انجمن ریاضی ایران

سال ۲۹، شماره پیاپی ۴۴، بهار ۱۳۸۹

ISSN 1022-6443

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۹، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۹

شمارهٔ پیاپی: ۴۴

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمد جلوداری ممقانی
سردبیر: بیژن ظهوری زنگنه
ویراستار ارشد: محمد جلوداری ممقانی
مدیر اجرایی: سهیلا غلام‌آزاد

هیأت تحریریه:
مسعود پورمهدیان، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
محمد جلوداری ممقانی، دانشگاه علامه طباطبائی
روح‌اله جهانی پور، دانشگاه کاشان
حسین سیفلو، دانشگاه تبریز
بهمن طباطبائی شوریجه، دانشگاه شیراز
بیژن ظهوری زنگنه، دانشگاه صنعتی شریف
سهیلا غلام آزاد، مؤسسهٔ پژوهشی برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی
منصور معتمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز
مجید میرزاوزیری، دانشگاه فردوسی مشهد

حروفچینی: فارسی‌تک ــ دفتر انجمن ریاضی
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی: تهران ــ صندوق پستی: ۴۱۸ــ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ــ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکت کامپیوتری تحت ادیتورِ «فارسی TeX» باشد.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده ــ با ذکر نشانی کامل آن ــ لازم است.
- اصطلاحات ریاضیِ به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادی خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارائه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۲۹، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۹
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۹)
شمارهٔ پیاپی: ۴۴

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

روی جلد: آلن شونفیلد

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱ تا ۹

هر کسی آن دِرَوَد عاقبت کار که کشت

بیژن ظهوری زنگنه

سخن سردبیر

با همراهی اعضای محترم هیأت تحریریه، شش سال با فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی زیستیم و در آخرین شماره‌ای که مسؤولیت مجله را به عهده داریم، اجازه می‌خواهیم شما را همسفر خود به سیزده شماره‌ای کنیم که در خدمتتان بودیم.

ابتدا سعی نمودیم تا اهداف فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی را با وضوح بیشتری تبیین کنیم و در جهت تحقق آن اهداف بکوشیم. در آخرین یادداشتی که می‌نویسم، می‌خواهم به نمایندگی از طرف هیأت تحریریه‌ی نشریه به این مهم بپردازم.

در سرمقاله‌ی شماره‌ی ۳۴، به تفسیر فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی پرداختیم؛ «فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی را می‌توان فرهنگ ریاضی و اندیشه‌ی ریاضی یا رابطه‌ی فرهنگ با ریاضی و اندیشه‌ی ریاضی تفسیر کرد». در آن سرمقاله، از فرهنگ ریاضی و ارتباط آن با اهداف نشریه تعبیر زیر را ارائه دادیم:

فرهنگ ریاضی همان فرهنگی است که بر محیط‌های علمی جهان حاکم است و در آن، اصالت علم یا اصالت ریاضی، اهمیت اساسی دارد، شالوده‌ی علایق افراد را پی‌ریزی می‌کند و چگونگی انتخاب اولویت‌های آنها را در این محیط توجیه می‌نماید. این فرهنگ، جنبه‌ی بین‌المللی دارد که در آن، مرزها اهمیت خود را از دست می‌دهند و احساس همدلی و همکاری بین اهل علم به وجود می‌آید. در این فرهنگ، رابطه‌ی فرد و ریاضی، یک رابطه‌ی شیفتگی است و عشق و علاقه به ریاضی، حرف اول را می‌زند. در چنین فرهنگی، شور و شوق حاصل از فهمیدن یک مفهوم یا اثبات یک قضیه و پیدا کردن حل برای یک مسأله، باعث تشدید این شیفتگی می‌شود و عطش فرد را برای یادگیری ریاضی، بیشتر می‌کند.

برای فهمیدن بهتر این فرهنگ، مثلاً لازم است که تجربیات ریاضیدانان و نوع نگاه آنها به ریاضی به طور وسیعی شناخته شود و تلاشی که در اثر با ارزش دیویس و هرش (۱۹۸۱) به نام تجربیات ریاضی قابل مشاهده است، از این نوع تلاش‌هاست. در این کتاب، دیویس و هرش به بررسی فرهنگ و اندیشه ریاضیدانان نامی معاصر و غیرمعاصر که ارتباط تنگاتنگی با هم دارند،

پرداخته‌اند. این تجربیات گرانقدرند و علاوه بر ایجاد شور و شوق و شیفتگی، بالقوه امکان تأسیس و توسعه‌ی بنیان‌های علمی جدید و شاخه‌های جدید ریاضی را ایجاد می‌کنند.

ماهیت ریاضیات مطرح در جهان

کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM) هر چهار سال برگزار می‌گردد. کنگره‌ی قبلی در تابستان ۲۰۰۶ در شهر مادرید اسپانیا برگزار شد و کنگره‌ی اخیر در تابستان ۲۰۱۰ در شهر حیدرآباد هندوستان برگزار خواهد شد. یکی از شاخص‌های مناسب برای تشخیص ماهیت ریاضیات مطرح در جهان، آشنایی با سخنرانی‌های عمومی در کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان است.

کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیدانان ۲۰۱۰، شامل ۲۰ سخنرانی عمومی و ۱۶۲ سخنران مدعو خواهد بود به اضافه‌ی دو سخنرانی ویژه‌ی جایزه‌ی آبل و جایزه‌ی امی نوتر که علت انتخاب و دعوت از ارائه‌دهندگان آن‌ها، دادن پوشش مناسبی از موضوعات بحث‌انگیز، جذاب، به روز و رو به رشد ریاضی در جهان است. در واقع روند جهانی تحقیقات ریاضی را می‌توان از سخنرانی‌های عمومی و مدعو شناخت. در نتیجه کنگره می‌تواند فرصت مناسبی برای جوامع ریاضی در جهان باشد تا روند تحقیقات ریاضی خود را با آن مقایسه کنند.

کنگره هر چهار سال یک بار تلاش می‌کند که با ارائه‌ی دستاوردهای جامعه‌ی جهانی ریاضی، شاخص‌ها و در حقیقت ملاک‌های مناسبی برای سنجش آن چه که در موقعیت‌های بومی رخ می‌دهد، معرفی نماید. به همین دلیل در این نوشتار، با استعانت از تقسیم‌بندی اسکمپ در مورد انواع فهم و درک ریاضی، اشاره‌ای مختصر به ماهیت این سخنرانی‌ها و پوشش موضوعی آنها به عمل می‌آید.

ریچارد اسکمپ به دو نوع فهم و درک ریاضی یعنی درک مفهومی و درک ابزاری اشاره می‌کند و جایگاه هر یک را در جریان یاددهی و یادگیری ریاضی مورد بحث قرار می‌دهد. این تقسیم بندی می‌تواند استعاره‌ای برای ریاضی مفهومی و ریاضی ابزاری باشد تا از طریق آن، وضعیت کنونی ریاضی در ایران و جهان مورد بررسی قرار گیرد. با استفاده از این استعاره‌ها، می‌توان گفت که کنگره‌ی بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (۲۰۰۶) تجلی ریاضیات مفهومی بود؛ ریاضیاتی که به شدت چهره‌ای تلفیقی و بین رشته‌ای داشت و ارتباط و اتصال شاخه‌های مختلف ریاضی در آن‌ها مشهود بود و به همین دلیل، از ریاضیات سنتی فاصله گرفته بود. در واقع، ریاضیات مطرح شده در کنگره، از ریاضیات سنتی بیشتر به منزله‌ی ابزار استفاده کرده بود، ابزارهای متداولی که زمانی هر یک مفهوم عمیقی در ریاضی بوده‌اند ولی در حال حاضر، ریاضی‌دان‌ها از آن‌ها به عنوان ابزاری عادی اما عمیقاً مهم و مفید برای خلق مفاهیم پیچیده و تلفیقی به خوبی استفاده می‌کنند.

هم‌چنین، با مروری بر مقالات سخنرانان عمومی و مدعو کنگره‌ی سال ۲۰۱۰ نیز ملاحظه می‌شود که بین ریاضیات مطرح شده در این کنگره و آن‌چه که در ایران به عنوان تحقیقات ریاضی

انجام می‌شود، شکاف قابل توجهی وجود دارد. به علاوه، جامعه‌ی جهانی نیز معیارهایی برای تعیین جایگاه تحقیقات ریاضی وضع کرده است که در جوایز و نشان‌هایی که به محققان اعطا می‌شود، تجلی می‌یابند. این جامعه در واقع با اعطای جایزه و نشان، علاوه بر ارج نهادن به تلاش‌های ریاضی‌دان‌های برجسته، ارزیابی خود را از کیفیت و جهت‌گیری عمده‌ی ریاضیاتِ دوره‌ی مربوط به خود تعیین و اعلام می‌نماید.

شکاف بین ریاضیات مطرح در جهان و ریاضیات ایران

واقعیت این است که نهادینه شدن تحقیقات ریاضی در ایران که به علت وجود دوره‌های دکتری اتفاق افتاد، کاری عظیم و با اهمیت بود و جامعه‌ی ریاضی را وارد یک مرحله‌ی تکاملی کرد. این کار عظیم به همت جمعی از ریاضی‌دانان ایرانی انجام شد و کاری بود که نیازمند جسارت، توانایی، ایثار و خطرپذیری بود. پس از آن، دانشجویان دوره‌های دکتری ریاضی در داخل ایران نیز در ایجاد و تداوم این تحول عظیم نقشی اساسی ایفا نمودند و به نهادینه شدن تحقیقات ریاضی در ایران کمک شایانی کردند و در واقع موتور تحقیقات ریاضی را به کار انداختند.

بعضی از دانشجویان دوره‌های دکتری ریاضی که در ایران ماندند، می‌توانستند در دانشگاه‌های خوب خارج از کشور درس بخوانند، اما ترجیح دادند که در ایران بمانند و به توسعه‌ی تحقیقات در ایران کمک کنند. یعنی در هر صورت، تحقیقات اصیل ریاضی بدون وجود دوره‌های دکتری ریاضی تقریباً امکان پذیر نبوده و نیست. بعضی از دانشجویان دکتری با هدایت استادان راهنمای خود، به ایجاد بسترهای مناسب تحقیقاتی برای نسل‌های آینده و اعتلای ریاضیات در ایران کمک کرده‌اند. این در حالی است که این دانشجویان با مشکلات دست و پاگیری رو به رو هستند که از آن جمله می‌توان به تغییر آئین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های این دوره اشاره نمود.

در ایران، برخلاف کشورهای پیشرفته در ریاضی که آئین‌نامه‌های دانشگاه‌های آن‌ها به ندرت طی ٦٠ تا ٧٠ سال گذشته تغییر مبنایی کمتری داشته است، مدام شاهد تغییر آئین نامه‌های مربوط به دوره‌های دکتری هستیم. تغییراتی مانند کاهش تعداد واحدهای درسی، کوتاه شدن طول دوره‌ها که در تقابل با افزایش تعداد مقاله برای فراغت از تحصیل است، بالا بردن سطح انتظار و بالاخره ملتهب کردن فضای آموزشی. با این وجود، دانشجویان پر تلاش و پر توان دوره‌های دکتری توانسته‌اند علیرغم این شرایط، تولیدات جدید داشته باشند و در نتیجه لازم است که قدرشناس تلاش و زحمات دانشجویان دوره‌های دکتری در داخل کشور باشیم.

در این بخش، به نقد ماهیت تحقیقات ریاضی در ایران و به طور طبیعی نقد دوره‌های دکتری ریاضی در ایران می‌پردازیم و می‌دانیم که دیکته‌ی نوشته نشده غلط ندارد. پس نقد جریان تحقیق ریاضی در ایران به هیچ وجه به معنای نقد استادان و دانشجویان دکتری نیست و نباید محملی برای ایجاد تضاد بین نسل جوان‌تر و نسل مسن‌تر جامعه‌ی ریاضی ایران شود؛ بلکه هدف عمده‌ی این کار، خود نقدی و درس گرفتن از آن است.

اگر به سیر تاریخی توسعه‌ی دکتری ریاضی در ایران بنگریم، می‌بینیم که اولین سؤالی که برای ایجاد دوره‌های دکتری ریاضی مطرح شد این بود که چگونه می‌توان اصیل بودن تحقیقات انجام شده در رساله‌های دکتری را تشخیص داد. این در حالی است که در کشورهای پیشرفته در ریاضیات، معمولاً تشخیص اصالت رساله با هیأت داوری رساله است. مثلاً در فرانسه برای تشخیص اصالت رساله، کمیته‌ای شامل سه یا چهار نفر تشکیل می‌گردد. این کمیته دو تا سه ماه فرصت دارد که یک رساله را بررسی کند و درباره‌ی اصالت آن اظهار نظر کند. بعد از تأیید این کمیته، کمیته‌ی دفاع رساله تشکیل می‌گردد که از جمله وظایف آن، تصمیم‌گیری درباره‌ی نحوه‌ی ارائه‌ی رساله‌ی دکتری و چگونگی عکس‌العمل دانشجو درباره‌ی سؤالات مطرح شده است و در پایان، گزارشی از مراسم دفاع به وسیله‌ی اعضاء کمیته‌ی دفاع آماده می‌شود. هم چنین، برای کمیته‌ی دفاع رساله‌ی دکتری در اکثر دانشگاه‌های کانادا، معمولاً از یک نفر از ریاضی‌دانان متخصص در آن رشته (معمولاً یکی از بزرگ‌ترین‌ها در رشته و زمینه‌ی مورد نظر) به عنوان ممتحن خارجی دعوت می‌شود و رساله سه تا چهار ماه قبل از تاریخ دفاع، برای وی فرستاده می‌شود که اگر این ممتحن خارج از آمریکای شمالی (آمریکا و کانادا) باشد، دو ماه به این مدت اضافه می‌شود. ممتحن خارجی گزارشی از اصالت پایان نامه، منابع و مقالاتی که مرور شده و پختگی زبان نوشتاری رساله را تأیید می‌کند و برای کمیته تحصیلات تکمیلی دانشگاه می‌فرستد. در این صورت، حضور فیزیکی ممتحن خارجی در جلسه‌ی دفاع الزامی نیست. در واقع، تعیین اصالت رساله به عهده‌ی استاد راهنما و ممتحن خارجی است. هم چنین هرگونه آشنایی یا همکاری قبلی ممتحن خارجی با دانشجوی آماده‌ی دفاع، منع قانونی دارد.

در دانشگاه‌های آمریکا، ترکیب و وظایف کمیته‌ی دفاع از رساله‌ی دکتری از یک دانشگاه به دانشگاه دیگر فرق می‌کند. مثلاً در بعضی از دانشگاه‌ها، ممتحن خارجی دعوت نمی‌شود و استاد راهنما بیشترین نقش را در تعیین اصالت رساله دارد.

دانشجویان دوره‌های دکتری ریاضی در آمریکا و کانادا در طی این دوره، معمولاً مقاله‌ای از رساله‌ی خود چاپ نمی‌کنند و بعد از دفاع و فراغت از تحصیل به چاپ مقالات مستخرج از رساله‌ی خود می‌پردازند. با تنوع و روالی که در کشورهای دیگر برای دفاع از رساله‌ی دکتری ریاضی وجود دارد، سؤال این است که همکاران ریاضی ما در تأسیس دوره‌ی دکتری ریاضی در ایران با توجه به تجربه‌های جهانی، چه راهی را برگزیدند؟

راهکار انتخابی توسط دانشگاه‌های فرانسه و کانادا، با شرایط اجرایی و امکانات ایران سازگار نبود، در نتیجه راه بدیع و میانه‌ای انتخاب شد و آن چاپ حداقل یک مقاله‌ی مستخرج از رساله به عنوان شرط فارغ‌التحصیلی دانشجویان دوره‌ی دکتری بود.

این راه حل که به نظر می‌رسید ساده، روشن و بدون تفسیر است، در ابتدا راه حل مناسبی تشخیص داده شد ولی به تدریج و به دلایل زیر، منبع بروز مشکلات و گاهی جهت‌گیری‌های تحقیقی نامناسبی در ایران گشت.

اگر به جای شرط مقاله، از کانادا و فرانسه تبعیت می‌کردیم، طبیعی بود که گاهی اصالت رساله‌ها غیر عادلانه تأیید می‌شد و ممکن بود که بعضی از صاحبان آن‌ها مدرک دکتری می‌گرفتند بدون این که مستحق آن باشند، در حالی که بسیاری از دانشجویان بودند که همراه استادان راهنمای خود، کارهای تحقیقاتی اصیل انجام می‌دادند و بدین گونه مدرک دکتری ریاضی خود را دریافت می‌کردند در حالی که با آرامش تحقیق کرده بودند و رساله‌های خوبی هم نوشته بودند.

با پذیرش هر دو اتفاقِ ممکن، احتمالاً جامعه‌ی ریاضی به تعادل می‌رسید، یعنی در جامعه‌ی ریاضی، استاد راهنمائی که دانشجویانی با کیفیت پایین تربیت می‌کرد، بی اعتبار می‌شد و همین امر به حیثیت حرفه‌ای وی آنقدر صدمه می‌زد که خود او بیشتر از دانشجو دغدغه‌ی اصیل بودن رساله را داشت. اما با تأسف به جای باور داشتن به این عامل مهم و کنترل کننده‌ی درونی، اقدام به استفاده از کنترل کننده‌ی بیرونی از طریق آئین نامه‌ها و ضوابط جزمی کردیم. با این کار، تا مدت محدودی جواب گرفتیم ولی در دراز مدت، گاهی استاد راهنما با دانشجویانی مواجه می‌شد که می‌توانستند با ظرافت و درایت این قوانین را دور بزنند و مشکل خود را حل نمایند. مثلاً چاپ مقاله در مجلات خارجی در ابتدا مشکل به نظر می‌رسید، ولی کم‌کم بعضی‌ها ــ نه همه ــ یاد گرفتند که چگونه مقاله چاپ کنند؛ با اعضای شورای سردبیری و سردبیر مجلات آشنا شوند و مجلاتی پیدا کنند که به سادگی مقالات را چاپ کنند. سرانجام جستجو برای یافتن راه‌های میان بر تا بدانجا رسید که دو دانشجوی دکتری با اسم‌های مستعار، مقاله‌ای را به وسیله‌ی کامپیوتر و به کمک نرم افزارهایی تولید کردند و به چاپ رساندند تا نشان دهند که اگر تنها نفس مقاله محترم شمرده شود و شرط اصلی به حساب آید، ممکن است توجه به اصالت کار کمتر شود. آنها به طور تجربی و عملی نشان دادند که حتی آینده‌ی هولناکی می‌تواند در انتظار ما باشد، آینده‌ای که با دادن چندین کلید واژه به کامپیوتر، صاحب مقاله شویم! پس باید بر این موضوع تأمل کنیم.

در ابتدا همان طور که بارها بحث شده است، علت چاپ مقاله مستخرج از رساله‌ی دکتری به عنوان پیش شرط دفاع، شاید تا حدودی عدم اعتماد به نفس یا تواضع زیاد جامعه‌ی ریاضی ایران بود که برای رفع این نقیصه، دنبال مرجع خارجی می‌گشتیم تا اطمینان پیدا کنیم که تحقیق رساله اصیل است. اما با این کار، جامعه‌ی ریاضی مسؤولیت تشخیص اصیل بودن را از خود سلب نمود. در حقیقت، کاری که در ابتدا به عنوان حل مشکل از آن استفاده شد، رفته رفته به جایی رسید که تداوم آن، بستر مناسبی برای هیچ کس ــ نه استاد راهنما و نه داوران رساله ــ فراهم نکرد تا از لحاظ داوری، ارتقاء پیدا کنند.

کارهای تحقیقاتی اصیل در کشورهایی که در ریاضی پیشرفته‌اند، یا در رساله‌های دکتری آن‌ها متبلور می‌گردد یا در کارهای تحقیقی که مانند یک رساله‌ی دکتری به عنوان یک پروژه‌ی دراز مدت به آن نگاه می‌کنند. معمولاً در چنین کشورهایی، رساله‌های دکتری به عنوان پروژه‌های سه تا چهار ساله در نظر گرفته می‌شوند و برای این کار، برنامه‌ریزی‌های حساب شده انجام می‌گیرد. در این فرآیند، ابتدا دانشجو به مطالعه‌ی رشته‌ها و زمینه‌های مختلفی که برای انجام این پروژه ضروری

هستند می‌پردازد و از این طریق، کار تحقیقاتی خود را جلو می‌برد. اکثر پروژه‌های تحقیقاتی دکتری که در پیشبرد ریاضی تأثیر گذار بوده‌اند، پروژه‌هایی هستند که یک سلسله تحقیقات جدید را آغاز کرده‌اند و هدف آن‌ها توانمند کردن دانشجو به گونه‌ای بوده است که بعد از فراغت از تحصیل، قادر به ادامه‌ی تحقیق در آن زمینه‌ها باشند.

قبل از انقلاب، شروع تجربه‌ی تحقیقی ریاضی ما در دو سه دانشگاه از جمله دانشگاه‌های شیراز و صنعتی شریف بود. پیش‌کسوتان این کار، تحقیقاتی را در کنار کار آموزشی خود انجام می‌دادند و این فعالیت‌ها، بیشتر پاسخگویی به نیازهای شخصی این محققان بود که تشنه انجام تحقیقات بودند، زیرا در آن زمان در ایران دوره‌های دکتری وجود نداشت و طبیعی بود در آن شرایط، چنین کارهای تحقیقاتیِ شخصی نمی‌توانست تبدیل به پروژه‌های درازمدتی شوند که تجلی و بروز آن‌هارا بتوان در رساله‌های دکتری دید. در نتیجه، ماهیت کارهای تحقیقاتی این پیشکسوتان اندیشمند ریاضی که در واقع، بنیان‌گذار تحقیقات ریاضی در ایران بودند، کوتاه‌مدت بود. البته با تأسیس دوره‌های دکتری در ایران، انتظار می‌رفت که استادان ایرانی نیز با تجربه‌آموزی از دیگران، تحقیقات شخصی قبلی را به کمک دانشجویان خود، تبدیل به پروژه‌های طولانی مدت، اصیل و ماندگار کنند، اما با تأسف و به دلیل توقعات خوب حساب نشده‌ای که برای فراغت از تحصیل دانشجویان و ارتقای استادان ایجاد شد، این کار دستخوش حادثه گردید و در بسیاری مواقع، پروژه‌های به اصطلاح «زود بازده» جایگزین تحقیقات اصیل و طولانی مدت شدند تا پاسخگوی نیازهای آنی شوند.

به طور مثال، تغییرات دائمی در آئین‌نامه‌های دوره‌های دکتری اعلام می‌شود و این دوره را دچار شتاب و هیجان ناخواسته و غیرضروری و بی‌دلیل می‌کند. برای نمونه، ضوابط جدید، طول دوره‌های دکتری را به چهار سال کاهش داده است که دو سال آن دوره‌ی آموزشی است که دانشجو بایستی دروس خود را بگذراند و امتحان جامع بدهد. تنها دو سال باقی می‌ماند که دانشجو شانس بیاورد و بر موضوعی متمرکز شود و اگر تمام دو سال باقی‌مانده را به کار تحقیق بپردازد، باز هم بعید است بتواند رساله‌ی قابل دفاعی بنویسد ــ زیرا واقعاً این مدت برای ثمردادن یک کار تحقیقی اصیل اغلب کافی نیست و اگر توجه کنیم که دانشجو مجبور است در این مدت یک مقاله‌ی پذیرش شده هم داشته باشد، چه کند؟ فرض کنیم این یک مسأله‌ی بهینه‌سازی است که می‌خواهیم آن را حل کنیم.

«مجموعه‌ی شدنی» ما کجا است که به دنبال «جواب بهینه» می‌گردیم؟ در شرایط موجود، مجله‌های بسیار معتبری که گاهی فرایند داوری آن‌ها نزدیک به دو سال طول می‌کشد، به ناچار از مجموعه‌ی شدنی ما حذف می‌شوند. فرض کنیم یک سال هم تمدید سنوات بگیریم. آیا باز هم مسأله‌ی ما حل می‌گردد؟ شاید اگر خیلی علاقمند باشیم که کار اصیل بکنیم رساله‌ی خود را ادامه دهیم اما یک حاشیه هم بزنیم و به زمینه‌های زود بازده برسیم و یک مقاله هم چاپ کنیم. یا این که خود را از اول راحت کنیم و ببینیم که در چه زمینه‌ی شدنی‌تری می‌توانیم مقاله چاپ کنیم یا ...؟

با این روند، طبیعی است که به تدریج به زمینه‌هایی از تحقیقات ریاضی وارد شویم که به پیش نیازهای عمیق ریاضی کمتر وابسته هستند. در این حالت به جای ریاضیات مفهومی، توجه و

ارجاع به ریاضیات ابزاری بیشتر می‌شود و افراد به سمت تحقیق در زمینه‌هایی می‌روند که بتوانند بیشتر مقاله چاپ کنند. حتی گاهی دیده می‌شود که دانشجویان و افرادی که به هر دلیل در دوره‌ی کارشناسی خود نه معدل خوبی داشتند و نه پایه‌ی خوب ریاضی، و چندان هم با وسعت ریاضی آشنا نبودند، وقتی وارد دوره‌ی کارشناسی ارشد می‌شوند، تعدادی مقاله چاپ می‌کنند و بعد از مدتی، خودشان هم اندک اندک باور می‌کنند که یک محقق برجسته و نمونه شده‌اند. این دسته از دانشجویان، با ورود به دوره‌های دکتری قبل از گرفتن دروس آموزشی و دادن امتحان جامع و بدون انتخاب یک پروژه‌ی درازمدت، به چاپ مقاله‌هایی اقدام می‌کنند که اغلب نیاز به پیشنیاز و آموزش دروس ریاضی پیشرفته تر ندارد و بعد از چاپ چندین مقاله از این نوع، به نوشتن رساله می‌پردازند که چنین رساله‌هایی می‌توانند تنها شامل مقالات پراکنده و کم‌ارتباط با هم باشند که مجموع آنها تبدیل به رساله شده‌اند. حتی بعضی دانشجویان دکتری که درگیر پروژه‌های دراز مدت اصیل برای رساله‌ی دکتری خود شده‌اند، بایستی تقاضای تمدید سنوات از کمیسیون موارد خاص و غیره کنند در حالی که بعضی دیگر از دانشجویان، به راحتی دوره‌ی دکتری را با چاپ چند مقاله به پایان می‌رسانند.

