad (I(f) \neq ۰).$$

و $\Delta : G \longrightarrow (\circ, \infty)$ یک هم‌ریختی پیوسته است. این تابع را تابع مدولی می‌نامند. اگر G آبلی باشد، از تعریف معلوم است که $\Delta \equiv ۱$.

اگر G فشرده باشد، $\Delta(G)$ زیرگروهِ گروه ضربی $(\circ, \infty)$ و در نتیجه مساوی ۱ است. چنین گروه‌ها را گروه‌های تک مدولی می‌نامند. گروه‌های تک مدولی غیرآبلی و غیرفشرده وجود دارد [30]. در مثال (iv) دیده می‌شود که $\Delta = \frac{D}{S}$.

اگر مثال (iv) را در مورد گروه ضربی $\mathbb{R} \setminus \{\circ\}$ به کار بریم. تبدیل $x \longrightarrow ax$ دارای ژاکوبین a است و در نتیجه انتگرال هار به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x|} dx$ درمی‌آید، که در آن $f \in C_c(\mathbb{R} \setminus \{\circ\})$. در مورد گروه ضربی $\mathbb{C} \setminus \{\circ\}$ انتگرال هار به صورت $\int\int \frac{f(x,y)}{x^۲+y^۲} dxdy$ است.

کاربرد بعدی در مورد گروه ماتریسی زیر است

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}, x \neq \circ \right\}.$$

می‌توان G را به صورت $(\mathbb{R} \setminus \{\circ\}) \times \mathbb{R}$ و با ضرب

$$(x, y)(u, v) = (xu, xv + y)$$

و به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ و با توپولوژی $\mathbb{R}^۲$ در نظر گرفت. در نتیجه G در شرایط مثال (iv) صدق می‌کند و تبدیل $\sigma_{(a,b)}$ به صورت

$$\sigma_{(a,b)}(x, y) = (ax, ay + b)$$

است. ژاکوبین این تبدیل $a^۲$ و در نتیجه انتگرال هار چپ به صورت ذیل است:

$$I_l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{x^۲} dxdy \qquad (f \in C_c(G)).$$

به طریق مشابه تبدیل $\delta_{(a,b)}$ روی G به شکل $\delta_{(a,b)}(x, y) = (ax, by + y)$ و ژاکوبین آن a است و در نتیجه انتگرال هار راست به صورت ذیل است:

$$I_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{|x|} dxdy \qquad (f \in C_c(G))$$

این مثال یکی از ساده‌ترین مثال‌هایی است که در آن انتگرال‌های هار راست و چپ متفاوت هستند. تابع مدولی برابر است با $\Delta(x, y) = \frac{D(x,y)}{S(x,y)} = \frac{۱}{|x|}$.

(v) فرض کنید $GL(n, \mathbb{R}) = \{T = (a_{ij})_{n \times n} | a_{i,j} \in \mathbb{R}, \det T \neq \circ\}$ با ضرب ماتریس‌ها و توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^{n^۲}$ مجهز شده است. با اتکاء به مثال (iv) می‌توان نشان داد که اندازهٔ هار روی این گروه $|\det T|^{-n} dT$ است که در آن، dT اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^{n^۲}$ است.

(vii) مثال جالب دیگر $G=(\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{\circ}}$ با توپولوژی حاصلضربی است که در آن $\mathbb{Z}_{۲}$ گروه جمعی اعداد صحیح به هنگ ۲ است، و هر عضو $x\in(\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{\circ}}$، به صورت $x=(a_{۱},a_{۲},\ldots)$ است که در آن a_i مقدارهای صفر یا یک را دارد.

حال نگاشت $\phi:(\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{\circ}}\longrightarrow[\circ,۱]$ به صورت

$$\phi(x)=\sum_{j=۱}^{\infty}\frac{a_j}{۲^j}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $x\in[\circ,۱]$، آنگاه $\phi^{-۱}(\{x\})$ یک تک نقطه است مگر آن که $x=\frac{j}{۲^k}$ $(۱\leq j\leq ۲^k-۱)$، که در این صورت دو نقطه است. این نگاشت پیوسته و هم‌ریختی نیست ولی تقریباً ۱ـ۱ است. اندازهٔ هار روی G به صورت ذیل به دست می‌آید که در آن m اندازهٔ هار $[\circ,۱]$ است.

$$m(B)=\lambda(\phi^{-۱}(B))\qquad (\text{بورل}B\subseteq[\circ,۱])$$

در واقع، با طی مرحله‌های ذیل، می‌توان این واقعیت را دریافت.

(i) اگر $I=[\frac{j}{۲^k},\frac{j+۱}{۲^k}]$ $(\circ\leq j<۲^k)$، آنگاه

$$\Phi^{-۱}(I)=\prod_{i=۱}^{\infty}E_i$$

که در آن $E_i=\mathbb{Z}_{۲}$ اگر $i>k$ و $E_i=\{\circ\},\{۱\}$ اگر $i\leq k$. زیرا $m(I)=\frac{۱}{۲^k}=\lambda(\phi^{-۱}(I))$.

(ii) نیم بازه‌های $[\frac{j}{۲^k},\frac{j+۱}{۲^k})$ تشکیل یک جبر $\mathcal{A}_{\infty}$ می‌دهند که σ ـ جبر بورل روی $[\circ,۱)$ را تولید می‌کند و اجتماع متناهی دوبه‌دو جدا از هم از مجموعه‌های $E_{۲}$ در (i) جبر $\mathcal{A}_{۲}$ را تولید می‌کند که σ ـ جبر بورل $G=(\mathbb{Z}_{۲})^{\mathcal{N}_{\circ}}$ را می‌سازد. اگر $A\in\mathcal{A}_{۱}$ در این صورت $\phi^{-۱}(A)$ یک مجموعهٔ متناهی در $\mathcal{A}_{۲}$ است و $m(A)=\lambda(\phi^{-۱}(A))$.

به طوری که اشاره شد، برهان هار را آندره ویل و هانری کارتان [12]، [51] به طرز ماهرانه‌ای به کلیهٔ گروه‌های توپولوژیک فشردهٔ موضعی گسترش دادند. ایدهٔ اصلی برهان در واقع در این نکته نهفته است که بزرگی مجموعه‌های فشردهٔ A و B با درون‌های چگال را نسبت به هم بسنجیم. فرض کنید $h(A,B)$ کمترین عدد انتقال‌های B باشد که A را می‌پوشاند. هار اندازهٔ خود را به صورتِ

$$m(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{h(A,B_n)}{h(C,B_n)}$$

تعریف کرد، که در آن C مجموعه‌ای ثابت و دلخواه است و B_nها یک پایهٔ همسایگی‌های فشردهٔ e را تشکیل می‌دهند [12]. به طوری که در مقالهٔ [۵۸] اشاره کردیم هار و فون نویمن در این زمان و در ارتباط نزدیک با مسألهٔ پنجم هیلبرت بودند. مسألهٔ پنجم هیلبرت بیان می‌کند که هر گروه توپولوژیک

فشرده و اقلیدسی موضعی یک گروه لی است. [یک فضای توپولوژیک را اقلیدسی موضعی می‌نامیم اگر عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر x یک همسایگی از x با گوی واحد $\mathbb{R}^n$ همسان ریخت باشد]. مقاله‌های هار و فون نویمن در مجلهٔ آنالس در یک شماره و پشت سر هم چاپ شده‌اند[48]. در نتیجه ثابت شد که:

۱ـهر گروه فشردهٔ اقلیدسی موضعی یک گروه لی است یعنی ساختمانی تحلیلی دارد.

۲ـهر گروه فشرده حد وارون گروه‌های لی است.

اثبات وجود اندازهٔ هار روی یک گروه فشردهٔ موضعی گامی اساسی در جهت گسترش آنالیز همساز بود (۲). جبر گروهی $L^1(G)$ و جبر اندازهٔ $M(G)$ منبع‌های خوبی برای مطالعهٔ خاصیت‌های گروه G هستند. $M(G) = C_0(G)^*$ یک $*-$ جبر باناخ واحددار است که در آن اندازهٔ دیراک δ_e واحد و μ^* با تعریف $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ برگشت روی آن و همچنین ضرب آن پیچش به صورت زیر است:

$$\mu * \nu(\psi) = \int\int \psi(x) d\mu(x) d\nu(y) \quad (\mu, \nu \in M(G), \psi \in C_0(G))$$

همچنین

$$\begin{aligned} L^1(G) &= \{f | f : G \longrightarrow \mathbb{C}, \int_G |f| d\lambda < \infty\} \\ &\cong \{\mu | \mu \ll \lambda\} = M_a(G) \end{aligned}$$

نه تنها یک $*$ ـ زیرجبر بلکه یک ایده‌آل $M(G)$ است. ضرب این جبر به صورت:

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y) d\lambda(y) \quad (f, g \in L^1(G))$$

برگشت آن به صورت $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ است.

$L^1(G)$ دارای واحد تقریبی کراندار است.

میانگین‌پذیری

نکتهٔ مهم دیگری که در اینجا قابل بحث می‌باشد، این است که فون نویمن برهان دیگری برای اثبات وجود اندازهٔ هار گروه‌های فشرده ارائه داد. این بحث به همراه بحث دیگری در مورد اندازهٔ لبگ اتفاق افتاد و مبحث جدیدی در آنالیز همساز گشود که امروزه به مبحث میانگین‌پذیری معروف است و پژوهش‌های عمده‌ای را شامل می‌شود.

گروه فشردهٔ موضعی G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر یک میانگین پایای چپ روی G موجود باشد. m را یک میانگین پایای چپ می‌نامیم در صورتی که m یک تابعک خطی روی $L^\infty(G)$ باشد و

$$m \geq 0, \quad m(1) = 1, \quad m({}_x\phi) = m(\phi)$$

که در آن ${}_x\phi(y) = \phi(xy)$ $(y \in G)$.

به طوری که ملاحظه می‌شود این تعریف را می‌توان به نیم‌گروه‌ها نیز توسیع داد. بعداً در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد.

در ۱۹۰۴ لبگ برای توسیع انتگرال ریمان شش خاصیت زیر از انتگرال ریمان را برای تابع‌های کراندار و انتگرال‌پذیر f و g در نظر گرفت [45]:

۱ـ (پایایی) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$

۲ـ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = 0$

۳ـ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

۴ـ اگر $f \geq 0$ و $b > a$ آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

۵ـ $\int_0^1 1dx = 1$

۶ـ اگر $f_n \nearrow f$ و f_nها انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $\int_a^b f_n(x)dx \nearrow \int_a^b f(x)dx$.

سؤال اصلی لبگ این بود که آیا شرط (۶) مستقل از سایر شرایط است. از این رو او تعریف انتگرال برای تابع‌های مشخصه را کافی دانست و به تعریف اندازه رسید: به هر مجموعهٔ کراندار E می‌توان عددی نامنفی مانند $\lambda(E)$ نسبت داد به طوری که:

$'1$) $m(E+x) = m(E)$

$'2$) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ (E_nها دوبه‌دو مجزا هستند).

$'3$) $m([0,1]) = 1$.

ملاحظه می‌شود که (۱) معادل ($'1$) و (۵) معادل ($'3$) است. (۳) و (۶)، ($'2$) را نتیجه می‌دهد و $m([a,b]) = b-a$. اگر E یک مجموعهٔ کراندار باشد تعریف می‌کنیم

$$m_e(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) | E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

$$m_i(E) = m(A) - m_e(A \backslash E)$$

که در آن A یک بازهٔ کراندار شامل E است. E اندازه‌پذیر است اگر $m_e(E) = m_i(E)$، و اکنون می‌دانیم که همهٔ زیرمجموعه‌های کراندار $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر نیستند.

مفهوم اندازه‌پذیری به مجموعه‌های بی‌کران گسترش یافت و ثابت شد که روی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌ای وجود دارد که تحت انتقال پایا است، σ ـ جمعی است و روی کرهٔ واحد برابر ۱ است.

در ۱۹۱۴ هاوسدورف سؤال زیر را مطرح کرد [45]. آیا می‌توان به هر مجموعهٔ کراندار، $\mathbb{R}^n$ عددی نامنفی مانند $m(E)$ نسبت داد که

۱ـ m پایا باشد.

۲ـ m دارای خاصیت جمعی متناهی باشد.

۳ــ m روی مجموعه‌ای مانند $E_{\circ}$ برابر ۱ باشد.

هاسدورف خود به این مسأله در حالت $n \geq ۳$ پاسخ منفی داد. در واقع هاسدورف نشان داد که

$$S_{۲} = A \cup B \cup C \cup D$$

که در آن D شمارا است و با دوران ۱۲۰ درجه A، B و C و نیز A و $B \cup C$ را می‌توان در حالت خاص قرار می‌داد به طوری که:

$$m(A) = m(B) = m(C) = \tfrac{۱}{۳}$$
$$۲m(B) = m(B \cup C) = m(A) = \tfrac{۱}{۲}$$

اگر $m(S_{۲}) = ۱$ یعنی $E_{\circ} = S_{۲}$. در این صورت یک تناقض به دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به [45]، [50]، [43] نگاه کنید.

در ۱۹۲۳ این مسأله مورد توجه باناخ قرار گرفت [45]. باناخ نشان داد که جواب حدسیهٔ هاوسدورف به‌ازای $n = ۱, ۲$ مثبت است. در نتیجه او انتگرال لبگ را به تابعک‌های متناهی جمعی روی تابع‌های کراندار یک یا دو متغیره گسترش داد. از این به بعد مسألهٔ هاوسدورف به پارادوکس باناخ ــ تارسکی معروف شد. زیرا جواب‌های حدسیه برای $n \geq ۳$ و حالت‌های $n = ۱, ۲$ متفاوت بود. در واقع، ایده این بود که دو زیرمجموعهٔ فضای $\mathbb{R}^n$ هم‌ارز هستند اگر این دو مجموعه را بتوان به تعداد متناهی [یاشمارا] مجموعه افراز کرد که دوبه‌دو همنهشت [طول‌پا] باشند. اگر $n \geq ۱$، هر دو مجموعهٔ کراندار A و B با درون ناتهی به طور شمارا هم‌ارزند ولی برای هم‌ارزی به طور متناهی، حدسیهٔ هاوسدورف به‌ازای $n \geq ۳$ برقرار است ولی به‌ازای $n = ۱, ۲$ برقرار نیست.

در ۱۹۲۹ فون نویمن برهان هاوسدورف را به دقت مورد مطالعه قرار داد و دریافت که این اختلاف ناشی از ساختار فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به‌ازای nهای مختلف نیست بلکه گروه‌های طول‌پایی‌هایی که روی $\mathbb{R}^n$ها عمل می‌کنند متفاوت هستند، در واقع در حالت $n \geq ۳$، این گروه شامل یک زیرگروه آزاد با دو مولد است و در حالت‌های $n = ۱, ۲$ چنین اتفاقی نمی‌افتد.

نکتهٔ دیگری که باید توجه داشت این است که قضیهٔ همگرایی یکنوا معادل جمعی ــ شمارایی است ولی باناخ نشان داد که اندازهٔ لبگ تنها اندازه‌ای نیست که به طور متناهی ــ جمعی است [43].

در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۷ موضوع گروه و نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر به وسیلهٔ دِی [14] به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفت. در واقع اصطلاح میانگین‌پذیری توسط دِی در ۱۹۵۰ مطرح شد[1] بعد از بحث باناخ و پژوهش‌های فون نویمن دامنهٔ بحث روی سایر زمینه‌های آنالیز گسترش یافت و با توجه به کاربردها، میانگین‌پذیری در سایر زمینه‌ها نیز گسترش یافت، به طوری که امروزه مبحث میانگین‌پذیری هنوز هم یکی از مبحث‌های عمدهٔ پژوهشی است.

---

[1] توجه شود که: روسی = ameHa$\partial e \pi b$HaR ، فرانسه = moyenable ، آلمانی = mittelbar

منابع زیر در مورد میانگین‌پذیری بسیار با ارزش هستند:

۱ — کتاب گرین لیف [27] اولین کتاب مجملی است که در ۱۹۶۹ تدوین شده است.

۲ — فصل ۸ کتاب ریتر [47].

۳ — مقاله‌های تحلیلی دی در ۱۹۵۷ و ۱۹۵۸ [14]، [43].

۴ — کتاب ژان ـ پل پییر [45].

۵ — کتاب‌های آلن ال. ئی. پاترسون [43]، [44].

۶ — مقالهٔ ب. جانسون [33]، [34] و مقاله‌ها بعدی او.

۷ — مقاله‌های متعدد اِ.ت. لائو.

۸ — مقاله‌های فریدون قهرمانی.

۹ — کتاب والکر رُنده [50].

۱۰ — کتاب هیویت وراس [29].

در ضمن ریاضی‌دانان معروف دیگر چون دیلز، هلمسکی، گرونبک، لُوی، $\cdots$ در این زمینه پژوهش‌های ارزنده‌ای انجام داده‌اند.

تعدادی از فارغ‌التحصیلان دورهٔ دکتری در دانشگاه تربیت معلم و تربیت مدرس رساله‌های خود را به میانگین‌پذیری اختصاص داده‌اند: به‌منابع [46]، [24]، [39] و [18] مراجعه شود. این منابع رساله‌های دکتری ریاضی هستند که زیرنظر اینجانب فارغ‌التحصیل شده‌اند. هر یک از این فارغ‌التحصیلان نیز مقاله‌هایی در این زمینه چاپ کرده‌اند.[۱]

فرض کنید $\mathcal{M}(G)$ مجموعهٔ تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر (نسبت به λ) روی G است. فرض کنید μ یک اندازهٔ متناهی جمعی روی $\mathcal{M}(G)$ است که روی مجموعه‌های پوچ، صفر موضعی است و $\mu(G) = ۱$. فرض کنید $A =< \chi_E | E \in \mathcal{M}(G) >$ و قرار دهید:

$$m(\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}) = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}, E_i \in \mathcal{M}(G))$$

در این صورت m روی A پیوسته است و چون A در $L^\infty(G)$ چگال است می‌توان m را روی $L^\infty(G)$ گسترش داد. m روی $L^\infty(G)$ یک میانگین است یعنی $\|m\| = ۱ = m(۱)$. بنابر [16, 0.2] بین مجموعهٔ میانگین‌های پایای چپ و مجموعهٔ اندازه‌های مثبت، پایای چپ و جمعی متناهی روی $\mathcal{M}(G)$ با نرم یک، و صفر در خارج یک مجموعه λ ـ موضعاً صفر یک تناظر یک به یک برقرار است. از این رو، میانگین m عضو $L^۱(G)^{**}$ است که یک فضای بسیار بزرگ و فوق‌العاده پیچیده است. فرض کنید $\mathfrak{M}(G)$ فضای میانگین‌ها روی G است. می‌دانیم که $L^۱(G)$ را

---

۱) فارغ‌التحصیلان سایر دانشگاه‌های ایران هم مقاله‌های متعددی در این زمینه منتشر نموده‌اند ولی فهرست‌بندی آنها مستلزم بررسی بیشتری است.

می‌توان در $L^1(G)^{**}$ نشاند به طوری که هر $f \in L^1(G)$ به $\hat{f}$ می‌رود که $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$.
ساده‌ترین قضیه‌ای که در مورد میانگین‌ها می‌توان گفت این است که:

قضیه. (i) $m \in L^1(G)^{**}$ یک میانگین است اگر و فقط اگر $m(1) = 1$، $m \geq 0$ و

$$ess \inf_{x \in G} \phi(x) \leq m(\phi) \leq ess \sup_{x \in G} \phi(x)$$

به‌ازای هر $\phi : L^\infty(G) \to \mathbb{R}$ حقیقی مقدار در $L^\infty(G)$.

(ii) $m(G)$ یک زیرفضا، w^* ـ فشرده و محدب از $L^1(G)^{**}$ است.

(iii) اگر $P^1(G) = \{f \in L^1(G), f \geq 0, \int f d\lambda = 1\}$ آن‌گاه $\widehat{P^1}(G)$ در $m(G)$ با توپولوژی w^* چگال است.

چند مثال.

۱ــ تمام گروه‌های فشرده میانگین‌پذیرند.
در واقع اگر λ اندازهٔ هار چپ G باشد که $\lambda(G) = 1$، آن‌گاه $m(f) = \int_G f d\lambda$ یک میانگین پایای چپ روی G است.

۲ــ آیا میانگین پایا روی گروه $\mathbb{Z}$ وجود دارد؟
تعریف می‌کنیم:

$$f_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{r=-n}^{n} \delta_r$$

واضح است که $f_n \in P^1(G)$ و اگر $\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_n(\phi s) - \hat{f}_n(\phi)| &= |\frac{1}{2n+1}(\sum_{r=-n}^{n} \phi(r+s) - \phi(r))| \quad (s > 0) \\
&= |\frac{1}{2n+1}(\sum_{r=-n+s}^{n+s} \phi(r) - \sum_{r=-n}^{n} \phi(r))| \\
&= |\frac{1}{2n+1}(-\sum_{-n+s}^{-n+s-1} \phi(r) + \sum_{n+1}^{n+s} \phi(r)| \\
&\leq \frac{2s\|\phi\|}{2n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

اگر $s < 0$، باز هم نتیجهٔ فوق برقرار است. حال اگر m یک نقطهٔ w^*انباشتگی $\{\hat{f}_n\}$ باشد، آن‌گاه بنابه بحث فوق

$$m(\phi\ s) = m(\phi)$$

یعنی m یک میانگین پایا است و $(\mathbb{Z}, +)$ میانگین پذیر است.

۳− فرض کنید $G=\mathbb{R}$. در این حالت فرض کنید $f_n=\frac{1}{2n}\chi_{[-n,n]}$. حال اگر $x\geq 0$ و $\phi\in L^\infty(\mathbb{R})$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}|\hat{f}_n(\phi x)-\hat{f}_n(\phi)| &= \frac{1}{2n}|\int_{-n}^{n}(\phi(x+t)-\phi(t))dt| \\ &\leq \frac{1}{2n}|\int_{-n}^{n}\phi(x+t)dt-\int_{-n}^{n}\phi(t)dt| \\ &= \frac{1}{2n}|\int_{-n+x}^{n+x}\phi(t)dt-\int_{-n}^{n}\phi(t)dt| \\ &= \frac{1}{2n}|\int_{-n}^{-n+x}\phi(t)dt+\int_{n}^{n+x}\phi(t)dt| \\ &\leq \frac{2n\|\phi\|}{2n}\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

این رابطه به طریق مشابه در مورد $x<0$ نیز برقرار است. پس هر w^*ـنقطهٔ انباشتگی $\hat{f}_n$ یک میانگین پایا برای $\mathbb{R}$ است.