بله! با افزایش حداقل‌ها و بالا بردن کف، دانشجویان خلاق‌تر و عمیق‌تر هستند که با مشکلات بیشتری رو به رو می‌شوند. کاستن از طول دوره‌های دکتری و تعداد واحدهای آموزشی فرصت طلایی ریاضی دان وسیع و عمیق و همه جانبه شدن را به خطر می‌اندازد و سطحی گرایی را رواج می‌دهد. بدین سبب شرط اجباری کردن چاپ مقاله که در ابتدا با نیت خیر و توجیهی علمی و به منظور بالا بردن کیفیت تحقیق گذاشته شده بود، رفته رفته به عامل اضطراب بعضی از دانشجویان تبدیل شده است. چنین اوضاعی می‌تواند بر دانشجوی دکتری که باید به فکر تحقیق، مطالعه و به دست آوردن نتایج جالب باشد تأثیر منفی و منفعلانه بگذارد و در وی هیجان یادگیری ریاضی را برای به دست آوردن نتیجه‌های جدید کاهش دهد و به جای آن وی را به انتظار کشیدن برای دریافت پذیرش مقاله بنشاند. حتی بعضی اوقات، انتظار گرفتن پذیرش مقاله آنقدر باعث اضطراب دانشجو می‌گردد که تا مدت‌ها نمی‌تواند فکر کند و نتیجه‌ی جدیدی بگیرد.

این اضطراب در دانشگاه‌های کشورهایی که از نظر ریاضی پیشرفته‌اند، بدین شکل برای دانشجویان وجود ندارد و به آن‌ها فرصت می‌دهد تا نسبتاً با آرامش بیشتری به تحقیق بپردازند زیرا در رشته‌های ریاضی معمولاً دانشگاه‌ها از دانشجو توقع چاپ مقاله ندارند و حتی اکثراً به دانشجویان توصیه می‌شود که مقالات رساله را بعد از گرفتن دکتری چاپ کنند زیرا از یک رساله‌ی اصیل بالقوه چندین مقاله استخراج می‌شود. در این دانشگاه‌ها، ابتدا دانشجو موظف است که با نتایج تحقیقش استاد راهنمای خود را قانع کند که شایسته‌ی اخذ مدرک دکتری است و پس از این مرحله، باید کمیته‌ی دفاع از رساله و بالاخره ممتحن خارجی را قانع کند.

ما با اجباری کردن چاپ مقاله و سلب مسؤولیت از خود، قدرت ارزشیابی و داوری معنادار را از استادان خود به تدریج گرفته‌ایم و آنها را از این لحاظ ناتوان کرده‌ایم و بازگشت این اعتماد به نفس برای ارزش یابی یک تحقیق اصیل، کاری دشوار است. ما به همین اعتماد به نفس نیز در

مسأله‌ی ارتقاء استادان ضربه زده‌ایم که توضیح می‌دهم: مثلاً در بسیاری از کشورهای پیشرفته، CV و مقالات چاپ شده‌ی متقاضی ارتقاء را به کمیته‌ای از افراد متخصص در آن رشته می‌فرستند. آنها با بررسی نتایج « بسیار مهم»، «مهم» و «نیمه مهم» که متقاضی در مقالاتش به دست آورده، تصمیم می‌گیرند که این شخص شایسته‌ی ارتقاء به مرتبه‌ی بالاتر دانشیاری یا استادی هست یا خیر و کمیته‌ی ارتقاء دانشکده و دانشگاه بر اساس گزارش این داوران تصمیم می‌گیرند. بنابراین، انتظار می‌رود که متقاضی، صرفاً با تعداد مقاله‌هایش ارتقاء پیدا نکند بلکه با کیفیت مقاله‌ها و میزان اثرگذاری آن‌ها ارتقاء یابد.

اما در ایران بر اساس کمیت‌ها به افراد نمره می‌دهیم و ارتقای آنها منوط به بالاتر بودن این نمره‌هاست و اگر مجموع امتیازها در موارد مختلف به حد مطلوب رسید، ارتقاء انجام می‌گیرد. یکی از علت‌های اصلی این کار را می‌توان در «مکانیکی شدن چاپ مقالات تحقیقاتی و جدا شدن این نوع مقالات از محتوا و جوهر ریاضی» دانست. علاوه بر این، «جدا شدن تحقیقات ریاضی کشور از بدنه‌ی عظیم، اصیل و جامع ریاضی» یا «تمرکز ریاضی کشور بر بخش کوچکی از ریاضیات مطرح در جهان»[1] نیز در شکل‌گیری این روند نقش داشته‌اند.

در هر صورت، از جمله مهم‌ترین مسائل قابل پیگیری در عرصه‌ی آموزش و تحقیقات ریاضی در ایران، بالا بردن کیفیت دانش آموختگان این رشته، فراتر بردن مرزهای علمی موجود آن و توسعه‌ی تحقیقات میان رشته‌ای و نوآورانه و خلاق در ریاضی است. این نوشته، تلاش نمود تا نشان دهد که ریاضیات جهانی در این جهات، سرمایه‌گذاری‌های عظیم می‌کند تا در آینده، میوه‌های پرثمرتری بچیند زیرا «هر کسی آن دِرَوَد عاقبت کار، که کشت.»

هم چنین، بر این باوریم که در جامعه‌ی ریاضی ایران، ظرفیت‌های بکر، پرتوان، متواضع و خاموش بسیارند و معتقدیم که تأکید بر توسعه‌ی فرهنگی در این حوزه، به بارور کردن اندیشه‌های بالقوه درخشان اما در حال حاضر ناگفته، کمک شایانی می‌کند و این کار از رسالت‌های عمده‌ی جامعه‌ی ریاضی و نشریه‌ی فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی است. بدین سبب طی دو دوره ــ از ۱۳۸۳ تا ۱۳۸۹ ــ که مسؤولیت سردبیری و هیأت تحریریه‌ی «فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی» را پذیرفتیم، به تدریج و با کمک یک‌دیگر در دو دوره، چهار هدف زیر را تبیین نمودیم و آن‌ها را راهنمای خود قرار دادیم و برای تحققشان تلاش کردیم:

۱) ترویج زمینه‌های ریاضی که در جامعه‌ی ریاضی ایران چندان شناخته شده نیستند؛

---

۱) صفحه‌ی ۱۰، میزگرد آینده‌ی تحقیقات ریاضی ایران، چهلمین کنفرانس ریاضی کشور، خبرنامه‌ی انجمن ریاضی ایران، تابستان ۸۸.

۲) معرفی تجربیات ریاضیدانان بزرگ و نحوه‌ی فکرکردن، ساختن و توسعه‌ی ریاضی توسط آنها؛

۳) معرفی تجربیات ریاضی‌دانان ایرانی در تدریس و یادگیری دروس کارشناسی ریاضی و دروس ریاضی عمومی با یک روش نظام‌مند و علمی؛

۴) درج زندگی‌نامه‌ی مختصر یک ریاضی‌دان معروف در هر شماره و چاپ عکس وی در روی جلد همان شماره.

در ارزیابی این شش سال، با خرسندی اعلام می‌کنیم که اکثر هدف‌های بالا به طور نسبی محقق شده‌اند و فرایند دریافت مقالات و جمع‌آوری اطلاعات درباره‌ی هر مقاله نیز منظم شده است. امیدواریم با برخط (Online) شدن دریافت مقالات و داوری آن‌ها بتوانیم شاهد افزایش شماره‌های نشریه در هر سال باشیم. البته هدف ۳ اصلاً محقق نشد و انتظار داریم که سردبیر و هیأت تحریریه‌ی جدید ــ در صورت تمایل ــ این مهم را پیگیری نمایند و از آن طریق به توسعه‌ی فرهنگ بومی ریاضی کمک کنند.

بالاخره، از جناب آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی تشکر مخصوص داریم که در تمام شش سال گذشته، با دانش، بصیرت، تعهد و علاقه‌ی ویژه‌ی خود، از جهات مختلف به خصوص ویراستاری علمی و ادبی مقالات، نشریه را کمک کردند و باعث به روز شدن و ارتقای آن شدند. هم چنین اعضای محترم هیأت تحریریه‌ی نشریه در دو دوره، که با عشق و علاقه و دقت و ظرافت کار نشریه را جدی گرفتند و مانند اعضای یک خانواده، برای توسعه‌ی فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی در ایران، با قلم و قدم و وقت و حوصله‌ی خود تلاش نمودند، شایسته‌ی سپاسگزاری‌اند هم چنان که شورای محترم اجرایی انجمن ریاضی ایران که با تلاش خود، به بالا بردن کیفیت نشریات انجمن می‌اندیشند و فعالیت می‌کنند، سزاوار تشکر ویژه‌اند.

در پایان از سرکار خانم فریده صمدیان که زحمت آماده سازی و پیگیری کارهای اجرایی نشریه را تقبل کردند، متشکریم و از نقش ایشان در تولید و به روز شدن نشریه قدردانی می‌کنیم.

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱۱ تا ۲۸

استخراج فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله در مدل هستون

بهناز زرگری، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، راما کنت

چکیده

قیمت‌گذاری اختیارهای معامله از مسائل مطرح در حوزه‌ی ریاضیات مالی است. نوشته‌ی حاضر شامل مروری بر حل این مسأله در بازارهای کامل، توضیح روش می‌نیمم سازی موضعی ریسک به عنوان یک روش پوشش ریسک در بازارهای ناکامل و سرانجام به‌کارگیری این روش برای تعیین تابع قیمت‌گذاری در مدل هستون است.

۱. مقدمه

فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ سهامی را به قیمت S_0 بخرید و قصد داشته باشید آن را تا زمان $T > 0$ نگه دارید و سپس به قیمت S_T بفروشید. از آنجایی که نوسانات قیمت سهام تصادفی است، در لحظه‌ی $t = 0$ مقدار S_T معلوم نیست. پس این امکان وجود دارد که به علت کاهش قیمت سهام، متضرر شوید.

اکنون یک قرارداد مالی بدین صورت در نظر بگیرید: اگر در لحظه‌ی $t = 0$ مبلغ π_0 را بپردازید، در لحظه‌ی T می‌توانید (در صورت تمایل) سهام خود را به قیمت (از پیش تعیین شده‌ی) K بفروشید. در صورت انعقاد چنین قراردادی، در لحظه‌ی T، دو حالت ممکن است: اگر $S_T < K$، سهام را به قیمت K به طرف قرارداد می‌فروشید و با پرداخت مبلغ S_T سهام را از بازار خریداری می‌کنید و بدین ترتیب سود $K - S_T$ عاید شما خواهد شد و چنانچه $S_T \geq K$ از قرارداد استفاده نخواهید کرد و لذا سود شما برابر صفر خواهد بود. به عبارت دیگر با پرداخت مبلغ تعینی π_0 در زمان $t = 0$، مبلغ تصادفی $\max\,(K - S_T, 0)$ را در زمان T دریافت خواهید کرد. سؤال این است که مقدار «عادلانه» برای π_0 چقدر است؟ چنین قراردادی در ریاضیات مالی، اختیار فروش اروپایی[1] نامیده

1) European put option

می‌شود. به طور کلی منظور ما از اختیار معامله، قراردادی است که در زمان T مبلغ تصادفی $H(\omega)$ را به دارنده‌ی آن پرداخت می‌کند؛ در مورد اختیار فروش اروپایی، $H(\omega) = \max\,(K - S_T(\omega), \circ)$.
در بازارهای مالی علاوه بر دارایی پایه نظیر سهام و ورق قرضه، اختیار معامله نیز خرید و فروش می‌شود. منظور از حل مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله H، تعیین قیمت «عادلانه‌ی» آن در لحظه‌ی $t \in [\circ, T]$ است که با $\pi_t(H)$ نشان داده می‌شود.
بخش ۱ بیانی است توصیفی درباره‌ی «قیمت‌گذاری عادلانه». در بخش ۲ مدل هستون را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که بازار در این مدل ناکامل است. بخش ۳ به توضیح روشی برای پوشش ریسک در بازارهای ناکامل اختصاص دارد. در بخش ۴ این روش را برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله در مدل هستون به کار می‌بریم.

۱.۱. قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ

این بخش مروری است بر نحوه‌ی به‌دست آوردن فرمول قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ. بدین منظور چارچوب ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن زمان‌های خرید و فروش گسسته و فضای نمونه‌ای، متناهی است.
فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای Ω متناهی باشد و برای هر $\omega \in \Omega$، $P(\omega) > \circ$؛ بنابراین سرمایه‌گذاران مدل ما در مورد ممکن (ناممکن) بودن پیشامدها متفق‌القولند، هر چند ممکن است احتمال‌های متفاوتی را به این پیشامدها نسبت دهند.
تاریخ سررسید[1] همه‌ی قراردادهای منعقد شده در این مدل را T و زمان‌های خرید و فروش را $t = \circ, \text{۱}, \ldots, T$ در نظر می‌گیریم. با گذشت زمان اطلاعات ما راجع به بازار افزایش می‌یابد و ما این جریان اطلاعات را با پالایهٔ[2] $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_\circ, \mathcal{F}_\text{۱}, \ldots, \mathcal{F}_T\}$ نشان می‌دهیم. به لحاظ شهودی $\mathcal{F}_t$ عبارت است از اطلاعات ما از بازار تا لحظه‌ی t. معمولاً فرض می‌شود $\mathcal{F}_\circ = \{\emptyset, \Omega\}$ و $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
فرض می‌کنیم در این بازار دو نوع دارایی خرید و فروش می‌شود: یکی دارایی بدون ریسک (مثلاً ورق قرضه) و دیگری دارایی ریسکی (مثلاً سهام). قیمت این دو دارایی را به ترتیب با فرایندهای تصادفی مثبت و $\mathbb{F}$ ـ سازگار $S_t^{(\circ)}$ و $S_t^{(\text{۱})}$ نشان می‌دهیم. $\mathbb{F}$ ـ سازگار بودن این دو فرایند بدین معنی است که با داشتن اطلاعات بازار تا زمان t، $S_t^{(\circ)}$ و $S_t^{(\text{۱})}$ تعیین می‌شوند. در این جا تنها یک دارایی ریسکی در نظر گرفته‌ایم در حالی که می‌توان تمام نتایج را به حالتی که در بازار بیش از یک دارایی ریسکی موجود است تعمیم داد. معمولاً برای سهولت بازار را نرمال می‌کنند؛ یعنی تمام قیمت‌ها را به قیمت دارایی بدون ریسک تقسیم می‌کنند. بدین‌ترتیب قیمت (تنزیل شده‌ی) دارایی بدون ریسک همواره برابر ۱ و قیمت (تنزیل شده‌ی) دارایی ریسک دار برابر $S_t = \frac{S_t^{(\text{۱})}}{S_t^{(\circ)}}$ است. از این پس منظور ما از قیمت، همین قیمت‌های تنزیل شده خواهد بود.

1) maturity 2) filtration

یک سبد مالی[1] عبارت است از فرایند تصادفی پیش‌بینی‌پذیری چون $\varphi = (\varphi_t)_{t=0}^T$ که $\varphi_t = (\theta_t, \xi_t)$. پیش‌بینی‌پذیر بودن φ یعنی $\varphi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ برای هر $t = 1, \cdots, T$. θ_t و ξ_t به ترتیب تعداد سهام و اوراق قرضه موجود در سبد مالی را در لحظه‌ی t نشان می‌دهند. ارزش سبد مالی عبارت است از فرایند تصادفی $V = (V_t)_{t=0}^T$ که $V_t = \theta_t S_t + \xi_t$. در لحظه‌ی t پس از مشاهده‌ی قیمت‌ها (با استفاده از پیش‌بینی‌پذیر بودن φ)، φ_{t+1} تعیین می‌شود که ارزش آن برابر $\theta_{t+1} S_t + \xi_{t+1}$ است. در لحظه‌ی $t+1$ پس از مشاهده‌ی قیمت‌ها (و قبل از تعیین سبد سرمایه‌ی جدید) ارزش سبد مالی $\theta_{t+1} S_{t+1} + \xi_{t+1}$ است. پس سود حاصل از این سبد مالی روی بازه‌ی $[t, t+1)$ برابر است با $\theta_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$. بنابراین تعریف سود به عنوان فرایند تصادفی $G = (G_t)_{t=0}^T$ که $G_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{t-1} \theta_{i+1}(S_{i+1} - S_i)$ مناسب به نظر می‌رسد. توجه می‌کنیم که سود ممکن است منفی باشد!

در برخورد با مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیارهای معامله، سبدهای مالی خودتأمین[2] از اهمیت خاصی برخوردارند. منظور از یک استراتژی خودتأمین، سبد مالی‌ای است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها منحصر به خرید سهام و اوراق قرضه و درآمدها ناشی از فروش سهام و اوراق قرضه باشد. به عبارت دیگر هیچ‌گاه پولی به سبد مالی تزریق نمی‌شود و پولی از آن برداشت نمی‌شود. برای فرمول بندی ریاضی این مفهوم توجه می‌کنیم که ارزش سبد مالی در لحظه‌ی t برابر است با $\theta_t S_t + \xi_t$ و این مبلغ صرف تشکیل سبد مالی جدید به ارزش $\theta_{t+1} S_t + \xi_{t+1}$ می‌شود، سبد مالی $\varphi = (\theta, \xi)$ را خودتأمین می‌نامیم هرگاه

$$\forall t = 0, 1, \ldots, T-1 \qquad \Delta\theta_t S_t + \Delta\xi_t = 0$$

که $\Delta\theta_t = \theta_{t+1} - \theta_t$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که این تعریف معادل است با ثابت بودن فرایند هزینه‌ی $C(\varphi) := V(\varphi) - G(\varphi)$. به عبارت دقیق‌تر، خودتأمین بودن سبد مالی معادل است با این که

$$\forall t = 1, \ldots, T \qquad C_t(\varphi) = \text{ثابت} = V_0(\varphi). \tag{1}$$

یک فرصت آربیتراژ[3] عبارت است از سبد مالی خودتأمین φ که

$$P(\forall t = 0, 1, \ldots, T, V_t(\varphi) \geq 0) = 1 \quad \text{و} \quad P(V_T(\varphi) > V_0(\varphi)) \neq 0$$

به طور شهودی فرصت آربیتراژ، امکان به دست آوردن سود بدون متحمل شدن ریسک است.
یک مطالبه‌ی مشروط[4] چیزی نیست جز یک متغیر تصادفی نامنفی و $\mathcal{F}_T$ —اندازه‌پذیر H. هدف ما یافتن عملگر قیمت‌گذاری $\pi = (\pi_t)_{t=0}^T$ است طوری که $\pi_t(H)$ قیمت مطالبه‌ی مشروط H در لحظه‌ی t باشد.
ابتدا ببینیم که از π به عنوان عملگر قیمت‌گذاری چه انتظاراتی داریم:

1) portfolio 2) self-financed 3) arbitrage apportunity 4) contingent claim

(i) عملگر قیمت‌گذاری تنها وقتی قابل استفاده است که با اطلاعات موجود تا لحظه‌ی t بتوان $\pi_t(H)$ را محاسبه نمود، پس π باید $\mathcal{F}$ ـ سازگار باشد.

(ii) ارزش هر مطالبه‌ی مشروط با عایدی منفی[1] باید نامنفی باشد:

$$\forall \omega \in \Omega \quad H(\omega) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \in \{0, 1, \ldots, T\} \quad \pi_t(H) \geq 0$$

(iii) خطی باشد: $\pi_t(\sum_{i=1}^n c_i H_i) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_t(H_i)$

(iv) فرصت آربیتراژ ایجاد نکند.

فرض کنیم $A \in \mathcal{F}$ یک پیشامد و 1_A قراردادی باشد که در صورت رخ دادن A یک دلار به دارنده‌ی آن پرداخت کند و در غیر این صورت چیزی پرداخت نکند. در واقع 1_A شرط‌بندی به مبلغ یک دلار روی پیشامد A است. تعریف می‌کنیم $Q(A) = \pi_0(1_A)$. چون $0 \leq 1_A \leq 1$ از (ii) نتیجه می‌شود $0 \leq Q(A) \leq 1$. اگر پیشامدهای $A_1, \ldots, A_n$ مجزا باشند، $1_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$ و از خطی‌بودن π نتیجه می‌شود $Q(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n Q(A_i)$. پس Q روی $(\Omega, \mathcal{F})$ یک اندازه احتمال است. برای مطالبه‌ی مشروطی چون $H = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ با استفاده از خاصیت خطی بودن π داریم:

$$\pi_0(H) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_0(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n c_i Q(A_i) = E^Q(H)$$

که E^Q امید ریاضی نسبت به احتمال Q است.

اگر A پیشامدی ناممکن باشد؛ یعنی $P(A) = 0$، مطالبه‌ی مشروط 1_A برای سرمایه‌گذار فاقد ارزش است. از طرف دیگر عملگر قیمت گذاری π در لحظه‌ی $t = 0$ ارزش $Q(A) = \pi_0(1_A)$ را به آن نسبت می‌دهد. پس باید داشته باشیم $Q(A) = 0$. برعکس هر گاه $Q(A) = 0$، عملگر قیمت‌گذاری π بهای صفر را به 1_A نسبت می‌دهد و لذا در صورتی که $P(A) \neq 0$، خرید چنین مطالبه‌ی مشروطی (به قیمت صفر) آربیتراژ ایجاد می‌کند. بنابراین بدون آربیتراژ بودن بازار ایجاب می‌کند که اندازه‌های احتمال P و Q معادل باشند:

$$P \sim Q \quad : \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = 0 \Longleftrightarrow P(A) = 0$$

اگر π در شرط زیر صدق کند

(v) **پیوستگی:** برای دنباله‌ی مطالبات مشروط $\{H_n\}_{n=1}^\infty$، از $H_n \longrightarrow H \quad P - a.s.$ بتوان نتیجه گرفت $\pi_0(H) = \lim_n \pi_0(H_n)$ ،

---

1) pay off

آنگاه، برای هر مطالبه‌ی مشروط کران‌دار H (با استفاده از قضیه‌ی همگرایی تسلطی) خواهیم داشت $\pi_{\circ}(H) = E^Q(H)$ و اگر H کران دار نباشد، تعریف می‌کنیم

$$H_n(\omega) = \begin{cases} H(\omega) \quad ; \quad \text{اگر } H(\omega) \leq n \\ \circ \quad ; \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $H_n \uparrow H$، $P-a.s.$ و قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد

$$\pi_{\circ}(H) = \lim_{n\to\infty} \pi_{\circ}(H_n) = \lim_{n\to\infty} E^Q(H_n) = E^Q(H).$$

اگر π در خاصیت سازگاری در زمان نیز صدق کند:

(vi) **سازگاری در زمان:** اگر $H_۱$ مطالبه‌ی مشروطی با عایدی H در زمان T و $H_۲$ مطالبه‌ی مشروط دیگری با پرداخت $\pi_t(H)$ در زمان t باشد، $\pi_{\circ}(H_۱) = \pi_{\circ}(H_۲)$.

آنگاه، $\pi_t(H) = E^Q(H|\mathcal{F}_t)$.

در لحظه‌ی t، یک سهم به قیمت S_t در بازار معامله می‌شود. پس اگر در لحظه‌ی t یک سهم خریداری کنیم و تا لحظه‌ی T نگه داریم، عایدی نهایی آن S_T خواهد شد. بنابراین عملگر قیمت‌گذاری در لحظه‌ی t ارزش $E^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$ را به آن نسبت می‌دهد. از بدون آربیتراژ بودن بازار نتیجه می‌شود:

$$S_t = t \text{ بهای این کالا در لحظه‌ی } = E^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$$

پس در یک بازار عاری از آربیتراژ فرایند قیمت کالای مورد معامله یک Qـ مارتینگل است. اگر $P \sim Q$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=\circ}^T$ یک Qـ مارتینگل باشد، Q را اندازه‌ی مارتینگل معادل[۱] می‌نامند. بحث فوق نشان می‌دهد که اگر π یک عملگر قیمت‌گذاری با خواص (i) تا (vi) باشد،

$$\pi_t(H) = E^Q(H|\mathcal{F}_t). \tag{۲}$$

که Q اندازه‌ی مارتینگل معادل است. رابطه‌ی (۲)، فرمول قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ نامیده می‌شود. به آسانی می‌توان بررسی کرد که عکس این مطلب نیز صحیح است؛ یعنی اگر Q یک اندازه‌ی مارتینگل معادل باشد، آنگاه عملگر قیمت‌گذاری تعریف شده توسط (۲)، در خواص (i) تا (vi) صدق می‌کند.

نتیجه‌ی ۱. بین اندازه‌های مارتینگل معادل و عملگرهای قیمت‌گذاری با ویژگی‌های (i) تا (vi)، یک تناظر یک به یک موجود است.

بحث بعدی ما راجع به وجود اندازه‌ی مارتینگل معادل است. فرض کنیم Q یک اندازه‌ی مارتینگل معادل و φ یک سبد مالی خودتأمین باشد. با استفاده از (۱) داریم:

1) equivalent martingale measure

$$V_t(\varphi) = V_\circ(\varphi) + G_t(\varphi).$$

چون S تحت Q مارتینگل است، $G_t(\varphi)$ نیز یک Q ــ مارتینگل است و در نتیجه $E^Q(G_t(\varphi)) = \circ$ که نشان می‌دهد متغیر تصادفی $G_t(\varphi)$ هم مقادیر مثبت را اتخاذ میکند و هم مقادیر منفی. بنابراین

$$Q(\forall t = \circ, \dots, T \qquad V_t(\varphi) - V_\circ(\varphi) = G_t(\varphi) \geq \circ) \neq ۱$$

و چون $P \sim Q$،

$$P(\forall t = \circ, \dots, T \qquad V_t(\varphi) \geq V_\circ(\varphi)) < ۱.$$

پس φ یک فرصت آربیتراژ نیست. به عبارت دیگر وجود اندازه‌ی مارتینگل، وجود بازار بدون آربیتراژ را تضمین می‌کند. در واقع عکس این مطلب هم برقرار است:

قضیه‌ی ۱. (قضیه‌ی اساسی اول قیمت‌گذاری) *بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=\circ}^T$ بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازه‌ی احتمال $Q \sim P$ موجود باشد که S تحت Q یک مارتینگل است.*

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه مارتینگل معادل) ارتباط ایجاد می‌کند.
مطالبه مشروط H را دست یافتنی[1] می‌نامیم هرگاه سبد مالی خودتأمین φ موجود باشد که $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. دراین‌صورت φ یک پوشش ریسک[2] یا سبد مالی بازساز[3] برای H نامیده می‌شود. هرگاه φ یک استراتژی بازساز برای H باشد، از خودتأمین بودن φ نتیجه می‌شود

$$H = V_\circ(\varphi) + G_T(\varphi), \qquad P - a.s. \tag{۳}$$

با محاسبه‌ی امید ریاضی دو طرف (۳) نسبت به اندازه‌ی مارتینگل معادل Q، خواهیم داشت

$$E^Q(H|\mathcal{F}_t) = V_t(\varphi).$$

یعنی ارزش نسبت داده شده به مطالبه‌ی مشروط H توسط عملگر قیمت‌گذاری متناظر با اندازه‌ی مارتینگل معادل Q در لحظه‌ی t، برابر است با ارزش سبد مالی بازساز H در این لحظه. توجه می‌کنیم که اگر $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ دو سبد مالی بازساز H باشند، بنا بر تعریف $V_T(\varphi_۱) = V_T(\varphi_۲)$ و از بدون آربیتراژ بودن بازار نتیجه می‌شود که $V_t(\varphi_۱) = V_t(\varphi_۲)$ برای هر t.
بازار را کامل می‌نامیم هرگاه هر مطالبه‌ی مشروط، دست یافتنی باشد. از بحث فوق نتیجه می‌شود که در یک بازار کامل تنها یک راه برای ارزش‌گذاری مطالبات مشروط وجود دارد و همه‌ی

1) attainable 2) hedging 3) replicating portfolio

اندازه‌های مارتینگل معادل، منجر به یک عملگر قیمت‌گذاری می‌شوند. از تناظر یک به یک میان عملگرهای قیمت‌گذاری و اندازه‌های مارتینگل معادل نتیجه می‌شود که در یک بازار کامل، اندازه‌ی مارتینگل معادل یکتاست. در واقع عکس این مطلب هم درست است:

قضیه‌ی ۲. (قضیه‌ی اساسی دوم قیمت‌گذاری) *بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=0}^{T}$ کامل است اگر و تنها اگر اندازه‌ی مارتینگل معادل یکتا باشد.*

این قضیه پُلی است میان مفهوم اقتصادی بازار کامل و مفهوم ریاضی یکتایی اندازه مارتینگل معادل.

مطالب مذکور در این بخش را می‌توان به حالت کلی که خرید و فروش در هر زمان از بازه‌ی $[0, T]$ مجاز است، تعمیم داد. طبیعتاً این تعمیم مستلزم قراردادن شرایطی روی فرایند قیمت S، سبد مالی φ و مطالبه‌ی مشروط H است. بخش ۳ از [۴] شامل بیان دقیق این شرایط است.

۲.۱. مدل هستون

یکی از شناخته‌شده‌ترین مثال‌های بازار کامل، مدل بلک ــ شولز است. در این مدل فرض می‌شود قیمت کالای بدون ریسک در معادله‌ی دیفرانسیل عادی $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ صدق می‌کند که عدد ثابت r معرف نرخ بهره است. همچنین دینامیک قیمت کالای ریسک دار با معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t^1 = \alpha S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t$$

توصیف می‌شود که در آن W_t یک فرایند وینر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. α و $\sigma > 0$ اعداد ثابت هستند و σ تلاطم نامیده می‌شود. از محاسن مدل بلک ـ شولز این است که برای بسیاری از اختیارهای معامله می‌توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به‌دست آورد. اما شواهد تجربی نشان می‌دهد که این مدل در همخوانی با واقعیت‌های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم‌هایی از این مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد که از میان آنها می‌توان به مدل تلاطم تصادفی اشاره کرد. در این مدل، تلاطم به عنوان یک فرایند تصادفی مثبت در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرض می‌شود که قیمت (تنزیل شده‌ی) کالای دارای ریسک در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

صدق می‌کند که در آن $(\sigma_t)_{0 \le t \le T}$ خود، یک فرایند تصادفی مثبت است. با انتخاب‌های مختلف برای فرایند $(\sigma)_t$ مدل‌های تلاطم تصادفی مختلفی بدست می‌آیند. مدل مورد استفاده ما حالتی از مدل هستون [۸] است. در این مدل فرض می‌شود که تلاطم یک پخش ایتو از نوع

ککس ــ اینگرسل ــ راس[1] است که فرایندی نامنفی و دارای خاصیت بازگشت به میانگین است.

همچنین فرایندهای وینر هدایت کننده قیمت سهام و تلاطم، همبسته درنظر گرفته می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر

$$\begin{aligned} dS_t =& \quad S_t\left(\mu\sqrt{Y_t}dt + \sqrt{Y_t}dW_t\right) \\ dY_t =& \quad \kappa(\eta - Y_t)dt + \nu\sqrt{Y_t}dW'_t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T \qquad (۴)$$

که در آن μ یک عدد ثابت است و ν، η و κ ثابت‌های مثبت‌اند. W_t و W'_t دو فرایند وینر با همبستگی ثابت $\rho \in (-1, 1)$ هستند. فرایند Y در (۴) فرایندی نامنفی است و فرض می‌کنیم $\kappa\eta \ge \frac{\nu^2}{2}$ مثبت بودن Y را تضمین می‌کند. قرار می‌دهیم

$$dW_t = dW_t^{(1)}, \qquad dW'_t = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)}$$

که $W_t^{(1)}$ و $W_t^{(2)}$ دو فرایند وینر مستقل‌اند و بدین‌ترتیب می‌توان (۴) را به‌صورت

$$\begin{aligned} dS_t =& \quad \mu\sqrt{Y_t}S_t dt + \sqrt{Y_t}S_t dW_t^{(1)} \\ dY_t =& \quad \kappa(\eta - Y_t)dt + \rho\nu\sqrt{Y_t}dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\nu\sqrt{Y_t}dW_t^{(2)} \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T \quad (۵)$$

بازنویسی کرد. $\mathbb{F}$ را پالایه‌ی تولید شده توسط $W^{(1)}$ و $W^{(2)}$ در نظر می‌گیریم. اکنون به یافتن اندازه‌ی مارتینگل معادل می‌پردازیم. بدین منظور باید با استفاده از تبدیل گیرسانف[2] اندازه Q را به‌گونه‌ای بیابیم که ضریب رانش دینامیک S نسبت به Q صفر باشد. قضیه‌ی گیرسانف دینامیک $W^{(1)}$ را نسبت به Q به طور یکتا مشخص می‌کند اما دینامیک $W^{(2)}$ را نسبت به Q به طور یکتا تعیین نمی‌کند. بنابر این با انتخاب‌های مختلف برای ضریب رانش $W^{(2)}$، اندازه‌های مارتینگل متفاوتی به‌دست می‌آید. پس بنابر قضیه‌ی اساسی دوم قیمت‌گذاری، بازار در این مدل ناکامل است.

۳.۱. پوشش ریسک در بازارهای ناکامل

فرض کنیم پالایهٔ $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ کامل و از راست پیوسته باشد و همچون گذشته فرایند حقیقی مقدار (یک بعدی) و $\mathbb{F}$ ــ سازگار $S = (S_t)_{0\le t\le T}$، نشان‌دهنده‌ی قیمت (تنزیل شده‌ی) کالای ریسک‌دار باشد. برای این که بازار بدون آربیتراژ باشد، فرض می‌کنیم اندازه مارتینگل معادل Q برای S موجود باشد؛ با این فرض S تحت P نیم مارتینگل خواهد بود. در اینجا حالت خاص‌تری را در نظر می‌گیریم که S فرایندی پیوسته با تجزیه دوب ــ میر $S = S_0 + A + M$ باشد، که در آن M تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است و $M_0 = 0$، و A یک فرایند پیوسته و سازگار با تغییرات کران‌دار است و $A_0 = 0$.

1) Cox, Ingersoll, Ross 2) Girsanov

از این پس مطالبات مشروطی را درنظر می‌گیریم که انتگرال‌پذیر مربعی نیز هستند، یعنی $H \in \mathcal{L}^{2}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

نماد Θ را به‌عنوان مجموعه فرایندهای پیش‌بینی‌پذیر θ در نظر می‌گیریم که در

$$E\left(\int_{0}^{T} \theta_u^{2}\, d\langle S\rangle_u + \left(\int_{0}^{T} |\theta_u|\, d|A|_u\right)^{2}\right) < \infty$$

صدق می‌کنند. ($|A|$ تغییرات کلی A و $\langle S\rangle$ تغییرات مجذوری S را نشان می‌دهد.)

تعریف ۱. *یک استراتژی سبد مالی عبارت است از فرایند دو بعدی $\varphi = (\theta, \xi)$ به طوری که*

(i) $\theta = (\theta_t)_{0 \le t \le T} \in \Theta$،

(ii) $\xi = (\xi_t)_{0 \le t \le T}$ فرایندی $\mathbb{F}$ ـ سازوار است،

(iii) فرایند ارزش $(V_t)_{0 \le t \le T}$ از راست پیوسته و انتگرال‌پذیر مربعی است.

برای پوشش ریسک در بازارهای ناکامل روش‌های مختلفی وجود دارد. فصل دهم از [۲] شامل بحثی خواندنی درباره‌ی این روش‌هاست.

در یک بازار ناکامل (طبق تعریف) به‌ازای برخی مطالبات مشروط همچون H، سبد مالی خودتأمینی که در عین حال شرط $P(V_T = H) = 1$ را نیز برآورده کند، موجود نیست.

برای پیشبرد مسأله در این حالت یک روش این است که برای مطالبه‌ی مشروط داده شده‌ی H ، سبدهای سرمایه‌ی خودتأمین φ را درنظر بگیریم، که البته ممکن است هیچ یک از آنها در شرط $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. صدق نکند. در این‌صورت یک سبد سرمایه‌ی «خوب» آن است که $V_T(\varphi) - H$ را نسبت به یک نرم می‌نیمم کند. هرگاه این نرم، نرم $\mathcal{L}^{2}(P)$ باشد مسأله‌ی ما تبدیل می‌شود به یافتن سبد سرمایه‌ی خودتأمینی که $E\left[\left(V_T(\varphi) - H\right)^{2}\right]$ را می‌نیمم کند. تحت شرایط مناسب، این مسأله می‌نیمم‌سازی جوابی مثل $\widetilde{\varphi}$ دارد و به‌علاوه اندازه‌ی مارتینگل معادل $\widetilde{P}$ موجود است که $V_0(\widetilde{\varphi}) = E^{\widetilde{P}}[H]$. این روش را پوشش میانگین ـ واریانس[1] می‌نامند.

روش دیگر این است که فقط استراتژی‌هایی را در نظر بگیریم که ارزش نهایی آنها برابر H است؛ یعنی $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. اما چون بازار ناکامل است چنین استراتژی ممکن است خودتأمین نباشد؛ یعنی فرایند هزینه متناظر با آن ثابت نباشد. پس در این حالت یک استراتژی «خوب» آن است که «تغییرات فرایند هزینه‌اش کوچک باشد». در سال ۱۹۸۶ فولمر و ساندرمن $E\left[\left(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\right)^{2} \middle| F_t\right]$ را به‌عنوان معیاری از تغییرات فرایند هزینه به کار بردند و روش می‌نیمم‌سازی ریسک را برای حالتی که S یک P ــ مارتینگل است معرفی نمودند. این روش در سال ۱۹۹۱ توسط شوایتزر و با نام می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک به حالتی که S تحت P نیم‌مارتینگل است تعمیم داده شد. اگر $\hat{\varphi}$ استراتژی به‌دست آمده از روش می‌نیمم‌سازی (موضعی)

1) mean-variance hedging

ریسک باشد، می‌توان $V_t(\hat{\varphi})$ را به‌عنوان ارزش H در لحظه‌ی t درنظر گرفت. تحت شرایط مناسب اندازه مارتینگل معادل $\hat{P}$ موجود است که $V_t(\hat{\varphi}) = \hat{E}(H|\mathcal{F}_t)$. ($\hat{E}$ امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال $\hat{P}$ است.)

در مورد مدل‌های تلاطم تصادفی غالباً استفاده از روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک ساده‌تر است، چراکه چگالی $\hat{P}$ نسبت به P به‌طور صریح مشخص می‌شود و می‌توان با بکار بردن قضیه‌ی گیرسانف، دینامیک تلاطم را تحت $\hat{P}$ به‌دست آورد.

در مورد مدل مورد استفاده ما، معادله‌ی(۵) ، $\hat{P} = \widetilde{P}$ (لم ۱.۲ از [۷]) و بنابراین در این مدل قیمت‌های نسبت داده شده به یک مطالبه‌ی مشروط توسط دو روش پوشش میانگین ــ واریانس و می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک یکی است. در [۷] این دو روش برای چهار مثال از مدل تلاطم تصادفی، به‌طور عددی مقایسه شده‌اند. نتایج تجربی نشان می‌دهد که حتی درصورت وجود فرمول صریحی برای $\frac{d\widetilde{P}}{dP}$، محاسبه قیمت با استفاده از روش پوشش میانگین ـ واریانس حدوداً ۲۰٪ کندتر از روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک است. (بخش ۵.۵ از [۷]) از این رو ما در این‌جا روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک را در پیش می‌گیریم.

۱.۳.۱ حالت مارتینگل

در این بخش روش می‌نیمم سازی ریسک را در حالتی که S یک P ـ مارتینگل است توضیح می‌دهیم.
فرایند ریسک استراتژی φ را به وسیلهٔ $R_t(\varphi) = E\left[\left(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$ تعریف می‌کنیم.
توجه می‌کنیم که اگر φ خودتأمین باشد، $C(\varphi)$ ثابت است و درنتیجه $R(\varphi) \equiv 0$.
استراتژی $\bar{\varphi} = (\bar{\theta}, \bar{\xi})$ را ادامه‌ی قابل قبول[1] φ از t به بعد می‌نامیم هرگاه $V_T(\varphi) = V_T(\bar{\varphi})$، P-a.s. و نیز برای هر $u < t$، $\xi_u = \bar{\xi}_u$ و $\theta_u = \bar{\theta}_u$.

تعریف ۲. استراتژی φ را می‌نیمم‌ساز ریسک می‌نامیم هرگاه برای هر $t \in [0, T]$ و هر ادامه‌ی قابل قبول φ از t به بعد مثل $\bar{\varphi}$ داشته باشیم $R_t(\varphi) \leq R_t(\bar{\varphi})$، P-a.s.

با این تعریف هر استراتژی خودتامین، می‌نیمم‌ساز ریسک هم هست.

تعریف ۳. استراتژی φ را در میانگین خودتأمین گوییم هرگاه $C(\varphi)$ یک P ـ مارتینگل باشد. یعنی برای یک استراتژی در میانگین خود تأمین φ، گرچه ممکن است $C(\varphi)$ ثابت نباشد، امید ریاضی $C(\varphi)$ ثابت است.

لم ۱. هر استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک، در میانگین خودتأمین است.

1) admissible extension

برهان. فرض کنیم φ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $t_\circ \in [\circ, T]$. $\bar{\varphi} = (\bar{\theta}, \bar{\xi})$ را یک ادامه‌ی قابل قبول φ از $t_\circ$ به بعد درنظر می‌گیریم که روی $[t_\circ, T]$ با $\bar{\theta}_t = \theta_t$ و $\bar{\xi}_t = E(C_T|\mathcal{F}_t) + \int_\circ^t \theta_u dS_u - \theta_t S_t$ تعریف می‌شود. پس برای $t \in [t_\circ, T]$، $C_t(\bar{\varphi}) = E\big(C_T(\varphi)\big|\mathcal{F}_t\big)$.
از طرفی

$$\begin{aligned} R_{t_\circ}(\varphi) &= E\big[\big(C_T(\varphi) - C_{t_\circ}(\varphi)\big)^{\text{۲}}\big|\mathcal{F}_{t_\circ}\big] \\ &= E\big[\big(C_T(\bar{\varphi}) - C_{t_\circ}(\bar{\varphi})\big)^{\text{۲}}\big|\mathcal{F}_{t_\circ}\big] + \big(C_{t_\circ}(\bar{\varphi}) - C_{t_\circ}(\varphi)\big)^{\text{۲}} \geq R_{t_\circ}(\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

و چون φ می‌نیمم‌ساز ریسک است $R_{t_\circ}(\varphi) = R_{t_\circ}(\bar{\varphi})$ که نتیجه می‌دهد $C_{t_\circ}(\bar{\varphi}) = C_{t_\circ}(\varphi)$.

نتیجه‌ی ۲. فرایند ارزش یک استراتژی مینیمم‌ساز ریسک، مارتینگل است.

برهان. اگر φ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد، طبق لم ۱، $C(\varphi)$ مارتینگل است و چون S نیز مارتینگل است، حکم از رابطه‌ی $V_t(\varphi) = C_t(\varphi) + \int_\circ^t \theta_u dS_u$ به‌دست می‌آید.

اگر $\hat{\varphi}$ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد به طوری که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s. بنا بر نتیجه‌ی ۲ داریم

$$V_t(\hat{\varphi}) = E\big(V_T(\hat{\varphi})\big|\mathcal{F}_t\big) = E(H|\mathcal{F}_t).$$

بدین‌ترتیب اگر S تحت P مارتینگل باشد، قیمت تعیین شده توسط روش می‌نیمم‌سازی ریسک برای مطالبه‌ی مشروط H در لحظه‌ی t برابر است با $E(H|\mathcal{F}_t)$.
با استفاده از قضیه زیر می‌توان نشان داد که استراتژی $\hat{\varphi}$ موجود و یکتاست.

قضیه‌ی ۳. **(تجزیه گالچوک ـ کنیتا ـ واتانابه[1])** اگر S تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد و $H \in \mathcal{L}^{\text{۲}}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$، آنگاه P ـ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی $L^H = (L_t^H)_{\circ \leq t \leq T}$ که $L_\circ^H = \circ$ و $\theta^H \in \Theta$ موجودند به طوری که

$$H = H_\circ + \int_\circ^T \theta_u^H dS_u + L_T^H \qquad P-a.s.$$

به علاوه L^H بر $\left\{\int \theta dS \quad : \quad \theta \in \Theta\right\}$ قویاً عمود است؛ یعنی برای هر $\theta \in \Theta$، $\left(L_t^H \int_\circ^t \theta_u dS_u\right)_{\circ \leq t \leq T}$ یک P ـ مارتینگل است.

گزارهٔ ۱. استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک $\hat{\varphi}$ که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s. موجود و یکتاست و به وسیلهٔ $\hat{\varphi} = (\hat{\theta}, \hat{\xi})$ که در آن

$$\hat{\theta}_t = \theta_t^H, \qquad \hat{\xi}_t = H_\circ + \int_\circ^t \theta_u^H dS_u + L_t^H - \theta_t^H S_t$$

1) Galtchouk-Kunita-Watanabe decomposition

تعیین می‌شود. (θ^H و L^H در قضیه ۳ معرفی شده‌اند.)

برهان. روشن است که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s.. برای نشان دادن این که استراتژی $\hat{\varphi}$ می‌نیمم‌ساز ریسک است فرض کنیم $\varphi = (\theta, \xi)$ یک ادامه قابل قبول $\hat{\varphi}$ از t به بعد باشد. داریم:

$$\begin{aligned} C_T(\varphi) - C_t(\varphi) &= V_T(\varphi) - V_t(\varphi) - \int_t^T \theta_u dS_u \\ &= V_\circ(\hat{\varphi}) + \int_\circ^T \hat{\theta}_u dS_u + L_T^H - V_t(\varphi) - \int_t^T \theta_u dS_u \\ &= \int_t^T (\hat{\theta}_u - \theta_u) dS_u + (L_T^H - L_t^H) + \big(V_t(\hat{\varphi}) - V_t(\varphi)\big) \end{aligned}$$

با توجه به این که L^H بر S قویاً عمود است و انتگرال تصادفی نسبت به S مارتینگل است و $L_T^H - L_t^H = C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})$، داریم:

$$\begin{aligned} R_t(\varphi) &= E\big[\big(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\big)^۲ \big| \mathcal{F}_t\big] \\ &= E\Big[\int_t^T (\hat{\theta}_u - \theta_u)^۲ d\langle S\rangle_u \Big| \mathcal{F}_t\Big] + E\big[\big(C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})\big)^۲ \big| \mathcal{F}_t\big] + \big(V_t(\hat{\varphi}) - V_t(\varphi)\big)^۲ \\ &\geq E\big[\big(C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})\big)^۲ \big| \mathcal{F}_t\big] = R_t(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که $\hat{\varphi}$، می‌نیمم‌ساز ریسک است.

برای اثبات یکتایی، فرض کنیم $\varphi = (\theta, \xi)$ هم یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $V_T(\varphi) = H$، P-a.s.. پس نامساوی فوق به‌ازای این φ و $t = \circ$ تبدیل به تساوی می‌شود که نتیجه می‌دهد $\hat{\theta}_t = \theta_t$، P-a.s. برای هر $t \in [\circ, T]$. از طرف دیگر $V_T(\varphi) = H = V_T(\hat{\varphi})$، P-a.s. و طبق نتیجه ۲، $V(\varphi)$ و $V(\hat{\varphi})$ هر دو مارتینگل هستند که ایجاب می‌کند $V_t(\varphi) = V_t(\hat{\varphi})$، P-a.s. و بنابراین $\xi_t = \hat{\xi}_t$، P-a.s. برای هر $t \in [\circ, T]$.

۲.۳.۱. حالت کلی

اکنون می‌پردازیم به حالت کلی که در آن S تحت P مارتینگل نیست. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا در این حالت نیز برای هر مطالبه مشروط H، استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک φ موجود است که $V_T(\varphi) = H$، P-a.s.؟ متاسفانه پاسخ این سؤال منفی است. برای مثال نقض به گزاره ۱.۳ از [۱۰] مراجعه کنید.

به لحاظ شهودی علت ناکارآمد بودن روش می‌نیمم‌سازی ریسک در حالت غیر مارتینگل را می‌توان چنین توضیح داد: درلحظه‌ی t، $R_t(\varphi)$ را نسبت به همه‌ی ادامه‌های قابل قبول φ از t به بعد می‌نیمم می‌کنیم. گیریم این می‌نیمم به ازای φ_t حاصل شود. به‌همین ترتیب فرض کنیم که برای $u < t$ استراتژی φ_u در میان همه ادامه‌های قابل قبول φ از u به بعد، $R_u(\varphi)$ را می‌نیمم کند؛ یعنی φ_u نشانگر استراتژی است که باید روی $[u, T)$ در پیش بگیریم. در حالت کلی ممکن است تحدید φ_u به بازه‌ی $[t, T)$ با φ_t متفاوت باشد. بحث بخش قبل تضمین می‌کند که اگر S تحت P مارتینگل باشد، چنین مشکلی رخ نمی‌دهد.

کلید حل این مشکل در استفاده از مفهوم می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک نهفته است. برای توضیح ایده‌ی این روش حالتی را در نظر می‌گیریم که زمان (خرید و فروش)، گسسته باشد و بیان تعریف دقیق در حالت زمان پیوسته را به پیوست (الف) موکول می‌کنیم.

فرض کنیم خرید و فروش تنها در زمان‌های $k = 0, 1, \ldots, T \in \mathbb{N}$ ممکن باشد. در زمان k، θ_{k+1} و ξ_k را که به‌ترتیب مبین تعداد سهام در بازه‌ی $(k, k+1]$ و تعداد ورق قرضه در بازه‌ی $[k, k+1)$ هستند، تعیین می‌کنیم. توجه می‌کنیم که پیش‌بینی‌پذیر بودن θ ایجاب می‌کند که θ_{k+1} در زمان k تعیین شود. درحالی که سبد مالی در زمان k عبارت است از $\varphi_k = (\theta_k, \xi_k)$.
برخلاف روش می‌نیمم‌سازی ریسک که در آن $R_k(\varphi) = E\big[\big(C_T(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به همه‌ی ادامه‌های قابل قبول φ از k به بعد می‌نیمم می‌شود، در روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک، $R_k(\varphi)$ را به‌عنوان تابعی از دو متغیر θ_{k+1} و ξ_k می‌نیمم می‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر «ریسک»، «موضعاً» می‌نیمم می‌شود.

می‌توان نشان داد که می‌نیمم کردن $E\big[\big(C_T(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به θ_{k+1} و ξ_k معادل است با می‌نیمم کردن $E\big[\big(C_{k+1}(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به θ_{k+1} و ξ_k.