۴− گروه «$ax+b$»

این گروه در واقع، گروه آفینی S_2 از $\mathbb{R}$ است. یعنی گروه $S_2=(0,\infty)\times\mathbb{R}$ با ضرب زیر است:

$$(a,b)(a',b')=(a+a'b,bb')$$

ساختن f_n در اینجا چندان روشن نیست ولی می‌دانیم که اندازهٔ هار λ روی S_2 به شکل $\frac{dxdy}{y^2}$ است. فرض کنید $A_n\subseteq S_2$. اگر $f_n=\frac{\chi_{A_n}}{\lambda(A_n)}$، آن‌گاه هر w^*ـنقطهٔ انباشتگی $\hat{f}_n$ یک میانگین پایا است پس S_2 میانگین‌پذیر است.

۵− گروه آزاد با دو مولد یعنی $\mathbb{F}_2$ میانگین‌پذیر نیست.

اعضای $\mathbb{F}_2$ کلمات کاهش یافته‌ای هستند که با اعضای مجموعهٔ $\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$ تولید شده‌اند. اگر $x\in\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$ و E_x مجموعهٔ همهٔ کلماتی باشد که با x شروع شده است و m یک میانگین پایای چپ روی F_2 باشد که می‌توان به عنوان یک اندازه در نظر گرفت، در این صورت

$$1=m(\mathbb{F}_2)=m(\{e\})+m(E_a)+m(E_{a^{-1}})+m(E_b)+m(E_{b^{-1}})$$

ولی کلمات در $aE_{a^{-1}}$ کلماتی هستند که با b، b^{-1}، e,a^{-1} شروع شده‌اند پس

$$1=m(\mathbb{F}_2)=m(E_a)+m(aE_{a^{-1}})$$

به طریق مشابه

$$1=m(\mathbb{F}_2)=m(E_b)+m(bE_{b^{-1}})$$

ولی چون m پایای چپ است پس

$$m(E_a)+m(E_{a^{-1}})=1$$
$$m(E_b)+m(E_{b^{-1}})=1$$

که یک تناقض است.

۶- گروه $G=SL(2,\mathbb{R})$ یک گروه فشردهٔ موضعی است. این گروه شامل زیرگروه گسستهٔ H است که با $\mathbb{F}_2$ یک‌ریخت است پس به عنوان گروه گسسته میانگین‌پذیر نیست. این مثال‌ها از کتاب پاترسون [43] برداشته شده است.

در مثال‌های قبلی دیدیم که گروه‌های آبلی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ میانگین‌پذیرند و S_2 گروه حل‌پذیری است که با گروه‌های آبلی در ارتباط است. سؤال این است که آیا هر گروه آبلی میانگین‌پذیر است، جواب مثبت است. قضیهٔ مارکوف ـ کاکوتانی [45] بیان می‌کند که:

اگر X یک فضای محدب موضعی و $K\subseteq X$ فشرده باشد و S نیم گروه تبدیلات پیوسته $T:K\longrightarrow K$ باشد که آفینی هستند $[T(\alpha k_1+(1-\alpha)k_2)=\alpha Tk_1+(1-\alpha)Tk_2$ که در آن $0\le\alpha\le 1$، $k_1,k_2\in K]$ آن‌گاه اعضای S دارای نقطهٔ ثابت مشترک هستند.

حال اگر G یک گروه فشردهٔ موضعی و آبلی، $X=L^\infty(G)^*$، $K=\mathfrak{M}(G)$ (مجموعهٔ میانگین‌های روی G) و $S=\{m\longrightarrow xm(x\in G)\}$ گروه تبدیلات روی $\mathfrak{M}(G)$ باشد آنگاه شرط‌های قضیهٔ بالا برقرارند پس $x_\circ$ی وجود دارد که $x_\circ m=m$ یعنی m پایای چپ است.

ویژگی‌های میانگین‌پذیری به زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج‌قسمتی نیز سرایت می‌کند.

اشاره کردیم که هر گروه که دارای زیرگروهی یک‌ریخت با $\mathbb{F}_2$ باشد میانگین‌پذیر نیست. سؤالی که برای مدت‌ها باز بود این بود که آیا عکس این مسأله برقرار است. الشانسکی مثالی از یک گروه میانگین‌ناپذیر ساخته است که شامل $\mathbb{F}_2$ نیست. مثال او بسیار پیچیده و در عین حال کاربردی از نظریهٔ ترکیبیاتی گروه‌ها است [13].

در دو جهت دیگر هم نظریهٔ میانگین‌پذیری رشد کرده است.

الف) جبرهای باناخ میانگین‌پذیر اساساً بر مقالهٔ جانسون استوارند[33]. در این مقاله ابتدا تعریف همانستگی آمده است. به اختصار فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A ـ مدول باناخ دو طرفه است. نگاشت خطی و کراندار $D:A\longrightarrow X$ یک اشتقاق نامیده می‌شود اگر $D(ab)=D(a)b+aD(b)$ و اشتقاق D درونی نامیده می‌شود اگر به صورت $ad_xa=ax-xa$ باشد. گوئیم A میانگین‌پذیر است اگر هر اشتقاق $D:A\longrightarrow X^*$ درونی باشد. یکی از قضیه‌های اساسی جانسون در مقاله‌ای مفصل این است که:

G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G)$ میانگین‌پذیر باشد [33]. این قضیه به جبرهای فوریه $A(G)$ نیز تعمیم یافته است که در جای خود اشاره خواهیم کرد. در واقع $A(G)$ حالت ناجابجایی $L^1(G)$ است.

بعد از این مقالهٔ اساسی جانسون، میانگین‌پذیری به جبرهای باناخ گسترش یافت و مسایل و پروژه‌های زیادی را ایجاد کرد.

تابع‌های تقریباً متناوب

به طوری که اشاره شد برهان متفاوت فون نویمن برای اثبات وجود اندازهٔ هار روی گروه‌های فشرده منجر به این ایده شد که می‌توان این برهان را برای گروه‌های فشردهٔ موضعی گسترش داد ولی در این حالت به‌جای اندازهٔ هار به میانگین می‌رسیم که مقدار آن در ۱ برابر ۱ است. این ایدهٔ فون نویمن مطالعهٔ تابع‌های تقریباً متناوب را در برداشت. مقالهٔ وی در ۱۹۳۴ [40] چاپ شد. برای درک این موضوع به مقالهٔ هارولد بور برمی‌گردیم [9]. فرض کنید

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \quad \text{همگرا}$$

سری فوریهٔ تابع پیوستهٔ یکنواخت و کراندار باشد که در آن λ_k ها مضرب‌های گویا از یکدیگر نیستند. از این رو f متناوب نیست. به طور مسلم این سری به طور یکنواخت همگرا نیست ولی بور دریافت که همگرایی طبیعی به شکل زیر میسر است:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{۲N} \int_{-T}^{T} |f(x) - \sum c_k e^{i\lambda_k x}|^۲ dx = ۰,$$

و برای تابع‌ها تقریباً متناوب حد زیر موجود است:

$$m(f) = \bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{۱}{۲T} \int_{-T}^{T} f(x)dx.$$

فون نویمن دریافت که اگر f تقریباً متناوب باشد $\overline{con}\{f_x|x \in \mathbb{R}\}$ (بستار غلاف محدب) شامل میانگین منحصربه‌فرد بور است.

[تابع f روی G تقریباً متناوب نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ عددی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر بازه I اگر $l(I) < \delta$، آن‌گاه $\|R_t f - f\| < \epsilon$ و یا $\overline{con}\{f_x|x \in \mathbb{R}\}$ فشرده باشد.]

این ایده به گروه‌های گسسته و سپس به سایر گروه‌ها نیز توسیع یافت، به طوری که ایدهٔ فون نویمن با دو مقالهٔ [42] و [48] بوخنر و ویگنر ادامه یافت. [ویگنر بیشتر یک فیزیک‌دان بود]. در نتیجه دو دسته از گروه‌ها به دست آمدند.

I) گروه‌های تقریباً متناوب مینیمال: یعنی گروه‌هایی که تابع‌های تقریباً متناوب غیرثابت نمی‌پذیرند.

II) گروه‌های تقریباً متناوب ماکسیمال: یعنی گروه‌هایی که به‌اندازهٔ کافی تابع‌های تقریباً متناوب غیرثابت می‌پذیرند به طوری که نقاط را جدا می‌کنند.

بالاخره، آندره ویل [51] ثابت کرد که:

گروه G تقریباً متناوب ماکسیمال است اگر و فقط اگر بتوان آن را به طور پیوسته در یک گروه فشرده نشاند.

در واقع میانگین بور روی تابع‌های تقریباً متناوب از ساختن اندازهٔ هار روی گروه‌های فشرده به دست می‌آید. یعنی نظریهٔ تابع‌های تقریباً متناوب روی گروه‌های گسسته به‌نظریهٔ تابع‌های پیوسته روی گروه‌های فشرده می‌انجامد. در نتیجه ایدهٔ جدیدی وارد حوزهٔ آنالیز همساز تحت عنوان فشرده‌سازی گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها شد. توسیع مفهوم تابع‌های تقریباً متناوب به حوزه‌های دیگر نیز گسترش یافت. مثلاً در تعریف بوخنر از مفهوم وارون استفاده نشده است و از این رو تابع‌های تقریباً متناوب به نیم‌گروه‌های توپولوژیک و یا حتی نیم‌گروه‌های نیم توپولوژیک که در نیم گروه‌های عمل‌گرهای روی فضاهای باناخ ظاهر می‌شود توسیع یافت [38]، [7].

در راستای دیگر ابرلین [7] توسیع دیگری تحت عنوان تابع‌های تقریباً متناوب ارائه نمود.

تابع پیوسته و کراندار f روی نیم‌گروه توپولوژیک S تقریباً متناوب ضعیف نامیده می‌شود اگر $\overline{con}\{f_x|x \in S\}$ به طور ضعیف پیوسته باشد.

جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس

یکی دیگر از پیشرفت‌های اساسی در آنالیز همساز محض و کاربردی تعریف جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس است. به طوری که قبلاً اشاره کردیم نظریهٔ سری‌های فوریه ریشهٔ بسیاری از شاخه‌های آنالیز جدید است و اشاره شد که اگر f تابعی بر حوزهٔ D و دارای نمایشی به شکل

$$f(t) = \sum f(\lambda_n) S_n(t)$$

باشد که در آن $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از اعضای D و $\{S_n\}$ دنباله‌ای از تابع‌ها است، تعمیمی از سری‌های فوریه به دست می‌آید. چنین سری را یک سری نمونه‌گیری می‌نامند. از دیدگاه نظری روش‌های نمونه‌گیری رابطهٔ نزدیکی با درونیابی، تقریب، تابع‌های ویژه، توسیع به وسیلهٔ تابع‌ها ویژه، توسیع به وسیلهٔ مقادیر ویژه، نظریهٔ پَلِه ـ وینر، آنالیز عددی و آنالیز همساز دارد [31].

از نظر کاربردی، نظریهٔ نمونه‌گیری در نظریهٔ پیشگویی، نظریهٔ آگاهی، فرآیندهای تصادفی، اپتیک، اسپکتروسکوپی و فرآیند تصویری دوبعدی و سرانجام آنالیز چندریزگی و موجک‌ها کاربرد دارد [31].

بحث در این مورد از حوصلهٔ این مقاله خارج است و در حیطهٔ تخصص نگارنده نیست. هدف از اشاره به این نکات صرفاً بیان این واقعیت است که نظریه‌های ریاضی محض ریشه در کاربرد دارند

و شاخه‌های آنها هم به کاربرد می‌رسند. هیچ تفکیکی بین ریاضیات محض و کاربردی نمی‌توان یافت مگر آن که این تفکیک صرفاً جهت سهولت در تحقیق و مطالعه انجام پذیرد، و بالاخره بعضی از شاخه‌های ریاضیات از منظر زیباشناختی و یا کاربرد در سایر شاخه‌های ریاضی توسیع پیدا کرده‌اند.

یکی از حالت‌های بحث کلی فوق تبدیل تابع f روی $\mathbb{R}$ به سری فوریه

$$f(x) \sim \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

و یا به تبدیل

$$\hat{f}(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

است. قضیهٔ اشتاین بیان می‌کند که $f \longrightarrow \hat{f}$ فضای $L^{۱}(\mathbb{R})$ را به $C_{۰}(\mathbb{R})$ می‌نگارد و قضیهٔ پلانشرل بیان می‌کند که $f \longrightarrow \hat{f}$ از $L^{۲}(\mathbb{R})$ به $L^{۲}(\mathbb{R})$ یک تبدیل خطی کراندار است که $\|\hat{f}\|_{۲} = \|f\|_{۲}$. این قضیه به حالت $۱ < p < ۲$ نیز تعمیم یافته و تبدیل وارون آن محاسبه شده است [31] و [49]. در حالت $p > ۲$ تبدیل فوریهٔ تابع $f \in L^{p}(\mathbb{R})$ به معنی توزیع توصیف می‌شود. می‌دانیم که $L^{۱}(\mathbb{R})$ با ضرب پیچشی

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

یک جبر باناخ است و مجموعهٔ

$$A(\mathbb{R}) = \{\hat{f} | f \in L^{۱}(\mathbb{R})\}$$

با توجه به

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

با ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است. به طریق مشابه $M(\mathbb{R})$ یک جبر باناخ واحددار است و در نتیجه،

$$B(\mathbb{R}) = \{\hat{\mu} | \mu \in M(\mathbb{R})\}$$

یک جبر باناخ است.

ایمار [20] در ۱۹۶۴ بحث فوق را به گروه‌های غیرآبلی گسترش داد. در واقع در حالت آبلی همانند $\mathbb{R}$ جبرهای بالا قابل تعریف‌اند و

$$A(G) \cong L^{۱}(\hat{G}), \quad B(G) \cong M(\hat{G})$$

که در آن $\hat{G}$ گروه کاراکترهای G است یعنی

$$\hat{G} = \{\chi | \chi : G \longrightarrow T, \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)\}$$

به ویژه آن که $L^{1}(\hat{G}) \cong L^{2}(\hat{G}) * L^{2}(\hat{G})$ [20].

ایدهٔ ایمار گسترش بحث‌های فوق به گروه‌های غیرآبلی بود. مقالهٔ ایمار نقش عمده‌ای در این گسترش دارد و مباحثی را وارد آنالیز همساز کرده است که هنوز هم بعد از سال‌های طولانی حاوی مسایل پژوهشی فراوان است.

به طور خلاصه، فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $U(\mathcal{H})$ مجموعهٔ عمل‌گرهای یکانی روی $\mathcal{H}$ باشد یعنی

$$U(\mathcal{H}) = \{T | T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad TT^* = T^*T = I\}$$

فرض کنید G یک گروه فشردهٔ موضعی است. $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ را یک نمایش یکانی می‌نامیم اگر $\pi(e) = I$، $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$، $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ و به‌ازای هر $\xi \in \mathcal{H}$، $x \longrightarrow \pi(x)\xi$ پیوسته باشد. اگر A یک $*$ ـ جبر باناخ باشد، $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ را یک $*$ ـ نمایش ناتباهیده می‌نامیم، مشروط بر این که π یک همریختی باشد، $\pi(a^*) = \pi(a)^*$، به‌ازای هر $a \in A$، $\xi \in H$ وجود داشته باشد که $\pi(a)\xi \neq 0$ و به‌ازای هر $\xi \in H$، $a \longrightarrow \pi(a)\xi$ پیوسته باشد. با توجه به این که $M(G)$ یک $*$ ـ جبر باناخ است هر نمایش یکانی π از G به صورت زیر به یک نمایش ناتباهیدهٔ

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(x) d\mu(x)$$

توسیع می‌یابد و برعکس، اگر π یک نمایش ناتباهیدهٔ از $M(G)$ باشد آن‌گاه $\tilde{\pi}(x) = \pi(\delta_x)$ یک نمایش یکانی روی G است. تحدید $*$ ـ نمایش‌های ناتباهیده روی $M(G)$ نمایش‌های ناتباهیده روی $L^{1}(G)$ به دست می‌دهد. از این رو:

قضیه. یک تناظر ۱ــ۱ بین نمایش‌های یکانی G، $*$ ــ نمایش‌های ناتباهیدهٔ $M(G)$ و نیز $*$ ـ نمایش‌های ناتباهیدهٔ $L^{1}(G)$ وجود دارد.

فرض کنید Σ مجموعهٔ (ردهٔ هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته روی G باشد و $\mathcal{S} \subseteq \Sigma$. به‌ازای هر $\mu \in M(G)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|\mu\|_S = \sup_{\pi \in S} \|\pi(\mu)\|$$

$\|\mu\|_S$ یک C^* ـ نیم نرم تعریف می‌کند. فرض کنید $f \in L^{1}(G)$ و

$$N_S = \{f | \pi(f) = 0, (\pi \in \mathcal{S})\}$$

فرض کنید $\dot{f}$ تصویر f در $\frac{L^{1}(G)}{N_S}$ است و

$$\|\dot{f}\|_S = \|f\|_S$$

در این صورت $\|f\|_{\mathcal{S}}$ یک نرم تعریف می‌کند. $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ تکمیل شدهٔ $\frac{L^1(G)}{N_{\mathcal{S}}}$ نسبت به این نرم را در نظر می‌گیریم. در حالتی که $\mathcal{S} = \Sigma$، $C^*_{\mathcal{S}}(G)$ را با $C^*(G)$ نمایش می‌دهیم که در واقع تکمیل شدهٔ $L^1(G)$ نسبت به نرم $\|f\|_\Sigma$ است و آن را C^* ـ جبر گروهی می‌نامیم و در حالتی که $\mathcal{S} = \{L\}$ نمایش منظم چپ باشد یعنی

$$L : x \longrightarrow L_x : G \longrightarrow U(L^2(G))$$
$$L_x f(y) = f(x^{-1}y)$$

$C^*_{\mathcal{S}}(G)$ با $C^*_r(G)$ نمایش می‌دهیم و C^* ـ جبر گروهی کاهش یافته می‌نامیم.

قضیه. گروه فشردهٔ موضعی G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $C^*(G) \cong C^*_r(G)$.

فرض کنید $P(G)$ مجموعهٔ تابع‌های مثبت معین پیوسته روی G باشد، یعنی

$$P(G) = \{u | u : G \longrightarrow \mathbb{C}, \sum c_n \bar{c}_m u(x_m^{-1} x_n) \geq 0 \, (c_n \in \mathbb{C}, x_n \in G)\}$$

خاصیت $P(G)$ در رسالهٔ گودمان در ۱۹۴۸ مورد بحث قرار گرفته است [20]، [28].

تعریف می‌کنیم:

$$B(G) = < P(G) >$$

در واقع، $B(G)$ مجموعهٔ همهٔ تابع‌های به شکل $< \pi(x)\xi, \eta > \longrightarrow x (\xi, \eta \in H_\pi)$ است که در آن π یک نمایش یکانی است. در این صورت،

$$B(G) = \{u | \|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_\Sigma \leq 1} | \int f(x) u(x) d\lambda(x) | < \infty\}$$

و $B(G)$ با نرم فوق و ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ جابجایی است.

قضیه. $B(G) = C^*(G)^*$ [20].

در این قضیه دوگانی بالا به صورت زیر است:

$$< f, u > = \int_G f(x) u(x) d\lambda(x)$$

تعریف. $A(G) = \overline{B(G) \cap C_c(G)}$. $A(G)$ با ضرب نقطه‌وار و نرم $B(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است.

قضیه. $A(G) = L^2(G) * L^2(G)\tilde{}$ که در آن $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ تعریف می‌شود [20].

قضیه. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $A(G)$ دارای یک واحد تقریبی باشد [20].

جبر A_π به عنوان یک زیرجبر $B(G)$ که فقط به وسیلهٔ یک نمایش تولید می‌شود توسط ارزاک در ۱۹۷۶ مورد بررسی قرار گرفته است [21]. توجه می‌کنیم که $A(G)$ و $B(G)$ کپی‌های ناجابجایی

$L^1(G)$ و $M(G)$ هستند. می‌دانیم که جبر مضروب‌های چپ $L^1(G)$، $M(G)$ است. اگر

$$T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G) \quad T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

آن‌گاه T را یک مضروب می‌نامند. اگر این مجموعه را با $\mathcal{M}(L^1(G))$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$\mathcal{M}(L^1(G)) \cong M(G),$$

به طوری که به‌ازای هر $T \in \mathcal{M}(L^1(G))$، $\mu \in M(G)$ی به طور منحصربه‌فرد وجود دارد که $Tf = f * \mu$ و $\|T\| = \|\mu\|$. سؤال این است که در حالت ناجابجایی چه اتفاق می‌افتد. فرض کنید $\mathcal{M}(A(G))$ جبر مضروب‌های $A(G)$ است که یک جبر جابجایی است، یعنی

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A(G)) &= \{u : G \longrightarrow \mathbb{C}, uv \in A(G)(v \in A(G))\} \\ \|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} &= \sup\{\|uv\| | v \in A(G), \|v\| \leq 1\} < \infty \end{aligned}$$

واضح است که $B(G) \subseteq \mathcal{M}(A(G))$ و $\|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} \leq \|u\|$ $(u \in B(G))$.

قضیه [V., Losert, 1984]. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathcal{M}(A(G)) = B(G)$ [21].

در حالتی که G میانگین‌پذیر نباشد، $\mathcal{M}(A(G))$ بسیار بزرگ است. می‌دانیم که $A(G)^* = VN(G)$ که در آن $VN(G)$ جبر فون نویمن گروه G و برابر است با $< L_f | f \in L^2(G) >^{-\omega}$ که در آن $L_f g = f * g$.

در حالتی که G آبلی باشد، $VN(G) = L^\infty(\hat{G})$.