با استفاده از این واقعیت شرایطی برای فرایند هزینه‌ی $C(\varphi)$ می‌یابیم که معادل است با این که φ یک استراتژی موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $H = V_T(\varphi)$، P-a.s.:
نمادگذاری $\Delta U_{k+1} := U_{k+1} - U_k$ را در مورد $C(\varphi)$ به کار می‌بریم و به دست می آوریم

$$\Delta C_{k+1}(\varphi) = \Delta V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1}.$$

با توجه به این که $V_k(\varphi)$، $\mathcal{F}_k$ ـ اندازه‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} E\big(\big(\Delta C_{k+1}(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big) = &\ \operatorname{Var}\ \big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) \\ &+ \Big(E\big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) - V_k(\varphi)\Big)^2. \end{aligned}$$

چون جمله اول سمت راست به ξ_k بستگی ندارد، انتخاب بهینه برای ξ_k انتخابی است که جمله دوم را صفر کند؛ یعنی

$$V_k(\varphi) = E\big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) \tag{۶}$$

که معادل است با

$$0 = E\big(\Delta V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) = E\big(\Delta C_{k+1}(\varphi) \big| \mathcal{F}_k\big)$$

پس φ باید در میانگین خود تامین باشد.
از طرف دیگر $H = V_T(\varphi)$ و رابطه‌ی (۶) نشان می‌دهد که برای می‌نیمم‌کردن $E\big(\big(\Delta C_{k+1}(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big)$، می‌توان در زمان k، $V_{k+1}(\varphi)$ را معلوم فرض کرد. پس کافی است

$\text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\right)$ را نسبت به θ_{k+1} می‌نیمم کنیم. با توجه به این که θ_{k+1}، $\mathcal{F}_k$ ـ اندازه‌پذیر است، خواهیم داشت

$$\text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\right) = \text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi)\big|\mathcal{F}_k\right) + \theta_{k+1}^{2}\ \text{Var}\ (\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k)$$
$$-2\theta_{k+1}\ \text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi), \Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k\right).$$

مشتق این عبارت نسبت به θ_{k+1} را برابر با صفر قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم $\theta_{k+1} = \frac{\text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi), \Delta S_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\right)}{\text{Var}\ (\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k)}$ که معادل است با

$$\text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1}, \Delta S_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\right) = 0. \qquad (7)$$

با به‌کار بردن تجزیه‌ی دوب S را به مارتینگل $\bar{M}$ و فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\bar{A}$ تجزیه می‌کنیم که توسط روابط زیر

$$\bar{A}_0 = 0, \quad \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_k + E(\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k),$$
$$\bar{M}_0 = 0, \quad \bar{M}_{k+1} = \bar{M}_k + \Delta S_{k+1} - \Delta\bar{A}_{k+1}$$

تعیین می‌شوند. می‌توان (۷) را به صورت

$$0 = \text{Cov}\ \left(\Delta C_{k+1}(\varphi), \Delta\bar{M}_{k+1}|\mathcal{F}_k\right) = E\left(\Delta C_{k+1}(\varphi)\Delta\bar{M}_{k+1}\big|\mathcal{F}_k\right)$$

ساده کرد که نشان می‌دهد حاصل‌ضرب دو مارتینگل $C(\varphi)$ و $\bar{M}$ یک مارتینگل است یا (یا به طور معادل) $C(\varphi)$ و $\bar{M}$ تحت P قویاً متعامدند. مشابه این نتایج برای حالت زمان پیوسته هم برقرار است: تحت «شرایط مناسب»، استراتژی φ که در $V_T(\varphi) = H$ P-a.s. صدق می‌کند موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک است اگر و تنها اگر فرایند هزینه $C(\varphi)$ مارتینگل باشد و بر قسمت مارتینگل S (یعنی M) قویاً متعامد باشد.
این «شرایط مناسب» در قضیه ۳.۳ از [۱۰] بیان شده است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که مدل ما (معادله (۲))، شرایط این قضیه را برآورده می‌کند.

گزاره‌ی ۲. دو حکم زیر معادل‌اند.

(i) استراتژی خودتأمین φ موجود است که $C(\varphi)$ بر M قویاً عمود است و $V_T(\varphi) = H$، P-a.s.

(ii) H را می‌توان به‌صورت

$$H = H_0 + \int_0^T \theta_u^H dS_u + L_T^H \qquad P - a.s.$$

تجزیه کرد که $H_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$، $\theta^H \in \Theta$، L^H تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویاً عمود بر M است و $L_0 = 0$. (این تجزیه، تجزیه‌ی فولمر ـ شوایتزر نامیده می‌شود.)

برهان. $(i) \leftarrow (ii)$ با توجه به

$$H=V_T(\varphi)=C_T(\varphi)+\int_\circ^T \theta_u dS_u = C_\circ(\varphi)+\int_\circ^T \theta_u dS_u + C_T(\varphi)-C_\circ(\varphi)$$

کافی‌است بگیریم $H_\circ = C_\circ(\varphi)$ و $\theta_t^H=\theta_t$ و $L_t^H = C_t(\varphi)-C_\circ(\varphi)$.
$(i) \rightarrow (ii)$ قرار می‌دهیم $\varphi=(\theta,\xi)$ که $\theta_t=\theta_t^H$ و $\xi_t = H_\circ + \int_\circ^t \theta_u^H dS_u + L_t^H - \theta_t^H S_t$.

فرض کنیم $\hat{P}$ اندازه‌ی مارتینگل معادل P باشد با دو خاصیت زیر

(i) روی $\mathcal{F}_\circ$، $P=\hat{P}$.

(ii) هر فرایند L که تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویاً عمود بر L است و $L_\circ = \circ$، یک $\hat{P}$ ـ مارتینگل باشد.

با توجه به این خواص، تجزیه‌ی فولمر ـ شوایتزر H تحت P، همان تجزیه گالچوک ـ کنیتا ـ واتانابه H تحت $\hat{P}$ است. پس اگر استراتژی φ موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $H=V_T(\varphi)$، P-a.s. فرایند $V(\varphi)$ یک $\hat{P}$ ـ مارتینگل است و بنابراین $V_t(\varphi)=\hat{E}\big(V_t(\varphi)\big|\mathcal{F}_t\big)=\hat{E}(H|\mathcal{F}_t)$. $\hat{P}$ را اندازه مارتینگل می‌نیمال می‌نامند.

می‌توان نشان داد (ص ۹ از [۳] که تحت مفروضات ما، فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\lambda=(\lambda_t)_{\circ\le t\le T}$ موجود است که $A_t=\int_\circ^t \lambda_u d\langle M\rangle_u$.
گزاره‌ی زیر (قضیه‌ی ۵.۳ از [۳]) علاوه بر این که شرایطی برای وجود و یکتایی $\hat{P}$ ارائه می‌نماید، چگالی $\hat{P}$ را نیز نسبت به P مشخص می‌کند.

گزارهٔ ۳. $\hat{P}$ موجود است اگر و تنها اگر

$$G_t=\exp\Big(-\int_\circ^t \lambda_u dM_u - \frac{۱}{۲}\int_\circ^t \lambda_u^{۲} d\langle M\rangle_u\Big) \qquad \circ\le t\le T \tag{۸}$$

یک P ـ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد. تحت این شرایط، $\hat{P}$ به‌طور یکتا به وسیله‌ی $\frac{d\hat{P}}{dP}=G_T$ تعیین می‌شود.

استخراج فرمول قیمت‌گذاری

در این بخش برای قیمت‌گذاری مطالبات مشروط در مدل هستون روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک را به‌کار می‌بریم: با نمادگذاری‌های فصل قبل داریم

$$A_t=\int_\circ^t \mu\sqrt{Y_u}S_u du \text{ و } M_t=\int_\circ^t \sqrt{Y_u}S_u dW_u^{(۱)}.$$

پس به ازای $\lambda_t = \frac{\mu}{\sqrt{Y_t S_t}}$ می‌توان نوشت $A_t = \int_\circ^t \lambda_u d\langle M\rangle_u$.
با جایگذاری λ_t در (۸) خواهیم داشت $G_t = \exp\big(-\frac{\mu^۲}{۲}t - \mu W_t\big)$. بنابر فرمول ایتو داریم

$$dG_t = -\mu G_t dW_t,$$

پس G مارتینگل است و هم‌چنین

$$E(G_t^۲) = e^{\mu t} \leq e^{\mu T}$$

یعنی G انتگرال‌پذیر مربعی است. بنابراین طبق گزاره ۳ ، اندازه مارتینگل می‌نیمال $\hat{P}$ موجود است و $\frac{d\hat{P}}{dP} = G_T = \exp\big(-\frac{\mu^۲}{۲}T - \mu W_T\big)$. بنابر قضیه گیرسانف داریم

$$\begin{aligned} dS_t =& \quad \sqrt{Y_t}S_t d\hat{W}_t^{(۱)} \\ dY_t =& \quad \Big(\kappa(\eta - Y_t) - \rho\nu\mu\sqrt{Y_t}\Big)dt + \rho\nu\sqrt{Y_t}d\hat{W}_t^{(۱)} + \sqrt{۱-\rho^۲}\nu\sqrt{Y_t}d\hat{W}_t^{(۲)} \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $\hat{W}_t^{(۱)} = W_t^{(۱)} + \mu t$ و $\hat{W}_t^{(۲)} = W_t^{(۲)}$ دو فرایند وینر مستقل تحت $\hat{P}$ هستند.
با استفاده از خاصیت مارکوفی فرایند دو بعدی (S,Y) داریم

$$v(t,s,y) := E^{\hat{P}}\big(H|\mathcal{F}_t\big) = E^{\hat{P}}\big(H|S_t, Y_t\big)$$

و بدین ترتیب برای محاسبه‌ی $v(t,s,y)$ می‌توان از روش مونت ـ کارلو یا روش زنجیر مارکوف [1] استفاده کرد.
اگر H یک مطالبه‌ی مشروط اروپایی باشد؛ یعنی $H = H(S_T)$، بنابر قضیه فینمن ـ کتس [2] تابع v روی $(\circ,\infty)\times(\circ,\infty)\times(\circ,T)$ در معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \big(\kappa(\eta - y) - \rho\nu\mu\sqrt{y}\big)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{y}{۲}\Big(s^۲\frac{\partial^۲ v}{\partial s^۲} + ۲\rho\nu s\frac{\partial^۲ v}{\partial s\partial y} + \nu^۲\frac{\partial^۲ v}{\partial y^۲}\Big) = \circ$$

با شرط پایانی $v(T,s,y) = H(s)$، صدق می‌کند.
برای حل این معادله می‌توان روش تفاضل‌های متناهی را به کار برد. می‌توان نشان داد که در مورد مطالبات مشروط اروپایی روش زنجیر مارکوف حالت خاصی از روش تفاضل‌های متناهی است و هر دو روش نسبت به نرم بی‌نهایت از مرتبه‌ی اول همگرا هستند.

پیوست الف.

این پیوست به تعریف استراتژی موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک اختصاص دارد. قبل از بیان تعریف، ذکر برخی مقدمات لازم است: برای افراز $\pi = \{\circ = t_\circ < t_۱ < \cdots < t_k = T\}$ از بازه‌ی $[\circ, T]$

1) markov chain approximation method 2) Feynman-Kac

اندازهٔ افراز عبارت است از $|\pi| = \max_{t_i, t_{i+1} \in \pi} (t_{i+1} - t_i)$. دنباله‌ی $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n، $\pi_n \subseteq \pi_{n+1}$ و می‌گوییم این دنباله به همانی همگراست اگر $\lim_{n \to \infty} |\pi_n| = 0$. یک پریشیدگی کوچک عبارت است از استراتژی $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ که δ کران‌دار است، $\int \delta dA$ (به‌طور یکنواخت نسبت به t و w) کران‌دار است و $\delta_T = \varepsilon_T = 0$.

برای هر زیربازه‌ی $(u, t]$ از $[0, T]$ تحدید Δ به $(u, t]$ عبارت است از

$$\Delta\Big|_{(u,t]} := (\delta I_{(u,t]}, \varepsilon I_{[u,t)})$$

برای استراتژی φ و پریشیدگی کوچک Δ و افراز π از $[0, T]$، تعریف می‌کنیم

$$r^{\pi}(\varphi, \Delta) := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi} \frac{R_{t_i}\big(\varphi + \Delta\big|_{(t_i, t_{i+1}]}\big) - R_{t_i}(\varphi)}{E\big(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} \big| \mathcal{F}_{t_i}\big)} I_{(t_i, t_{i+1}]}$$

استراتژی φ را موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک می‌نامیم هرگاه برای هر پریشیدگی کوچک Δ و هر دنباله صعودی از افرازها مثل $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ که به‌همانی همگراست داشته باشیم $\liminf_n r^{\pi_n}(\varphi, \Delta) \geq 0$ با احتمال یک نسبت به $P \otimes \langle M \rangle$ روی $\Omega \times [0, T]$.
یعنی هر تغییری در استراتژی بهینه، لااقل به لحاظ مجانبی باعث افزایش ریسک می‌شود.

مراجع

[1] Biagini, F., Guasoni, P., Pratelli, M., *Mean-variance hedging for stochastic volatility models*, Mathematical Finance, 10(2), 2000, pp. 109-123. Available from `http://math.bu.edu`

[2] Cont, R., Tankov, P., *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

[3] Föllmer, H., Schweizer, M., *Hedging of contingent claims under incomplete information*, in Applied Stochastic Analysis, Davis, M. and Elliot R., eds., Vol. 5, Gordon and Breach: London, 1991, pp. 389-414.

[4] Harrison, J.M., Pliska, S.R., *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Process. Appl., 11(1981), pp. 215-260.

[5] Henderson, V., Hobson, D., Howison, S., Kluge, T., *A comparison of option prices under different pricing measures in a stochastic volatility model with correlation*, Available from `http://www.finance.ox.ac.uk`, 2004.

[6] HENDERSON, V., *Analitical comparison of option prices in stochastic volatility models*, Available from `http://www.finance.ox.ac.uk`, 2004.

[7] HEATH, D., PLATEN, E., SHWEIZER, M., *A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets*, Mathematical Finance, 11(4), 2001, pp. 385-413.

[8] HESTON, S., *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Rev. Fin. studies, 6(1993), pp. 327-343.

[9] PROTTER, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer: Berlin, 2004.

[10] SCHWEIZER, M., *A guided tour through quadratic hedging approaches*, Available from `http://www.sci.ch`

بهناز زرگری، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی behnazzargari@yahoo.com

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت و اقتصاد zamani@sina.sharif.ir

بیژن ظهوری زنگنه، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی zangeneh@sharif.edu

راما کنت، دانشگاه کلمبیا، آمریکا Rama.Cont@columbia.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۲۹ تا ۴۰

نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک از اویلر تا لانگلندز (بخش اول)*

آنتونی دبلیو. ناپ

مترجم: احمد صفاپور

نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک نقش حساسی در مباحث متنوعی چون نظریه‌ی اعداد، احتمال و ریاضی فیزیک ایفا می‌کنند. قضیه‌ی نظریه‌ی نمایش لانگلندز عنصری اساسی در کار وایلز روی آخرین قضیه‌ی فرما بود و نظریه‌ی نمایش چهارچوبی برای پیش بینی وجود کوارک‌ها فراهم کرد. نمایش‌های گروه چه هستند؟ چرا آن‌ها در ریاضیات این چنین فراگیر هستند و منشأ نظریه‌ی آن‌ها کجاست؟

بسط‌های حاصل ضربی اویلر

همانند بسیاری از شاخه‌های ریاضیات جدید، منشأ نظریه‌ی نمایش گروه و آنالیز هارمونیک برخی از ریشه‌های خود را از کارهای اویلر می‌گیرد. در ۱۷۳۷ اویلر آنچه را ویل در [۴] «کشف اساسی» می‌نامد به دست آورد به این معنی که از تابعی که ما امروزه آن را تابع زتای ریمان، $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ می‌شناسیم آغاز کرد و پی برد که می‌توان این مجموع را به صورت حاصل ضربی به شکل

$$\zeta(s)=\prod_{p\ prime}\frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (1)$$

---

*) این مقاله ترجمه‌ای است از

Group Representations and Harmonic Analysis from Euler to Langlands, Part 1, Notices of AMS, Volume 43, No.4, April 1996, pp 410-415

تألیف Anthony W. Knapp استاد ریاضی دانشگاه ایالتی نیویورک (Stony Brook). آدرس پست الکترونیک او چنین است: aknapp@ccmail.sunysb.edu

برای $s > ۱$ نوشت. در واقع اگر عامل‌های $(۱ - p^{-s})^{-۱}$ در سمت راست (۱) به سری هندسی $۱ + p^{-s} + p^{-۲s} + \cdots$ بسط داده شوند آن گاه حاصل ضرب عامل‌ها برای $p \leq N$ حاصل جمع آن جملاتی به شکل $\frac{۱}{n^s}$ است که در آن n تنها توسط اعداد کوچک‌تر یا مساوی با N عاد می‌شود؛ بنابراین با حدگیری رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید.

اویلر به خوبی می‌دانست که مجموع مربوط به $\zeta(s)$ از انتگرال

$$\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{۱}{s - ۱}$$

بزرگ‌تر است. این عبارت زمانی که s به ۱ میل می‌کند بی‌کران می‌شود اما حاصل ضرب (۱) نمی‌تواند بی‌کران باشد مگر این که تعداد عامل‌ها نامتناهی باشد. بنابر این (۱) اثبات جدیدی از قضیه‌ی اقلیدس فراهم ساخت که بیان می‌کند نامتناهی عدد اول وجود دارد. در واقع (۱)، هم چنان که اویلر مشاهده کرد، قضیه‌ی بهتری را نتیجه می‌دهد که می‌گوید $\sum \frac{۱}{p}$ واگراست.

اویلر بعداً از این قضیه نتیجه گرفت که نامتناهی عدد اول به شکل $۴n + ۱$ و نیز نامتناهی عدد اول به شکل $۴n + ۳$ وجود دارد و در واقع داستان آنالیز هارمونیک از همین جا آغاز می‌شود. برای درک این که چرا تحلیل فوق با چنین حالت‌هایی سروکار ندارد بهتر است جزئیات بیشتری از این که چگونه $\sum \frac{۱}{p}$ وارد مباحث فوق می‌شود را مشاهده کنیم. بررسی بسط‌های سری توانی توابع نمایی نشان می‌دهد که برای $۰ < x < ۱$،

$$\log(۱ + x) < x < \log(\frac{۱}{۱ - x}).$$

به سادگی می‌توان دید که اگر $۰ < x \leq \frac{۱}{۲}$ مقدار سمت راست از دو برابر مقدار سمت چپ بزرگتر نیست. لذا زمانی که s به ۱ میل می‌کند از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\ prime} \frac{۱}{p^s} + \text{عبارتی کران دار} . \qquad (۲)$$

ضمناً ضرب سری مربوط به $\zeta(s)$ در ۲^{-s} جملات با اندیس زوج این سری را باز تولید می‌کند و لذا

$$(۱ - \frac{۱}{۲^s})\zeta(s) = ۱ + \frac{۱}{۳^s} + \frac{۱}{۵^s} + \cdots, \qquad (۳a)$$

و

$$(۱ - \frac{۲}{۲^s})\zeta(s) = ۱ - \frac{۱}{۲^s} + \frac{۱}{۳^s} - \frac{۱}{۴^s} + \frac{۱}{۵^s} - \cdots, \qquad (۳b)$$

سمت چپ $(۳b)$ وقتی s به ۱ میل می‌کند برابر است با حاصل ضرب $(s - ۱)\zeta(s)$ در چیزی که به $\log ۲$ میل می‌کند. اویلر آزمون لایپ نیتز برای همگرایی را می‌دانست و می‌توانست ببیند که سری

سمت راست (۳b) به ازای $s > ۰$ به یک مقدار مثبت همگراست. در نتیجه $\zeta(s)$ در نزدیکی $s = ۱$ حاصل ضرب $(s - ۱)^{-۱}$ و تابعی با حدی متناهی و ناصفر است. ترکیب این نتیجه با (۲) زمانی که s به ۱ نزول می‌کند نشان می‌دهد که

$$\sum \frac{۱}{p^s} = \log \frac{۱}{s-۱} + \text{عبارتی کران دار} \qquad (۴)$$

در کار کردن با اعداد اول هم نهشت با ۱ یا ۳ به پیمانه ۴، جالب خواهد بود که در بحث فوق به جای مجموع $\frac{۱}{p^s}$ ها روی تمام اعداد اول، مجموع‌های

$$\sum_{p\equiv ۱ (mod ۴)} \frac{۱}{p^s} \qquad \text{یا} \qquad \sum_{p\equiv (۳ mod ۴)} \frac{۱}{p^s} \qquad (۵)$$

را جانشین کنیم و مشاهده نماییم که چه اتفاقی می‌افتد. آنچه اتفاق می‌افتد این است که بسط حاصل ضرب متناظر با $(۱ - p^{-s})^{-۱}$ به صورت یک مجموع، چیزی را که قابل اداره کردن باشد ارائه نمی‌کند. ایده‌ی کلیدی جدید اویلر کار کردن با مجموع و تفاضل دو عبارت در (۵) به جای کارکردن جداگانه با هر یک از آن ها و در پایان بازیابی مجدد هر دوی آن‌ها بود. این آنالیز هارمونیک تکوین یافته روی یک گروه دو عنصری است.

جوهر آنالیز هارمونیک عبارت از تجزیه‌ی عبارات پیچیده به قطعاتی است که ساختار یک عمل گروه را، زمانی که چنین عملی وجود داشته باشد منعکس کند. هدف، رام کردن یک آنالیز مشکل است. با بازگشت به عقب با استدلال اول به عنوان یک الگو، اویلر دو سری مناسب با بسط‌های حاصل ضربی کشف کرد. سری اول عبارت بود از

$$(۱ - \frac{۱}{۲^s})\zeta(s) = ۱ + \frac{۱}{۳^s} + \frac{۱}{۵^s} + \frac{۱}{۷^s} + \cdots$$

$$= \sum_{۱}^{\infty} \frac{\chi^+(n)}{n^s} = \prod_{p\ prime} \frac{۱}{۱ - \chi^+(p)p^{-s}}\ , \qquad (٦)$$

که در آن $\chi^+(n)$ برای n های زوج ۰ و برای n های فرد ۱ است. سری دوم عبارت بود از

$$L(s) = ۱ - \frac{۱}{۳^n} + \frac{۱}{۵^n} - \frac{۱}{۷^n} + ... = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\chi^-(n)}{n^s}$$

$$= \prod_{p\ prime} \frac{۱}{۱ - \chi^-(p)p^{-s}} \qquad (۷)$$

که در آن $\chi^-(n)$ برای nهای زوج برابر ۰، برای $n \equiv ۱$ به پیمانه ۴ برابر ۱ و برای $n \equiv ۳$ به پیمانه ۴ برابر ۱− است. لگاریتم $\frac{۱}{۱-\chi(p)p^{-s}}$ تقریباً برابر است با $\chi(p)p^{-s}$ حتی اگر $\chi(p)$ منفی

باشد. با لگاریتم گرفتن از فرمول حاصل ضرب در (٦) (یا به طور ساده با کپی کردن نتایج فرمول (۴)) زمانی که s به طور نزولی به ۱ میل می‌کند، نتیجه می‌شود

$$\text{مجموع جملات (۵)} = \log \frac{۱}{s-۱} + \text{عبارتی کراندار} \qquad (۸)$$

کاربرد آزمون لایپ نیتز در مورد سری (۷) نشان می‌دهد که $L(s)$ به ازای $s > ۰$ همگرا و به ویژه در $s = ۱$ متناهی است. به علاوه این آزمون نشان می‌دهد که $L(۱) > ۰$. در نتیجه لگاریتم گرفتن از فرمول حاصلضرب در (۷) نتیجه می‌دهد

$$\text{تفاضل جملات (۵)} = \text{عبارتی کراندار} \qquad (۹)$$

مقایسه‌ی روابط (۸) و (۹) نشان می‌دهد که هر یک از سری‌های موجود در (۵) زمانی که s به ۱ نزول می‌کند بیکران است. بنا بر این تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد که به پیمانه ۱ با ۴ همنهشت‌اند و همچنین تعداد نامتناهی عدد اول همنهشت با ۳ به پیمانه‌ی ۴ وجود دارد.

نقش گروه در حاصل ضرب‌های اویلر

گروه کجاست و نقش آن چیست؟ ویژگی دو تابع χ^+ و χ^- (هر دوی آن‌ها را χ می‌نامیم) که اجازه می‌دهد مجموع های موجود در (٦) و (۷) به صورت حاصل ضرب نوشته شود این است که به ازای هر دو عدد صحیح و مثبت m و n ، $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$. امروزه چنین توابعی را کاراکترهای دیریکله به پیمانه‌ی ۴ می‌نامند. می‌توانیم χ^+ و χ^- را به عنوان انتقال‌های صحیح توابع روی گروه ضربی $\{۱,۳\}$ از اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۴ و اول نسبت به ۴ که در آن ۰ به عنوان مقدار روی اعداد صحیح غیر اول نسبت به ۴ به کار میرود در نظر بگیریم. دو تابعِ روی گروه $\{۱,۳\}$ عبارتند از

$$\omega^+(۱) = \omega^+(۳) = ۱$$

و

$$\omega^-(۱) = +۱, \omega^-(۳) = -۱.$$

این توابع ω روی این گروه دو عنصری، کاراکترهای ضربی هستند، یعنی همریختی‌هایی به گروه ضربی اعداد مختلط غیر صفرند در عین حال و تنها کاراکترهای ضربی برای این گروه هستند. این توابع پایه‌ای برای فضای برداری مختلط تمام توابع مختلط مقدار روی این گروه دو عنصری تشکیل می دهند. اساساً اویلر دو تابع برای مطالعه در اختیار داشت، توابع مشخصه زیرمجموعه‌های یک عضوی از این گروه:

$$I_۱(۱) = ۱, I_۱(۳) = ۰ \quad \text{و} \quad I_۲(۱) = ۰, I_۲(۳) = ۱$$

Leonhard Euler

سری‌های در دست مطالعه در (۵) را می‌توان به صورت

$$\sum_{p\ prime} \frac{I_۳(p)}{p^s} \quad , \quad \sum_{p\ prime} \frac{I_۱(p)}{p^s}$$

نمایش داد. اثبات اویلر به این دلیل موفق از کار درآمد که او توابع $I_۱$ و $I_۳$ را بر حسب کاراکترهای ضربی پایه یعنی به صورت

$$I_۱ = \frac{۱}{۲}(\omega^+ + \omega^-) \quad , \quad I_۳ = \frac{۱}{۲}(\omega^+ - \omega^-) \ ,$$

نوشت، در برخی محاسبات مربوط به هر یک از عبارات

$$\sum_{p\ prime} \frac{\omega^+(p)}{p^s} \quad , \quad \sum_{p\ prime} \frac{\omega^-(p)}{p^s}$$

به عنوان یک جمله‌ی بسط موفق شد، و سپس توابع خود را به صورت

$$\omega^+ = I_۱ + I_۲ \quad , \quad \omega^- = I_۱ - I_۲$$

بازسازی نمود. این فرآیند، فرآیند آنالیز هارمونیک است. اگر چه آنالیز هارمونیک موجود در این کار را می‌توان جبر خطی بدیهی در نظر گرفت، اما نکته این است که جبر خطی ابزاری برای بهره بردن از ساختار گروه است. این مثال به نوعی برای درک اصل اساسی بسیار ابتدایی است. در واقع

بیش از یک‌صد سال پیش دیریکله این پدیده را مشاهده نمود و قضیه‌ی خودش را درباره‌ی اعداد اول در یک تصاعد حسابی با استفاده از آن اثبات نمود.

آنچه که در بالا به عنوان کار اویلر بیان شد، فراتر از علایق تاریخی است. این کار زیربنای مستقیم بخش بزرگی از پژوهش‌های جاری در نظریه‌ی جبری اعداد و شامل مدخل نظریه‌ی نمایشی از برنامه‌ی لانگلندز به سوی آخرین قضیه‌ی فرماست. به علاوه این کار بر این اصل صراحت دارد که اگر چه ممکن است آنالیز هارمونیک در قلب حل یک مسأله جای داشته باشد اما در عین حال ممکن است لایه‌های متعددی از ایده‌های ابتکاری بین صورت مسأله و استفاده از آنالیز هارمونیک قرار داشته باشند.

کاراکترهای ضربی از ۱۷۳۷ تا حدود ۱۸۰۷ نقش بسیار اساسی در ریاضیات ایفا کردند. کرامر در ۱۷۵۰ دترمینان را تعریف و با معرفی علامت جایگشت اثباتی از آن چه که ما امروزه آن را دستور کرامر می‌نامیم، ارائه نمود. علامت یک جایگشت یک کاراکتر ضربی روی گروه جایگشت‌های n حرف است و دترمینان کاراکتری ضربی روی ماتریس‌های نامنفرد با اندازه ثابت است. اما مفهوم هارمونیکی این کاراکترها در کارهای کرامر هیچ نقشی ایفا نکرد. گاوس، در توسعه‌ی کارهای اویلر با نمایش اعداد صحیح به شکل صورت‌های درجه دوم دودویی، مفهوم خودش از کاراکتر را معرفی کرد، مفهومی که امروزه آن را کاراکتر دیریکله می‌نامیم. اما در کار وی هم آنالیز هارمونیک وارد نشد.

سری‌های فوریه

پیشرفت بزرگ بعدی در زمینه‌ی نمایش گروه موضوع سری‌های فوریه بود. آن چه که در اینجا می‌آوریم برگرفته از گراتان ـ گینس[1] در [۱] است. در ۱۷۴۷ دالامبر کار خود درباره‌ی مسأله‌ی فنر مرتعش را ارائه کرد: او معادله‌ی دیفرانسیل

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲},$$

را پیدا کرد، شرایط اولیه را مشخص نمود و جواب $y = \frac{۱}{۲}(f(x+ct)) + f(x-ct))$ را به دست آورد. اگر چه اویلر در ۱۷۴۸ توابع مثلثاتی را به عنوان نمونه‌هایی از جواب‌های این معادله معرفی کرد اما تا زمانی که دالامبر در ۱۷۵۰ روش جداسازی متغیرها را برای پیدا کردن جواب‌های معادلات با مشتقات جزئی معرفی نکرد کسی نپذیرفت که چنین توابعی را می‌توان به حالت‌های کلی تعمیم داد. دانیل برنولی با استدلالی فلسفی بیان کرد که سری‌های مثلثاتی سینوسی باید برای بیان تمام جواب‌های معادله کافی باشند اما اویلر این نظریه را با استدلال فلسفی دیگری رد کرد.
پژوهش در مورد سری‌های مثلثاتی در مدت باقی مانده از قرن هجدهم پیشرفت اندکی داشت. در ۱۷۷۷ اویلر برهان الهام بخش و معروف خود را برای ضرایب فوریه کشف کرد، این که این ضرایب

1) Grattan-Guinness

Joseph Fourier

را می‌توان با ضرب یک بسط مثلثاتی در یک سینوس یا کسینوس و سپس انتگرال‌گیری جمله به جمله به دست آورد، اما این اثر تا ۱۷۹۸ منتشر نشد. در ۱۷۹۹ پارسوال فرمولی برای مجموع مربعات ضرایب یک سری مثلثاتی بر حسب انتگرال‌ها منتشر کرد؛ فرمول او به طرز قابل قبولی به آن چه ما امروزه آن را فرمول پارسوال می‌نامیم نزدیک است.

سپس فوریه وارد شد، کسی که به انتشار گرما علاقه‌مند بود. فوریه معادله‌ی گرما را به دست آورد، در حالت‌هایی که با استفاده از جداسازی متغیرها می‌توان تحقیق نمود مطالعه‌ی سازمان یافته‌ای انجام داد، دیدگاه خودش در مورد مسأله‌ی تار مرتعش را ارائه کرد، آنچه را ما امروزه به نام سری فوریه می‌شناسیم معرفی کرد، و قابل نمایش بودن توابع ناپیوستهٔ معینی را با چنین سری‌هایی ثابت کرد و همه‌ی این‌ها را در مقاله‌ای در سال ۱۸۰۷ ارائه نمود. این مقاله مورد انتقادهای فراوانی قرار گرفت ، به ویژه از سوی لاگرانژ و پواسون، و از انتشار باز ماند. در اصل انتقادات مبتنی بر این بودند که نتایج فوریه با دیدگاه شهودی غالب در مورد توابع ناسازگار است. تصور بر این بود که توابع دارای ماهیت جبری هستند. اگر قرار بود مجموع سری مثلثاتی $sinx - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x - \cdots$ تابعی مانند $x\frac{1}{2}$ روی بازه $(-\pi, \pi)$ باشد، ماهیت جبری حد باید حد را وادار می‌کرد که همه جا برابر با $x\frac{1}{2}$ باشد، و درنتیجه این حد نمی‌توانست متناوب باشد، که یک تناقض است. فوریه در ۱۸۱۱ مقاله‌ی بازبینی شده‌ای را که شامل عناصر اصلی مقاله ۱۸۰۷ بود و همچنین فرمول معکوس تبدیل فوریه را در برداشت، برای چاپ ارسال کرد و برنده‌ی جایزه شد. اما انتشار نسخه‌ی تجدید نظر شده نیز متوقف شد. سرانجام کار فوریه در سال ۱۸۲۲ در کتاب برجسته‌اش Théorie analytique de la chaleur انتشار یافت.

حل مسأله‌ی تار مرتعش شامل سری‌های سینوسی فوریه بود. در این حل هیچ گروهی از

تقارن‌ها وجود نداشت، و این کار هیچ نشانه‌ای از آنالیز هارمونیک و نمایش‌های گروه در بر نداشت. در عوض این مثال انگیزه‌ی نظریه‌ی اشتورم ـ لیوویل بود که در ١٨٣٦ شروع شد. به همین طریق، کار فوریه در مورد معادله گرما به طور خود به خودی هیچ گروهی را به همراه نداشت. یک گروه تنها در مثال‌هایی که تقارن‌هایی دارد، بروز پیدا می کند. یکی از این مثال‌ها طوق است که تقارن دوار دارد. در مورد طوق، فوریه به سری‌هایی رهنمون شد که شامل سینوس‌ها و کسینوس‌ها بود که امروزه معمولاً با توابع نمایی مختلط نوشته می‌شود:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (١٠)$$

که در آن

$$c_n = \frac{١}{٢\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \qquad (١١)$$

گروهی که پشت این فرمول قرار دارد گروه دایره‌ای $\mathbb{R}/٢\pi\mathbb{Z}$ است. توابع e^{inx} دقیقاً کاراکترهای (پیوسته) ضربی برای این گروه هستند، و (١٠) این گمان را القا می‌کند که $f(x)$ باید بر حسب این توابع قابل بسط باشد. فوریه با آن چه که امروزه آن را به عنوان $L^٢$ ـ کمال[1] مجموعه‌ی متعامد $\{e^{inx}\}$ می‌شناسیم مشکل داشت و به همین دلیل او ترجیح داد برای پیدا کردن ضرایب c_n از روشی پیچده‌تر از (١١) استفاده کند. فوریه فرمول پارسوال

$$\frac{١}{٢\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^٢ dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^٢, \qquad (١٢)$$

را با دستکاری سری‌ها، و مسلماً بدون مربوط کردن استدلال خود با مسألهٔ کمال، به دست آورد.

نگاه وینر[2] به آنالیز هارمونیک

بسط (١٠) پس از جداسازی متغیرها در معادلات دیفرانسیل جزئی پدیدار می‌شود. باید یک عملگر دیفرانسیل معمولی D با نتیجه ٠ بر $f(x)$ اثر کند. این عملگر با انتقال‌های $\tau_x(y) = x + y$ به وسیله گروه دایره جابجا می‌شود. اگر ω یک کاراکتر ضربی باشد، آنگاه $(\tau_x\omega)(y) = \omega(x+y) = \omega(x)\omega(y)$، و داریم

$$D\omega(x+y) = (\tau_x D\omega)(y) = (D\tau_x\omega)(y) =$$
$$(D\omega(x)\omega)(y) = (D\omega)(y)\omega(x).$$

1) Completeness 2) Wiener

با قراردادن $y = \circ$ ملاحظه می‌کنیم که $D\omega$ مضربی از ω است. به عبارت دیگر عملگر دیفرانسیلی D هر کاراکتر ضربی را به مضربی از خودش تبدیل می‌کند، و اثر آن بر $f(x)$ عبارت است از ضرب ضرایب فوریه‌ی آن در ثابت‌های مختلف. نتیجه باید جمله به جمله ۰ باشد و شرایط لازم و کافی روی $f(x)$ را به دست می‌آوریم.

کار فوریه دلیل دیگری بر این اصل است که اگر چه ممکن است آنالیز هارمونیک در قلب راه حل مسأله‌ای جای داشته باشد اما ممکن است لایه‌های متعددی از ایده‌های خلّاقانه بین صورت مسأله و استفاده از آنالیز هارمونیک قرار گرفته باشد.

برای وینر [۵] در قرن بیستم، روش فوق در به کار بردن عملگرهای دیفرانسیلی با ضرایب ثابت عنصر اصلی آنالیز هارمونیک است. یک عملگر خطی T داریم که توابع متناوب را به توابع متناوب می‌برد و با انتقال‌ها جا به جا می‌شود. عملگر T باید e^{inx} را به مضرب خودش یعنی $b_n e^{inx}$ تبدیل کند، و ویژگی خطی بودن، فرمول

$$T\left(\sum c_n e^{inx}\right) = \sum b_n c_n e^{inx} \tag{۱۳}$$

را روی چند جمله‌ای‌های مثلثاتی نتیجه می‌دهد. تحت شرط مناسب کرانداری یا بسته بودن گراف T، (۱۳) به تمام توابع در دامنه‌ی T تعمیم می‌یابد. بنابراین سری فوریه ابزاری برای درک عملگرهای خطی که با انتقال‌ها جابه جا می‌شوند فراهم می‌کند، یعنی گروه انتقال‌ها را به عنوان تقارن‌ها در نظر می‌گیرد.

کاربرد دیگری از کاراکترهای ضربی

مدت باقی مانده از قرن نوزدهم شاهد پیشرفت‌های اندک دیگری در آنالیز هارمونیک مرتبط با کاراکترهای ضربی بود. کوشی حین تحقیق در مورد امواج آب، کار کردن با جواب‌های انتگرالی معادلات دیفرانسیل جزئی را شروع کرد و در ۱۸۱۷ معادلات متقابل

$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} g(x) cos(qx) dq$$

و

$$g(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} f(x) cos(qx) dx,$$

را منتشر کرد. مشخص نیست که آیا کوشی دستنویس فوریه مربوط به ۱۸۱۱ که حالتی از تبدیل معکوس فوریه برای تبدیل فوریه را در بر داشت رؤیت کرده بود یا نه. با نمادهای امروزی تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه غالباً به شکل

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-۲\pi i x y} dx \tag{۱۴a}$$

و

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy \tag{14b}$$

نوشته می‌شود.

کار دیگری که در ارتباط با تبدیل فوریه در قرن نوزدهم انجام شد، فرمول جمع‌بندی پواسون است که به شکلی صوری دو تابع (۱۴) را توسط رابطه‌ی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n),$$

به یکدیگر مربوط می‌سازد و نیز شکل گیری تبدیل ملین[1] است که حالتی از تبدیل فوریه یا تبدیل فوریه ـ لاپلاس است که بااعداد حقیقی ضربی مثبت به جای اعداد حقیقی جمعی نوشته می‌شود. در کاربردی مهم، ریمان از فرمول جمع‌بندی پواسون در یکی از اثبات‌هایش از معادله‌ی تابعی برای تابع ζ استفاده کرد. (خود معادله تابعی منتسب به اویلر است.) اما کارهای نظری اساسی‌تر با تبدیل فوریه باید منتظر انتگرال لبگ می‌ماندند که دست آورد قرن بیستم است.

در ۱۸۴۰ دیریکله قضیه‌ی خود را منتشر کرد مبنی بر این که تصاعد حسابی $an + b$ که در آن a و b نسبت به هم اول‌اند و n روی اعداد صحیح مثبت تغییر می‌کند، شامل تعداد نامتناهی عدد اول است. اثبات این قضیه، تعمیمی از قضیه‌ی اویلر برای تصاعدهای $4n + 1$ و $4n + 3$ است که کاراکترهای ضربی ω روی گروه ضربی G از اعداد اول نسبت به a را به جای کاراکترهای ضربی روی گروه اعداد اول نسبت به ۴ قرار می‌دهد. به هر ω یک کاراکتر دیریکله χ به پیمانه‌ی a متناظر می‌کنیم که به عنوان ترفیع ω به اعداد صحیح تعریف می‌شود و مقدار آن روی اعداد صحیحی که نسبت به a اول نیستند ۰ تعریف می‌شود. به جای دو تابع (۶) و (۷) توابع L دیریکله یعنی

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi_{p\ prime} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}$$

مورد استفاده قرار می‌گیرند که هر کدام متناظر است با یک کاراکتر دیریکله χ به پیمانه‌ی a. آنالیز هارمونیک به روشنی شامل فرمول معکوسی برای کاراکترهای ضربی از این نوع است: اگر f تابعی مختلط مقدار روی G باشد، آن گاه

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega} \left[\sum_{y \in G} f(y) \overline{\omega(y)} \right] \omega(x). \tag{15}$$

عامل کلیدی دیگری در اثبات وجود دارد، و آنالیز هارمونیک در آن جا نیز حضور دارد، هر چند کمتر مشهود است. اثبات اویلر برای $a = 4$ از این مطلب استفاده می‌کند که $L(1) \neq 0$، و دیریکله

---

1) Mellin

باید ثابت می‌کرد تمام توابع $L(s,\chi)$ در $s=۱$ ناصفر هستند. اثباتی از این ادعا با حاصل ضرب‌های تمام توابع L برای یک عدد ثابت a کار می‌کند و آن را به تابع ζ ی میدان تولید شده توسط اعداد گویا و $e^{۲\pi i/a}$ ربط می‌دهد؛ آنالیز هارمونیک در این یکی سازی نقش ایفا می‌کند. لذا صفر نشدن $L(s,\chi)$ در $s=۱$ وقتی نتیجه می‌شود که نشان دهیم تابع زتای این میدان در $s=۱$ یک قطب دارد.

بعدها ددکیند با کاراکترهای ضربی گروه (متناهی و آبلی) رده‌ی ایده‌آل[۱] حلقه‌ی اعداد صحیح جبری از یک میدان اعداد (توسیع متناهی اعداد گویا) کار کرد، و در ۱۸۸۲ وبر[۲] کاراکترهای ضربی برای یک گروه متناهی و آبلی دلخواه G را معرفی نمود. کاراکترهای ضربی G یک گروه $\hat{G}$ با عمل ضرب نقطه‌وار مقادیر آن‌ها تشکیل می‌دهند. کاراکترهای ضربی متمایز متعامدند به این معنی که $\sum_{x\in G}\omega(x)\overline{\omega'(x)}=۰$ برقرار، و فرمول معکوس (۱۵) معتبر است.

کاراکترهای ضربی در به کار بردن یک گروه ناآبلی از تقارن‌ها چندان مفید نیستند. یک کاراکتر ضربی باید هر جا به جاگر $xyx^{-۱}y^{-۱}$ را به ۱ بفرستد. برای یک گروه که توسط جا به جاگرهایش تولید شده است، مثلاً یک گروه غیر آبلی ساده، نتیجه می‌شود که ۱ تنها کاراکتر ضربی است. برای این که بتوانیم آنالیز هارمونیک را در ارتباط با گروه‌های غیر آبلی به کار ببریم، باید تعمیمی چند بعدی از کاراکتر ضربی، یعنی نمایش گروه را ارائه دهیم. در بخش دوم نمایش‌های گروه و نقش آن‌ها در آنالیز هارمونیک را بررسی می‌کنیم.

مراجع

[1] I. Grattan-Guinness,. *Joseph Fourier, 1768-1830*, MIT Press, Cambridge, MA,1972.

[2] K.I. Gross, *On the evolution of noncommutative harmonic analysis*, Amer. Math. Monthly, **85**(1978), 525-545.

[3] G. W. Macky, *Hamonic analysis as the exploitation of symmetry,-a historical survey,* Rice Univ. Stud. **64**(1978), 73-228.

[4] A. Weil, *Number theory: An approach through history, from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, MA, 1983.

[5] N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge Univ. Press, 1993.

1) ideal class group 2) Weber

مترجم: احمد صفاپور
گروه ریاضی دانشگاه ولی عصر رفسنجان
پست الکترونیک : safapour@mail.vru.ac.ir
ویراستار: محمد جلوداری ممقانی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (پاییز ۱۳۸۸) صص. ۴۱ تا ۵۴

چگونه می‌توان لم فارکاش را اثبات کرد؟

احسان منبتی و حسین تقی‌زاده کاخکی

چکیده

قضیه‌ی فارکاش یکی از قضایای آلترناتیو[1] (یا این یا آن) است که کاربردهای مختلفی از جمله اثبات شرایط بهینگی در برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی و اثبات قضایای دوگانی در برنامه‌ریزی خطی دارد. در این مختصر به بیان این قضیه، برخی صورت‌های معادل و اثبات‌های مختلفی از آن می‌پردازیم.

مقدمه

قضیه‌ی فارکاش[2] به خودی خود قضیه‌ی چندان عمیقی در ریاضیات نیست اما کاربردهای آن در قضایای دیگر نتایج جالب و عمیقی داشته است. این قضیه‌که بعضاً لم نیز گفته می شود درباره‌ی دستگاه نامعادلات خطی است که عمدتاً پس از استفاده از آن توسط کوهن[3] و تاکر[4] در اثبات شرط لازم برای بهینگی مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی به شهرت رسید. گیولا فارکاش* استاد فیزیک نظری در دانشگاه کالاژوار[5] و عضو آکادمی علوم مجارستان بوده و عمده‌ی شهرتش به خاطر کارهایی است که در مکانیک و ترمودینامیک انجام داده است. وی این لم را نیز در ارتباط با مسائل عملی که در مکانیک داشته اثبات و از آن در مسأله‌ی تعادل مکانیکی[6] استفاده کرده است. بنا به نوشته‌ی پرکوپا[7] [۲۱] در اثبات نخست وی از این قضیه که در سال‌های ۱۸۹۴ و ۱۸۹۵

---

1) Alternative

۲) Farkas در زبان مجاری فارکاش تلفظ می‌شود به این دلیل ما به جای تلفظ انگلیسی آن یعنی فارکاس از تلفظ اصلی استفاده کرده‌ایم.

3) Kuhn 4) Tucker 5) Kolazsvár 6) Mechanical equilibrium 7) Prekopa

*) نام کوچک فارکاش در زبان مجاری گیولا (Gyula) و ترجمه‌ی آلمانی آن ژولیوس (Julius) است. تا اوایل قرن گذشته (۲۰ میلادی) متداول بوده که در ترجمه‌ی مقالات نام مؤلفین هم ترجمه می‌شده است به این دلیل در برخی مراجع G. Farkas و در برخی J. Farkas ذکر شده است.

به چاپ رسیده و همچنین در اثبات دوم وی در سال ۱۸۹٦ و ترجمه‌ی آلمانی آن در سال ۱۸۹۹ نواقصی وجود دارد. اما نخستین اثبات کامل این قضیه در سال ۱۸۹۸ در مجارستان و در سال ۱۸۹۹ در آلمان به چاپ رسیده است. این اثبات در مقاله‌ای که بیشتر از وی نقل می‌شود در سال ۱۹۰۱ به چشم می‌خورد.[۱] بین سال‌های ۱۹۰۲ و ۱۹۱۷ میلادی فارکاش مقاله‌ی دیگری در مورد نامعادلات به چاپ نرسانده است. اما در سال ۱۹۱۷ پس از آن که هار[۲] قضیه‌ی فارکاش را به دستگاه‌های ناهمگن تعمیم داد فارکاش مجدداً به این مسأله بر می‌گردد و مقالات جدیدی در این زمینه به چاپ می‌رساند. اما هار معتقد است که فارکاش و مینکوفسکی[۳] نظریه‌ی نامعادلات خطی را ابداع کرده‌اند، البته کارهای فوریه[۴] و گاوس[۵] را که قبل از آن‌ها در این زمینه انجام شده است، نمی‌توان نادیده گرفت. ولی فارکاش در مقاله‌ی سال ۱۹۰۱ خود معتقد است که وی نخستین فردی است که به اهمیت کاربرد نامعادلات خطی همگن پی برده است [۲۱]. تاریخچه‌ای از سیر تحول تحقیقات انجام شده در این زمینه را در [۲۴] نیز می‌توان یافت.

دانتزیگ[٦] [۸] نیز در مورد اهمیت و تاریخچه‌ی دستگاه نامعادلات خطی از قول ماتزکین[۷] ذکر می‌کند که در دوره‌ی ۱۹۰۰ تا ۱۹۳٦ تنها ۳۰ مقاله و در مجموع نزدیک ۴۲ مقاله در این مورد چاپ شده بوده است. به هر تقدیر در این نکته که ظهور نظریه‌ی بازی‌ها و برنامه‌ریزی خطی نقطه‌ی عطفی در کاربرد دستگاه‌های نامعادلات خطی به شمار می‌آید، اتفاق نظر وجود دارد.

قضایایی نظیر قضیه‌ی فارکاش به عنوان قضایای آلترناتیو (یا این یا آن) شناخته می‌شوند. در این گونه قضایا همان طور که از نام آن‌ها پیداست، دو دستگاه معرفی می‌شوند که وجود جواب برای یکی مستلزم عدم وجود جواب برای دیگری است. معمولاً اثبات یک طرف بسیار آسان است اما اثبات طرف دیگر چندان ساده نیست. قضایای گوردان[۸]، اشتیمکه[۹]، تاکر و ماتزکین از جمله این گونه قضایا هستند. برای اطلاع بیشتردر مورد قضایای آلترناتیو خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به [۹]، [۱۹] و [۲۴] مراجعه کند.

اما آنچه ما را بر آن داشت تا در مورد این قضیه این مختصر را بنویسیم توجهی است که به آن شده است.[۱۰] تنوع اثبات‌های ارائه شده و کاربردهای جدید آن، گواهی بر این موضوع است.

---

۱) همین مرجع در برخی مقالات ۱۹۰۲ ذکر شده است.

Theorie der einfachen ungleichungen, J. Reine Angew. Math., 124 (1901) 1-27.

2) Haar 3) Minkowsky 4) Fourier 5) Gauss 6) Dantzig 7) Motzkin 8) Gordan 9) Stiemke

۱۰) حتی در شعر آهنگی از گروه موسیقی Aardvarks (مورچه‌خواران) نیز ذکری از لم فارکاش به میان آمده است:

Farkas lemma told you so
stay out of the cone
Farkas lemma told you so
stay beyond the cone
http://www.lyricsmode.com/lyrics/a/aardvarks/farkas_lemma.html

به عنوان مثال در [۵] به اثبات‌های مختلفی از آن که به سه دسته الگوریتمی، هندسی و جبری تقسیم می‌شوند، اشاره شده است. از جمله اثبات‌های الگوریتمی، اثبات ارائه شده توسط پرکوپا، برویدن[1]، بازارا[2] و همکاران، بلند[3] و دکس[4] را می‌توان ذکر کرد. پرکوپا از قاعده‌ی الفبایی و بِلَند از قاعده‌ی کمترین اندیس خود برای پیشگیری از به دور افتادن الگوریتم استفاده می‌کنند. آن‌ها بدین وسیله قضیه را در حالت‌های تبهگن نیز اثبات کردند و این دقیقاً همان نقیصه‌ای است که در اثبات نخست فارکاش به روایت پرکوپا نادیده گرفته شده بوده است. برخی از این گونه اثبات‌ها از جمله اثبات‌های ارائه شده توسط کاواتال[5] و زیگلر[6] از روش حذفی فوریه ـ ماتزکین استفاده می‌کنند.
ایده‌ی اثبات‌های هندسی بر مبنای قضیه‌ی تفکیک[7] استوار است. همچنین در آن‌ها از خاصیت نزدیک‌ترین نقطه[8] برای مجموعه‌های محدب استفاده می‌شود. از جمله‌ی این اثبات‌ها می‌توان به اثبات ارائه شده توسط فلچر[9] و بازارا و همکاران اشاره کرد.
بالاخره روش‌های اثبات ارائه شده توسط وجدا[10]، تاکر و گود[11] جزء روش‌های جبری محسوب می‌شوند [۵].
از جنبه‌های مختلف، تعمیم‌هایی برای لم فارکاش وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان صورت ناهمگن آن را در نظر گرفت که در اینجا به عنوان لم ۳ بیان شده است. کال[12] [۱۴] قضیه‌ی فارکاش را برای متغیرهای مختلط بررسی کرده است.