به جای $\mathcal{M}(A(G))$، هرس [21] ترجیح داد که جبر $\mathcal{M}_\circ(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ از مضروب‌های کاملاً کراندار را مورد بررسی قرار دهد که به مضروب‌های هرس ـ شور معروفند. $u \in \mathcal{M}_\circ(A(G))$ اگر دارای یکی از شرایط هم‌ارز زیر باشد:

(i) فضای هیلبرتی مانند $\mathcal{H}$ و نگاشت‌های کرانداری مانند ξ و η از G به $\mathcal{H}$ موجود باشند که

$$u(y^{-1}x) = < \xi(x), \eta(y) > \quad (x, y \in G)$$

(ii) به‌ازای هر گروه فشردهٔ موضعی H، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

(iii) به‌ازای $H = SU(2)$، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

نرم u چنین تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{\mathcal{M}_\circ A(G)} = \inf \sup_{x,y} \|\xi(x)\| \|\eta(y)\|$$

داریم $B(G) \subseteq \mathcal{M}_\circ(A(G)) \subset \mathcal{M}(A(G))$.

قضیه [Bozejko, M., 1985]. اگر G گسسته و غیرمیانگین‌پذیر باشد $B(G) \neq \mathcal{M}_\circ(A(G))$ و $\mathcal{M}_\circ(A(G)) \neq \mathcal{M}(A(G))$ وقتی که G یک گروه آزاد با دو مولد است [11].

بالاخره، نتیجه‌های زیر را در مورد $A(G)$ داریم

قضیه [Eymard, P., 1964]. $\Delta(A(G)) = G$ [فضای ایده‌آل ماکسیمال] [21].

قضیه [Forrest, B., Runde, V., 2004]. $A(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G تقریباً آبلی باشد یعنی دارای زیرگروهی آبلی مانند H باشد که G/H متناهی است [23]، [50].

قضیهٔ اخیر در واقع، حالت غیرجابجایی قضیهٔ جانسون است. همچنین جانسون در دههٔ ۹۰ طی مقاله‌هایی ثابت کرد $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است [34]. برهان او بعدها توسط قهرمانی و دیسپک به طور ساده‌تری ارائه گردید.

جانسون همچنین نشان داده بود که گروهی فشرده مانند G وجود دارد که $A(G)$ میانگین‌پذیر نیست. بحث‌های دیگر در مورد میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری ضعیف $M(G)^{**}$، $L^1(G)^{**}$، $A(G)^{**}$ وجود دارد که هنوز هم بعضی از مسائل آن‌ها باز است.

اخیراً مفهوم دیگری به نام میانگین‌پذیری تقریبی توسط قهرمانی و لوُی[1] Loy تعریف شده است که مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته است [25].

نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌های توپولوژیک

در این بخش به اجمال به پیشرفت‌های حاصل در مورد نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها اشاره می‌کنیم.

از نظر من بهترین کتاب دربارهٔ نیم‌گروه‌های جبری کتاب ارزشمند هوُی Howie [32] است. S را یک نیم گروه می‌نامیم در صورتی که نسبت به یک عمل شرکت‌پذیر بسته باشد مانند $(\mathbb{R}^+, +)$، $(\mathbb{N}, +)$، $([\circ, 1], \max)$.

به طوری که اشاره شد با القای یک توپولوژی روی نیم‌گروه S و برحسب پیوستگی این عمل از راست، چپ، دو طرف و یا به طور توأم، S به ترتیب نیم‌گروهِ راست توپولوژیک، چپ توپولوژیک، نیم‌توپولوژیک و توپولوژیک است.[7]

از یک سو نظریهٔ نیم‌گروه‌ها روی فضاهای توابع، فشرده‌سازی، $AP(S)$، $WAP(S)$، $\cdots$ توسیع یافت که بهترین مرجع در این مورد کتاب [7] است.

از سوی دیگر روی نیم‌گروه S جبر $l^1(S)$ تعریف شده است که:

$$l^1(S) = \{f | f : S \longrightarrow \mathbb{C}, \sum_{s\in S} |f(s)| < \infty\}$$

$l^1(S)$ با نرم و ضرب پیچشی زیر یک جبر باناخ است:

$$\|f\| = \sum_{s\in S} |f(s)|, \quad f * g(s) = \sum_{uv=s} f(u)g(v)$$

$l^1(S)$ در جاهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و کتاب دانکل ورمیرز [16]، بهترین مرجع برای $l^1(S)$ است. یک دسته از نیم‌گروه‌ها نیم‌گروه‌های وارون است که ریشه در فضاهای هیلبرت دارد. نیم‌گروه S را وارون می‌نامیم اگر به‌ازای هر $s \in S$، t منحصربه‌فردی موجود باشد که

$$sts = s, \quad tst = t$$

بنا به تعریف عملگر $T \in B(H)$ را یک طولپای جزئی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌نامیم اگر TT^* یک تصویر باشد. در این صورت T^*T نیز یک تصویر است. از نظر هندسی T یک طولپای جزئی روی $\mathcal{H}$ است اگر وفقط اگر روی $\ker(T)^{\perp}$ یک طولپا باشد. حال اگر T یک طولپای جزئی باشد آن‌گاه

$$TT^*T = T, \quad T^*TT^* = T^*$$

که دقیقاً همان شرط نیم‌گروه وارون است [16]، [44].

میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها و ارتباط بین نیم‌گروه‌های وارون و گروه‌واره‌ها در دو کتاب ارزشمند پاترسون [43]، [44] آمده است.

تعریف. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون است. اگر به‌ازای هر $s, t \in S$ خودتوانی مانند $e \in E(S)$ وجود داشته باشد که

$$es = et$$

گوییم $s\sigma_S t$. در این صورت σ_S یک همنهشتی روی S [رابطهٔ هم‌ارزی R روی S یک همنهشتی نامیده می‌شود اگر $(s,t) \in R$ و $u \in S$ نتیجه دهد $(su, tu) \in R$ و $(us, ut) \in R$] و $\frac{S}{\sigma_S}$ یک گروه است. این گروه را با $G(S)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه [Duncan, J., Namioka, I., 1978]. نیم‌گروه وارون S میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $G(S)$ میانگین‌پذیر باشد [44].

قضیه [Duncan, Namioka, 1978]. فرض کنید S یک نیم‌گروه وارون است. $l^1(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $E(S)$ متناهی و هر زیرگروه ماکسیمال S میانگین‌پذیر باشد.

در حالتی که S یک نیم گروه توپولوژیک باشد، جبر باناخ $L(S)$ به صورت زیر توسط بیکر و بیکر در [6] تعریف شده است:

$$L(S) = \{\mu \in M(S) | x \overset{\text{نرم پیوسته}}{\longrightarrow} |\mu| * \delta_x, x \overset{\text{نرم پیوسته}}{\longrightarrow} \delta_x * |\mu|\}$$

$L(S)$ تعمیم $L^1(G)$ به نیم‌گروه‌های توپولوژیک است. در این مورد نتیجه‌های زیادی توسط لشکری‌زادهٔ بمی به دست آمده و مقاله‌های ارزشمندی توسط ایشان چاپ شده است.

نتیجه‌های جدید

در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک وارد بحث طولانی نمی‌شویم و خواستاران اطلاعات در این زمینه را به مقالهٔ خود در گزارش دوازدهمین سمینار آنالیز در گیلان ارجاع می‌دهیم [۵۷]. اما به چند نتیجه جدید اشاره می‌کنیم. در مقالهٔ [1]، $C^*(K)$، $A(K)$ و $B(K)$ را تعریف کرده‌ایم که در آن K یک ابرگروه است. کتاب ارزشمند بلوم و هییر [8] مرجع اصلی پیشرفت‌های آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A. R., 2004]. $B(K) \cong C^*(K)^*$.

مشکلی که در مورد ابرگروه‌ها وجود دارد این است که برخلاف گروه‌ها حاصل‌ضرب دو تابع مثبت معین ممکن است مثبت معین نباشد. در نتیجه در مقالهٔ اخیر مفهومی به نام ابرگروه‌های تانسوری را تعریف کرده‌ایم.

تعریف. (i) گوییم K دارای خاصیت P است اگر $P(K)$ [مجموعهٔ تابع‌ها مثبت معین] نسبت به ضرب بسته باشد.

(ii) گوییم K یک C ــ تانسور ابرگروه است اگر به‌ازای هر دو نمایش (π_i, H_i) و بردارهای $\xi_i, \eta_i \in H_i$ $(i = ۱, ۲)$ نمایشی مانند $(\pi_{۱,۲}, H_{۱,۲})$ از K و بردارهای $\eta_{۱,۲} \in H_{۱,۲}$ ، $\xi_{۱,۲}$ وجود داشته باشد که

$$< \pi_{۱۲}(x)\xi_{۱۲}, \eta_{۱۲} > = < \pi_۱(x)\xi_۱, \eta_۱ >< \pi_۲(x)\xi_۲, \eta_۲ >$$

و

$$\max(\|\xi_{۱۲}\|, \|\eta_{۱۲}\|) \leq C \max(\|\xi_۱\|, \|\eta_۱\|) \max(\|\xi_۲\|, \|\eta_۲\|)$$

اگر $C = ۱$، آن‌گاه K را یک ابرگروه تانسوری می‌نامیم.

در این حالت $B(K)$ و $A(K)$ جبرهای باناخ جابجایی هستند. در [1] چند مثال مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. [تعمیم قضیهٔ گودمان] به‌ازای هر $u \in P(K)$ با محمل فشرده، $\xi \in L^۲(K)$ وجود دارد که $u = \xi * \tilde{\xi}$ که در آن $\tilde{\xi}(x) = \overline{\xi(\tilde{x})}$ و $x \longrightarrow \tilde{x}$ برگشت ابرگروه است [1].

در مورد نیم‌گروه‌ها به چند نتیجه جدید خود اشاره می‌کنیم.

C^* ـ جبر نیم‌گروهی، جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس را روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک تعریف کرده و چند نتیجه نظیر گروه‌های توپولوژیک به دست آورده‌ایم [2]. فرض کنید (π_u, H_u) نمایش جهانی از S باشد. در اینجا $W^*(S) = \pi_u(C^*(S))''$ [جابجاکننده دوم] را تعریف کرده‌ایم.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004].

فرض کنید S یک $*$ ــ نیم‌گروه اساسی با عضو واحد باشد که $\sum$، ردهٔ هم‌ارزی نمایش‌های

تحویل ناپذیر نقاط S را جدا می‌کند در این صورت $L(S)$ و $M(S)$ و $C^*(S)$ به طور طولپا در $W^*(S)$ می‌نشینند [2].

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. با شرط‌های قضیهٔ قبل $B(S) \cong C^*(S)^*$ [2]. در این مقاله نظیر جبر نیم‌گروهی فون نویمن را تعریف کرده‌ایم و آن را $VN(S)$ نامیده‌ایم و نشان داده‌ایم که:

$$W^*(S) = A(S)^\perp \oplus VN(S)$$

متأسفانه بحث دربارهٔ نیم‌گروه‌ها بسیار مشکل است. مثلاً هنوز ثابت نکرده‌ایم که $S = \sigma(A(S))$. در یک مقالهٔ دیگر با امینی میانگین‌پذیری دو جبر دیگر یعنی $\mathcal{F}(S)$ و $\mathcal{R}(S)$ را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که به اجمال اشاره می‌شود.

تعریف [[35] ,Lau, A.T. 1978]. فرض کنید M یک W^* ـ جبر و M_1 گوی واحد آن و (w, M) یک $*$ ـــ نمایش از S به M_1 باشد. فرض کنید $\sigma = \sigma(M, M_*)$ و $\Omega(S)$ مجموعهٔ همهٔ $*$ ـ نمایش‌های پیوسته S باشد که $M = \overline{w(S)}^\sigma$. $\mathcal{F}(S)$ را به صورت:

$$\mathcal{F}(S) = \{f | f = \hat{\psi} \quad (\text{وجود دارد } \psi \in M_*)\}.$$

که در آن $\hat{\psi} = \psi \circ w$، و نرم $f \in \mathcal{F}(S)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\omega = \inf\{\|\psi\| \; | \psi \in M_*, \hat{\psi} = f \quad \text{وجود دارد که } (w, M) \in \Omega(S)\}.$$

قضیه [Lau, A.T., 1978]. $\mathcal{F}(S)$ با نرم بالا یک $*$ ـــ جبر نرمدار جابجایی است و $\mathcal{F}(S) \subseteq WAP(S)$، که در آن بنا به تعریف $f^*(s) = \overline{f(s^*)}$. $\mathcal{F}(S)$ تحت انتقال و مزدوج‌گیری بسته است. ثابت کرده‌ایم که اگر S دارای واحد باشد $B(S) = \mathcal{F}(S)$ [35]، [2].

فرض کنید $Y = \sigma(\mathcal{F}(S))$ طیف $\mathcal{F}(S)$ است. Y یک نیم گروه است. فرض کنید $K(Y)$ ایده‌آل مینیمال $\mathcal{F}(S)$ است.

قضیه [Amini, M. and Medghalchi, A.R., 2004]. جبر $\mathcal{F}(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $K(Y)$ یک گروه توپولوژیک باشد [3].

تعریف [Dunkl, C.F. and Ramirez, C.F., 1975]. فرض کنید μ یک اندازهٔ احتمال روی فضای اندازه‌پذیر X است. یک L^∞ ـ نمایش، (T, X, μ) از S عبارت است از هم‌ریختی w^* ـ پیوسته T از S به گوی واحد $L^\infty(X, \mu)$. در این صورت $R(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(S) = \{f | f(x) = \int_X T_x(g) d\mu, \quad (g \in L^1(X, \mu))\}$$

که در آن (T, X, μ) یک L^∞ ـ نمایش S است [16].

ثابت شده که $R(S)$ علاوه بر این که یک زیرجبر نرمدار $\mathrm{WAP}(S)$ با ضرب نقطه‌ای است، تحت انتقال پایا و نسبت به مزدوج‌گیری بسته است. به علاوه این جبر شامل توابع ثابت و با نرم $\|f\| = \inf_g \|g\|_1$ کامل است.

توجه شود که $\mathcal{F}(S)$ براساس $R(S)$ تعریف شده است. اگر S آبلی باشد $\mathcal{F}(S) \subseteq R(S)$، و اگر G یک گروه توپولوژیک آبلی باشد آنگاه

$$\mathcal{F}(G) = R(G) = \widehat{M(\hat{G})}$$

قضیه [Amini, M., Medghalchi, A.R., 2004]. احکام زیر هم‌ارزند [3]:

(a) $R(S)$ میانگین‌پذیر است.

(b) $\mathcal{F}(S)$ میانگین‌پذیر است.

(c) $\overline{R(S)}$ میانگین‌پذیر است.

(d) $\overline{\mathcal{F}(S)}$ میانگین‌پذیر است.

در مورد $l^1(S)$ با یک پیچش دیگر با همکاری امینی کارهای متعددی انجام شده که جبرهای باناخ تحدید شده نامیده‌ایم و به‌تدریج به صورت مقاله چاپ می‌شوند [4].

در پایان به دو مبحث دیگر اشاره می‌کنیم. نتیجه‌های این مبحث یکی بر روی نیم‌گروه‌ها و دیگری بر روی گروه‌ها است. ولی با توجه به ارتباط آن‌ها با $AP(S)$ و $WAP(S)$ این نتیجه‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم S یک نیم گروه توپولوژیک است. (ψ, X) را یک فشرده‌سازی نیم‌گروهی S می‌نامیم اگر X یک نیم گروه راست توپولوژیک فشرده و هاسدورف و $\psi : S \longrightarrow X$ یک هم‌ریختی پیوسته باشد، $\psi(S)^- = X$ و $\psi(S) \subseteq \Lambda(X)$ که در آن

$$\Lambda(X) = \{t \in X | s \longrightarrow ts : X \longrightarrow X\}.$$

فرض کنید X یک مجموعه و l یک رابطه روی X است. تعریف می‌کنیم:

$$l^\infty = \{l^n | n \geq ۱\}$$

که در آن $l^n = l \circ l \circ \ldots \circ l$ و $l^e = (l \cup l^{-۱} \cup ۱_X)^\infty$. بنابر [41]، l^∞ یک رابطهٔ هم‌ارزی تولید شده توسط l است یعنی $(x, y) \in l^\infty$ اگر و فقط اگر $x = y$ و یابه‌ازای nی در N دنباله‌ای مانند (Z_n) وجود دارد که $Z_۱ = x$، $Z_n = y$ و $(Z_i, Z_{i+۱}) \in l$ و یا $(Z_{i+۱}, Z_i) \in l$، $۱ \leq i \leq n - ۱$. فرض کنید S و T دو نیم‌گروه توپولوژیک و X یک فضای توپولوژیک ناتهی است. Y را یک S ـ سیستم چپ توپولوژیک می‌نامیم اگر $X \longrightarrow S \times X$، sx $(s, x) \longrightarrow$ به طور توأم پیوسته باشد. به طریق مشابه S ـ سیستم راست توپولوژیک را تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب، (S, T) یک دو سیستم توپولوژیک است اگر S ـ سیستم چپ توپولوژیک و T ـ سیستم راست توپولوژیک باشد و $(s \in S, t \in T, x \in X)(sx) = s(xt)$. فرض کنید X و Y دو S ـ سیستم چپ است. می‌گوییم نگاشت پیوستهٔ $\phi : X \longrightarrow Y$ یک S ـ نگاشت چپ است اگر $\phi(sx) = s\phi(x)$، $(s \in S, x \in X)$. X، Y و Z به ترتیب یک (S, U)، (U, T) و (S, T) دو سیستم توپولوژیک باشند. فرض کنید فضای

$X \times Y$ با توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز شده است. فرض کنید $\beta : X \times Y \longrightarrow Z$ یک (S,T) نگاشت است [یعنی β یک S نگاشت چپ توپولوژیک و یک T نگاشت راست توپولوژیک است.] گوئیم β یک دو نگاشت دو توپولوژیک است اگر

$$\beta(xu,y) = \beta(x,uy)$$

فرض کنید (ψ, X) فشرده‌سازی S با یک خاصیت فشرده‌سازی است. در این صورت X را می‌توان یک Sـسیستم چپ [راست] توپولوژیک نامید که در آن $sx = \psi(s)x$، $(x \in X, s \in S)[xs = x\psi s)]$.

فرض کنید $\{S_i\}_{1 \le i \le n}$ خانواده‌ای از نیم‌گروه‌های توپولوژیک است و $\sigma_i : S_i \longrightarrow S_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$ هم‌ریختی‌های پیوسته‌اند. در این صورت S_i با عمل ضرب نیم گروه، یک (S_{i-1}, S_i) دو سیستم و با عمل $(s_{i-1}, s_i) \longrightarrow \sigma(s_{i-1})s_i$، $(1 \le i \le n, s_i \in S_i, s_{i-1} \in S_{i-1})$ یک (s_{i-1}, s_i) دو سیستم است. در این صورت، نگاشت

$$\xi : S_1 \times \dots S_n \longrightarrow D$$

یک n ـ نگاشت توپولوژیک نامیده می‌شود اگر داشته باشیم:

$$\xi(s_1, \dots, x_{i-1}, s_i s'_{i+1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \longrightarrow \xi(s_1, \dots, s_i), \sigma_i(s'_i)s_{i+1}, \dots, s_n)$$

که در آن D یک (s_1, s_n) ـ دو سیستم توپولوژیک است.

سرانجام زوج (P, ψ) حاصل‌ضرب تانسوری تعمیم یافتهٔ توپولوژیک از S_1، ...، S_n نامیده می‌شود اگر P یک (S_1, S_n) دو سیستم، $\psi : S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow P$. یک n ـ نگاشت توپولوژیک باشد به طوری که به‌ازای هر (S_1, S_n) دو سیستم D و هر n ـ نگاشت توپولوژیک $\gamma : S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow D$ یک (s_1, s_n) نگاشت منحصربه‌فرد مانند

$$\bar{\gamma} : P \longrightarrow D$$

باشد به طوری که دیاگرام زیر تعویض‌پذیر باشد

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times \dots S_n & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & P \\ \downarrow \gamma & \nearrow_{\bar{\gamma}} & \\ D & & \end{array}$$

قضیه [Medghalchi, A.R., Rahimi, H.R., 2005]. حاصل‌ضرب تانسوری S_1، ...، S_n وجود دارد.

حالت‌های $n = 2$، $n = 3$ در مقالهٔ ۲۰۰۴ چاپ شده است [36].

قضیه. اگر (ψ_i, X_i) فشرده‌سازی نیم‌گروهی توپولوژیک واحددار S_i باشد، آن‌گاه $X_1 \otimes_{\eta_1} \dots \otimes_{\eta_n} X_n$ فشرده‌سازی نیم‌گروهی توپولوژیک $S_1 \otimes_{\sigma_1} \dots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n$ است که در آن

$S_j \longrightarrow S_{j+1}$ ،σ_j : $\eta_j : X_j \longrightarrow Y_{j+1}$ همریختی‌های پیوسته‌اند و $\psi_{j+1} \circ \sigma_j = \eta_j \circ \psi_j$ ،[36]، [37].

نتیجه.

$$(S_1 \otimes_{\sigma_1} S_2 \otimes_{\sigma_2} \ldots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n)^{ap} \simeq S_1^{ap} \otimes_{\sigma_1} \ldots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n^{ap}$$

در این مقاله‌ها نتیجه‌های دیگری نیز در مورد ایده‌آل‌ها حاصل‌ضرب تانسوری و رابطهٔ آنها با ایده‌آل‌های نیم‌گروه‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

آخرین مطلبی که در مورد $L^1(G)$ بیان می‌شود به مقالهٔ مشترک با عبادیان اشاره دارد. ایدهٔ اصلی از جبرهای باناخ حقیقی گرفته شده و $L^1(G, \tau)$ تعریف شده است که در آن $\tau : G \longrightarrow G$ یک همریختی گروهی است و $\tau^2 = 1$. در این صورت

$$L^1(G) = L^1(G,\tau) \oplus iL^1(G,\tau)$$

اندازهٔ هار روی $L^1(G,\tau)$ و میانگین‌پذیری $L^1(G,\tau)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. ثابت شده است که $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G,\tau)$ میانگین‌پذیر باشد [17]، [18].