همین‌طور تعمیمی از صورت همگن آن برای فضاهای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب وجود دارد که در [۶] صورت ناهمگن آن نیز بیان شده است. پیش از این همان طور که اسپوزیتو[13] در [۲۷] بدان اشاره کرده است لم فارکاش بر روی مخروط‌ها تعمیم داده شده بود. سوارتز[14] [۲۶] برخی از تعمیم‌های لم فارکاش را با استفاده از قضیه‌ای در فضاهای هاسدورف موضعاً محدب به دست می‌آورد. بارتل[15] [۲] قضیه‌ی فارکاش را برای فضاهای بابعد نامتناهی بررسی می‌کند؛ وی همچنین تعمیمی از قضیه فارکاش را با فرموله کردن آن در دو فضای برداری در [۳] ارائه می‌دهد.
راماناتان[16] و سیواکومار[17] [۲۲] قضیه‌ی فارکاش را بر روی فضاهای ضرب داخلی نامعین نیز ارائه داده‌اند . در [۱۳] به صورت غیرخطی این لم اشاره شده است که کاربردهایی در بهینه‌سازی سراسری و کمترین مربعات دارد. گلور[18] [۱۰] و گلور و دیگران [۱۱] لم فارکاش را برای مسائل برنامه‌ریزی شبه‌مشتق‌پذیر بیان کرده‌اند.
بالاخره قابل ذکر است که لَسِر[19] لم فارکاش را برای متغیرهای صحیح اثبات می‌کند [۱۶] وی همچنین در مقاله‌ی دیگری تعمیمی از این لم را برای دستگاه‌های خطی روی مخروطی از ماتریس‌های معین مثبت ارائه کرده است [۱۷].

---

1) Broyden 2) Bazaraa 3) Bland 4) Dax 5) Chavatal 6) Ziegler 7) Separation Theorem 8) Nearest point property 9) Fletcher 10) Vajda 11) Good 12) Kaul 13) Sposito 14) Swartz 15) Bartl 16) Ramanathan 17) Sivakumar 18) Glover 19) Lasserre

چند صورت معادل قضیهٔ فارکاش

در ادامه نخست به بیان قضیه‌ی فارکاش و صورت‌های معادل آن می‌پردازیم؛ سپس به چند اثبات از این قضیه از جمله ۳ اثبات جالبی که در [۱۸] آمده و هولدر [۱۲] در نقدی بر کتاب مذکور آنها را «جواهرهای کوچکی از تفکر و خلاقیت» می خواند اشاره خواهیم کرد.
قبل از بیان قضیه‌ی فارکاش یک تعریف می‌آوریم. این تعریف و قضیه‌ی بعدی را می توان در [۲۵] یافت.

دستگاه نامعادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$S : \begin{cases} Ax > a \\ Bx \geq b \\ Cx = c \end{cases}$$

که در آن A، B و C ماتریس‌هایی $m \times n$ و $a, b, c \in \mathbb{R}^m$.
فرض کنیم ρ یکی از روابط $=$، $\geq$ یا $>$ باشد. گوییم رابطه‌ی

$$Dx \ \ \rho \ \ d \tag{۱۰}$$

یک رابطه‌ی نتیجه‌ای از S است هرگاه هر x که در S صدق می‌کند در (۱) نیز صدق کند.
می خواهیم بدانیم چگونه می‌توان یک رابطه‌ی نتیجه‌ای از S به دست آورد. به راحتی می‌توان اثبات کرد که هر یک از اعمال زیر یک نتیجه از S به دست می‌دهند:

۱ $-$ **ترکیب خطی**: فرض کنیم $u, v, w \in \mathbb{R}$ و $u, v \geq 0$ در این صورت اگر

$$(D, d) = u(A, a) + v(B, b) + w(C, c),$$

آنگاه $Dx \ \rho \ d$ یک نتیجه از S است؛ که در آن

$$\rho = \begin{cases} > & u \neq 0 \text{ اگر} \\ \geq & u = 0, v \neq 0 \text{ اگر} \\ = & u = 0, v = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

۲ $-$ **تضعیف**[1]: جایگزین کردن $>$ با $\geq$ یا جایگزین کردن $=$ با $\geq$؛ یا کوچک کردن مقدار سمت راست. به بیان دقیق‌تر، دو رابطه‌ی

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ \ \rho_1 \ \ a_0$$

و

$$a_0 \ \ \rho_2 \ \ \bar{a}_0$$

1) Weakening

را می‌توان با رابطه‌ی

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ \ \rho_3 \ \ \bar{a}_0$$

جایگزین کرد؛ که در آن اگر یکی از ρ_1 یا ρ_2، $>$ باشد ρ_3 را $>$ و اگر هر دو $\geq$ باشند ρ_3 را $\geq$ اختیار می‌کنیم.

۳− **جایگزینی**[1]: معادله‌ی $Bx = b_0$ را می‌توان از دو نامعادله‌ی $Bx \geq b_0$ و $-Bx \geq -b_0$ نتیجه گرفت.

با استفاده از این سه قاعده می‌توان تمام روابط نتیجه‌ای را بدست آورد. قضیه‌ی زیر این امر را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۱. اگر دستگاه S غیر تهی باشد آنگاه هر نامعادله‌ی نتیجه‌ای از S را می‌توان با ترکیب خطی و تضعیف به دست آورد. هر معادله نتیجه‌ای را نیز می‌توان از دو نامعادله نتیجه‌ای به دست آورد.

اکنون با استفاده از تعریف فوق می‌توان صورتی از قضیه‌ی فارکاش را بیان کرد:

قضیه‌ی ۲. هر نتیجه‌ی همگن $Dx \geq 0$ از دستگاه همگن $S : Ax \geq 0$ ترکیبی خطی از نامعادلات S با ضرایب نامنفی است.

این صورت اصلی لم فارکاش است که در [۲۱] نیز بدان اشاره شده است.
قضیه‌ی فارکاش صورت‌های معادل دیگری نیز دارد که از میان آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

لم ۱. دستگاه $Ax \leq b, \ \ x \geq 0$ جواب دارد اگر و فقط اگر به ازای هر $y \in \mathbb{R}^m$ که $y \geq 0$ و $y^TA \geq 0$ داشته باشیم $y^Tb \geq 0$.

لم ۲. دستگاه $Ax \leq b$ جواب دارد اگر و تنها اگر برای هر بردار نامنفی مانند y با شرط $y^TA = 0$ داشته باشیم $y^Tb \geq 0$.

لم اخیر که خود به عنوان یکی از قضایای آلترناتیو تلقی می‌شود توسط گِیل[2] ارائه شده است [۱۹]. صورت معادل دیگر به صورت زیر است:

لم ۳. فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ شدنی باشد. در این صورت هر جواب x از آن، در رابطه‌ی $c^Tx \leq \delta$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر برداری مانند $y \geq 0$ موجود باشد به طوری که $y^TA = c^T$ و $y^Tb \leq \delta$.

این لم را می‌توان به عنوان صورت ناهمگن لم فارکاش تلقی کرد. در واقع با فرض $\delta = 0$ و $c = 0$ لم فارکاش بدست می‌آید.
اما در اغلب مقالات و کتب جدید از جمله در [۴] این لم به صورت زیر بیان می‌شود.

1) Coupling 2) Gale

قضیه‌ی ۳. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد و $b \in \mathbb{R}^m$. در این صورت یک و فقط یکی از دو گزاره‌ی زیر درست است:

(۱) برداری مانند $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $Ax = b$ و $x \geq 0$،

(۲) برداری مانند $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^T A \geq 0$ و $y^T b < 0$.

اثبات یک طرف آسان است؛ فرض کنیم دستگاه (۲) جواب داشته باشد. بنابراین $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^T A \geq 0$ و $y^T b < 0$. در این صورت اگر x جوابی از دستگاه (۱) باشد آنگاه

$$0 \leq (y^T A)x = y^T b < 0$$

که تناقض است.

اما اثبات طرف دیگر چندان آسان نیست؛ قبل از این که به ارائه‌ی چند اثبات بپردازیم اجازه دهید به تعبیری هندسی از قضیه‌ی فوق اشاره کنیم. پیش‌تر بیان شد که در برهان‌های هندسی از قضایای تفکیک و خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب استفاده می‌شود. خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب بیان می‌کند که اگر $C \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای محدب و بسته باشد و $b \notin C$ آنگاه نقطه‌ای مانند $z \in C$ وجود دارد که نزدیکترین نقطه به b است. به عبارت دیگر

$$\|z - b\| = \min_{x \in C} \|x - b\|.$$

قضیه‌ی تفکیک که صورت نامتناهی آن همان قضیه هان ــ باناخ است بیان می‌کند که اگر S زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^n$ باشد و $p \in \mathbb{R}^n$ آنگاه یا p متعلق به S است و یا ابرصفحه‌ای مانند H وجود دارد به طوری که p را از S جدا می‌کند یعنی p در یک طرف H و S در طرف دیگر آن قرار می‌گیرد.

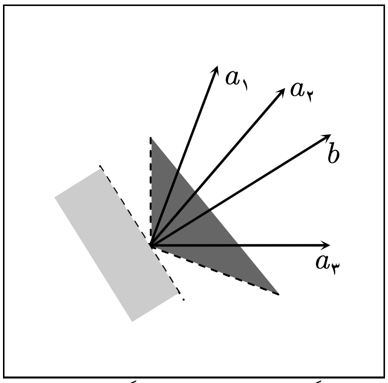
اگر ستون‌های A را با a_j نشان دهیم آنگاه یک تعبیر هندسی مجموعه‌ی

$$C = \left\{ Ax = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ : \ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\}$$

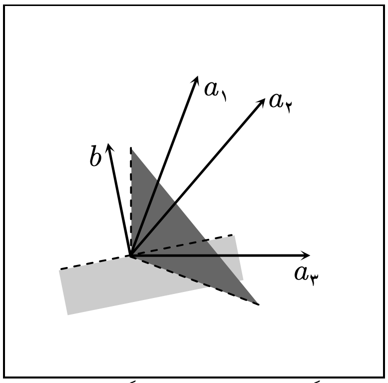
مخروط محدبی است که از بردارهای a_j درست می‌شود در نتیجه دستگاه $Ax = b$ با شرط $x \geq 0$ جواب دارد اگر و فقط اگر b متعلق به مخروط C باشد. از طرف دیگر اگر دستگاه (۱) جواب نداشته باشد یعنی b متعلق به مخروط C نباشد چون C محدب است پس بنا بر قضیه‌ی تفکیک ابرصفحه‌ای مانند

$$h = \{z \in \mathbb{R}^m \ : \ y^T z = 0\}$$

وجود دارد که b را از این مخروط جدا می‌کند. یعنی $y^T b < 0$ و $y^T a_j \geq 0$، برای $j = 1, \ldots, n$. به عبارت دیگر y جوابی از دستگاه (۲) است (شکل ۱).



(الف) دستگاه (۱) جواب دارد و دستگاه (۲) جواب ندارد



(ب) دستگاه (۲) جواب دارد و دستگاه (۱) جواب ندارد

شکل ۱ : تعبیر هندسی قضیه‌ی فارکاش

برهان‌ها

برهان اول. بنا بر قضیه‌ی ۱ هر نتیجه‌ای با انجام یکی از ۳ عمل به دست می‌آید. چون سمت راست صفر است پس تضعیف نداریم و چون معادله نداریم پس عمل ۳ را هم نداریم؛ و فقط ترکیب خطی می‌ماند.

تاکر در سال ۱۹۵٦ قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی اول وجودی معروف است ارائه داد [۱۹].

لم ۴. دستگاه‌های

(۱) $Ax = ۰ \ , \ x \geq ۰$ و

(۲) $y^T A \geq ۰$ ،

جواب‌های شدنی مانند $\bar{y}$ و $\bar{x}$ دارند به طوری که $\bar{x}^T + \bar{y}^T A > ۰$.

برویدن در [۵] قضیه‌ای را اثبات می‌کند که لم تاکر و برخی از قضایای آلترناتیو از جمله لم فارکاش به راحتی با استفاده از آن به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که در یادداشتی در مورد این مقاله روس[1] و ترلاکی[2] [۲۳] نشان می‌دهند که قضیه‌ی برویدن را می‌توان به عنوان یک قضیه‌ی آلترناتیو در نظر گرفت و آن را با استفاده از قضیه‌ی فارکاش اثبات کرد. آنها همچنین نشان می دهند که قضیه‌ی اصلی وی را نیز می‌توان از قضیه‌ی تاکر نتیجه گرفت.

اینک با استفاده از این لم، اثباتی برای لم فارکاش ارائه خواهیم داد.

---

1) Roos 2) Terlaky

برهان دوم. فرض کنیم دستگاه (۲) جواب شدنی نداشته باشد. دستگاه‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$(A \quad -b)\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \circ\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \geq \circ \tag{۱۱}$$

$$y^T\,(A \quad -b) \geq \circ \tag{۱۲}$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$. بنا بر لم تاکر، دستگاه‌های (۲) و (۳) به ترتیب جوابی مانند $(\bar{x} \quad \bar{\alpha})^T$ و $\bar{y}$ دارند که

$$(\bar{x} \quad \bar{\alpha})^T + \bar{y}^T\,(A \quad -b) > \circ$$

پس

$$\bar{x}^T + \bar{y}^T A > \circ \ \ ,\ \ \bar{\alpha} - \bar{y}^T b > \circ. \tag{۱۳}$$

چون $\bar{y}$ جواب (۲۱) است و دستگاه (۲) جواب ندارد لذا $\bar{y}^T b = \circ$ ؛ و از (۳۱) نتیجه می‌شود که $\bar{\alpha} > \circ$. از طرفی بنا بر (۱۱) داریم $A\bar{x} - b\bar{\alpha} = \circ$ بنابراین $x = \frac{\bar{x}}{\bar{\alpha}} \geq \circ$ جواب دستگاه (۱) است.

همان طور که پیش‌تر اشاره شد برهان‌های دیگری نیز با استفاده از خاصیت نزدیکترین نقطه یک مجموعه محدب بسته وجود دارد. این خاصیت بنا به گفته‌ی کمرنیک[1] نقش کلیدی در اثبات‌های هندسی دارد. وی در [۱۵] یک اثبات استقرایی ساده برای وجود خاصیت نزدیک‌ترین نقطه به مخروط محدب تولید شده با تعداد متناهی بردار بیان کرده است.

در ادامه یکی دیگر از اثبات‌های هندسی را بررسی می‌کنیم. دَکس در [۷] ابتدا لم زیر را ثابت می‌کند.

لم ۵. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n$ و $r = Ax - b$. در این صورت x یک جواب مسأله کمترین مربعات زیر است

$$\mathrm{LS}: \qquad \min_{x \geq \circ} \ \ \|Ax - b\|^{۲}$$

است اگر و تنها اگر

$$x \geq \circ\ ,\ r^T A \geq \circ\ ,\ r^T A x = \circ.$$

با توجه به خاصیت نزدیک‌ترین نقطه برای مجموعه‌های محدب بسته، مسأله‌ی LS جواب دارد. اکنون می‌توان با استفاده از این قضیه اثبات دیگری از لم فارکاش را ارائه کرد.

برهان سوم. فرض کنیم x جواب LS باشد و $r = Ax - b$. اگر $r = \circ$ آنگاه x جوابی برای دستگاه (۱) است؛ در غیر این صورت بنا بر لم اخیر داریم $r^T A \geq \circ$ و به علاوه

$$r^T b = r^T(Ax - r) = r^T Ax - \|r\|^{۲} = -\|r\|^{۲} < \circ.$$

بنابراین r جواب دستگاه (۲) است. □

1) Komornik

این دیدگاه هندسی ارتباط قضیه‌ی فارکاش را با دوگانی بهتر نشان می‌دهد. بدین ترتیب که کمترین فاصله از نقطه‌ی b تا مجموعه‌ی C برابر با بیشترین فاصله‌ای است که b می‌تواند با ابرصفحه‌ی جداکننده‌ی آن از C داشته باشد.

قضیه‌ی فارکاش دیگری دارد که از روش حذفی فوریه ــ ماتزکین استفاده می‌کند. از این روش برای حل دستگاه‌های نامعادلات استفاده می‌شود. توضیحات کاملی در مورد این روش را می‌توان در [۲۰] یافت.

قبل از ارائه‌ی برهان به یک لم نیاز داریم که اثبات آن در [۱۸] آمده است.

لم ٦. فرض کنیم $Ax \leq b$ دستگاهی با $n \geq 1$ متغیر و m نامعادله باشد. در این صورت دستگاهی مانند $A'x' \leq b'$ با $n-1$ متغیر و حداکثر $\max\{m, \frac{m^2}{4}\}$ نامعادله با خواص زیر وجود دارد

۱ $Ax \leq b$ جواب دارد اگر و فقط اگر $A'x' \leq b'$ جواب داشته باشد و

۲ هر نامعادله‌ی $A'x' \leq b'$ ترکیب خطی مثبتی از (نه لزوماً همه‌ی) نامعادلات $Ax \leq b$ است.

این لم نشان می‌دهد که می‌توان از یک دستگاه نامعادلات، یک دستگاه نامعادلات با یک متغیر کمتر به دست آورد به طوری که جواب‌های دستگاه بزرگ‌تر از جواب‌های دستگاه کوچک‌تر به دست آیند. از این رو لم اخیر شرایط را برای استفاده از یک روند استقرایی برای اثبات لم ۲ (که صورت معادل لم فارکاش است) فراهم می‌کند.

برهان چهارم. فرض کنیم $Ax \leq b$ جواب نداشته باشد. بردار y را به گونه‌ای می‌سازیم که

$$y \geq 0, \ \ y^T A = 0, \ \ y^T b < 0. \tag{۱۴}$$

به استقرا روی تعداد متغیرها عمل می‌کنیم. ابتدا فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ هیچ متغیری نداشته باشد. یعنی $b \leq 0$ و برای i ای $b_i < 0$. قرار می‌دهیم $y = e_i$ و به وضوح چنین انتخابی در شرایط (۵) صدق می‌کند.

حال فرض کنیم دستگاه $Ax \leq b$ حداقل یک متغیر داشته باشد. با انجام یک گام از روند حذفی فوریه ــ ماتزکین با استفاده از لم ٦ به دستگاه نشدنی $A'x' \leq b'$ با یک متغیر کمتر دست می‌یابیم. بنا به فرض استقرا برای دستگاه جدید، برداری همچون y' موجود است که در شرایط (۵) صدق می‌کند. از آنجا که نامعادلات $A'x' \leq b'$ ترکیب خطی مثبت نامعادلات اولیه هستند ماتریسی $m \times m$ مانند M با درایه‌های نامنفی موجود است که

$$(\,0 \quad A'\,) = MA, \quad b' = Mb.$$

ادعا می‌کنیم $y = M^T y'$ در شرایط (۵) صدق می‌کند. در واقع داریم

$$y^T A = y'^T MA = y'^T (\,0 \quad A'\,) = 0^T,$$

و

$$y^T b = y'^T M b = y'^T b' < 0.$$

از آنجا که $y' \geq 0$ و درایه‌های M نامنفی‌اند به راحتی دیده می‌شود که $y \geq 0$. □

برهان دیگری از قضیهٔ فارکاش با استفاده از الگوریتم سیمپلکس، یکی از اثبات‌های متداول است که در [۴] بدان اشاره شده است.

برهان پنجم. فرض کنیم دستگاه (۱) فاقد جواب باشد. مسأله‌ی $\mathrm{P}:\ \min\{b^T w \ :\ A^T w \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که صفر مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی P است. با استفاده از تغییر متغیر $w = w' - w''$ که $w', w'' \geq 0$ و با اضافه کردن متغیرهای کمبود s به نامعادلات P، آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$\mathrm{P}' : \quad \begin{aligned} \min \quad & b^T w' - b^T w'' \\ & A^T w' - A^T w'' - s = 0 \\ & w', w'', s \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنیم $A^T = [a'_1 \ldots a'_m]$. چون $s = w' = w'' = 0$ یک جواب بهینه‌ی فرین برای P' است، با شروع از s به عنوان جواب پایه‌ی اولیه و اعمال قوانین ممانعت از دور، می‌توان به یک پایه شدنی بهینه مانند B دست یافت که $xa'_j - b_j \leq 0$ برای هر $j = 1, \ldots, n$؛ که در آن $x = b_B^T B^{-1}$ و b_B نشان دهنده‌ی ضرایب تابع هدف نظیر متغیرهای پایه است. چون برای تمام متغیرها داریم $xa'_j - b_j \leq 0$ پس $xA^T - b^T \leq 0$، $-xA^T + b^T \leq 0$ و $-x^T \leq 0$. بدین ترتیب بردار $x^T \in \mathbb{R}^n$ را به دست آوردیم که $Ax^T = b$ و $x^T \geq 0$ و اثبات بدین ترتیب کامل می‌شود.□

از روش قاعده‌ی b نیز برای حل دستگاه نامعادلات استفاده می‌شود. این روش در واقع همان الگوریتم سیمپلکس دوگان با استفاده از قاعده‌ی ممانعت از دور بلاند[1] است که برای یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف صفر و دستگاه نامعادلات به عنوان قیود به کار می‌رود. از این رو می‌توان با استفاده از این قاعده اثباتی مشابه و البته کمی ساده‌تر برای لم فارکاش ارائه داد. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱] مراجعه کرد.
یکی از قضایای اصلی و پرکاربرد برنامه‌ریزی خطی، قضیه‌ی دوگانی است. در برهان بعدی از این قضیه استفاده شده است.

1) Blond

برهان ششم. مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی اولیه

$$\mathrm{P}: \quad \begin{array}{ll} \min & \circ x \\ & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{array}$$

و دوگان آن

$$\mathrm{D}: \quad \begin{array}{ll} \max & y^T b \\ & y^T A \leq \circ \end{array}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنیم دستگاه (۱) فاقد جواب شدنی باشد. بنابراین مسأله‌ی P نشدنی است. لذا بنا بر قضیه‌ی اساسی دوگانی، مسأله‌ی ثانویه یا بی‌کران است و یا نشدنی. چون $y = \circ$ جوابی شدنی برای مسأله‌ی D است پس مسأله‌ی دوگان بی‌کران است. در نتیجه $y^T A \leq \circ$ دارای جواب است. پس دستگاه (۲) شدنی است.

اثبات حالتی خاص از یک قضیه و ترکیب آن با ابزاری دیگر و سپس به دست آوردن اثبات حالت کلی‌تر، یکی از روش‌هایی است که بعضاً از آن استفاده شده است. در این بخش برهانی ارائه خواهد شد که از این روند پیروی می‌کند.

ابتدا حالت خاصی از قضیه فارکاش را که برهانی ساده دارد بررسی می‌کنیم سپس با استفاده از ابزاری به نام دستگاه‌های به طور مینیمال نشدنی[1] حالت کلی‌تر را اثبات خواهیم کرد.

یادآوری می‌کنیم که دستگاه $Ax \leq b$ از m نامعادله را به طور مینیمال نشدنی گویند هرگاه‌این دستگاه جواب نداشته باشد ولی هر دستگاهی که با حذف یک نامعادله از آن به دست می‌آید دارای جواب باشد.

لم ۷. دستگاه $Ax = b$ جواب دارد اگر و تنها اگر برای هر بردار $y \in \mathbb{R}^m$، اگر $y^T A = \circ$ آن‌گاه $y^T b = \circ$.

برهان. اثبات یک طرف حکم بسیار ساده است. فرض کنیم x جوابی از $Ax = b$ باشد و $y^T A = \circ$. در این صورت

$$y^T b = y^T A x = \circ x = \circ.$$

حال فرض کنیم $Ax = b$ فاقد جواب است. بردار y را به گونه‌ای می‌سازیم که $y^T A = \circ$ و $y^T b \neq \circ$ (در واقع $y^T b < \circ$). فرض کنیم رتبه A برابر r باشد. ماتریس $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. چون ستون آخر، ترکیب خطی سایر ستون‌ها نیست پس رتبه‌ی این ماتریس $r + ۱$ است. به دلیل مشابه ماتریس $\begin{pmatrix} A & b \\ \circ & -۱ \end{pmatrix}$ نیز دارای رتبه‌ی $r + ۱$ و در نتیجه $\begin{pmatrix} \circ & -۱ \end{pmatrix}$ ترکیب خطی سطرهای $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ است. ضرایب این ترکیب خطی برداری مانند $y \in \mathbb{R}^m$ به وجود می‌آورد که

1) Minimally infeasible systems

$y^TA = \circ$ و $y^Tb = -\mathrm{۱}$. اثبات بدین ترتیب کامل می‌شود. □

لم بعد در مورد دستگاه‌های به طور مینیمال نشدنی است که اثبات آن را می‌توان در [۱۸] یافت.

لم ۸. فرض کنیم $Ax \leq b$ یک دستگاه به طور مینیمال نشدنی از m نامعادله باشد. زیردستگاه حاصل از حذف محدودیت iام از آن را با $A^{(i)}x \leq b^{(i)}$ نمایش می‌دهیم $(i = \mathrm{۱}, \cdots, m)$. در این صورت برای هر i، برداری مانند $\tilde{x}^{(i)}$ موجود است به طوری که $A^{(i)}\tilde{x}^{(i)} = b^{(i)}$.

اینک می‌توان اثبات دیگری از لم ۲ را ارائه کرد.

برهان هفتم. فرض کنیم $Ax \leq b$ فاقد جواب است و $A^T = (a_1^T, \cdots, a_m^T)$. می‌توانیم فرض کنیم این دستگاه به طور مینیمال نشدنی است (زیرا زیردستگاهی به طور مینیمال نشدنی از آن وجود دارد و در این حالت کافیست مؤلفه‌هایی از y را که نظیر محدودیت‌های حذف شده هستند صفر در نظر بگیریم). در این صورت دستگاه $Ax = b$ نیز جواب ندارد. بنا بر لم ۷ بردار $y \in \mathbb{R}^m$ موجود است به طوری که $y^TA = \circ$ و $y^Tb < \circ$. پس کافیست نشان دهیم $y \geq \circ$. فرض کنیم $i \in \{\mathrm{۱}, \cdots, m\}$ از این پس ثابت باشد. با استفاده از لم ۸، $x^{(i)}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $A^{(i)}x^{(i)} = b^{(i)}$. یعنی $a_jx^{(i)} - b_j = \circ$ برای $j \neq i$. چون $x^{(i)}$ برای دستگاه $Ax \leq b$ شدنی نیست پس $a_ix^{(i)} - b_i \geq \circ$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
y_i(a_ix^{(i)} - b_i) &= \sum_{j=1}^{m} y_j(a_jx^{(i)} - b_j) \\
&= y^T(Ax^{(i)} - b) \\
&= y^TAx^{(i)} - y^Tb \\
&= -y^Tb \\
&> \circ
\end{aligned}
$$

پس $y \geq \circ$. برهان کامل است. □

مراجع

[1] Avis, D., and B. Kaluzny, Solving inequalities and proving Farkas' lemma made easy, *The Mathematical Association of America Monthly*, Vol. 111 (Feb 2004), pp. 152-157.

[2] Bartl, D., Farkas lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite dimensional spaces: a purely linear algebraic approach, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 55, No. 4 (2007), pp. 327-353.

[3] Bartl, D., A short algebraic proof of Farkas lemma, *SIAM J. Optim.*, Vol. 19, No. 1 (2008), pp. 234-239.

[4] Bazaraa, M. S., Jervis, J. J., and Sherali, H. D., *Linear Programming and Network Flows, 3^{rd} ed*, Wiley, 2005.

[5] Broyden,C. G., A simple algebraic proof of Farkas's lemma and related theorems, *Optimization Methods and Software*, Vol. 8, Iss. 3 (1998), pp. 185-199.

[6] Braunschweiger, C. C., An extension of the nonhomogeneous Farkas theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 10 (Dec. 1962), pp. 969-975.

[7] Dax, A. , An elementary proof of Farkas' lemma, *SIAM Rev.* , Vol. 39, No. 3 (Sep. 1997), pp. 503-507.

[8] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[9] Dantzig, G. B., and Thapa, M. N. *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Glovar, B. M., A generalized Farkas lemma with applications to quasidifferentiable programming, *Zeitschrift für Operations Research*, Vol. 26 (1982), pp. 125-141.

[11] Glovar, B. M., Jeyakumar, V., and Oettli, W., A Farkas lemma for difference sublinear systems and quasidifferentiable programming, *Mathematical Programming*, Vol. 63 (1994), pp. 109-125.

[12] Holder, A., Reviews, *American Mathematical Monthly*, Vol. 116, No. 5 (May 2009), pp. 471-476.

[13] Jeyakumar, V., and Glover, B. M., Nonlinear extensions of Farkas' lemma with applications to global optimization and least squares, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 20, No. 4 (Nov. 1995), pp. 818-837.

[14] Kaul, R. N., On linear inequalities in complex space, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 77, No. 9 (Nov., 1970), pp. 956-960.

[15] Komornik, V., A simple proof of Farkas' lemma, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 105, No. 10 (Dec. 1998), pp. 949-950.

[16] Lasserre, J. B., A Discrete Farkas Lemma, *LNCS 2667*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003), pp. 273-281.

[17] Lasserre, J. B., A New Farkas Lemma for Positive Semidefinite Matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 6 (1995), pp. 1131-1133.

[18] Matoušek J., and B. Gärtner, *Understanding and Using Linear Programming*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[19] Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[20] Murty, K. G., *Linear programming*, Wiley, 1983.

[21] Prékopa, A., On the development of optimization theory, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 87 (1980), pp. 527-542.

[22] Ramanathan, K., and Sivakumar, K. C., Theorems of the alternative over indefinite inner product spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 137, No. 1 (April 2008), pp. 99-104.

[23] Roos, C., and Terlaky, T., Note on a paper of Broyden, *Operations Research Letters*, Vol. 25 (1999), pp. 183-186.

[24] Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming* , J. Wiley & Sons, 1986.

[25] Stoer, J., and Witzgall, C., *Convexity and optimization in finite dimension*, Springer, 1970.

[26] Swartz, C., Technical Note: A general Farkas lemma, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, No. 2 (Jun. 1985), pp. 237-244.

[27] Sposito, V. A., and David, H. T., A note on Farkas lemmas over cone domains, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 3 (May 1972), pp. 356-358.

احسان منبتی eh_mo236@stu-mail.um.ac.ir
حسین تقی‌زاده کاخکی taghizad@math.um.ac.ir
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۵۵ تا ۸۰

بوخبرگر و پایه‌های گربنر

رشید زارع نهندی

چکیده

پایهٔ گربنر ابزار اصلی جبر جابجایی محاسباتی و عامل عمدهٔ تبلور این مبحث از ریاضیات است. به بیانی ساده هر پایهٔ گربنر، محاسبات روی چندجمله‌ای‌ها را به محاسبات روی تک جمله‌ای‌ها تبدیل می‌کند.

عملیات روی تک‌جمله‌ای‌ها ماهیت الگوریتمی و ترکیبیاتی دارند و به طور طبیعی استفاده از کامپیوتر را ضروری می‌سازد. ورود کامپیوتر به عرصهٔ چنین مباحث مجرد ریاضی، تأثیر شگرفی در تبیین خود ریاضیات و روش‌های برهان احکام ریاضی شده است و برهان‌های الگوریتمی قضایا مورد توجه قرار گرفته‌اند و شیوه متقدمان ریاضی را که برهان‌هایشان اغلب الگوریتمی بوده، بار دیگر زنده کرده است. امروزه با پیشرفت مبانی نظریهٔ پایه‌های گربنر و با توجه به نقش اساسی چندجمله‌ای‌ها در علوم ریاضی، این پایه‌ها کاربردهای گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضیات محض و کاربردی پیدا کرده است.

در این مقاله ابتدا به تبیین سیر تاریخی پیدایش نظریهٔ پایه‌های گربنر می‌پردازیم که شامل شرح مختصری از زندگی علمی برونو بوخبرگر، واضع اصلی پایه‌های گربنر است. سپس بعضی از تعاریف، قضایای اساسی و نتایج مقدماتی در این زمینه را بیان می‌کنیم و در نهایت، برخی از کاربردهای پایه‌های گربنر را معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه و تاریخچه

اوایل دههٔ ۱۹۶۰، زمانی که ولفگانگ گربنر[1] استاد ریاضیات دانشگاه اینسبروک[2] اتریش مسأله‌ای در رابطه با حلقه خارج قسمتی یک ایدآل صفربعدی مطرح کرد، احتمالاً تصور نمی‌کرد که ارائه‌ی یک الگوریتم برای حل این مسأله توسط یکی از دانشجویانش به نام برونو بوخبرگر[3]،

1) Wolfgang Gröbner   2) Innsbruck   3) Bruno Buchberger

شاخه‌ای جدید در ریاضیات با نام پایه‌های گربنر ایجاد کند و ده‌ها کتاب و صدها مقاله در این زمینه نوشته شود و گربنر در بین معدود افرادی قرار گیرد که نامشان در طبقه‌بندی موضوعی ریاضیات (MSC) ظاهر شده است[۱]. گربنر، متولد ۱۸۹۹، دکتری ریاضیات را در ۱۹۳۲ از دانشگاه وین اخذ کرد و سپس به گوتینگن رفت و در آنجا با مصاحبت امی نوتر ایده‌های اصلی ریاضی خود را فرا گرفت. وی پس از بازگشت به اتریش استاد دانشگاه اینسبروک شد و تا پایان عمر خود ۴۶ دانشجوی دکتری و تعداد زیادی دانشجوی کارشناسی ارشد تربیت کرد. گربنر دارای عقاید فلسفی خاصی نیز بود و در سال‌های دهه‌ی ۶۰ دو نوع سمینار هفتگی برگزار می‌کرد: سمینارهای فلسفی و سمینارهای ریاضی. سمینارهای نوع اول که طرفداران زیادی هم داشت، معمولاً تبدیل به مناظره‌های داغ با صاحب‌نظران مختلف می‌شد. در آن سال‌ها، گربنر وقت زیادی برای گفتگو با تک‌تک دانشجویان ریاضی خود صرف نمی‌کرد و مطالب و مسائل مورد نظر خود را در سمینارهای هفتگی ریاضی مطرح و از دانشجویان خود می‌خواست که در باره آن‌ها تحقیق کنند.

یکی از مسائلی که گربنر در چندین جلسه مطرح کرد و نظر بوخبرگر جوان به آن جلب شد، صورت ساده‌ای داشت: پایه‌ای برای فضای برداری با بعد متناهی $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ که K یک میدان و I یک ایدآل صفربعدی است پیدا کنید. در ۱۹۰۰ گُردان[۲] برای اثبات قضیه پایه هیلبرت از وجود یک مولد متناهی برای ایدآل تک‌جمله‌ای استفاده کرده بود [21]. شاید این اولین مورد استفاده از روشی بود که خاصیتی از یک ایدآل چندجمله‌ای را با استفاده از وجود همان خاصیت در یک ایدآل تک‌جمله‌ای مناسب نتیجه می‌گرفت. سال‌ها بعد، در سال ۱۹۱۶ فرانسیس مکالی[۳] در کتاب معروف و تاثیرگذار خود [30] با در نظر گرفتن یک ترتیب خطی با خواصی معین روی مجموعه تک‌جمله‌ای‌های n متغیره، در هر چندجمله‌ای بزرگترین جمله را به عنوان جمله پیشرو گرفته و مجموعه تمام جملات پیشرو اعضای یک ایدآل را تشکیل داده بود. او ثابت کرده بود که مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌هایی که در مجموعه جملات پیشرو ایدآل I قرار ندارند، تشکیل یک پایه برای فضای برداری $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ می‌دهد. این مطلب به قضیه مکالی معروف شده است. همچنین مکالی در مقاله [31] در سال ۱۹۲۷ از ایدآل‌های تک‌جمله‌ای استفاده کرد و شرط این که یک دنباله از اعداد صحیح، تابع هیلبرت یک حلقه مدرج باشد را به دست آورد.

گربنر در ۱۹۳۹ مقاله‌ای منتشر کرد [24] که حاوی کاربردهای متنوعی از روش‌های مکالی و استفاده از ترتیب روی تک جمله‌ای‌ها بود. او در این مقاله و سپس در مقاله [25] در سال ۱۹۵۰ قضیه مکالی را در حالت ایدآل تک‌جمله‌ای مجدداً اثبات کرد و روش‌هایی برای به دست آوردن پایه‌ی فضای برداری حلقه‌ی خارج قسمتی ارائه کرد. جملاتی در انتهای مقاله‌ی ۱۹۵۰ گربنر به این صورت نوشته شده است: «من این روش‌ها را طی ۱۷ سال در موارد فراوان و پیچیده آزموده و به‌کار برده‌ام. اکنون بر این باورم که این روش‌ها می‌توانند به ابزاری قوی برای حل مسائل مطرح در نظریه‌ی ایدآل‌ها تبدیل شوند.» گربنر منتظر کسی بود که با ارائه‌ی یک الگوریتم ابزار فوق را

---

1) 13P10 Polynomial ideals, Gröbner bases 2) P. Gordan 3) Francis Macaulay

۱) دیوید هیلبرت (۱۹۴۳ــ۱۸۶۲)، یکی از بزرگترین و تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرون نوزدهم و بیستم که پایه بسیاری از شاخه‌های ریاضیات نوین بر یافته‌های او استوار است. ۲) پال گردان (۱۹۱۲ــ۱۸۳۷)، از اولین کسانی بود که در کارهای خود از ایدآل تک‌جمله‌ای‌ها استفاده کرد. ۳) لئونارد دیکسون (۱۹۵۴ــ۱۸۷۴)، از اولین ریاضیدانان امریکایی بود که در جبر مجرد پژوهش می‌کرد. لم دیکسون خوش‌ترتیب بودن مجموعه تک‌جمله‌ای‌ها را ثابت می‌کند.

به روشنی معرفی کند. سرانجام گربنر این موضوع را به عنوان موضوع رساله‌ی دکتری بوخبرگر در ۱۹۶۳ در نظر گرفت.

بوخبرگر پس از دو سال تعمّق روی مسأله نشان داد که مولدی متناهی برای ایدآل I وجود دارد که جملات پیشرو اعضای آن، ایدآل تولید شده توسط همه جملات پیشرو اعضای I را تولید می‌کنند. وی همچنین الگوریتم ساده‌ای برای به دست آوردن این مولد با استفاده از هر مولد دلخواه دیگر ارائه کرد. بوخبرگر مطالب خود را در قالب رساله دکتری نوشت و به گربنر تحویل داد [5]. ظاهراً گربنر هرگز پایان‌نامه بوخبرگر را به صورت کامل نخواند و بنابر گزارش یکی از دستیارانش که به تازگی در شاخه معادلات دیفرانسیل فارغ‌التحصیل شده بود، نامه‌ای مبنی بر تأیید رساله‌ی بوخبرگر به دانشگاه نوشت و اعلام کرد که او استحقاق اخذ درجه دکتری ریاضی را دارد. سپس پایان‌نامه توسط افرادی داوری شد که آشنایی چندانی با جبر نداشتند و طبعاً هیچ توصیه‌ای به بوخبرگر نشد. او پس از فارغ‌التحصیلی در سال ۱۹۶۵ در بخش تازه تاسیس کامپیوتر دانشگاه اینسبروک به کار برنامه‌نویسی مشغول شد و چند سال تحقیقات ریاضی را کنار گذاشت تا این‌که به تشویق یکی از همکاران خود به نام رودیگر لوس [1] مقاله‌ای از رساله‌اش استخراج و به زبان آلمانی در سال ۱۹۷۰ و سپس به انگلیسی در سال ۱۹۷۶ به چاپ رساند [6]، [7]. بوخبرگر با لوس در زمینه جبر کامپیوتری همکاری مثمر ثمری داشت. نه در رساله و نه در مقاله مستخرج از آن نامی از پایه گربنر نبود. بوخبرگر که نخست از بی‌توجهی ظاهری استادش ناراحت شده بود، کم‌کم به نقش اساسی گربنر در کار خود پی برد. او فهمید که گربنر مسأله‌ای به او داده بود که خودش در طول

1) Rüdiger Loos

سال‌ها تحقیق به آن رسیده‌بود. بوخبرگر خود را مدیون گربنر دانست که با وسعت فکر و آزادی عملی که به او بخشیده بود و با ارائه‌ی یک مسأله‌ی عالی موفقیتی بزرگ به او هدیه کرده بود. بوخبرگر برای ادای این دین، مولد ویژه‌ای را که برای ایدآل‌ها به دست آورده بود پایه گربنر نام نهاد و آن را به صورت رسمی در یک سخنرانی در سمینار اروپایی «محاسبات نمادین و جبری» در سال ۱۹۷۹، دو سال قبل از فوت گربنر، اعلام کرد [42]. اکنون پایه گربنر و الگوریتم بوخبرگر برای محاسبه آن، در همه نرم‌افزارهای مهم ریاضی مانند Magma، Maple، Mathematica، CoCoA و SINGULAR گنجانده شده و میلیون‌ها نفر کاربر در سراسر جهان دارد.

لازم به ذکر است که هیسوکه هیروناکا[1] که در ۱۹۷۰ به خاطر کارهای عمیقش در نظریه‌ی تکینگی‌ها برنده‌ی مدال فیلدز شده‌است، در مقاله بسیار عمیق خود در سال ۱۹۶۴ وجود «پایه‌ی استاندارد» که مفهومی مشابه پایه‌ی گربنر است را برای توان‌های صوری یک ایدآل چندجمله‌ای‌ها اثبات کرده بود [26]. هرچند هیروناکا در این مقاله روشی برای یافتن این پایه ارائه نکرده‌است، ولی می‌توان ابداع این مفهوم توسط وی را مقدم بر کار بوخبرگر به حساب آورد.

بوخبرگر تا ۱۹۷۳ مقیم دانشگاه اینسبروک بود و در آنجا اولین برنامه‌ی کامپیوتری را برای محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر نوشت. در آن سال‌ها، بیشتر ریاضیدانان جوان اروپایی مشتاق بودند که فرصت مطالعاتی خود را در آمریکا بگذرانند، ولی بوخبرگر شوروی را انتخاب کرد و یک سال در موسسهٔ تحقیقات هسته‌ای مشترک (JINR) در شهر دوبنا در نزدیکی مسکو به سر برد. این مسافرت یک تجربه ممتاز بود. او در ۱۹۷۴ به اتریش برگشت و با مرتبه استادی در نظریه الگوریتم و منطق ریاضی در دانشگاه یوهان کپلر شهر لینز استخدام شد. او در سال‌های اول استخدام، بخش محاسبات موازی دانشگاه لینز را طراحی و راه‌اندازی کرد.

در اوایل دهه‌ی ۸۰ میلادی بوخبرگر با میشل مولر[2] آشنا شد و در سال ۱۹۸۲ مقاله مشترکی با وی در مورد استفاده از پایه‌های گربنر در یافتن مولدهای ایدآلی که در مجموعه‌ای متناهی از نقاط مشخص صفر می‌شود و همچنین محاسبه‌ی چندجمله‌ای درونیاب این نقاط نوشت [34]. در آن سال‌ها مبحث پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌ها مطرح شده بود. مایر و مایر[3] در ۱۹۸۲ [32] و بوخبرگر در مقاله‌ی [9] نشان دادند که پیچیدگی محاسباتی الگوریتم یافتن پایه‌ی گربنر به شدت بالا است. مولر در ادامه‌ی کار خود با همکاری فردیناندو مورا[4] الگوریتم بوخبرگر را کمی بهبود بخشید و با استفاده از پایه گربنر روش‌هایی برای محاسبه تحلیل آزاد و سری هیلبرت ایدآل‌های چندجمله‌ای‌های همگن ارائه داد [33]. پژوهش‌های از این نوع بعدها توسط تئو مورا[5] نیز گسترش یافت. از طرف دیگر، دانیل لازارد[6] در مقاله [29] که نقطه عطفی در روند ورود کامپیوتر به جبر است، پایه‌های گربنر را وارد علوم کامپیوتر کرد. لازارد یکی از پیشروان جبر محاسباتی است.

1) Heisuke Hironaka 2) Michael Muller 3) E. Mayr and A. R. Meyer
4) Ferdinando Mora 5) Teo Mora 6) Daniel Lazard

۱) فرانسیس مکالی (۱۹۳۷–۱۸۶۲)، کتاب‌ها و مقالات او الهام‌بخش گربنر بوده و اساس کار بسیاری از محاسبات در جبر جابجایی است. ۲) امی نوتر (۱۹۳۵–۱۸۸۲)، از بنیانگذاران جبرجابجایی که گربنر ایده‌های جبری خود را از او فرا گرفت. ۳) ولفگانگ گربنر (۱۹۸۱–۱۸۹۹)، استاد بوخبرگر و از معدود ریاضیدانانی که نامش در طبقه‌بندی موضوعی ریاضیات ظاهر شده است.

با استقبال لورنزو روبیانو[1] و جوزپه والاّ[2] [39,40] و ادامه کارهای بوخبرگر، مولر، مورا، لازارد و به ویژه با فارغ‌التحصیل شدن فرانتز وینکلر[3] در ۱۹۸۴، به عنوان اولین دانشجوی دکتری بوخبرگر، تحقیقات جهانی روی پایه‌های گربنر وارد مرحله جدیدی شد. در واقع روبیانو و والاّ مبانی جبری و لازارد مبانی محاسباتی مفاهیم پایه گربنر را پایه‌ریزی کردند.

بوخبرگر در ادامه فعالیت‌های خود، مجله محاسبات نمادین (Journal of Symbolic Computation) را در ۱۹۸۵ پایه‌گذاری کرد و ده سال سردبیری آن را به عهده گرفت. این مجله معتبرترین مجله در شاخه محاسبات نمادین به شمار می‌رود. بوخبرگر در ۱۹۸۷ انستیتو تحقیقاتی محاسبات نمادین (Research Institute for Symbolic Computation) (ریسک) را به عنوان یک بخش از دانشگاه یوهان کپلر تاسیس کرد. او در ۱۹۸۸، زمانی که برای فرصت مطالعاتی در ژاپن به سر می‌برد، نامه‌ای دریافت کرد مبنی بر این که وزیر علوم ایالت اتریش علیا[4] تقاضای وی جهت تأمین محلی مستقل برای این انستیتو را پذیرفته است. او بدون درنگ به اتریش مراجعت و به ملاقات وزیر رفت. وزیر از او می‌خواهد که با راه‌اندازی یک مجموعه تحقیقاتی پیشرفته در یک منطقه‌ی کم‌جمعیت اتریش علیا موجبات پیشرفت و مورد توجه قرارگرفتن آن منطقه را فراهم آورد. بوخبرگر پس از گشت و گذاری در اطراف لینز، کاخی قدیمی را می‌یابد که در دهکده‌ی هاگنبرگ[5] در ۲۰ کیلومتری لینز واقع شده است. در اواسط جنگ جهانی دوم، زمانی که همه به فکر دور شدن از مناطق جنگی بودند، فردی از اهالی هاگنبرگ اکثر زمین‌های آن ده، شامل زمین‌های کاخ را به قیمتی بسیار ارزان خریداری کرده بود. از آن زمان کاخ مذکور متروکه مانده و تبدیل به یک مخروبه شده بود. بوخبرگر کاخ را از آن فرد می‌خرد و یک روز عصر همکاران خود در دانشگاه یوهان کپلر را

1) Lorenzo Robbiano 2) Giuseppe Valla 3) Franz Winkler 4) Upper Austria
5) Hagenberg

به آنجا برده و نقشه خود را شرح می‌دهد. در آن روز کمتر کسی باور کرده بود که یک سال دیگر در روزی مشابه، ریسک در آن کاخ مستقر شده باشد. ده سال بعد نمایندگان بنیاد ملی علوم آمریکا (NSF) پس از بازدید از این انستیتو، آن را مرکزی بسیار فعال ارزیابی کردند که مشابه آن در آمریکا هم وجود ندارد. اکنون بعد از گذشت بیش از ۲۰ سال، دهکده‌ی دوهزار نفری هاگنبرگ به یک شهرک دانشگاهی و تحقیقاتی با بیش از شش‌هزار نفر تبدیل شده است. ایجاد یک پارک نرم‌افزار[1] با بیش از ۲۰۰ شرکت جوان نرم‌افزاری در کنار ریسک نیز با پیشنهاد و تلاش‌های بوخبرگر به انجام رسیده است.

بوخبرگر در سال‌های دهه‌ی نود به همراه تیمی در ریسک به نام Theorema با تحقیقات در منطق و علوم نظری کامپیوتر سعی کرده است سیستمی ابداع کند که برخی از انواع قضایای ریاضی را به طور خودکار اثبات کند و بتواند راه حل و الگوریتم برای حل برخی از مسائل ریاضی ارائه دهد. پس از راه‌اندازی ویرایش اول این سیستم در سال ۲۰۰۴ مسأله‌ی طرح شده توسط گربنر که در ۱۹۶۳ به بوخبرگر داده شده بود به این سیستم ارائه شد. جالب این بود که سیستم، الگوریتم بوخبرگر را برای حل آن پیشنهاد کرد!

به باور بوخبرگر علم محاسبات نمادین رشته‌ای است که از به هم پیوستن منطق، ریاضیات و علوم کامپیوتر تشکیل شده و توانایی‌های هر سه علم را دارد. روش بوخبرگر در کار علمی، شفافیت، سادگی و روشنی در ارائه و تفسیر مطالب و ساختارها، واضح‌سازی اهداف و پیشروی گام به گام به سوی آنها می‌باشد. اکثر کسانی که برای گذراندن دوره‌های مختلف در ریسک به سر برده‌اند، از کلاس‌های منحصر به فرد وی با عنوان «Thinking, Speaking, Writing» لذت برده‌اند. بوخبرگر با کارهای علمی ماندگار و تأسیس مجله و انستیتو، و همچنین تربیت بیش از ۴۰ دانشجوی دکتری، سهم بسزایی در جریان تحقیقات ریاضی امروز جهان داشته است. گرچه وی در سال ۲۰۰۲ بازنشسته شد و کارهای مدیریتی خود را به دیگران سپرد، ولی همچنان با انرژی وصف‌ناپذیری به فعالیت‌های علمی و عملی خود ادامه می‌دهد.

در اینجا نقل خاطره‌ای از پیتر پائوله[2] از همکاران بوخبرگر در ریسک خالی از لطف نیست. در یکی از کنفرانس‌های ریاضی اروپایی در اواخر دهه نود که بوخبرگر یکی از سخنرانان مدعو بود، میزگردی در مورد نحوه امتیازدهی به فعالیت‌های اعضای هیات علمی ریاضی دانشگاهها تشکیل می‌شود. بوخبرگر نیز به عنوان عضو آکادمی علوم اروپا در این میزگرد شرکت داشت. سوالی مطرح می‌شود که آیا برای ریاضیدانان ایجاد و یا بهبود نرم‌افزارها نیز می‌تواند امتیاز محسوب شود؟ نظر بیشتر افراد در آن جلسه منفی بود و در نهایت علی‌رغم بحث‌های فراوان به نتیجه‌ای نمی‌رسند. در انتها بوخبرگر خطاب به جمع می‌گوید «به نظر من در آینده برای ریاضیدان شدن باید اول برنامه‌نویس شد». ناگهان از انتهای سالن بزرگ کسی فریاد می‌زند که بهتر است یک محافظ برای خودت بگیری چون جانت در خطر است!

1) software park   2) Peter Paule

۱) هیسوکه هیروناکا، برنده‌ی مدال فیلدز، تقریباً هم‌زمان با بوخبرگر، تعریفی مشابه پایه‌ی گربنر مطرح کرد. ۲) برونو بوخبرگر، با ارائه الگوریتمی برای یافتن پایه گربنر گام بزرگی در جبر محاسباتی برداشت. ۳) رودیگر لوس، مشوق بوخبرگر برای ادامه تحقیقات و اولین همکار تحقیقاتی او.