تشکر و قدردانی. از داوران محترم و نیز ویراستار مجله آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی به علت ارائهٔ پیشنهادات ارزنده تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

[1] Amini, M. and Medghalchi, A. R., Fourier algebras on tensor hypergroups, Contemporary Mathematics, Volume 363(2004) A. M. S.

[2] ——— , ——— , Fourier algebras on topological foundation *-semigroups, Semigroup Forum, Vol. 68(2004) 322-334.

[3] ———, ——— , Amenability of algebras $R(S), \mathcal{F}(\mathcal{S})$ of a topological semigroup, Scientiae Mathematicae Japonicae, 60, No. 3(2004) 469-473.

[4] ——— , ——— , Restricted algebras on inverse semigroups I, representation theory, Math. Nachr. 279, No.16, 1-10 (2006).

[5] Atiyah, Sir Michael, Mathematics in the 20th century, Bull. London Math. Soc. 34(2002) 1-15.

[6] Baker, A. C., and Baker, J. W., Algebras of measures on a locally compact semigroup III, J. London Math. Soc. (2) 4(1972) 685-695.

[7] Berglund, John F., Junghen, Hugo D., and Milnes Paul, Analysis on semigroups, Wiley, 1989.

[8] Bloom W. R., Heyer H., Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroup, Walter de Gruyter Berlin, New York, 1995.

[9] Bohr, H., Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I-III, Acta Math. 45(1925) 29-127, ibid 46(1925) 101-214, 47(1926) 237-281.

[10] Burkardt, H., Trigonometrishe Reihen und Integrale bisetwa 1850, Encyklopädie der Math. Wiss, Bd. II, Teil I, pp. 819-1354, Leipzig: Teubner 1899-1915.

[11] Bozejko, M., Positive definite bounded matrices and a characterization of amenable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 95(1985) 357-360.

[12] Cartan, H., Sur la measure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris 211(1940) 759-762.

[13] Dales, H. G., Banach algebras and automatic continuity, Clarendon Press. Oxford 2000.

[14] Day, M. M., Amenable semigroups, Illinois J. Math. 1(1957) 509-544.

[15] Duncan, J. and Namioka, Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A., 80, 309-21.

[16] Dunkl, Charles, F. and Ramirez, Donald, E., Representation of commutative semitopological semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 435 (1975) Springer-Verlag.

[17] Ebadian, A. and Medghalchi, A. R. Real group algebras, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A, Vol. 28(2004) No. A2, 289-298.

[18] Ebadian A., Real Lipschitz algebras and real group algebras, Ph.D. thesis 2000.

[19] Eberlin, W. F., Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 217-240.

[20] Eymard, P. L'algebra de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France 92(1964) 181-236. Translated by Pourabdollah, M. A. into the English (2003).

[21] ——— , A survey of Fourier algebras, Contemporary Mathematics, Volume 183, 1995 A.M.S.

[22] Folland, G. B., A course in abstract harmonic analysis CRC Press, Inc., 1995.

[23] Forrest, B., and Runde, V., Amenability and weak amenability of the Fourier algebra. Math. Z., 250(2005) 731-744..

[24] Gaffari, A., Multiplier and operators on semigroup and hypergroups and their second duals, Ph.D Thesis (Farsi) 2002.

[25] Ghahramani, F., Loy, R. J., Generalized notions of amenability, J. Functional Analysis, 208(2004) 229-260.

[26] Ghahramani, F., Loy, R. J., and Willis J., Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1489-1497.

[27] Greenleaf, F. P., Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York, 1969.

[28] Godement, R., Les fonctions de type positif et la théorie des groups, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 1-84.

[29] Hewitt, E., and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis I,II, Springer-Verlag 1987.

[30] Hewitt, E., and Stromberg, Real and abstract analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1969.

[31] Higgins, J. R., Sampling theory in Fourier and singal analysis foundations, Clarendon Press. Oxford, 1996.

[32] Howie John M., Fundamentals of semigroup theory, Clarendon Press. Oxford 1995.

[33] Johnson, B. E., Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972) 1-101.

[34] ——, Weak amenability of group algebras, Bull., London Math. Soc. 23 (1991) 281-284.

[35] Lau, A. T., The Fourier Stieltjes algebra of a topological semigroup with involution, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 77, No. 1(1978) 165-181.

[36] Medghalchi, A. R., and Rahimi, H. R., Topological tensor products of topological semigroups and their compactifications, Scientiae Mathematicae Japonicae, 62, No. 1(2005) 57-64.

[37] —— , —— , The space of functions and the ideal structures on the generalized topological tensor products of topological semigroups (Preprint 2005).

[38] Milnes, P., Pym J. S., Function spaces on semitopological semigroups, Semigroup Forum 19(1980) 347-354.

[39] Modarres Mosaddeg, S. M. S., Topological center and amenability of hypergroup algebras, measure algebras and related topics, Ph.D Thesis 1999.

[40] Neumann John, von, Almost periodic functions in a group I, Transactions of the Amer. Math. Soc. 36(1934) 445-492.

[41] —— , The uniqueness of Haar's measure, Math. Sb 1, 43(1936) 721-734.

[42] —— , Collected works, 6 Vols, Pergamon Press. Oxford 1961-1963.

[43] Paterson, Allan L. T., Amenability, Mathematical Surveys and Monographs 29, 1988.

[44] ——, Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras, .Birkhäuser, 1998.

[45] Pier, J. P. Amenable locally compact groups, Academic Press, 1984.

[46] Pourbarat, Left amenability of groups and hypergroups (Farsi), Ph.D Thesis, 1996.

[47] Reiter, H., and Stegman, J. D., Classical hamonic analysis and locally compact groups, Oxford University Press, 2000.

[48] Rosenberg, Jonathan, A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Non-Commutative Hamonic Analysis (Preprint 2001).

[49] Rudin, W., Fourier analysis on groups (Second Edition), McGraw-Hill, 1991.

[50] Runde, V., Lectures on Amenability, Springer-Verlag, 2002.

[51] Weil, H., L, Intégration dans les Groupes Topologioues et ses Applications, Hermann, Paris 1940.

[52] Wiener, Norbert, Generalized harmonic analysis , Acta Math. 55(1930) 117-258.

[53] Wigner, E. P. Collected Works, ed. by Wightman, Part A, Volume 1, Springer-Verlag, Berlin, New York 1993.

[54] Zabandan, G. Amenability, Weak and 2-Weak Amenability of Weighted Convolution Algebras, Ph.D. Thesis, 2004.

[55] Zygmund, A., Trigonometric series, 2nd Edition, 2 vols, Cambridge University Press.

[۵۶] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود، همایش ماهانه انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۸.

[۵۷] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک روی ابرگروه‌های توپولوژیک، مجموعهٔ مقاله‌های دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، ۱۳و۱۴ بهمن ماه ۸۰، دانشگاه گیلان.

[۵۸] علیرضا مدقالچی، پژوهش در ریاضیات، مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شمارهٔ ۳۴، بهار ۱۳۸۴.

علیرضا مدقالچی
دانشگاه تربیت معلم تهران، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر
a_ medghalchi@saba.tmu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۴۷ تا ۶۲

استراتژی مناقشه در نظریهٔ بازی‌ها*

رامین جوادی و بهناز عمومی

چکیده

هدف اصلی نظریهٔ ریاضی بازی‌ها تحلیل و بررسی دستهٔ وسیعی از موقعیت‌های رقابتی است. این موقعیت‌ها تقریباً همهٔ سرگرمی‌هایی که مردم آن‌ها را بازی می‌خوانند شامل می‌شود اما تنها به این سرگرمی‌ها محدود نیستند. رقابت بین دو شرکت، رویارویی نیروهای نظامی یا جنگ تمدن‌ها نیز از جنبهٔ نظری، بازی محسوب می‌شوند و با مدل‌های ریاضی نظریهٔ بازی‌ها قابل تحلیل هستند. در ۱۹۹۴، سه ریاضی‌دان به نام‌های جان نَش، رینهارد سلتن و جان هرسانی برای تحقیق در این زمینه موفق به کسب جایزهٔ نوبل اقتصاد شدند. در این میان تحقیقات دو اقتصاددان و ریاضی‌دان، توماس شلینگ و رابرت اومان در پیشبرد قدرت نظریهٔ بازی‌ها برای تحلیل مناقشه‌ها و همکاری‌های اجتماعی تأثیری شگرف داشت. این تحقیقات جایزهٔ نوبل اقتصاد را در در ۲۰۰۵ برای آنان به ارمغان آورد. در این مقاله ضمن معرفی اجمالی نظریهٔ بازی‌های غیرمشارکتی به تشریح برخی از مهمترین تحقیقات توماس شلینگ و رابرت اومان می‌پردازیم.

۱ مقدمه

زندگی انسان به مثابه موجودی اجتماعی، آمیخته و ممزوج به روابط و تعاملات اجتماعی است. آن‌گونه که شناخت ابعاد وجودی او مستلزم شناخت دقیق کنش‌ها و واکنش‌های بین انسانی است. شاید بتوان ادعا کرد حیات بشری چیزی جز روابط، داد و ستدها و کنش‌های متقابل اجتماعی نیست. این روابط طیف وسیعی از همکاری‌ها و مناقشه‌ها را در بر می‌گیرد که در بستر یک بازی به نام زندگی شکل گرفته، تداوم می‌یابند یا از بین می‌روند و انسان‌ها، بازیگران این بازی محتوم، در مقابل یا کنار هم قرار می‌گیرند، به علایق مشترک یا متقابل می‌رسند، با یک‌دیگر همکاری یا هم‌دیگر را حذف می‌کنند و سرانجام نتیجهٔ اعمال خود را می‌بینند. بی‌شک این نتیجه به طور مستقیم متأثر از حرکات و افعال تک‌تک این انسان‌ها است.

*) به بهانهٔ جایزه نوبل اقتصاد ۲۰۰۵

با گسترش و پیشرفت تمدن‌های بشری، روابط انسانی نیز گسترده و پیچیده شده است تا آن جا که امروزه چگونگی و چرایی تعاملات اجتماعی انسان‌ها بسیار دشوارْ فهم و تحلیل و پیش‌بینی سازوکار آن‌ها مشکل و پیچیده است. دانشمندان علوم اجتماعی تلاشی طولانی برای درک مبانی و ریشه‌های همکاری‌ها و مناقشه‌های انسانی داشته‌اند و در این راه از روش‌ها و بینش‌هایی که علوم مختلف و جدید در اختیار می‌گذارند بهره جسته‌اند. با ابداع نظریهٔ بازی‌ها در اواسط قرن بیستم توسط ریاضی‌دان شهیر مجارستانی جان فون نویمن، بینش و بصیرتی جدید در راستای این تلاش ظهور کرد که به محققین اجازه می‌داد ابزارها و روش‌های دقیق ریاضی را در تحلیل و بررسی روابط اجتماعی، اقتصادی و سیاسی انسان‌ها و جوامع به‌کار گیرند. بعد از این، همکاری ریاضیدانان و اقتصاددانان در بسط و توسعهٔ این روش‌ها ادامه داشت. با کارهای جان نش، رینهارت سلتن و جان هرسانی مفاهیم و راه‌حل‌هایی ارائه شد که تأثیر شگرفی در افزایش کارایی و قدرت پیش‌بینی نظریهٔ بازی‌های غیرمشارکتی به‌وجود آورد. محوری‌ترین مفهوم در این کارها، مفهومی به نام موازنهٔ نش است که در ادامه دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد. شاید اگر این ابزارها برای پاسخ به سؤالات اساسی جامعه به‌کار گرفته نمی‌شد، دستاوردهای هوشمندانهٔ این محققین ثمر چندانی نداشت، تا در سال ۱۹۹۴ شایستهٔ دریافت جایزه نوبل اقتصاد شناخته شوند.

در این میان کارهای دو دانشمند آمریکایی و آلمانی، رابرت اومان و توماس شلینگ در توسعهٔ نظریهٔ بازی‌های غیرمشارکتی برای پاسخ به سؤالات بنیادی در علوم اجتماعی نقش اساسی داشت. این دو هر کدام از یک زاویه (اومان از منظر ریاضی و شلینگ از منظر اقتصاد) متوجه شدند که نظریهٔ بازی‌ها توانایی لازم برای تحلیل روابط انسانی را داراست. مهم‌تر از آن شلینگ نشان داد که بسیاری از کنش‌های متقابل اجتماعی متعارف می‌توانند به عنوان یک بازی غیرمشارکتی که علائق مشترک و متقابل بازیکنان در آن لحاظ شده است، در نظر گرفته شوند و اومان ثابت کرد که اکثر روابط دراز مدت اجتماعی توسط نظریهٔ بازی‌های غیرمشارکتی قابل تحلیل هستند. از اواخر دههٔ ۵۰ که کارهای این دو منتشر شد زمان زیادی گذشت تا نگرش آن‌ها به خوبی فهمیده شود. اما خصوصاً در طول ۲۵ سال اخیر نظریهٔ بازی‌ها به یک ابزار مقبول جهانی و یک زبان فراگیر در اقتصاد و بسیاری از دیگر شاخه‌های علوم اجتماعی تبدیل شده است. این دو محقق در ۲۰۰۵ به خاطر «ارتقاء درک مناقشه‌ها و همکاری‌های اجتماعی از طریق تحلیل‌های نظریه بازی‌ها» برندهٔ جایزهٔ نوبل اقتصاد شدند. در دسامبر ۲۰۰۷ شلینگ با حضور در دانشگاه صنعتی شریف در این زمینه سخنرانی کرد.

۲ نظریه بازی‌های غیرمشارکتی

در این بخش مفاهیم اولیهٔ نظریهٔ بازی‌ها و قضیهٔ اساسی این نظریه (قضیهٔ موازنه نش) را معرفی می‌کنیم و با ذکر یک مثال نحوهٔ مدل‌سازی استراتژیک یک بازی را نشان می‌دهیم.

فرض کنید $\{۱, ۲, \ldots, N\}$ یک مجموعه از بازیکن‌ها باشد که به بازیکن i ، $۱ \leq i \leq N$، یک

مجموعه A_i نسبت داده شده است. اعضای A_i را **استراتژی‌های خالص** بازیکن i می‌نامیم. در هر مرحله، هر بازیکن یک استراتژی از مجموعه استراتژی‌های خالص خود انتخاب می‌کند، بدون این‌که از انتخاب بازیکن دیگر مطلع باشد. سپس انتخاب‌ها آشکار شده و به هر بازیکن سودی تعلق می‌گیرد. میزان سود یک بازیکن به انتخاب همهٔ بازیکن‌ها وابسته است. در حالت خاص برای $N = ۲$ وقتی که مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ به ترتیب m و n عضو داشته باشند، می‌توانیم مدل استراتژیک یک بازی بین آنان را با یک آرایه $m \times n$ نشان دهیم، به این صورت که سطرها نشان‌دهندهٔ استراتژی‌های خالص بازیکن (۱) و ستون‌ها نمایان‌گر استراتژی‌های خالص بازیکن (۲) هستند. درایه سطر iام و ستون jام در این آرایه، یک زوج مرتب (a_{ij}, b_{ij}) است به این صورت که اگر بازیکن (۱) استراتژی iام و بازیکن (۲) استراتژی jام را انتخاب کند، آن‌گاه سود بازیکن (۱) به میزان a_{ij} و سود بازیکن (۲) به مقدار b_{ij} خواهد بود.

به عنوان مثال وقتی که دو بازیکن ($N = ۲$) به ترتیب دارای استراتژی‌های خالص $A_۱ = \{x_۱, x_۲\}$ و $A_۲ = \{y_۱, y_۲\}$ باشند، آرایه زیر مدل استراتژیک یک بازی بین آنها را نشان می‌دهد.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix} \end{array}$$

در یک بازی هر بازیکن می‌تواند علاوه بر استراتژی‌هایی که در بالا ذکر کردیم (استراتژی‌های خالص)، استراتژی‌های دیگری نیز انتخاب کند، که استراتژی‌های مرکب گفته می‌شوند. در حقیقت یک **استراتژی مرکب** برای یک بازیکن، یک توزیع احتمالی روی استراتژی‌های خالص او است. در این صورت سود حاصل برای آن بازیکن برابر امید ریاضی سود حاصل از استراتژی‌های خالص متناظر است. به عنوان مثال برای $N = ۲$ اگر بازیکن (۱) استراتژی مرکب $\mathbf{p} = (p_۱, \dots, p_m)$ و بازیکن (۲) استراتژی مرکب $\mathbf{q} = (q_۱, \dots, q_n)$ را انتخاب کند، آن‌گاه سود بازیکن (۱) برابر $\sum_{ij} p_i a_{ij} q_j$ و سود بازیکن (۲) برابر $\sum_{ij} p_i b_{ij} q_j$ است. توجه داشته باشید که یک استراتژی خالص در واقع یک استراتژی مرکب است که در توزیع احتمال آن، احتمال متناظر با آن استراتژی خالص برابر یک باشد. استراتژی‌های مرکب به خصوص وقتی یک بازی چندبار تکرار می‌شود بسیار سودمند هستند. اکثر کنش‌ها و واکنش‌های اجتماعی نه به صورت ناگهانی و آنی بلکه در یک فرایند تدریجی صورت می‌گیرند و در طی این دورهٔ دراز مدت طیفی از تعاملات متعدد و پی‌درپی انجام می‌شوند و برایند این تعاملات در نهایت نتیجه را مشخص می‌کند. بازیکنان در هر مرحله رفتاری از خود به نمایش می‌گذارند و نعل و میخ هر یک به سهمی آماج ضربه پتک قرار می‌گیرند تا در یک بستر طولانی، مقصود حاصل شود. بنابراین استراتژی‌های مرکب در مدل‌سازی فرایندهای اجتماعی مفید هستند. در ادامه منظور از یک استراتژی، استراتژی خالص یا مرکب است.

اگر برای بازیکن‌ها توافق بر روی یک انتخاب از استراتژی‌ها امکان‌پذیر نباشد یا در صورت

امکان وجود توافق هم، هیچ توافقی الزام‌آور نباشد، آن‌گاه بازی غیرمشارکتی نامیده می‌شود. در این صورت در واقع چیزی جز سود شخصی بیشتر نمی‌تواند یک بازیکن را ملزم به انتخاب یک استراتژی خاص کند. بر عکس اگر بازیکنان بتوانند با یک‌دیگر مذاکره کرده و روی یک مجموعه از استراتژی‌ها که سود جمعی بیشتری را عاید آن‌ها می‌کند به توافق برسند، آن‌گاه بازی را مشارکتی می‌نامیم. در بازی‌های مشارکتی طرفین می‌توانند برای تشویق طرف مقابل به پذیرفتن توافق، بخشی از سود خود را به او بدهند. در اکثر روابط و تعاملات اجتماعی امکان اِعمال یک قرارداد یا معاهدهٔ مصنوعی وجود ندارد. هر فرد در یک سیستم اجتماعی به صورت فردی عمل می‌کند و از استراتژی‌های انتخاب شده توسط رقبا (طرف‌های درگیر) اطلاع ندارد. لذا بازی‌های غیرمشارکتی برای تحلیل این‌گونه تعاملات مناسب‌ترند.

اجازه دهید با یک مثال ساده موضوع را روشن کنیم. فرض کنید دو کشور فرضی (۱) و (۲) در یک مناقشهٔ مرزی درگیر می‌شوند. در این حالت هر یک از دو کشور می‌توانند به نیروهای خود آماده‌باش داده و آن‌ها را در مرز مستقر کنند یا این که از آماده‌باش امتناع کرده و خویشتن‌داری به خرج دهند. هر کدام از این کشورها بدون این که از تصمیم طرف مقابل آگاهی داشته باشند یکی از این دو استراتژی را انتخاب می‌کنند. این یک نمونهٔ ساده از مناقشه بین دو کشور است که طرفین دارای علائق مشترک و متقابل هستند. اگر دو طرف به نیروهای خود آماده‌باش دهند، آن‌گاه احتمال وقوع جنگ بسیار زیاد شده و احتمال دستیابی به یک توافق صلح‌آمیز کم می‌شود که این یک نتیجه بسیار بد برای دو طرف محسوب می‌شود. اجازه دهید سود هر دو بازیکن را در این حالت صفر قرار دهیم. اما اگر هر دو طرف خویشتن‌داری کنند، آن‌گاه احتمال برقراری یک تفاهم صلح‌آمیز افزایش می‌یابد، این نتیجه قطعاً از جنگ بهتر است و لذا سود دو بازیکن را در این حالت مقدار مثبت b قرار می‌دهیم. با این وجود اگر یکی از دو طرف نیروهای خود را در مرز مستقر کند و طرف دیگر خویشتن‌داری نماید، آن‌گاه این یک پیروزی بزرگ برای طرف مهاجم و یک سرافکندگی بزرگ برای طرف خویشتن‌دار خواهد بود که منجر به تصرف منطقهٔ مورد مناقشه توسط طرف مهاجم می‌شود. اگر فرض کنیم هر دو طرف، سرافکندگی تصرف منطقه توسط رقیب را به شعله‌ور شدن آتش جنگ ترجیح می‌دهند، آن‌گاه می‌توانیم سود طرف پیروز را در این حالت a و سود طرف شکست خورده را c قرار دهیم که $a > b > c > 0$.[1] در نتیجه می‌توانیم این بازی ساده را در قالب آرایهٔ زیر نمایش دهیم. توجه کنید که همیشه مؤلفهٔ اول هر درایه سود بازیکن انتخاب کنندهٔ سطر را نشان می‌دهد. این بازی به دسته‌ای از بازی‌ها تعلق دارد که بازی‌های «بزدل[2]» یا «باز ــ کبوتر[3]» خوانده می‌شوند.

---

۱) در برخی موارد برای طرفین، چنین سرافکندگی از وقوع جنگ نامطلوب‌تر است. در چنین مواردی $a > b > 0 > c$. این بازی‌ها مسالهٔ زندانی نام دارند که در بخش ۴ به آن اشاره خواهیم کرد.

2) Chicken 3) Hawk-Dove

$$
\begin{array}{rcc}
 & \text{آماده‌باش} & \text{خویشتن داری} \\
\text{آماده‌باش} & (0,0) & (a,c) \\
\text{خویشتن‌داری} & (c,a) & (b,b)
\end{array}
$$

به عنوان مثال در این‌جا انتخاب آماده‌باش با احتمال $\frac{1}{3}$ و خویشتن‌داری با احتمال $\frac{2}{3}$ یک استراتژی مرکب برای هر کدام از بازیکن‌ها است. اگر کشور (۱) استراتژی خالص خویشتن‌داری را انتخاب کند و کشور (۲) با احتمال $\frac{1}{3}$ آماده‌باش و با احتمال $\frac{2}{3}$ خویشتن‌داری نماید، آن‌گاه سود متوسط کشور (۱) برابر $\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}b$ خواهد بود.

هر بازیکن به طور طبیعی به دنبال ماکزیمم کردن سود خود است. او برای رسیدن به نتیجهٔ مناسب باید علاوه بر استراتژی‌های خود، استراتژی‌های طرف مقابل و علائق مشترک و متقابل را در نظر بگیرد. در یک بازی یک بازیکن کدام استراتژی را انتخاب کند تا سود بیشتری عاید خود نماید؟ یکی از مهم‌ترین مفاهیمی که به عنوان یک «راه حل» یا نتیجهٔ قابل پیش‌بینی در بازی‌های غیرمشارکتی مطرح می‌شود، مفهوم موازنهٔ نش[1] است. یک **موازنهٔ نش** یا به طور خلاصه یک موازنه در یک بازی عبارت است از پیشنهاد یک استراتژی (خالص یا مرکب) به هر بازیکن به طوری که هیچ بازیکنی نتواند با رد یک جانبهٔ این پیشنهاد سود بیشتری عاید خود کند. اگر پیشنهادها، استراتژی خالص باشند، موازنه را **موازنهٔ خالص** می‌گوییم و در صورت مرکب بودن استراتژی‌ها، آن را **موازنهٔ مرکب** می‌خوانیم. قضیهٔ نش که قضیهٔ اساسی نظریهٔ بازی‌های غیرمشارکتی است وجود حداقل یک موازنهٔ نش در بازی‌های متناهی را تضمین می‌کند.

قضیهٔ ۱. ([۱۰] و [۱۱]) اگر در یک بازی غیرمشارکتی N نفره مجموعه استراتژی‌های هر بازیکن متناهی باشد، آن‌گاه بازی حداقل دارای یک موازنهٔ نش (خالص یا مرکب) است.

به عنوان مثال در بازی‌های بزدل دو موازنهٔ خالص وجود دارد که همان (خویشتن‌داری، آماده‌باش) و (آماده‌باش، خویشتن‌داری) هستند. اگر بر سر یکی از این دو پیشنهاد، توافق صورت گیرد، آن‌گاه هیچ کشوری نمی‌تواند با نقض یک‌جانبهٔ توافق، سود خود را افزایش دهد. این دو موازنهٔ خالص تنها در موقعیتی موجه و قابل قبول هستند که دو طرف روی انتخاب یکی از این دو موازنه هماهنگ عمل کنند و راهی برای این هماهنگی وجود داشته باشد. مثلاً تفاوت قدرت نظامی ــ سیاسی طرفین یا تفاوت اهمیت موقعیت ژئوپلتیک منطقهٔ مورد مناقشه ممکن است باعث ایجاد عدم تقارن در سودهای بازیکنان شود و به عنوان نمونه سود آماده‌باش در صورت خویشتن‌داری رقیب، برای دو بازیکن به ترتیب a و a' باشد که $a \neq a'$. این موضوع کافی است تا هر دو بازیکن انتظار داشته باشند که بازیکنی که از سیاست آماده‌باش، سود بیشتری عایدش می‌شود، این سیاست را پیش گیرد و در نتیجه یکی از این دو موازنه، برجسته و مهم شده و احتمالاً دو طرف روی آن هماهنگ می‌شوند.

1) Nash Equilibrium

بر اساس نظر شلینگ، در بسیاری از موقعیت‌ها، انسان‌ها توانایی برقراری چنین هماهنگی را دارند. هرچند که به نظر نمی‌رسد تحلیل محض و مجرد اصول این هماهنگ شدن و برجسته بودن یک موازنه در یک بازی ممکن باشد. در اینجا گزینش یک موازنه به تعبیر شلینگ «حوزه‌ای است که روانشناسی تجربی می‌تواند به کمک نظریه بازی‌ها بیاید.» ([۱۳]، صفحه ۱۱۳) در بخش ۱.۳ به مسألهٔ وجود چند موازنه و انتخاب یک موازنه از بین آن‌ها بیشتر می‌پردازیم. در غیاب چنین هماهنگی و تفاهمی، موازنه مرکب بیشتر از این دو موازنه موجه به نظر می‌رسد. خوشبختانه بازی‌های بزدل یک موازنهٔ مرکب نیز دارند. به این صورت که یک بازیکن با احتمال p اعلام آماده‌باش می‌کند و p به گونه‌ای است که طرف مقابل نسبت به انتخاب استراتژی‌های خود بی‌تفاوت شود؛ یعنی در هر صورت سود مساوی بگیرد. به عنوان مثال در مسألهٔ قبل اگر کشور (۱) با احتمال p به نیروها آماده‌باش بدهد، آن‌گاه سود کشور (۲) از سیاست آماده‌باش برابر $(۱-p)a$ و از سیاست خویشتن‌داری به مقدار $(۱-p)b+pc$ است. حال اگر $(۱-p)a=pc+(۱-p)b$، یعنی $p=\frac{a-b}{a-b+c}$، آن‌گاه سود کشور (۲) در صورت انتخاب هر دو سیاست، برابر خواهد بود. بنابراین او نمی‌تواند با تغییر استراتژی، سود بیشتری عاید خود کند. در نتیجه با توجه به تقارن مسأله، پیشنهاد این که هر دو طرف با احتمال $\frac{a-b}{a-b+c}$ اعلام آماده‌باش کنند، یک موازنهٔ مرکب است و می‌تواند به عنوان یک راه حل موجه در نظر گرفته شود. همان‌طور که می‌بینید احتمال بحرانی شدن اوضاع (استقرار نیروها از سوی هر دو طرف و وقوع جنگ) برابر $p^۲$ است که با پاداش کشور بازنده c، رابطهٔ عکس دارد. لذا این تحلیل نشان می‌دهد که کلید کاهش ریسک جنگ در افزایش پاداش کشور بازنده است.

۳ تحقیقات توماس شلینگ

در اواسط دههٔ پنجاه توماس شلینگ شروع به استفاده از روش‌های نظریهٔ بازی‌ها در حیاتی‌ترین مسألهٔ آن دوره یعنی امنیت جهانی و مسابقهٔ تسلیحاتی کرد. همان طور که خود او اشاره می‌کند، ایدهٔ اصلی، مدل‌سازی مسأله توسط یک بازی با در نظر گرفتن گزینه‌های ممکن برای هر دو طرف و سپس تحلیل نتیجه در حالت‌های مختلف است. در ضمن باید این فرض را به یاد داشت که طرف دیگر مناقشه نیز با یک مسألهٔ تصمیم‌گیری مشابه مواجه است. عمده کارهای شلینگ استخراج موازنه‌ها در بازی‌های خاص و نشان دادن کاربرد این بازی‌ها و موازنه‌های آن‌ها در اقتصاد و علوم اجتماعی است. نتایج کارهای او در کتاب «استراتژی مناقشه»[۱۲] منتشر شده است. این کتاب بعدها به یک کتاب کلاسیک در زمینهٔ مطالعات استراتژیک تبدیل شد و تأثیر زیادی در نگرش محققین این حوزه گذاشت. در ادامه به چند نمونه از کارهای او اشاره می‌کنیم.

۱.۳ آسیب‌شناسی اجتماعی مسالهٔ انتخاب موازنه

همان طور که در بخش ۲ دیدیم یک بازی ممکن است چندین موازنهٔ نش داشته باشد و مسألهٔ

اصلی هماهنگ شدن بازیکنان بر روی یکی از این موازنه‌هاست. اگر در مثال بخش ۲ بازیکن اول روی موازنه (آماده‌باش، خویشتن‌داری) و بازیکن دوم روی موازنه (خویشتن‌داری، آماده‌باش) تأکید داشته باشد، آن‌گاه نتیجهٔ حاصل، یعنی وقوع جنگ به نفع هیچ‌کدام نیست. شلینگ در تحلیل این نوع بازی‌ها وارد حوزهٔ روانشناسی تجربی می‌شود. او نشان می‌دهد که در اغلب موارد محیط و شرایطی که بازی در آن انجام می‌گیرد و هم‌چنین گذشتهٔ بازیکنان در شرایط مشابه باعث می‌شود که آنان بر روی یک موازنهٔ خاص متمرکز شوند. شلینگ این موازنه را موازنهٔ اصلی[1] نامید. معرفی مفهوم موازنه اصلی راه را برای تأثیر عوامل محیطی و فرهنگی روی تحلیل رفتارهای منطقی افراد باز کرد. مسألهٔ انتخاب از بین موازنه‌های متعدد می‌تواند ما را در درک بهتر تأثیر اقتصادی فرهنگ بر پدیده‌های اجتماعی مثل مسألهٔ عدالت، مالکیت، حاکمیت و مشروعیت سیاسی، روابط اجتماعی و آسیب‌شناسی آن‌ها یاری کند. در ادامه به ذکر یک مثال از آسیب‌شناسی یک رفتار اجتماعی می‌پردازیم که مبتلا به امروز جامعهٔ ما نیز هست.

فرض کنید دو رقیب تجاری بر سر انتخاب یکی از این دو راه قرار گرفته‌اند. می‌توانند مالیات خود را به دولت پرداخت کنند یا به ترفندی از پرداخت مالیات فرار کنند. فرض کنید هدف اصلی برای هر دو رقیب، عقب نیفتادن از طرف مقابل باشد. اگر یکی از طرفین مالیات خود را پرداخت کند و دیگری پرداخت نکند، آن‌گاه طرف پرداخت کننده سود کمتری عایدش می‌شود و در نتیجه از رقیب خود عقب می‌افتد، ضمن این‌که طرف مقابل توانسته است با قبول یک جریمهٔ احتمالی گوی سبقت را از رقیب خود برباید. اما بهترین حالت برای هر دو طرف این است که هر دو مالیات خود را پرداخت کنند که با این کار هم از رقیب عقب نمی‌افتند و هم از مزیت‌های فردی و اجتماعی پرداخت مالیات برخوردار می‌شوند. در نتیجه می‌توانیم ماتریس این بازی را به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{array}{r c} & \text{پرداخت مالیات} \quad \text{عدم پرداخت} \\ \text{پرداخت مالیات} & \left(\begin{array}{cc} (۴,۴) & (۰,۳) \\ (۳,۰) & (۲,۲) \end{array}\right) \\ \text{عدم پرداخت} & \end{array}$$

در این بازی نیز دو موازنهٔ خالص وجود دارد که (پرداخت، پرداخت) و (عدم پرداخت، عدم پرداخت) هستند. اجازه دهید موازنهٔ اول را موازنهٔ خوب و موازنهٔ دوم را موازنهٔ بد بنامیم. همان طور که می‌بینیم موازنهٔ خوب برای هر دو بازیکن سود بیشتری را فراهم می‌کند، بنابراین به عنوان یک اقتصاددان شاید مجاب شویم که موازنهٔ خوب را می‌توان به عنوان موازنه اصلی و راه‌حل بازی در نظر گرفت. اما اگر از منظر آسیب‌شناسانه به این قضیه نگاه کنیم، متأسفانه در برخی شرایط موازنهٔ بد محقق می‌شود. فرض کنید بازی در فضا و زمینه‌ای اجرا می‌شود که بر اساس انتظارات فرهنگی و تجارب حرفه‌ای بازیکنان در شرایط مشابه، انتظار هر بازیکن از رقیب خود این است که او مالیات خود را نخواهد داد. در شرایط وجود چنین جو بدبینانه‌ای پاسخ عاقلانهٔ هر بازیکن به این درک عمومی این است که او نیز مالیات خود را پرداخت نکند تا سود خود را از صفر به ۲ تبدیل نماید.

1) focal equilibrium

در نتیجه موازنهٔ بد اتفاق می‌افتد. آسیب‌شناسی این مسأله یک آسیب‌شناسی اجتماعی را می‌طلبد. در واقع این مشکل ناشی از انتظارات دو طرف از رفتار طرف مقابل یا درک عمومی جامعه از شرایط موجود است. بنابراین حل آن نیز در گرو تغییر این درک عمومی است. این تغییر فرهنگی مستلزم وجود یک هدایت کنندهٔ مقبول اجتماعی است.

شلینگ معتقد است که در چنین بازی‌هایی میزان کمی از بدگمانی در مورد قصد رقیب می‌تواند برای به خطر افتادن نتیجهٔ صلح‌آمیز کافی باشد. به این جملات از خود او توجه کنید:

" اگر من در پی شنیدن صدایی در شب به طبقهٔ پایین بروم در حالی که یک اسلحه در دست دارم و خودم را در مقابل یک دزد ببینم که او هم اسلحه‌ای در دست دارد، خطر وقوع حادثه‌ای که برای هیچ کدام از ما خوشایند نیست وجود دارد. حتی اگر او ترجیح دهد که آرام آن‌جا را ترک کند و من هم‌چنین بخواهم، این خطر وجود دارد که او فکر کند که من قصد شلیک دارم و ابتدا به من شلیک کند. بدتر از آن این خطر وجود دارد که او فکر کند که من فکر می‌کنم او قصد شلیک دارد."

این نگرش منجر به تحقیقات گسترده‌ای دربارهٔ مسأله بی‌اعتمادی در تعاملات اجتماعی، سیاسی و نظامی شده که کاربردهای زیادی به خصوص در مسألهٔ مسابقهٔ تسلیحاتی داشته است. برای نمونه به [۲] مراجعه کنید.

۲.۳ بازدارندگی: سیاست ضربهٔ دوم

شلینگ در تحقیقات خود به این مسألهٔ مهم توجه کرد که اجرای یک استراتژی با تهدید به اجرای آن معادل نیست. در واقع در بسیاری از تعاملات و مناقشه‌ها تهدید به اجرای یک استراتژی می‌تواند یک عامل بازدارنده برای رفتار بد رقیب باشد. تحلیل دقیق مفهوم بازدارندگی نیاز به اطلاعاتی در زمینه بازی‌های چند مرحله‌ای دینامیک دارد. در ادامه سعی می‌کنیم این مسأله را بدون پرداختن به جزئیات ریاضی آن بررسی کنیم. مطالعهٔ بازدارندگی‌های قابل اعتنا با استفاده از استراتژی ضربهٔ دوم[1] یک بخش اصلی از کتاب استراتژی مناقشه را تشکیل داده است. شلینگ تأکید می‌کند که اگر هشدارهای اشتباه داده شود یا در مورد علائق و نیات دشمن قضاوت غلط صورت گیرد، آن‌گاه استفاده از این سیاست می‌تواند خطرناک باشد.

اجازه دهید به مسألهٔ مناقشهٔ مرزی که در بخش ۲ مطرح شد برگردیم. فرض کنید در این مناقشه ابتدا کشور (۱) استراتژی خود را انتخاب می‌کند و سپس کشور (۲). در این حالت دو استراتژی برای کشور (۱) در نظر می‌گیریم: یکی این که خویشتن‌داری کند و دیگر این که اعلام کند در صورت آماده‌باش نیروهای کشور (۲)، به قوای خود آماده‌باش می‌دهد (تهدید به تلافی که آن را حمله دوم می‌گوییم). کشور (۲) پس از مشاهدهٔ رفتار کشور (۱) می‌تواند دو سیاست اتخاذ کند: به قوای خود آماده‌باش دهد یا این که از آماده‌باش اجتناب کند.

1) second-strike strategy

می‌توانیم بازی را با ماتریس زیر نشان دهیم:

$$\begin{array}{rcc} & \text{آماده‌باش} & \text{خویشتن‌داری} \\ \text{تهدید به اقدام تلافی‌جویانه} & (0,0) & (b,c) \\ \text{خویشتن‌داری} & (c,a) & (b,b) \end{array}, \quad a > b > c > 0$$

مانند مثال قبل دو موازنهٔ خالص وجود دارد (درایه ۱۲ و ۲۱). در این حالت چون کشور (۲) هنگام انتخاب استراتژی، از رفتار کشور (۱) مطلع است، بنابراین موازنهٔ ۱۲، یعنی تهدید به تلافی برای کشور (۱) و خویشتن‌داری برای کشور (۲) برجسته‌تر از بقیهٔ موازنه‌هاست. لذا نتیجهٔ محتمل این است که کشور (۱) تهدید به اقدام تلافی‌جویانه نماید و کشور (۲) از آماده‌باش نیروها اجتناب کند. چنین بازدارندگی یک نتیجهٔ صلح‌آمیز را تضمین می‌کند. حال فرض کنید دیپلماسی کشور (۱) برای تهدید به اقدام تلافی‌جویانه به قدر کافی قوی نباشد. به عبارت دیگر به دلیل برخی واقعیت‌های بین‌المللی کشور (۱) فقط می‌تواند تا حدی تهدید به اقدام تلافی‌جویانه کند و تهدید بیش از آن قابل اعتنا نیست. مثلاً کشور (۱) می‌تواند حداکثر با احتمال p که $0 < p < 1$، از سیاست بازدارندگی استفاده کند. در این صورت سیاست تهدید به احتمال p برای کشور (۱) و خویشتن‌داری کشور (۲) فقط وقتی یک موازنه تشکیل می‌دهد که سود متوسط کشور (۲) در صورت آماده‌باش بیشتر از سود او در صورت خویشتن‌داری نباشد، یعنی $(1-p)a \geq (1-p)b + pc$. بنابراین در این حالت سیاست بازدارندگی کشور (۱) فقط وقتی منجر به یک نتیجهٔ صلح‌آمیز می‌شود که $p \geq \frac{a-b}{a-b+c} = p^*$. مقدار p^* را آستانهٔ اعتبار بازدارندگی کشور (۱) می‌گوییم.

۳.۳ بازی با اطلاعات ناقص

در مواردی ممکن است اطلاعات بازیکنان دربارهٔ تابع سود رقیب ناقص باشد. چنین بازی‌ها را بازی با اطلاعات ناقص[1] گویند. ایده‌های اولیهٔ شلینگ در مورد بازی‌های با اطلاعات ناقص انگیزهٔ کارهای بعدی جان هرسانی یکی از برندگان نوبل اقتصاد سال ۱۹۹۴ شد [۷]. این تحقیقات قدرت تحلیل نظری ما را در این بازی‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش داده است. اجازه دهید به مثال بازدارندگی در مناقشهٔ مرزی باز گردیم. تحلیل ما در این موقعیت مبتنی بر این فرض بود که در صورت تهدید به اقدام تلافی‌جویانه توسط کشور (۱)، برای کشور (۲) خویشتن‌داری نسبت به برپایی آتش جنگ ارجح است، یعنی $c > 0$. آیا واقعاً کشور (۲) یکه تازی کشور (۱) را به احتمال وقوع جنگ ترجیح می‌دهد؟ در اینجا اطلاعات کشور (۱) درباره تابع سود کشور (۲) ناقص است.

---

1) game with incomplete information

این نقص اطلاعات را در ماتریس زیر با یک علامت سؤال نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{rcc} & \text{آماده‌باش} & \text{خویشتن‌داری} \\ \text{تهدید به اقدام تلافی‌جویانه} & (0,0) & (b,?) \\ \text{خویشتن‌داری} & (c,a) & (b,b) \end{array}, \quad a > b > c,\ b \geq ?$$

آیا در این حالت نیز اگر کشور (۱) سیاست تهدید را پیش گیرد، کشور (۲) خویشتن‌داری خواهد کرد؟ سیاست حمله دوم کشور (۱) در این حالت چقدر موجه است؟ فرض کنید کشور (۱) با احتمال θ گمان می‌کند که کشور (۲) در هر صورت آماده‌باش را ترجیح می‌دهد (حتی در صورت تهدید به تلافی کشور (۱)). هم‌چنین فرض کنید که کشور (۱) با احتمال π سیاست تهدید را پیش گیرد. در این صورت سود متوسط کشور (۲) از آماده‌باش برابر $a(1-\pi)$ و از خویشتن‌داری به مقدار $b(1-\pi) + (?)\pi$ خواهد بود که مقدار اخیر حداکثر برابر b است. قرار می‌دهیم $\pi^* = 1 - \frac{b}{a}$، در این صورت:

الف) اگر $\pi < \pi^*$، یعنی $a(1-\pi) > b$، آن‌گاه کشور (۲) قطعاً آماده‌باش را ترجیح خواهد داد و سود متوسط کشور (۱) در این حالت $c(1-\pi)$ خواهد شد. این یک تابع نزولی برحسب π است. اما:

ب) اگر $\pi \geq \pi^*$، آن‌گاه سود متوسط کشور (۱) برابر $b(1-\theta) + c(1-\pi)\theta$ می‌شود که این تابع نیز برحسب π نزولی است.

بنابراین با توجه به (الف) و (ب) بیشترین سود کشور (۱) برابر $\max\{c, \theta(1-\pi^*)c + (1-\theta)b\}$ خواهد بود. در نتیجه اگر $c \leq \theta(1-\pi^*)c + (1-\theta)b$، یعنی $\theta \leq \frac{1-\frac{c}{b}}{1-\frac{c}{a}} = \theta^*$ (کشور (۱) احتمال ارجح بودن جنگ برای کشور (۲) را حداکثر θ^* بداند)، آن‌گاه سیاست بهینه برای کشور (۱) این است که با احتمال π^* تهدید به اقدام تلافی‌جویانه کند. در این حالت سود او برابر $b(1-\theta) + c(1-\pi^*)\theta$ می‌شود. حال اگر $\theta > \theta^*$ (کشور (۱) احتمال ارجح بودن جنگ برای کشور (۲) را بیش از θ^* بداند)، آن‌گاه بهتر است که سیاست خویشتن‌داری کامل را پیش گیرد و به سود c برسد.

شلینگ علاوه بر تحلیل‌های فوق، در این شرایط توصیه‌هایی نیز دارد. در این‌جا به چند نمونه اشاره می‌کنیم. یک کشور در مواجهه با افزایش تدریجی نیروهای نظامی دشمن، باید به جای عکس‌العمل قطعی تهدید کند که اوضاع را از کنترل خارج خواهد کرد، به تعبیر خود شلینگ «تهدید کند که همه چیز را به تقدیر خواهد سپرد.» علت این است که حتی وجود یک احتمال بسیار کم از وقوع جنگ نیز ممکن است برای بازداشتن دشمن از افزایش بسیج نیروها کافی باشد. یک مزیت دیگر تهدید به تلافی غیرقطعی این است که باورپذیری آن راحت‌تر به دست می‌آید و هزینهٔ اقدام تلافی‌جویانه در آن کمتر است. علاوه بر این شلینگ پیشنهاد می‌کند که یک راه خوب هنگام مواجهه با افزایش ریسک تهاجم دشمن این است که گام به گام و تدریجاً احتمال وقوع درگیری را بالا ببریم. چون اقدامات صورت گرفته در هر گام کوچک است، از به خشم آمدن دشمن سخت‌گیر جلوگیری

می‌کند و چون دشمن در هر مرحله فرصت نشان دادن نرمش را دارد، احتمال وقوع درگیری پایین می‌ماند. در نهایت شلینگ از تحلیل فوق نتیجه می‌گیرد که کشورها باید دشمن را در مورد تصمیم خودشان مردد نگاه دارند و در عین حال او را مطمئن سازند که اقدام تلافی‌جویانهٔ پر قدرت به عنوان یک گزینهٔ جدی مورد توجه است.

کتاب استراتژی مناقشه علاوه بر علوم اجتماعی بر نظریه‌های اقتصادی نیز تأثیر زیادی داشته است. این کتاب و کتاب دیگر شلینگ «استراتژی و کنترل تسلیحاتی» هم‌چنین روی نگرش نظریه‌پردازان نظامی در دوره جنگ سرد تأثیرات بنیادی گذاشته و نقش محوری در بنیان‌گذاری «مطالعات استراتژیک» به عنوان یک رشتهٔ آکادمیک ایفا کرده است. محرمانه بودن مسائل نظامی، تعیین میزان دقیق تأثیر کارهای شلینگ روی رفتار ابرقدرت‌ها را مشکل می‌کند. با این وجود یک مدرک برای اثبات این موضوع می‌تواند این باشد که او در سال ۱۹۹۳ جایزهٔ ملی آکادمی علوم ایالات متحده را به خاطر تحقیقات مرتبط با پیشگیری از جنگ هسته‌ای دریافت کرده است.

۴ تحقیقات رابرت اومن

رابرت اومن نقش کلیدی در شکل‌گیری نظریهٔ بازی‌ها و گسترش دامنهٔ کاربردهای آن داشته است. او نگرش یک پارچه‌ای نسبت به گستره وسیعی از تعاملات استراتژیک ارائه کرده است که بسیاری از زمینه‌های به ظاهر متفاوت مثل اقتصاد، علوم سیاسی، بیولوژی، فلسفه، علوم کامپیوتر و آمار را در بر می‌گیرد. اومن به جای استفاده از ساختارهای مختلف در تحلیل موقعیت‌های خاص مثل بازدارندگی، مالیات‌گذاری یا رأی‌گیری، روش‌ها و اسلوب‌هایی کلی را توسعه داده است که در هر موقعیت به نتایج و کاربردهای خاص منجر می‌شود. تحقیقات او ترکیبی غیر متعارف از گستردگی و عمق را در بر دارد. برخی از آن‌ها شامل تحلیل‌های عمیقی هستند در حالی که برخی دیگر از نظر تکنیکی ساده اما از نظر مفهومی بنیادی‌اند. در بین تحقیقات اومن، مطالعهٔ همکاری‌های دراز مدت و تعاملات تکرار شونده، تأثیر در علوم اجتماعی داشته است.

۱.۴ همکاری‌های دراز مدت

همان‌طور که قبلاً اشاره شد بسیاری از تعاملات و روابط متعارف اجتماعی، دراز مدت و بعضاً با مدت نامعلوم هستند. این کنش‌ها و واکنش‌ها به صورت تدریجی، متوالی و پی‌درپی و در یک روند طولانی صورت می‌گیرند. مثلاً کشورهای مختلف در تعامل با یک‌دیگر برای رسیدن به یک مقصود مشترک یا متقابل، طیفی از گفتگوها و تعاملات را انجام می‌دهند. آن‌ها در هر مرحله رفتاری از خود بروز می‌دهند که رفتار گذشته کشورهای رقیب یا درگیر، در این رفتار تأثیر می‌گذارد. لذا مطالعهٔ تعاملات تکرار شونده و متناوب با یک افق دراز مدت حائز اهمیت است.

ساده‌ترین راه برای نمایش تفاوت روابط دراز مدت و کوتاه مدت، استفاده از یک بازی معروف

به نام «مسألهٔ زندانی[1]» است. این بازی بر اساس یک داستان نام‌گذاری شده است. دو کلاه بردار هم‌دست دستگیر می‌شوند و در دو اتاق مجزا مورد بازجویی قرار می‌گیرند. هر کدام می‌تواند با هم‌دست خود همکاری و سکوت کند یا این‌که به او پشت کرده و او را لو دهد. اگر هر دو همکاری کنند و اطلاعاتی به پلیس ندهند، آن‌گاه تنها به یک مجازات جزئی (مثلاً جریمه نقدی) محکوم می‌شوند. این حالت را با سود ۲ برای دو طرف نشان می‌دهیم. اگر هر دو به هم‌دست خود پشت کنند و ماجرا را لو دهند، آن‌گاه هر دو به مجازات زندان با کمترین مدت محکوم می‌شوند که آن را با سود ۱ بیان می‌کنیم. وفاداری یکی از شرکا و خیانت دیگری باعث حداکثر مجازات (زندان طولانی) برای فرد وفادار و آزادی برای فرد خیانت کننده خواهد شد. مجازات حداکثری را با سود صفر و آزادی را با سود ۳ نشان می‌دهیم. لذا ماتریس بازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{همکاری} & \text{لو دادن} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{همکاری} \\ \text{لو دادن} \end{array} & \begin{pmatrix} (۲,۲) & (۰,۳) \\ (۳,۰) & (۱,۱) \end{pmatrix} \end{array} \qquad (۱)$$

این بازی کاربردهای اقتصادی فراوانی دارد. یک مثال آن تولید یک کالای خاص توسط دو شرکت رقیب است. هر دو شرکت می‌توانند کالا را در سطح بالا یا در سطح پایین تولید کنند. اگر هر دو در یک سطح پایین تولید کنند، آن‌گاه قیمت بالا می‌ماند و هر دو ۲ واحد سود می‌کنند. اگر هر دو در سطح بالا تولید کنند، آن‌گاه قیمت کاهش می‌یابد و هر دو ۱ واحد سود می‌کنند. اگر یکی در سطح بالا تولید کند در حالی که دیگری در سطح پایین تولید می‌کند، آن‌گاه تولید کننده‌ای که زیاد تولید می‌کند، بیشترین سود (۳ واحد) و دیگری کمترین سود (۰ واحد) را دریافت می‌کند.

برای هر بازیکن بدون توجه به استراتژی‌های رقیب، استراتژی لو دادن یک استراتژی غالب است و لذا تنها موازنهٔ نش این بازی درایهٔ ۲۲ یعنی لو دادن برای هر دو بازیکن می‌باشد. با این وجود مشاهده می‌کنید که اگر هر دو از استراتژی همکاری استفاده کنند، آن‌گاه سود هر دوی آن‌ها افزایش خواهد یافت. اگر این دو کلاه‌بردار (یا دو شرکت) تنها یک بار با هم کار کنند، نتیجهٔ معقول این است که هر دو از موازنهٔ نش استفاده می‌کنند و شریک را لو می‌دهند. (در سطح بالا تولید می‌کنند.) اما فرض کنید این بازی مرتب تکرار شود، یعنی این دو کلاه‌بردار به طور متوالی و مکرر با هم کار کنند یا دو شرکت به صورت روزانه یا ماهیانه میزان تولید خود را تغییر دهند. در این روند هر بازیکن به دنبال ماکزیمم کردن متوسط طیف سود خود در مدت طولانی کار با هم‌دیگر است. می‌توان دید که در این‌گونه موارد استراتژی همکاری در هر مرحله برای هر دو یک نتیجهٔ معقول خواهد داشت، به این دلیل که بازیکنان در این حالت می‌توانند تهدید کنند که هر گونه خیانت و انحراف از توافق همکاری در یک بازی را با عدم همکاری خودشان در بازی بعدی تلافی خواهند کرد. در واقع افزایش کوتاه مدت سود در یک بازی به خاطر خیانت، با کاهش سود به کمتر از حد

1) Prisoner's Dilemma

موازنه در بازی‌های بعد، از بین می‌رود و همین می‌تواند بازیکنان منطقی را مجاب کند که در هر مرحله همکاری نمایند. به این دلایل در دههٔ پنجاه چند متخصص نظریهٔ بازی‌ها حدس زده بودند که اگر در چنین شرایطی بازی به قدر کافی ادامه یابد، آن‌گاه بازیکنان منطقی باید قادر به همکاری باشند. اومن این مطلب را به صورت دقیق اثبات کرد. برای تشریح نتایج او به چند تعریف نیاز داریم. فرض کنید G یک بازی غیرمشارکتی چند نفره باشد، منظور از ابربازی[۱] G^*، همان بازی G است که بی‌نهایت بار تکرار شود. یک استراتژی خالص در G^*، یک قانون تصمیم‌گیری است که در هر مرحله از بازی با در نظر گرفتن گذشتهٔ بازی تا آن مرحله، یک استراتژی خالص از G را برای آن مرحله پیشنهاد می‌دهد. بنابراین مجموعهٔ استراتژی‌های خالص در یک ابربازی، نامتناهی است و استراتژی‌های پیچیده‌ای را در بر می‌گیرد. یک استراتژی مرکب در G^* یک توزیع احتمال روی استراتژی‌های خالص G^* است. اگر هر بازیکن یک استراتژی مرکب در G^* انتخاب کند و بازیکن X در مرحلهٔ n ام به میزان a_n سود کسب کند، آن‌گاه سود آن بازیکن در G^* را برابر $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ تعریف می‌کنیم. یک موازنهٔ قوی[۲] در بازی G^* که به عنوان راه‌حل بازی درنظر گرفته می‌شود، یک بستهٔ پیشنهادی است که به هر بازیکن یک استراتژی در G^* ارائه می‌دهد، به طوری که هیچ گروه (زیرمجموعه یا ائتلاف) از بازیکن‌ها نتوانند با تغییر استراتژی‌های خود (نپذیرفتن بسته)، سودهایی بیشتر از ماکزیمم سود اعضای آن گروه در حالت پذیرش بسته به دست آورند. بنابراین موازنهٔ نش در G^* یک حالت خاص موازنهٔ قوی است، وقتی که گروه‌ها را تک عضوی بگیریم. نتیجهٔ اساسی اومن، مجموعه سودهای حاصل از موازنه‌های قوی را به طور دقیق مشخص می‌کند. وقتی این نتیجه را برای گروه‌های یک نفره به کار گیریم، قضیهٔ جالبی به دست می‌آید که «قضیهٔ عامه برای بازی‌های تکرار شونده[۳]» گفته می‌شود. برای بیان صورت این قضیه، به چند تعریف نیاز داریم.

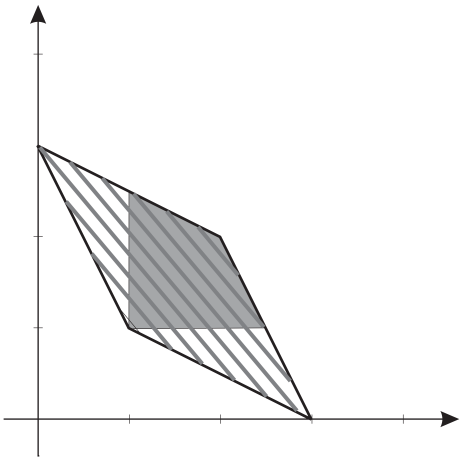
یک بردار سود (یک لیست از سودها که به هر بازیکن یک سود نسبت می‌دهد) امکان‌پذیر[۴] گفته می‌شود اگر بازیکن‌ها بتوانند با به کارگیری یک استراتژی (مرکب) در G، آن سودها را کسب کنند. در واقع یک بردار سود امکان‌پذیر، یک ترکیب خطی محدب از بردارهای سودی است که به وسیلهٔ استراتژی‌های خالص G به دست می‌آید و مجموعه بردارهای سود امکان‌پذیر برابر غلاف کوژ به دست آمده از بردارهای سود حاصل از استراتژی‌های خالص G است. یک سود برای یک بازیکن، معقول فردی[۵] خوانده می‌شود اگر حداقل به اندازهٔ کمترین سودی در G باشد که بقیهٔ بازیکن‌ها می‌توانند بازیکن مذکور را مجبور به دریافت آن کنند. به عبارت دیگر فرض کنید یک بازیکن برای هر ترکیب از استراتژی‌های بازیکنان دیگر در G، بهترین پاسخ را بدهد. کمترین مقدار در بین همهٔ سودهای حاصل برای آن بازیکن را k بنامید. هر سود بزرگتر یا مساوی k، یک سود معقول فردی برای بازیکن ذکر شده است. در نهایت یک بردار سود را معقول فردی می‌گوییم اگر

1) supergame 2) strong equilibrium 3) folk theorem for repeated games 4) feasible
5) individually rational

سود نسبت داده شده به هر بازیکن برای او معقول فردی باشد. با توجه به تعریف موازنهٔ نش بدیهی است که هر بردار سود حاصل از هر موازنهٔ نش، یک بردار سود امکان‌پذیر و معقول فردی است. قضیهٔ عامه نشان می‌دهد هر بردار سودی که در بازی G امکان‌پذیر و شخصاً منطقی باشد، می‌تواند توسط یک موازنهٔ نش در بازی G^* به دست آید.

قضیهٔ ۲. [۱] سودهای به دست آمده از موازنه‌های نش در بازی تکرار شونده G^*، دقیقاً برابر با مجموعه پاداش‌های امکان‌پذیر و شخصاً منطقی در G است.

به عنوان مثال در بازی دو راهی زندانی ماتریس (۱)، مجموعه بردارهای پاداش امکان‌پذیر، غلاف کوژ حاصل از نقاط $(۲,۲)$، $(۰,۳)$، $(۳,۰)$ و $(۱,۱)$ است که در شکل ۱ به صورت هاشور خورده نشان داده شده است. در این بازی می‌بینیم که هر بازیکن می‌تواند با انتخاب استراتژی لو دادن، حداقل سود ۱ را برای خود تضمین کند، بنابراین بردارهای سود شخصاً منطقی بردارهایی هستند هر دو مولفهٔ آن‌ها حداقل ۱ باشد. در نتیجه اشتراک این دو مجموعه همان طور که در شکل ۱ به صورت سایه‌دار نشان داده شده است، بردارهای سود امکان‌پذیر و شخصاً منطقی هستند. طبق قضیهٔ عامه همهٔ این بردارهای پاداش، از جمله بردار مطلوب $(۲,۲)$، می‌توانند به عنوان حد میانگین سود حاصل از به کارگیری یک موازنهٔ نش در بازی تکرارشوندهٔ G^* به دست آیند. این در حالی است که وقتی بازی یک بار انجام می‌شود، تنها بردار $(۱,۱)$ می‌تواند به عنوان موازنهٔ نش به دست آید.



شکل ۱. بردارهای سود امکان‌پذیر و شخصاً منطقی.

بنابراین بازیکن‌ها می‌توانند روی موازنه همکاری در هر مرحله هماهنگ شوند. در مقابل هر گونه انحراف از موازنه توسط یکی از بازیکنان در یک مرحله، بازیکن دیگر می‌تواند در مراحل بعد او را جریمه کند، به این صورت که استراتژی خود را به گونه‌ای تنظیم کند که سود متوسط طرف خاطی

وقتی که او بهترین جواب را در مقابل این جریمه اتخاذ کند، می‌نیمم شود. این جریمه می‌تواند موقتاً سود بازیکن خاطی را به میزانی کمتر از سطح موازنهٔ نش در بازی مرحله‌ای G تنزل دهد. همین تهدید کافی است تا موازنهٔ مذکور به عنوان یک راه حل معقول پذیرفته شود.

۲.۴ تحقیقات دیگر

در طول سال‌های جنگ سرد، در فاصلهٔ ۱۹۶۵ تا ۱۹۶۸، رابرت اومن، مایکل مشلر و ریچارد استرن مشترکاً تحقیقاتی در زمینهٔ مذاکرات کنترل تسلیحاتی انجام دادند. کارهای آن‌ها بعداً مبانی نظریهٔ بازی‌های تکرارشونده با اطلاعات ناقص را تشکیل داد. این بازی‌ها، بازی‌های تکرارشونده‌ای هستند که در آن همه یا برخی از بازیکنان، فاقد بخشی از اطلاعات بازی مرحله‌ای G هستند. برای مثال ممکن است یک کارخانه از هزینه‌های رقیب خود مطلع نباشد یا یک کشور تعداد زرادخانه‌های تسلیحات نظامی کشور دیگر را نداند. شخص، شرکت یا کشوری که اطلاعات بیشتری در اختیار دارد، چقدر می‌تواند از این مزیت سود ببرد؟ یک بازیکن با اطلاعات ناقص چقدر می‌تواند با مشاهدهٔ عملکرد بازیکنان دیگر از آن‌ها اطلاعات کسب کند؟ آیا یک بازیکن مطلع، باید از این مزیت برای بهره‌برداری کوتاه مدت استفاده کند، علی‌رغم این‌که با استفاده از این اطلاعات، خطر لو رفتن آن‌ها وجود دارد، آیا باید اطلاعات خود را به‌منظور بهره‌برداری در آینده مخفی کند؟ به کمک کارهای هرسانی، اومن، ماشلر و استرن، نظریه بازی‌ها قدرت تحلیل این موقعیت‌های استراتژیک را به دست آورده است. تحقیقات این محققین در [۱] جمع‌آوری شده است.

کارهایی نیز دربارهٔ همکاری‌ها در بازی‌های با تکرار متناهی انجام شده است. بنوآ و کریشنا قضیه‌ای شبیه قضیه عامه را وقتی زمان بازی متناهی اما طولانی است، ثابت کرده‌اند [۳]. کرپس و دیگران نشان داده‌اند که اگر بازی «مسألهٔ زندانی» به تعداد کافی تکرار شود و اطلاعات بازیکنان دربارهٔ سودها ناقص باشد، آن‌گاه در بیشتر مراحل، همکاری اتفاق می‌افتد هر چند که در مرحلهٔ آخر این همکاری از بین خواهد رفت [۸]. به‌علاوه نیمن ثابت کرده است که حتی در بازی مسألهٔ زندانی با تکرار متناهی و اطلاعات کامل نیز اگر زمان پایان بازی برای بازیکنان معلوم نباشد، آن‌گاه نتیجهٔ همکاری قابل پیش‌بینی است [۱۲]. همهٔ این نتایج و تحقیقات دیگر بر پایهٔ تحقیقات بنیادی اومن انجام گرفته است. نظریهٔ بازی‌های تکرارشونده کمک زیادی به توجیه و توضیح دستهٔ وسیعی از دریافت‌های تجربی کرده است. به‌ویژه این که چرا وقتی تعداد بازیکن‌ها زیاد است، تعامل آنان مکرر و متوالی نیست، زمان تعامل کوتاه است یا رفتار بازیکنان پس از مدتی تأخیر مشاهده می‌شود و همکاری بازیکنان سخت‌تر محقق می‌شود، به خوبی توسط این نظریه قابل درک و توجیه است. سرانجام این‌که نتایج به دست آمده در این نظریه تاکنون برای افزایش کارایی مؤسسه‌های مختلف از سازمان تجارت جهانی گرفته تا مافیا به کار رفته است [۵] و [۹].

در مجموع کارهای توماس شلینگ و رابرت اومن در طول نیم قرن اخیر، بینش و نگرشی جدید به روی تحلیل تعاملات اجتماعی باز کرده است و درک ما را نسبت به مناقشه‌ها و همکاری‌های اقتصادی، سیاسی، نظامی و غیره ارتقاء داده است.

مراجع

[1] R.J. Aumann and M. Maschler (1995) *Repeated Games with Incomplete Information,* MIT Press.

[2] S. Baliga and T. Sjöström (2004) *Arm races and negotiations,* Review of Economic Studies 71, 351–369.

[3] J.P. Benoit and V. Krishna (1985) *Finitely repeated games,* Econometrica 53, 890–904.

[4] K. Binmore. and L. Samuelson (2004) *The evolution of focal points,* Games and Economic Behavior.

[5] A. Dixit (2003) *On modes of economic governance,* Econometrica 71, 449–481.

[6] A. Dixit and S. Skeath (2004) *Games of Strategy,* 2nd ed., W.W. Norton, New York.

[7] J.C. Harsanyi (1967-1968) *Games with incomplete information played by Bayesian players,* Management Science 14, 159–182, 320–334, 486–502.

[8] D. Kreps, P. Milgrom, J. Roberts and R. Wilson (1982) *Rational cooperation in the finitely repeated prisoners' dilemma,* Journal of Economic Theory 27, 245–252.

[9] G. Maggi (1999) *The role of multinational institutions in international trade cooperation,* American Economic Review 89, 190–214.

[10] J. Nash (1950) *Equilibrium points in n-person games,* Proceedings of the National Academy of Science 36, 48–49.

[11] J. Nash (1951) *Non-cooperative games,* Annals of Mathematics 54, 286–295.

[12] A. Neyman (1999) *Cooperation in repeated games when the number of stages is not commonly known,* Econometrica 67, 45–64.

[13] T. Schelling (1960) *The Strategy of Conflict,* Harvard University Press, Cambridge MA.

رامین جوادی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
ramin.javadi@gmail.com

بهناز عمومی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
bomoomi@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۶۳ تا ۷۰

سخنرانی اینشتین: «طبیعت فضا» ارائه شده توسط سر مایکل عطیه

جی.دبلیو. جانسون و مارک ای. والکِر

مترجم: سید محمدباقر کاشانی

سر مایکل عطیه، برندهٔ جایزه‌های فیلدز و آبل اولین سخنرانی عمومی سالانهٔ اینشتین را در دانشگاه نبراسکا لینکُلْن ایراد کرد[۱]. موفقیت خیره کنندهٔ سخنرانی عطیه، روزنامهٔ دانشجویی محلی نبراسکان[۲] را بر آن داشت تا به کنایه بنویسد «معمولاً مایک جَگِر[۳] تنها انگلیسی است که می‌تواند شنوندگان آمریکایی پر سروصدا را سرگرم کند. ولی در بعدازظهر آن جمعه ریاضی‌دان مشهور انگلیسی سر مایکل عطیه درک غیرطبیعی و نبوغ فوق‌العادهٔ خود را با ایراد سخنرانی «ماهیت فضا» به شنوندگانی که سالن کیمبال رسیتالِ[۴] دانشگاه نبراسکا ـ لینکُلْن را پر کرده بودند، نشان داد.

سخنرانیِ سر مایکل برای مردم عادی برنامه‌ریزی شده بود. در واقع هم، مردم عادی آمده بودند: بیش از ۸۵۰ نفر سالن سخنرانی را پر کرده بودند و عدهٔ زیادی هم مجبور شدند برگردند. حدوداً بیش از ۴۰۰ نفر از شنوندگان از جمله اعضای کنفرانس نبودند، بلکه ترکیبی از دانشجویانِ دانشکده‌های فیزیک، فلسفه و دیگر رشته‌های دانشگاه و افراد دیگری از جامعه بودند. سر مایکل

Gerald W. Johnson استاد ریاضی در دانشگاه نبراسکا ـ لینکلن (Nebraska–Lincoln) است. آدرس e-mail او عبارت است از gjohnson@math.unl.edu

Mark Walker دانشیار ریاضی در دانشگاه نبراسکا ـ لینکلن است. آدرس e-mail او عبارت است از mwalker@math.unl.edu

۱) سخنرانی عطیه در بیست و یکم اکتبر به عنوان بخشی از جلسات مرکزی AMS در پاییز سال ۲۰۰۵ به میزبانی دپارتمان ریاضی در دانشگاه نبراسکا ـ لینکلن ارائه شد.

Notices of the AMS Volume 53, Number 6, June 2006, 674-678.

2) Daily Nebraskan 3) Mick Jagger 4) kimball Recital

برای هر فرد از این جمعیت متنوع مطلبی ارائه داد. او موضوع‌های اصلی دانش در قرن بیستم را با اشاره به جزئیات تکنیکی مورد بحث قرار داد. سخنرانی او شامل مطالبی از ریاضی، فیزیک، فلسفه و حتی تکامل و علم عصب‌شناسی بود. بخشی از سخنرانی وی متوجه تحقیقات جدید دربارهٔ مغز انسان و چگونگی تأثیرگذاری آن بر درک ما از ریاضی و فیزیک و مطالب فلسفی سابقه‌دار بود.

سال فرخندهٔ اینشتین

سال ۲۰۰۵ به درستی برای شروع سخنرانی‌های اینشتین در نظر گرفته شده است زیرا این سال، هم صدمین سالگرد شکوفاییِ اینشتین (سال معجزه‌آمیز) و هم پنجاهمین سالگرد درگذشت اوست. در این جا تا اندازه‌ای نکات عطیه دربارهٔ اینشتین را بسط می‌دهیم.

اینشتین چهار مقاله در ۱۹۰۵ به مجلهٔ *Annalen der physik* تسلیم کرد، سه مقاله از این چهار مقاله شاهکار به حساب می‌آید. یکی از آن‌ها که مربوط به حرکت براونی است (اولین مقاله از پنج مقاله‌ای که اینشتین در این موضوع نوشته است) نمایانگر سهمی مهم در نظریهٔ ملکولی جنبشی حرارت است و تأیید کنندهٔ نظریهٔ اتمی در زمانی که هنوز به آن به دیدهٔ تردید نگاه می‌کردند. مقالهٔ ۱۹۰۵ اینشتین دربارهٔ اثر فوتو ــ الکتریک مقاله‌ای اساسی و زودهنگام در نظریهٔ کوانتم بود. اینشتین، با وجود این هرگز از چگونگی ورود نظریهٔ احتمال در مکانیک کوانتمی راضی نبود، این مطلب انگیزهٔ اصلی بیان مشهور اوست که «خدا تخته نرد بازی نمی‌کند». این دو مقالهٔ اینشتین به تنهایی کافی است تا او را چهره‌ای مهم در تاریخ فیزیک به حساب آوریم، ولی اثر او دربارهٔ نسبیت خاص که آن نیز در ۱۹۰۵ نوشته شد و با نسبیت عام (در ۱۹۱۶) پیگیری شد، قطعاً او را در (یا نزدیک به) بالای هر لیستی از نوابغ خلاق فیزیک قرار می‌دهد. ادعا شده است که هر یک از این سه مقالهٔ ۱۹۰۵ ارزش (برنده شدن) یک جایزهٔ نوبل فیزیک را داشت، اگرچه فقط اثر او دربارهٔ پدیدهٔ فوتو ـ الکتریک در ۱۹۲۱ مفتخر به این جایزه شد.

ذیلاً برخی نتایج نظریهٔ نسبیت را که بیان ساده‌ای دارند می‌آوریم:

۱ـ سرعت یک شییء ممکن است برای ناظرهای مختلف متفاوت باشد، ولی سرعت نور، c برای همهٔ ناظرها یکی است.

۲ـ انرژی و جرم به وسیلهٔ فرمول $E = mc^۲$ به هم مربوطند.

۳ـ فضا و زمان از یکدیگر مستقل نیستند ــ بلکه، حرکت در فضا در اندازه‌گیری ناظر از زمان تأثیر می‌کند.

۴ـ هندسهٔ فضا ــ به‌ویژه، رابطه‌اش با جرم ــ شدیداً با آن چه قبل از نسبیت عام به آن اعتقاد داشتند متفاوت است.

در حالی که اینشتین نابغه‌ای خلاق در فیزیک بود، او یک کاربر ریاضیات به حساب می‌آمد، ولی کارهایش، به ویژه در نظریهٔ نسبیت، تأثیر بسیار زیادی بر ریاضی داشته است.

شگفت آور است که اِکمال سال خجسته اینشتین در حالی که او کارمند بیست و شش سالهٔ ادارهٔ ثبت اختراعات در برن سوئیس بود، واقع شد. همچنان که عطیه اشاره کرد، اینشتین با این که فارغ‌التحصیل رشتهٔ فیزیک بود، مانند بسیاری از دانش آموختگان جدید برای یافتن یک شغل آکادمیک با مشکل مواجه بود.

سؤال‌های فلسفی بنیادی

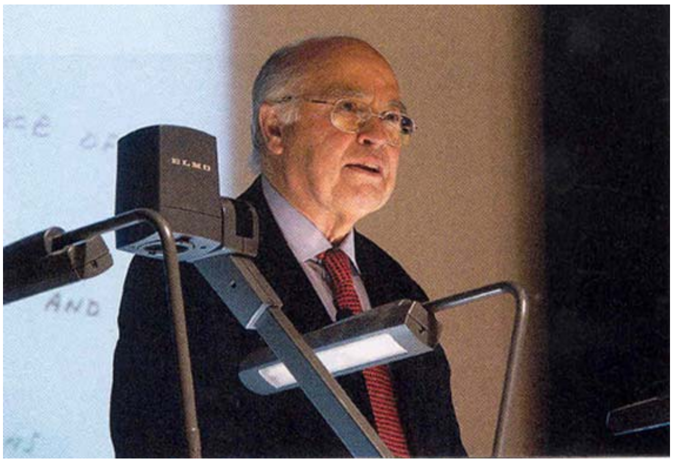
سر مایکل نه تنها بسیاری از مباحث ریاضی و فیزیک، بلکه موضوع‌هایی در فلسفه، علم عصب‌شناسی، طبیعت مغز بشر و نظریهٔ تکامل را مختصراً مورد بحث قرار داد. او بیان داشت که درک فضا مسألهٔ بنیادی فیزیک است و سخنرانیش عمدتاً بر رابطهٔ بین ریاضی و فیزیک به ویژه در ارتباط با طبیعت فضا، متمرکز بود.

افلاطون باور داشت که جهان صورت‌های ایده‌آل، مستقل از جهانی که ما با حواسمان درک می‌کنیم وجود دارد، در حالی که دیوید هیوم معتقد بود که همهٔ آگاهی‌ها از تجربهٔ حسی ناشی می‌شود. دیدگاه شما نسبت به این موضوع بر دید شما از نقش ریاضیات، و به ویژه این که ریاضیات کشف یا اختراع می‌شود، اثر می‌گذارد. عطیه ادعا کرد که بسیاری (شاید بیشترین) از ریاضیدانان دیدگاه اول را اتخاذ می‌کنند. تقریباً همه موافق‌اند که عددهای صحیح کشف شده‌اند و اختراع نشده‌اند. در حالی که کرونکر این دیدگاه افراطی را اتخاذ می‌کرد که «خدا عددهای صحیح را آفرید، مابقی توسط بشر ساخته شده‌اند». تقریباً همه می‌پذیریم که عددهای گویا و حتی عددهای حقیقی کشف شده‌اند. در مقابل ممکن است کسی به عددهای مختلط به عنوان یک مثال قانع‌کننده از اختراع اشاره کند. با وجود این، عددهای مختلط اکنون از بنیادهای جهان حقیقی مکانیک کوانتمی بنیادی به حساب می‌آیند. مشابهاً اگرچه هندسهٔ نااقلیدسی قبل از اینشتین «ابداع» شده بود، ولی نقش مهمی در نسبیت عام ایفا می‌کند.

دیدگاه رایج بین فیزیکدانان این است که ریاضیات به عنوان زبان و وسیله‌ای برای کار کردن با جهان فیزیکی ابداع شده است. ای. ویگنر، در مقابل (این دیدگاه) «نامعقول بودن تأثیر ریاضیات در علوم طبیعی را مطرح می‌کند» به این معنی که اگر ریاضیات صرفاً ابداع (اختراع) شده باشد چگونه است که چیزی که برای توضیح مطالب «در مقیاس بشری» ابداع شده است به مقیاس‌های بسیار کوچک (هسته) و مقیاس‌های بسیار بزرگ (کیهان‌شناسی) قابل اعمال می‌باشد؟ دیدگاه شخصی عطیه این است که ریاضیات از جهان فیزیکی ناشی می‌شود ولی توسط فکر بشر تکامل و سامان می‌یابد. این ارتباط با توجه به این حقیقت که مغز خودش بخشی از جهان فیزیکی است و بنابراین از آن متأثر می‌شود و نمی‌تواند کاملاً از آن جدا باشد، پیچیده‌تر می‌شود. در واقع، یک دیدگاه تکاملی این است که انسان‌ها با انتخاب طبیعی تکامل یافته‌اند چنان که ذهن بشر با واقعیت فیزیکی سازگار و از آن متأثر شده است. بنابراین تفکر ریاضی یک نتیجه حتمی این تکامل است. مثلاً قوانین منطق از تجربه با علت و معلول به دست آمده است. با این حال، این دیدگاه هنوز نظر

ویگنر را تأمین نمی‌کند.

تحقیقات جدید در علم عصب‌شناسی بر چگونگی فعالیت واقعی مغز پرتو افکنده است. خود عطیه در تحقیقات مربوط به چگونگی عملکرد مغز هنگامی که شخص دربارهٔ ریاضیات و دربارهٔ انواع مختلف ریاضی فکر می‌کند، همکاری داشته است. علم عصب‌شناسی نشان می‌دهد که قوانین منطق و دستور زبان (زیربنای زبان و ریاضی) به صورت مدارهای مرتبط دائمی طراحی شده‌اند. در نتیجهٔ تکامل، ما با توانایی انجام ریاضی و یادگیری زبان زاده می‌شویم. تحقیقات جدید همچنین سؤال‌هایی دربارهٔ ماهیت «تصمیم‌های هوشمند» مطرح کرده است. عطیه عقیده دارد که تحقیقات جدید سؤال‌های فلسفی قدیمی از جمله سؤال‌هایی دربارهٔ ماهیت ریاضیات را به علم عصب‌شناسی منتقل خواهد کرد، درست به همان صورتی که سؤال باستانی «زندگی چیست» با کشف DNA تغییر ماهیت یافته است.



Sir Michael Atiyah

فیزیک و طبیعت فضا

عطیه تاریخ مختصری از فیزیک در ارتباط با ماهیت فضا ارائه داد. او این بحث را با تصویر مرکزیت زمین منسوب به ریاضیدان و منجم قرن دوم، بطلمیوس آغاز کرد. نظریهٔ دایره‌های دوّارِ بطلمیوس، (که عبارت است از) دایره‌های چرخان بر دایره‌های دیگر، حرکت خورشید و سیارات را توصیف می‌کند. آن (نظریه) به خوبی با مشاهده سازگار است و هزار سال دوام آورد. با قراردادن خورشید در مرکز منظومهٔ شمسی، کپرنیک موفق شد توصیف ریاضی ساده‌تری ارائه دهد که همان

پیش‌بینی‌های نظریهٔ بطلمیوس را ارائه می‌داد. این دیدگاه که سادگی باید هدف هر نظریهٔ فیزیکی باشد تاکنون پابرجا مانده است. کپلر می‌خواست تعداد و مکان‌های سیارات را برحسب پنج جسم افلاطونی توضیح دهد و این که آن‌ها چگونه در یکدیگر محاط می‌شوند. قابل توجه است که مدل او برای مدارهای شناخته شده نزد خودش با دقت حدود پنج درصد پاسخ می‌دهد.

قانون جاذبهٔ عمومی نیوتن نقش یک جهان‌بینی را برای همهٔ نظریه‌های فیزیکی بعدی ایفا کرده است. این قانون هم ساده است هم عمومیت دارد، به عنوان مثال حرکت سیبی که از درخت می‌افتد، همچنین حرکت سیارات، ستاره‌های دنباله‌دار و جزر و مدها را پوشش می‌دهد. جیمز کلرک ماکسول به کمک کار تجربی فاراده معادلاتی یافت که از طریق میدان الکترومغناطیس بر الکتریسیته و مغناطیس حاکم است و آن‌ها را وحدت می‌بخشد. مانند مدل کپرنیکیِ منظومهٔ شمسی ویژگی نظریهٔ ماکسول، سادگی آن است. قوانین ماکسول نیز بسیار کاربردی‌اند، به عنوان مثال پدیده‌های واقعی مانند رفتار نور، امواج رادیو و تلفن را پوشش می‌دهند.
ریچارد فاینمن[1] فیزیکدان معتقد بود طی هزاران سال آینده دربارهٔ قوانین الکترودینامیک ماکسول به عنوان مهمترین حادثهٔ قرن نوزدهم قضاوت خواهد شد.

در این شرایط، در اوایل قرن بیستم، اینشتین ظاهر شد. اینشتین توصیف کرد که چگونه جرم در نسبیت عام پیوستار فضا ــ زمان را خمیده می‌کند، او ایدهٔ اصلی هندسی را در معادلات ریاضی ساده‌ای فرمول‌بندی کرد. جاذبه در نسبیت عام یک صورت اصلاح شدهٔ جاذبهٔ نیوتنی است که با آن به اصطلاح روزمرهٔ ما فقط به طور قابل اغماضی متفاوت است.

مکانیک کوانتمی تا اواخر دههٔ ١٩٢٠ به‌خوبی تکامل یافته بود و موضوعی کاملاً جدید و از نظر ریاضی بسیار پیچیده بود، و چنان که قبلاً گفته شد، مبتنی بر حساب اعداد مختلط است. در حالی که کمیت‌های قابل اندازه‌گیری در مکانیک نیوتنی متشکل از تعدادی با پایان از مختصات مکان و اندازهٔ حرکت است، این کمیت‌ها در مکانیک کوانتمی با عملگرهای مکان و حرکت جایگزین می‌شود. این عملگرها خودالحاق ولی عموماً بی‌کران و نسبت به هم ناجابه‌جایی‌اند. این عدم جابه‌جایی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را نتیجه می‌دهد که بر اساس زمینه‌های نظری بیان می‌کند که هر چه ما مکان یک ذره را دقیقتر بدانیم با دقت کمتری مقدار حرکت آن را محاسبه می‌کنیم. با تمام مشکلات موجود در این زمینه، مکانیک کوانتمی یک موفقیت شایان است و پایهٔ فیزیک اتمی می‌باشد. اینشتین کوشید نظریهٔ میدان وحدت یافته‌ای بیابد که شامل نسبیت عام و الکترومغناطیس باشد و باور نداشت که مکانیک کوانتمی بخشی از این نظریهٔ نهایی باشد زیرا او عدم قطعیت ذاتی مکانیک کوانتمی را نمی‌پذیرفت. این دیدگاه باعث مباحثات فلسفی زیادی شد، که در آن اینشتین و نیلز بوهر[1] به عنوان رقیب شناخته می‌شدند. اکنون دیدگاه رسمی بین فیزیکدانان این است که اینشتین برخطا بوده است، ولی عطیه دیدگاه رسمی را تا اندازه‌ای رد کرد و زمان قابل توجهی برای ترویج دیدگاه اینشتین در این مباحثه صرف کرد.

1) Richard Feynman   2) Niels Bohr

در نیمهٔ قرن بیستم، نیروهای هسته‌ای مطالعه و به طور هندسی تعبیر می‌شدند همچنین به وسیلهٔ معادلات ماکسول با هم ترکیب می‌شدند. عمومیت نتایج به دست آمده اینشتین را خشنود می‌کرد، ولی هنوز مکانیک کوانتمی به کار می‌رفت و نسبیت عام به کار نمی‌رفت. نظریهٔ ریسمان در آخرین ربع قرن بیستم وارد صحنه شد؛ هدف آن ترکیب همهٔ نیروهای اساسی، از جمله جاذبه بود: به این دلیل، نظریهٔ ریسمان گاهی «نظریهٔ همه چیز» نامیده می‌شود. نظریهٔ ریسمان یک نظریهٔ فوق‌العاده پیچیدهٔ جهان فیزیکی است و بعضی معتقدند که این نظریه، ایدهٔ قرن بیست و یکم را نمایان می‌کند که به طور تصادفی در قرن بیستم کشف شده است. بعضی از مشخصات مهم نظریهٔ ریسمان ذیلاً ارائه می‌شود:

١ـ این نظریه نسبت به بُعد فضا ــ زمان (١+٣) بُعد بیشتری نیاز دارد، ١٠(یا١١). بُعدهای اضافی ٦(یا ٧) از تجربهٔ معمولی ما از واقعیت پنهان است.

٢ـ در حالی که به طور کلاسیک، اشیاء اصلی مانند الکترون، پروتون و کوارک به عنوان ذرات نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، نظریهٔ ریسمان این اشیاء را به عنوان «ریسمان‌های» خیلی کوچک تعبیر می‌کند. این دیدگاه رفع تکینی‌های ظاهر شده در شکل کلاسیک را (هنگامی که این ذرات به یکدیگر نزدیک می‌شوند)، ممکن می‌سازد. حتی به این ترتیب تکینی‌های ناشی از اختلاط مکانیک کوانتمی و نیروهای جاذبه‌ای رفع می‌شود.

٣ـ در این نظریه هندسهٔ بسیار پیچیده‌ای به کار می‌رود، که شامل بخش‌های وسیعی از ریاضیات قدیم و جدید است.

۴ـ هیچ مدل یا تصویر یکتایی از نظریهٔ ریسمان ظاهر نشده است، بلکه در عوض صورت‌های متعددی وجود دارد. این نظریه‌های مختلف اکنون به عنوان جنبه‌های مختلفی از یک نظریه لحاظ می‌شوند. بر «جهان واقعی» چه می‌گذرد؟

۵ـ در این نظریه مکانیک کوانتمی چارچوب اصلی باقی می‌ماند.

نظریهٔ ریسمان تأثیری قابل توجه و اسرارآمیز بر ریاضیات محض داشته است، که منجر به مفاهیم و نتایج جدید بسیاری شده است. در برخی موارد، این نتایج را به روش ریاضیات سنتی ثابت کرده‌اند. در موارد دیگر، این نتایج فقط با نتایج ریاضی شناخته شده یا ویژگی‌های پذیرفته شدهٔ نظریهٔ ریسمان به خوبی سازگاراند. به ویژه، نظریهٔ ریسمان بر موضوع‌های زیر تأثیر داشته است.

١ـ هندسهٔ جبری، با مطرح کردن سؤال‌های متعددی دربارهٔ مطالعهٔ خم‌های جبری که در شرایط خاصی صدق می‌کنند؛

٢ـ نظریهٔ گره، با ساختن ناورداهای توپولوژیکی جدید برای گره‌ها که گاهی می‌تواند یک گره را از تصویر آینه‌اییش متمایز کند.

٣ـ هندسهٔ چهاربعدی، با دادن نتایج جدید، غیر قابل انتظار و خیلی عمیق که ویژهٔ بعد چهار است؛ و

۴ـ شاخه‌های مختلفی از جبر

یک جهان‌بینی جدید؟

اگر یک «نظریهٔ همه چیز» از نظریهٔ ریسمان پدیدار شود، ما جهانی کشف می‌کنیم که بر ریاضیاتی بسیار بغرنج بنا شده است. به ویژه، خمینه‌های کلابی ــ یاو[1] که بعدهای پنهان را تشکیل می‌دهند، بسیار پیچیده‌اند. عطیه می‌گوید درست نیست که یک نظریهٔ واقعی این قدر پیچیده باشد ــ حتی بیان اصطلاح‌های نظریه، پیش زمینهٔ خیلی زیادی می‌طلبد.

شاید، بنابر نظر عطیه، به یک جهان بینی جدید نیاز است؛ شاید ریاضیات پیچیده ظاهر شده در نظریهٔ ریسمان فقط «از دید ناظر» چنین است. یعنی، ممکن است ما ماهیت بنیادی واقعیت را به خوبی درک نمی‌کنیم، و این بدفهمی به ریاضیاتی این قدر پچییده منجر شده است. نظریهٔ ریسمان، از این دیدگاه، فقط روش ما برای تقریب زدن یک واقعیت ساده است. شاید، عطیه پیشنهاد می‌کرد، که ما باید از اینشتین پیروی کنیم و مکانیک کوانتمی را مورد سؤال قرار دهیم.

برای نیل به پیشرفت، ممکن است نیاز باشد که از بعضی عقاید پذیرفته شده صرف‌نظر کنیم. نسبیت، مکانیک کوانتمی و نظریهٔ ریسمان قبلاً از خیلی از اصول قبلی صرفنظر کردند و بنابراین ممکن است اندیشیده شود آیا اصولی باقی مانده است که کنار گذاشته شود. عطیه یادآوری کرد که همهٔ مدل‌های فیزیکی از زمان نیوتن از جمله حتی مکانیک کوانتمی یک قضیهٔ مبنایی را پذیرفته‌اند ــ (و آن این که) ما می‌توانیم آینده را به کمک اطلاعات کامل حال پیش‌بینی کنیم. عطیه در برابر این نظریه بدیلی پیشنهاد کرد: شاید ما برای پیش‌بینی آینده به اطلاعات کاملی از حال و گذشته نیاز داریم. یعنی ممکن است جهان دارای حافظه باشد. به عنوان یک مثال ساده، مفهوم سرعت یک شییء به عنوان خاصیت زمانِ حال درنظر گرفته می‌شود، ولی در حقیقت برای اندازه‌گیری سرعت، شخص نه تنها نیازمند دانستن مکان کنونی شییء است بلکه به مکان آن در لحظات قبل نیز نیاز دارد. فرض عطیه احتمالاً منجر به چند نتیجهٔ جالب می‌شود:

۱ـ ریاضیات به کار رفته در فیزیک نظری مشکل‌تر می‌شود، زیرا همهٔ ریاضیات به کار رفتهٔ قبلی در فیزیک فرض می‌کند که اطلاعات حال کافی است: با نظر (جهان‌بینی) جدید، مثلاً معادلات دیفرانسیل تأخیری ضروری می‌شود.

۲ـ چون ما اطلاعات کاملی از گذشته نداریم، عدم قطعیت ظهور می‌کند. این امر ممکن است عدم قطعیت ذاتی مکانیک کوانتمی را شفاف‌تر نمایان کند.

۳ـ شاید ریاضیات پیچیدهٔ نظریهٔ ریسمان از کوشش ما برای فهم کاربرد کامل نظریهٔ نسبیت عام بدون توجه به اطلاعات گذشته ناشی می‌شود.

عطیه کنارگذاردن نظریه‌های فیزیکی قدیمی آزمایش شده در طول زمان را تشویق نمی‌کند، بلکه

1) Calabi-Yau

(می‌گوید) این جهان‌بینی جدید باید وسیعاً بر نظریه‌های قدیمی ساخته شود، همچنان که نسبیت بر مکانیک نیوتنی ساخته می‌شود.

اندیشه‌ها و سؤال‌ها

دیدگاه‌های چندی بین فیزیکدانان در مواجهه با نظریهٔ ریسمان وجود دارد. عده‌ای آن را به عنوان ریاضیات تفننی که با جهان واقعی نامربوط است طرد می‌کنند، چون نظریهٔ ریسمان هیچ پیش‌بینی آزمایش‌پذیری ارائه نمی‌دهد. دیگران معتقدند که کاربردهای ریاضی نظریهٔ ریسمان به بصیرت‌های فیزیکی اطمینان می‌دهد و می‌گویند که این نظریه بر مسیر درستی است. از این دیدگاه، کاربردهای ریاضی به نوعی جایگزین گواهی‌های تجربی می‌شوند. دیدگاه سوم این است که ما باید با نظریهٔ ریسمان پیش رویم به امید این که نتایج و ایده‌های جدیدی که ظاهر می‌شود در خدمت یافتن یک نظریهٔ وحدت یافتهٔ نهایی باشند. عطیه سخنرانیش را با دعوت به تفکر دربارهٔ همهٔ این مفاهیم ــ نظریهٔ میدان کوانتمی، نظریهٔ ریسمان، و کاربردهای ریاضی آن به پایان رساند. نظریهٔ فیزیکی آینده چگونه است؟ هدف عبارت است از وحدت بخشیدن به مکانیک کوانتمی، فیزیک (ذرات) بسیار کوچک، با نسبیت عام و فیزیک اجرام بسیار بزرگ. ابر تقارن عبارت است از تقارنی که در آن قوانین فیزیکی هنگامی که بوزون‌ها[1] و فرمیون‌ها[2] به یکدیگر تبدیل می‌شوند، تغییر نکنند. نظریهٔ ابر ریسمان، یک نظریهٔ ریسمان ابرمتقارن؛ رویکردی آشوبناک است، رویکردی که عطیه با نظریهٔ دایره‌های دوار توسعه یافتهٔ بطلمیوس مقایسه کرد. ولی نظریهٔ حقیقی چیست؟ یعنی چه چیزی آشوب یافته است؟ آیا آن M ـ نظریه است، یک نظریهٔ ناکامل جاری که هر پنج صورت نظریهٔ ریسمان را وحدت می‌بخشد؟ آیا جهان واقعاً با به کار بردن همهٔ این ابزار ماشینی پیچیده ساخته شده است یا این مثالی است از ریاضیات که به وسیلهٔ ما تحمیل شده است؟ شاید فیزیک واقعی ساده‌تر است و شخص باید هواخواه اصل به کاربردن کمترین فرضیات در توضیح یک چیز باشد ـ مفاهیم نباید پیش از ضرورت چندگانه شود. آیا نیاز است که مکانیک کوانتمی را اصلاح کنیم؟ عطیه سخنرانیش را با این سخن به پایان برد «این خطاب به جوانان است: (نظریه را) آزمایش و بررسی کنید. اگر موفق است؟ فراموش نکنید که من آن را پیشنهاد داده‌ام، اگر چنین نیست، مرا مسؤول ندانید.»

مترجم: سید محمدباقر کاشانی
دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم‌پایه
kashanim@modares.ac.ir

---

1) boson 2) Fermion

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۷۱ تا ۷۵

هدیه‌ای به وارن امبروز

آی. م. سینگر و ه. وو*

مترجم: محمد جلوداری ممقانی

روز اول ورودم را به MIT هیچوقت فراموش نمی‌کنم. مدرسین مور[1] در ۱۹۵۰ باید در مدرسهٔ تابستانی درس می‌دادند. برای پیدا کردن ساختمان شماره ۲، در بعد از ظهر یکی از روزهای اوایل جولای، از پل گذشتم. دفتر بخش ریاضی در طبقهٔ دوم قرار داشت و هنوز آنجاست. خود را به روت گودوین[2] منشی بخش معرفی کردم و خواستم رئیس بخش را ببینم. وقتی نام خود را به روت گفتم، مردی که روبروی وی نشسته و سرگرم خواندن روزنامهٔ بوستون گلوب بود، سرش را بلند کرد و گفت: «سینگر، من امبروز[3] هستم، تا پنج دقیقهٔ دیگر سمیناری در گروه‌های لی آغاز می‌شود. می‌توانی بعداً مارتین را ببینی، بیا برویم.»
رفتیم، و در آنجا جان مور[4] بارت اونیل[5] و جورج وایتهد[6] را که بعدها دوستان خوبی شدیم، دیدم. پس از دریافت حکم تدریس از تد مارتین، امبروز به من گفت که سمینار نصف شب در قهوه‌خانهٔ هیز ــ بیکفورد[7] برگزار می‌شود و من ساعت ۱۱:۴۵ تو را به آنجا می‌برم. به این جلسات شبانه کی وایتهد[8] نیز ملحق شد، قهوه‌خانه کم رونق بود ولی بحث‌های داغی داشتیم. همان شب امبروز من را در شهر گرداند و به موقع پیاده کرد. ما دوستان خوبی بودیم.

روزی امبروز از من پرسید «سینگر! تو در کلاس‌های درس چرن شرکت می‌کردی، او چه می‌گفت؟» در شیکاگو در حالی که تز خود را در زمینهٔ دیگری می‌نوشتم با بی‌میلی از درس چرن نیز یادداشت برمی‌داشتم. به علت تعمق در این یادداشت‌ها، خواندن مقاله‌های چرن، حمله به الی‌کارتان و تأکید امبروز بر فهم تمام جزئیات، هندسهٔ دیفرانسیل را با هم یاد گرفتیم.

امبروز درس هندسهٔ منیفلد را طراحی کرد و ما سال‌ها آن را به تناوب درس دادیم. این درس امروز همان است که آن موقع بود: نظریهٔ استاندهٔ منیفلدها در ترم اول، و مباحث منتخب مدرس

---

*) I.M. Singer and H. Wu   1) Moore   2) Ruth Godwin   3) Warren Ambrose   4) John Moore   5) Barrett O'Neill   6) George Withehead   7) Hayes-Bickford   8) Kay Withehead

در ترم دوم. براساس این درس‌ها، دانشجویان ما، بیشاپ ــ کریتندن[۱]، هیکس[۲] و وارنر[۳]، چند کتاب معروف در سطح فوق‌لیسانس نوشتند.

امبروز با شور و اشتیاق همیشگی‌اش برنامهٔ دوره کارشناسی ریاضی محض را تغییر داد. جالب است بدانید که آندره ویل[۴] در ۱۹۴۸ فرم‌های دیفرانسیل را به اعضای هیأت علمی دانشگاه شیکاگو معرفی کرد و ما در کمتر از ده سال آن‌ها را در درس هندسهٔ دیفرانسیل دورهٔ کارشناسی گنجاندیم. امبروز در درس آنالیز انتگرال لبگ را برای دانشجویان سال بالایی و سال پایینی درس می‌داد «چون آسانتر از انتگرال ریمان است». حدود بیست سال امبروز روح راهنمای بخش ریاضی محض دانشگاه MIT بود و تلاش‌های او کلید تبدیل آن به یک بخش بزرگ بودند.

امبروز و من به‌طور مرتب شب‌ها در بوستون رانندگی و در مورد ریاضیات و زندگی صحبت می‌کردیم. تمام خیابان‌ها را می‌شناختیم، و تا امروز علاوه بر این که ترافیک و پیدا کردن راهی برای گریز از آن، که معمولاً اتفاق می‌افتاد، را به یاد دارم، یک لحظهٔ خاص دیگر هم یادم هست: بلی، ما در اینجا هولونومی[۵] را فهمیدیم.*

هر چند ریاضیات شگفت‌انگیز بود، من بسیار ناامید بودم. پسر بزرگم نابینای مادرزاد بود، و به طوری که بعدها فهمیدم، نارسایی مغزی داشت. من بدون پشتیبانی دائمی امبروز و دوست بسیار خوبم دیک کادیسون[۶] نمی‌توانستم به عنوان یک ریاضیدان به زندگی ادامه دهم. کسانی که امبروز را می‌شناسند می‌دانند که نزد وی ابراز سپاسگزاری ممنوع بود. وقتی یک‌بار در این مورد سعی کردم او سریع از اطاق خارج شد. گاهی که من برای یک ریاضیدان جوان کاری انجام می‌دهم، به امبروز فکر می‌کنم و احساس می‌کنم که اگر تا آن لحظه به صد نفر کمک کرده باشم تازه شروع کرده‌ام دین خود را به وی ادا کنم.

من امبروز را به خاطر درستکاری مطلقش، سخاوتمندی‌اش، هوش سرشارش، توانائیش، و بالاتر از همه به خاطر شفقتش که بسیار تلاش می‌کرد پنهان نماید، دوست می‌داشتم. متأسفم که کمتر ریاضیدانی می‌داند که او چه مرد بزرگی بود. اما وقتی با ژانت ازدواج کرد خوشحال شدم، چون با وی می‌توانست بیست سال آن طور که می‌خواست زندگی کند.

I.M. Singer

وارن امبروز یکی از پیشگامان هندسهٔ دیفرانسیل ۴ دسامبر ۱۹۹۵ در ۸۱ سالگی در پاریس درگذشت.

هندسهٔ دیفرانسیل همیشه محبوبیت کنونی خود را نداشته است. در دههٔ ۱۹۵۰ امبروز (همراه با آی.م. سینگر) MIT را به تنها مرکز هندسه در خارج از دانشگاه شیکاگو تبدیل کرد. امبروز در

1) Bishop-Crittenden 2) Hicks 3) Warner 4) Andre Weil 5) Holonomy
6) Dick Kadison

*) یک پاراگراف در مورد علاقمندی امبروز به موسیقی جاز ترجمه نشده است (م)

۲۵ اکتبر ۱۹۱۴ به دنیا آمد. دکتری خود را در احتمال با استاد راهنمایی دووب در دانشگاه اوربانا ایلینویز (اوربانا ــ کمپین فعلی) در ۱۹۳۹ دریافت کرد، اما بزودی به آنالیز تابعی علاقمند شد. احتمالاً کار اساسی وی در زمینهٔ اخیر نظریهٔ ساختاری وی در H^* ــ جبرهاست، که تعمیمی از گروه‌جبرهای L^2 یک گروه فشرده است (Trans. Amer. Math. Soc. 57(1945), 364-386).

در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ علاقهٔ وی مجدداً، و این بار به هندسهٔ دیفرانسیل تغییر یافت. در اواخر عمر، وی این تغییر علاقه را به این صورت بیان می‌کرد که می‌خواستم در زمینه‌ای کار کنم که «قضیه‌هایش به آسانی اثبات نشوند».

امبروز موقعی وارد حیطهٔ هندسه شد که عصر جدیدی در حال آغاز شدن بود. کارهای جی. ال. سینج [1]، اچ. هاپف [2] و اس. کن‌وسن [3] در دههٔ بعد از ۱۹۲۵ و کارهای اس. ب. میرز [4] و اس. اس. چرن [5] در دههٔ چهل تغییر تمرکز هندسه را از موضعی به سرتاسری اجتناب ناپذیر کرده بود. سپس در ۱۹۵۰ ارزمن [6] با انتشار مقاله‌ای مبانی را اصلاح کرد، وی با استفاده از آخرین یافته‌های نظریهٔ لی و توپولوژی، نخستین تعریف دقیق التصاق روی یک کلاف تاری [7] را ارائه داد. بنابراین صحنه برای یک قضیهٔ نابدیهی که غنیمتی برای این روح جدید و روش جدید بود آماده شده بود. می‌توان ثابت کرد که این قضیه همان قضیهٔ هولونومی امبروز ــ سینگر بود. (Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428- 443) این قضیه به یک G ــ کلاف اصلی P با التصاق C روی یک منیفلد همبند M، که در آن G یک گروه لی است، مربوط است. التصاق C به هر خم γ واقع بر M که نقاط x و y را به‌هم وصل کند ایزومرفیسم γ_*، موسوم به‌انتقال موازی از x به y، از تار P_x به تار P_y را نسبت می‌دهد. (اگر P کلاف پایه‌ها در فضاهای مماسی M باشد طوری که G گروه خطی عام $Gl(n, R)$ باشد، آنگاه γ_* انتقال موازی به معنای کلاسیک است، یعنی پایه‌های M_x را (فضای مماس در x) را به پایه‌های M_y می‌نگارد.) حال نقطهٔ x در M را تثبیت کنید و تمام طوقه‌هایی که از x آغاز و به آن ختم می‌شوند را در نظر بگیرید. در این صورت γ_* یک خود ریختی P_x است که برابر است با عمل عضوی چون γ^* از G روی P_x. به آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ تمام این γ^* ها وقتی γ روی تمام طوقه‌ها در x تغییر می‌کند زیرگروهی از G است. مؤلفهٔ همانی این زیرگروه یک گروه لی است و با H نشان داده می‌شود. H تا حد مزدوج گیری در G مستقل از انتخاب x است. H گروه هونولومی (تحدید شدهٔ) التصاق C است. قضیهٔ هونولومی امبروز ــ سینگر بیان می‌کند که جبر لی گروه H فضای خطی تولید شده به وسیلهٔ مقادیر فرم انحنای Ωی C است. (نکتهٔ فنی: Ω را باید به زیرکلاف P تحدید نمود.) بنابراین این قضیه تعمیم بزرگی از این قضیه است که اگر التصاق یک منیفلد ریمانی تخت [8] (انحنا صفر) باشد، آنگاه انتقال موازی آن بدیهی است (بدون هونولومی). یک قضیه مشابه (اما قدری ضعیف‌تر) این قضیه را ا. نیینهوئیز [9] تقریباً در همان زمان ثابت کرد، اما برهان امبروز و سینگر توجه تمام هندسه‌دان‌ها را به خود جلب کرد. اگرچه به روشنی

1) J. G. Synge 2) H. Hopf 3) S. Cohnvossen 4) S. B. Myers 5) S. S. Chern
6) Ehresmann 7) fiber bundle 8) flat 9) A. Nijenhuis

ایدهٔ هندسی برهان در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد، کل استدلال با دقتی کامل و در زمینه‌ای کاملاً مجرد تنظیم شده است. در ادبیات کلاسیک ریاضی هرگز چیزی که به طور مبهم شبیه این برهان باشد وجود نداشته است. هنوز این برهان در کتاب‌های درسی استاندهٔ امروزی اساساً کلمه به کلمه بازنویسی می‌شود.

مقالهٔ امبروز ــ سینگر به درستی یکی از مؤثرترین مقاله‌ها در تاریخ جدید هندسه شناخته شده است، اماشناخت کامل اهمیت آن فقط در ده سال گذشته اتفاق افتاده است. برای بیان جزئیات قضیه فرض کنید M یک منیفلد ریمانی با متریک g، P کلاف پایهٔ متعامد یکه در M نسبت به g، G، برابر گروه متعامد $O(n)$ ، و C التصاق لوی چویتای g باشد. در این صورت جبر هونولومی H به وسیلهٔ مجموعه‌ای از ماتریس‌های کج متقارن تولید می‌شود (جبر لی $O(n)$) که مقادیر فرم انحنای Ω ی g هستند، و به علاوه Ω باید در دسته‌ای از اتحادها موسوم به اتحادهای بیانچی[۱] صدق کند. بنابراین روشن است که H اصلاً دلخواه نیست. مارسل برژه[۲] در ۱۹۵۵ با الهام گرفتن از این ایده و استفاده از قضیهٔ هولونومی ثابت کرد که تعداد زیرگروه‌های $O(n)$ که می‌توانند گروه هولونومی یک منیفلد ریمانی باشند به شدت محدود است. به‌ویژه اگر H به صورت تحویل ناپذیر بر یک M_x عمل کند ولی روی کرهٔ واحد M_x ترایا نباشد، آنگاه M باید با یک فضای متقارن رتبه $\leq$ ۲ موضعاً ایزومتریک باشد. (جیم سیمسون در ۱۹٦۲ برهان مستقیمی از این گزاره ارائه داد.) این نکتهٔ مهم تاحدود بیست سال ناشناخته ماند تا این‌که هندسه‌دانان فهمیدند که این قضیه ابزاری قوی برای شناسایی فضای متقارن رتبه $\leq$ ۲ در میان منیفلدهای ریمانی فراهم می‌کند. از کاربردهای مهم آن، می‌توان به شناسایی فضاهای متقارن فشردهٔ ارمیتی[۳] تا حد ایزومتری، بین منیفلدهای فشرده کاهلر[۴] بر حسب انحنای دومقطعی[۵] (N. Mok, 1988) و شناسایی فضاهای متقارن از نوع نافشرده رتبه $\geq$ ۲ تا حد ایزومتری، بین منیفلدهای ریمانی کامل با انحنای مقطعی نامنفی برحسب رتبهٔ هندسی (P. Eberlin, W. Ballman, M. Gromov و دیگران) اشاره کرد. برهان این قضیه‌ها بدون استفاده از کار برژه و در نهایت قضیهٔ امبروز ــ سینگر امکان ناپذیر است.

امبروز در ۱۹۵۵ قضیه ایزومتری خود را که اکنون به قضیهٔ ایزومتری امبروز موسوم است، منتشر کرد(Ann. Math. 64 (1956), 337-363). به همین ترتیب کار وی در مبانی هندسهٔ ریمانی تأثیرگذار بود، که سرانجام بعد از تأخیری طولانی در J. Indian Math. Soc. 24(1960), 23-76 منتشر کرد. اکنون این واقعیت که قضیه‌های هندسهٔ ریمانی باید فقط با استفاده از ویژگی‌های التصاق لوی چویتا بدون دخالت حسابان وردشی توسعه یابند آشکار شده بود، اما تا زمانی که امبروز این کار را با پشتکار دنبال نکرد وضع به این صورت نبود.

بعد از ۱۹٦۰ علاقهٔ امبروز به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای متمایل شد و بزودی مقالات وی این پیچش را نمایان کرد. وی طرح‌های بلند پروازانه‌ای داشت اما زنده نماند تا ثمرهٔ آن‌ها راببیند. آن‌هایی که امبروز را در دههٔ پنجاه می‌شناختند رهبری عالی و توانایی بی‌نظیر او را در سازمان‌دهی

1) Bianchi 2) Marcel Berger 3) Hermitian 4) Kahler 5) bisectional

به خاطر می‌آورند که MIT را به بهترین بخش ریاضی دنیا تبدیل نمود. امبروز به عنوان یک معلم به خاطر تدریس خوبش مشهور بود. چون در آن زمان روشن نویسی در هندسه کیفیتی بود که کمتر پشتیبانی می‌شد، تعجبی ندارد که کلاس‌های درس امبروز از طریق نوشته‌های دوستان و شاگردان وی مخاطبین بین‌المللی پیدا کرد.

امبروز انسانی مطلقاً وارسته بود. او شخصی نبود که خودنمایی یا ناراستی را با خوشحالی تحمل کند. در عین حال کسانی که به وی نزدیک بودند نیز به‌طور استثنایی اخلاق خود گریزی و مهربانی بیش از حد او را تجربه کرده‌اند.

اساساً تمام زندگی علمی امبروز در MIT سپری شد. وی در ۱۹۸۵ بازنشسته شد و در ۱۹۹۰ به پاریس نقل مکان نمود. او با همسرش و دو فرزند از همسر سابقش زندگی می‌کرد.

مترجم: محمد جلوداری ممقانی
گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی
imamaghan@yahoo.com