همان طور که ذکر شد، در دهه ۸۰ میلادی نظریه و روش‌های پایه‌های گربنر تبدیل به یک جریان تحقیقاتی در برخی از شاخه‌های ریاضی و علوم کامپیوتر شد. پس از آن نیز تعمیم‌ها و کاربردهای فراوانی از پایه‌های گربنر به دست آمده است. سادگی مفاهیم اولیه و قدرتمند بودن این نظریه در حل مسائل، باعث شد که در تعداد زیادی از شاخه‌های علوم از آن استقبال شود. در واقع، پایه گربنرِ یک ایدآل چندجمله‌ای، یک ایدآل تک‌جمله‌ای به دست می‌دهد که بیشتر خواص مهم آن ایدآل را در بر دارد. علاوه بر این که کار با ایدآلهای تک‌جمله‌ای راحت‌تر است، اهمیت خود ایدآل‌های تک‌جمله‌ای نیز با کارهای اساسی ریچارد استنلی[1] در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ در معرفی مجتمع‌های سادکی برای ایدآل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع [41] و استفاده ماهرانه از آنها برای اثبات حدس معروف کران بالای تعداد کره‌ها در فضا، بر همگان روشن شده‌است. بنابراین، پایه‌های گربنر به هر مسأله‌ای که بتواند به زبان چندجمله‌ای‌ها بیان شود، یک ایدآل تک‌جمله‌ای متناظر می‌کند که ابزارهای جبری و ترکیبیاتی فراوانی برای شناسایی آنها در دسترس است.

در جبرجابجایی، پایه‌های گربنر نه تنها برای اهداف محاسباتی به‌کار می‌رود، بلکه در پاسخ به برخی سؤالات در مفاهیم کاملا نظری و عمیق مفید بوده است. مثلاً با استفاده از مفاهیم پایه‌های گربنر ثابت می‌شود خواص جبری ایدآل‌های دترمینانی می‌تواند توسط یک ایدآل تک‌جمله‌ای خالی از مربع بیان شود که در مقالات اساسی آلدو کونکا[2] و وینفرید برونز[3] [4] به آن پرداخته شده است. ایدآل‌های دترمینانی در هندسه جبری از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و از خواص جبری آنان، اطلاعات زیادی در رابطه با خواص هندسی نقاط تکین واریته‌ها استخراج می‌شود [50].

از طرف دیگر، روش‌های الگوریتمی و ساختارگرایانه در هندسه جبری و جبرجابجایی که اواسط

1) Richard Stanley 2) Aldo Conca 3) Winfried Bruns

قرن بیستم با وجود تجریدگران قدرتمند مانند ژان دیودونه[۱] و الکساندر گروتندیک[۲] کم‌رنگ شده بود، در دهه‌های پایانی قرن با ظهور پدیده کامپیوتر و تلاش ریاضیدانان تأثیرگذاری چون شریرام ابیَنکار[۳] [1]، دوباره احیا شد و با کمک پایه‌های گربنر به عنوان جریان مهمی در جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفت.

در مجموع، اکنون می‌توان این ادعا را پذیرفت که پایه‌های گربنر و الگوریتم بوخبرگر به مفاهیمی بنیادی در جبر تبدیل شده‌اند و بیشتر کتاب‌های درسی جبر سال‌های اول دانشگاهی، فصل‌هایی را برای معرفی این نظریه در خود گنجانده‌اند. این مفاهیم موتوری برای محاسبات پیشرفته در هندسه‌ی جبری از جمله نظریه‌ی حذف[۴]، همانستگی[۵] و تحلیل تکینگی‌ها[۶] فراهم می‌کنند. این نظریه نشان داده است که مدل‌های چندجمله‌ای می‌تواند در همه جای علوم و مهندسی ظاهر شده و مفید واقع شوند. پایه‌های گربنر توسط پژوهشگران بهینه‌سازی، نظریه‌ی کدگذاری، نظریه‌ی کنترل، رباتیک، آمار، زیست‌شناسی مولکولی و ... نیز استفاده می‌شود.

سه بسته‌ی نرم‌افزاری که اساس کار آنها محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر است، عبارتند از: کوکوآ (CoCoA)، سینگولار (SINGULAR)، و مکالی ۲ (Macaulay 2). کوکوآ در دانشگاه جنوا توسط تیمی به رهبری روبیانو و عضویت جان ابوت[۷]، آنا بیگاتی[۸] و ماسیمو کابوارا[۹] طراحی شده است [12]. سینگولار در دانشگاه کایزرس‌لاترن به وسیله‌ی تیمی با هدایت گرت ـ مارتین گروئل[۱۰]، گرهارد فیستر[۱۱] و هانس شونمان[۱۲] تهیه شده [23] و مکالی ۲ در دانشگاه کرنل با تلاش دیوید بایر[۱۳]، مایکل استیلمن[۱۴] و دانیل گریسون[۱۵] نوشته شده است [22].

از ریاضیدانان دیگری که تحقیقات اساسی در ارتباط با پایه‌های گربنر، از نظر محاسباتی، مفهومی و یا کاربردی، انجام داده‌اند، می‌توان این افراد را نام برد: فرانتز پوئر[۱۶]، کارلو تراورسو[۱۷]، رالف فروبرگ[۱۸]، ژان ـ شارل فوگر[۱۹]، مارتین کروتزر[۲۰]، ولادیمیر گردت[۲۱] و فولکر ویسفنینگ[۲۲].

در ایران، رحیم زارع‌نهندی نخستین کسی بود که موضوع پایه‌های گربنر را مطرح کرد. سپس نگارنده در رساله‌ی دکتری خود پایه‌های گربنر را در اثبات قضیه‌ی اصلی مربوط به تحلیل آزاد ایدآل‌های دترمینانی به کار برد [50]. وی تحقیق در این زمینه را ادامه داده است [51]. در سال ۱۳۸۴ مدرسه تابستانی پایه‌های گربنر و کاربردهای آن با حمایت مرکز بین‌المللی ریاضیات محض و کاربردی (CIMPA) در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان به مدت دو هفته برگزار شد.

---

1) Jean Dieudonne 2) Alexander Grothendieck 3) Shreeram Abhyankar
4) elimination theory 5) cohomology 6) resolution of singularities
7) John Abbott 8) Anna Bigatti 9) Massomo Caboara 10) Gert-Martin Greuel
11) Gehard Pfister 12) Hans Schönemann 13) David Bayer 14) Micheal Stillman
15) Daniel Grayson 16) Franz Pauer 17) Carlo Traverso 18) Ralf Früberg
19) Jean-Charles Faugère 20) Martin Kreuzer 21) Vladimir Gerdt
22) Volker Weispfenning

۱) جوزپّه والاّ. ۲) لورنزو روبیانو، او به همراه والاّ از نخستین ریاضیدانانی بودند که از مفهوم پایه گربنر استقبال کرده و با شروع تحقیقات عمیق در این زمینه پایه‌های جبری آن را استحکام بخشیدند. ۳) دانیل لازارد، یکی از پیشروان جبر محاسباتی که کارهای مهمی در بهینه کردن الگوریتم‌های پایه‌های گربنر انجام داده‌است.

در این مدرسه صاحب‌نظران تراز اول پایه‌های گربنر از جمله بوخبرگر، روبیانو، گروئل و کونکا به همراه جمعی دیگر، آخرین پیشرفت‌های این نظریه را به حدود ۹۰ نفر شرکت کننده از داخل و خارج کشور ارائه کردند. در حال حاضر با فعالیت‌های پژوهشی افرادی مانند رحیم زارع‌نهندی، فرهاد رحمتی، علی بصیری، رشید زارع‌نهندی، حسین سبزرو، امیر هاشمی، و همچنین حسن حقیقی، منصور آقاسی، فرضعلی ایزدی، مهدی امیدعلی، کیوان برنا، مجید فرهادی، سعید تفضلیان، لیلا شریفان، فاطمه محمدی، سمیه مرادی و پژوهشگران علاقه‌مند دیگر به‌ویژه در جامعه جبر جابجایی کشور، گروه‌های تحقیقاتی در زمینه جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری محاسباتی در ایران در حال شکل‌گیری است.

کتاب‌نامه‌ی انتهای این نوشتار شامل عناوین بخشی از کتاب‌ها و مقالات اساسی در پایه‌های گربنر و کاربرد آن در سایر شاخه‌های ریاضیات می‌باشد. کتاب [14] می‌تواند به عنوان اولین درس در هندسه‌ی جبری محاسباتی در سال‌های سوم و چهارم دوره‌ی کارشناسی ریاضی تدریس شود. کتاب‌های [2]، [15]، [19]، [27] و [47] برای تدریس در دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی مناسب هستند.

۲. مفاهیم بنیادی

۱.۲. ترتیب روی تک‌جمله‌ای‌ها

فرض کنید K یک میدان و $P = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در K باشد. می‌توان P را به عنوان یک فضای برداری با بعد نامتناهی روی K در نظر گرفت که پایه‌ی آن $T^n = \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_{\geq 0}\}$ است.

هر عضو T^n یک بخش[۱] نامیده می‌شود. مجموعه T^n به همراه عمل ضرب یک تکواره[۲] است که با تکواره‌ی N^n با عمل جمع برداری یکریخت است. تابع یکریختی از T^n به N^n همان تابع لگاریتم است: $\log(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

تعریف ۱. ترتیب بخشی[۳]، ترتیبی خطی مانند $\le_\sigma$ روی T^n است که دو شرط زیر را برآورد می‌کند:
الف) به ازای هر m_1، m_2 و m_3 در T^n که $m_1 \le_\sigma m_2$، نتیجه شود $m_1m_3 \le_\sigma m_2m_3$.
ب) به ازای هر m در T^n، $1 \le_\sigma m$.

مثال‌های مهم ترتیب بخشی، ترتیب‌های لغت‌نامه‌ای[۴] ($\le_{\text{lex}}$)، لغت‌نامه‌ای درجه‌ای[۵] ($\le_{\text{dlex}}$) و عکس لغت‌نامه‌ای درجه‌ای[۶] ($\le_{\text{drlex}}$) هستند:
گوییم $m_1 \le_{\text{lex}} m_2$ هرگاه $m_1 = m_2$ و یا اولین مولفه ناصفر از سمت چپ در بردار $\log(m_2) - \log(m_1)$، مثبت باشد.
گوییم $m_1 \le_{\text{dlex}} m_2$ هرگاه $m_1 = m_2$، یا مجموع توان‌ها در m_2 بیشتر از m_1 باشد و یا مجموع توان‌ها مساوی بوده و $m_1 \le_{\text{lex}} m_2$.
گوییم $m_1 \le_{\text{drlex}} m_2$ هرگاه $m_1 = m_2$، یا مجموع توان‌ها در m_2 بیشتر از m_1 باشد و یا مجموع توان‌ها مساوی بوده و اولین مؤلفه‌ی ناصفر از سمت راست در بردار $\log(m_2) - \log(m_1)$، منفی باشد.

به عنوان مثال، در T^3 داریم:

$$x_3 \le_{\text{lex}} x_2 \le_{\text{lex}} x_1,\quad x_2^2 \le_{\text{lex}} x_1,\quad x_1 \le_{\text{dlex}} x_2^2$$

$$x_1x_2^3x_3 \le_{\text{dlex}} x_1^2x_2x_3^2,\quad x_1^2x_2x_3^2 \le_{\text{drlex}} x_1x_2^3x_3$$

فرض کنید ترتیب بخشی $\le_\sigma$ روی T^n داده شده است. هر چندجمله‌ای f متعلق به $K[x_1,\ldots,x_n]$ به صورت مجموعی از تک‌جمله‌ای‌های $cx_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ است که c عضوی ناصفر از K می‌باشد. تک‌جمله‌ای‌ها را بدون در نظر گرفتن ضرایبشان باهم مقایسه می‌کنیم.

تعریف ۲. در هر چندجمله‌ای مانند f، بزرگترین تک‌جمله‌ای با ترتیب $\le_\sigma$ را جمله پیشرو[۷]، بخش مربوط به آن را بخش پیشرو[۸] و ضریب آن را ضریب پیشرو[۹] می‌نامیم و به ترتیب با $\mathrm{LM}(f)$، $\mathrm{LT}(f)$ و $\mathrm{LC}(f)$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً در چندجمله‌ای $f = 4x_1^2x_3 + 6x_2x_3$ با ترتیب لغت‌نامه‌ای داریم:

$$\mathrm{LM}(f) = 4x_1^2x_3,\quad \mathrm{LT}(f) = x_1^2x_3,\quad \mathrm{LC}(f) = 4.$$

---

1) term 2) monoid 3) term ordering 4) lexicographic order
5) degree lexicographic order 6) degree reverse lexicographic order
7) leading monomial 8) leading term 9) leading coefficient


۱) شریرام ابیَنکار، از پیشگامان هندسه‌ی جبری محاسباتی. ۲) میشل مولر، در دهه‌ی هشتاد میلادی با همکاری بوخبرگر کاربردهای مهمی برای پایه‌های گربنر پیدا کرده و آن را در جهان ریاضیات بیشتر مطرح کرد. ۳) تئو مورا، از فعال‌ترین پژوهشگران در بهینه کردن الگوریتم‌ها و کاربردهای پایه‌های گربنر.

قضیه‌ی ۳ (قضیه‌ی پایه مکالی). فرض کنید K یک میدان و $P = K[x_۱, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در K باشد. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب بخشی و I یک ایدآل P باشد. اگر مجموعه‌ی همه‌ی بخش‌های در T^n نامتعلق به $\{\mathrm{LT}_{\leq}(f) : f \in I\}$ را با B نشان دهیم، آنگاه مجموعه کلاس‌های هم ارزی اعضای B روی I یعنی $\{b + I : b \in B\}$ یک پایه برای K ـ فضای برداری P/I است.

برای اثبات به [27, Theo. 1.5.7] مراجعه کنید.

۲.۲ پایه‌ی گربنر یک ایدآل

در این قسمت فرض می‌کنیم $\leq$ یک ترتیب بخشی داده شده است و برای راحتی، به جای $\mathrm{LT}_{\leq}$ فقط LT نوشته و در موارد مشابه نیز همین طور عمل می‌کنیم. فرض کنید I یک ایدآل P باشد. بنا بر قضیه‌ی پایه‌ی هیلبرت، می‌دانیم که این ایدآل توسط تعداد متناهی چندجمله‌ای تولید می‌شود. ایدآل پیشرو I نسبت به ترتیب داده شده را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(f) : f \in I \rangle$$

یعنی ایدآل تولید شده توسط بخش‌های پیشرو همه اعضای I. این ایدآل توسط تعداد نامتناهی بخش تولید شده‌است. اولین سؤال که مطرح می‌شود این است که آیا این ایدآل یک مولد متناهی نیز دارد؟ لم دیکسون[1] جواب مثبتی به این سؤال می‌دهد.

قضیه‌ی ۴ (لم دیکسون). فرض کنید $n \geq ۱$ و $t_۱, t_۲, \dots$ دنباله‌ای از بخش‌ها در T^n باشد. عددی مانند $m > ۰$ وجود دارد که به ازای هر i که $i \geq m$، بخش t_i به یکی از بخش‌های $t_۱$، ... و t_m بخش‌پذیر است. در نتیجه، به ازای هر حلقه R،

1) Dickson's Lemma

$$\langle t_1, t_2, \ldots\rangle = \langle t_1, \ldots, t_m\rangle \subseteq R[x_1, \ldots, x_n].$$

برای اثبات به [27, Cor. 1.3.6] مراجعه کنید.

سؤال بعدی این است که آیا چندجمله‌ای‌های $f_1, \ldots, f_m$ در I موجودند که خودشان ایدآل I و بخش‌های پیشروشان ایدآل پیشرو I را تولید کنند؟ پاسخ این سؤال نیز طبق لم زیر مثبت است.

لم ۵. با مفروضات بالا، اگر $\{t_1, \ldots, t_m\}$ یک مولد برای ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ باشد و چندجمله‌ای‌های $f_1, \ldots, f_m$ در I طوری باشند که به ازای هر i که $1 \le i \le m$، داشته باشیم $\mathrm{LT}(f_i) = t_i$، آنگاه $\{f_1, \ldots, f_m\}$ مولدی برای I است.

اثبات. می‌دانیم $I \supseteq \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. پس کافی است ثابت کنیم $I \subseteq \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. فرض کنید این طور نباشد و $D = I \setminus \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ ناتهی باشد. فرض کنید g یک چندجمله‌ای در D باشد که دارای کوچکترین بخش پیشرو در بین اعضای D است. چون $\mathrm{LT}(g) \in \mathrm{LT}(I)$، پس $1 \le i \le m$ و $h \in T^n$ موجودند که $t_i | \mathrm{LT}(g)$ و $ht_i = \mathrm{LT}(g)$. در این صورت $\mathrm{LT}(g)$ با $\mathrm{LT}(ht_i)$ برابر است و چندجمله‌ای $l = g - \frac{\mathrm{LC}(g)}{\mathrm{LC}(f_i)} hf_i$ دارای بخش پیشرو اکیداً کوچکتر از $\mathrm{LT}(g)$ است و طبق فرض نباید در D قرار داشته باشد. ولی f_i و g در I هستند و لذا l نیز در I قرار دارد و از طرف دیگر l در $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ نیست، یعنی $l \in D$، که یک تناقض است. بنابراین $D = \emptyset$.

نتیجه‌ی ٦. فرض کنید I ایدآلی از P باشد. مولدی متناهی برای I مانند $\{g_1, \ldots, g_m\}$ وجود دارد که $\{\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_m)\}$ ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ را تولید می‌کند.

تعریف ۷. مولدی برای I که در شرایط نتیجه ٦ صدق کند را یک پایه گربنر (نسبت به ترتیب $\le$) برای I گویند.

مثال ۸. هر مولد برای I لزوماً یک پایه گربنر نیست. فرض کنید $I = \langle g_1, g_2\rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3]$ که $g_1 = x_1^2 - x_2$ و $g_2 = x_1^3 - x_3$. با ترتیب لغت‌نامه‌ای داریم $\mathrm{LT}(g_1) = x_1^2$ و $\mathrm{LT}(g_2) = x_1^3$. از طرف دیگر چندجمله‌ای

$$-x_1(x_1^2 - x_2) + (x_1^3 - x_3) = x_1 x_2$$

در I قرار دارد و دارای بخش پیشرو x_1x_2 است که توسط هیچ‌کدام از بخش‌های پیشرو g_1 و g_2 بخش نمی‌شود. بنابراین $\{g_1, g_2\}$ یک پایه‌ی گربنر نیست.

نتیجه‌ی ٦ وجود یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل دلخواه I نسبت به ترتیب داده شده را تضمین می‌کند ولی هیچ روش عملی برای یافتن آن را به دست نمی‌دهد. در قسمت بعد با یک الگوریتم برای به دست آوردن یک پایه‌ی گربنر ایدآل آشنا می‌شویم.

۳.۲. الگوریتم و محک بوخبرگر

در این قسمت نیز فرض می‌کنیم $\le$ یک ترتیب بخشی داده شده است. در حلقه‌ی $K[x]$

۱) فرانتز وینکلر، اولین دانشجوی دکتری بوخبرگر که با فارغ‌التحصیل شدن وی تحقیقات در پایه‌های گربنر وارد مرحله جدیدی شد. ۲) ولادیمیر گردت، از پیشگامان جبر محاسباتی در روسیه که از کاربردهای این نظریه در علوم کامپیوتر و مهندسی استفاده می‌کند. ۳) دیوید آیزنباد، از سردمداران و مشوقان با نفوذ جبر جابجایی و هندسه جبری محاسباتی در امریکا.

الگوریتم اقلیدس برای تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $f(x)$ بر چندجمله‌ای دیگری مانند $g(x)$ را داریم که چندجمله‌ای‌های $h(x)$ و $r(x)$ را به دست می‌آورد به طوری که

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x)$$

و درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $g(x)$ کوچک‌تر است. به عبارت دیگر، بخش پیشرو g هیچ بخشی از r را بخش نمی‌کند. به زبان حلقه‌ها می‌توان چنین گفت که کلاس خارج‌قسمتی $f(x)$ با کلاس خارج‌قسمتی $r(x)$ به سنج ایدآل $\langle g(x)\rangle$ مساوی است و $r(x)$ در این کلاس دارای کوچکترین درجه است. تعمیم الگوریتم اقلیدس برای تقسیم چندجمله‌ای‌های چند متغیره با استفاده از تعبیر حلقه‌ای آن راحت‌تر است.

فرض کنید f و g_1، g_2، ...، g_s چندجمله‌ای‌های غیر صفر در $P = K[x_1, \dots, x_n]$ باشند. می‌خواهیم نمایشی برای f به صورت

$$f = h_1 g_1 + \cdots + h_s g_s + r$$

پیدا کنیم که h_iها و r در P هستند و هیچ بخشی از r توسط هیچ‌کدام از بخش‌های پیشرو g_iها بخش نمی‌شود. این کار با الگوریتم زیر عملی است.

۴.۲. الگوریتم تقسیم. فرض کنید $f, g_1, \dots, g_s \in P \setminus \{0\}$. مراحل زیر را انجام دهید.

۱− قرار دهید $p = 0, q_1 = \cdots = q_s = 0$ و $v = f$.

۲− کوچکترین i در $\{1, 2, \dots, s\}$ را پیدا کنید که $\mathrm{LT}(v)$ توسط $\mathrm{LT}(g_i)$ بخش می‌شود. در صورت وجود چنین iای، $q_i + \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)}$ را به جای q_i و $v - \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)} g_i$ را به جای v قرار دهید.

۳− مرحله ۲ را آن قدر تکرار کنید که iای با شرط فوق پیدا نشود. در این صورت، $p + \mathrm{LM}(v)$ را به جای p و $v - \mathrm{LM}(v)$ را به جای v قرار دهید.

۴− اگر $v \neq 0$، مجدداً مرحله ۲ را اجرا کنید و اگر $v = 0$، چندجمله‌ای‌های $p, q_1, \ldots, q_s$ را بنویسید.

قضیه‌ی ۹. الگوریتم تقسیم پس از اجرای تعداد متناهی مرحله، به پایان می‌رسد و برای چندجمله‌ای‌های $p, q_1, \ldots, q_s$ به دست آمده در آخر الگوریتم، داریم

$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + p.$$

همچنین شرایط زیر برقرارند:

الف) هیچ کدام از بخش‌های p در ایدآل $\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_s) \rangle$ قرار ندارند.

ب) به ازای هر $1 \leq i \leq s$ که $q_i \neq 0$، داریم $\mathrm{LT}(q_i g_i) \leq \mathrm{LT}(f)$.

ج) به ازای هر $1 \leq i \leq s$ و هر بخش غیرصفر از q_i مانند t، داریم:

$$t.\mathrm{LT}(g_i) \notin \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_{i-1}) \rangle.$$

به علاوه، چندجمله‌ای‌های $q_1, q_2, \ldots, q_s$ و p که در سه شرط فوق صدق کنند، به صورت یگانه توسط بردار $(f, g_1, \ldots, g_s) \in P^{s+1}$ تعیین می‌شوند.
برای اثبات به [27, Theo. 1.6.4] مراجعه کنید.

تعریف ۱۰. چندجمله‌ای p به دست آمده در الگوریتم تقسیم را یک باقیمانده نرمال[1] یا یک فرم نرمال[2] f نسبت به $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s)$ نامیده و با $\mathrm{NF}_{\leq, \mathcal{G}}(f)$ و یا اگر ابهامی نباشد با $\mathrm{NF}(f)$ نشان می‌دهند.

نکته‌ی ۱۱. با تغییر ترتیب $\leq$ و همچنین تغییر ترتیب قرارگرفتن $(g_1, \ldots, g_s)$، جواب نهایی الگوریتم تقسیم ممکن است تغییر کند.

در مثال ۸ مشاهده شد که ممکن است جملات پیشرو دو چندجمله‌ای f و g در تک‌جمله‌ای‌هایی مانند t_1 و t_2 ضرب شوند و قرینه هم شده و در حاصل جمع حذف شوند. در این صورت ممکن است بخش پیشرو $t_1 f + t_2 g$ توسط هیچ کدام از بخش‌های پیشرو f و g بخش نشود. این مشکلی است که خاصیت پایه گربنر بودن یک مولد ایدآل را می‌تواند از آن سلب کند. بوخبرگر ثابت کرده است که فقط با حل همین مشکل، هر مولدی را می‌توان به یک پایه گربنر گسترش داد. برای این منظور S ـ چندجمله‌ای دو چندجمله‌ای را تعریف می‌کنیم.

1) normal remainder 2) normal form

۱) رالف فروبرگ، کتاب‌ها و مقالات عمیق او مشوق بسیاری از ریاضیدانان جوان برای پژوهش در پایه‌های گربنر بوده است. ۲) گرت ـ مارتین گروئل، تیم تحقیقاتی او نرم‌افزار SINGULAR را طراحی کرده است که اساس محاسبات آن پایه‌های گربنر است. ۳) برند اشتورمفلس، از ریاضیدانان بسیار فعال که مفهوم پایه‌های گربنر و جبر جابجایی ترکیبیاتی را وارد رشته‌های گوناگون از جمله ریاضیات زیستی و نظریه پایاها کرده است.

تعریف ۱۲. فرض کنید $f_1, f_2 \in P = K[x_1, \ldots, x_n]$ دو چندجمله‌ای غیرصفر باشند. S ـ چندجمله‌ای f_1 و f_2 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S(f_1, f_2) = \frac{\mathrm{LC}(f_2)}{\gcd(\mathrm{LM}(f_1), \mathrm{LM}(f_2))} f_1 - \frac{\mathrm{LC}(f_1)}{\gcd(\mathrm{LM}(f_1), \mathrm{LM}(f_2))} f_2.$$

منظور از gcd بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک است. توجه شود که f_1 و f_2 در تک‌جمله‌ای‌های مناسبی ضرب شده‌اند تا جملات پیشرو مساوی بگیرند و این جملات در $S(f_1, f_2)$ حذف می‌شوند.

قضیه‌ی ۱۳ (محک بوخبرگر). فرض کنید I ایدآل تولید شده توسط $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ در P باشد و $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s)$. شرایط زیر باهم معادلند.

الف) مجموعه G یک پایه گربنر (نسبت به ترتیب $\le$) برای ایدآل I است.

ب) به ازای هر زوج مرتب (i, j) که $1 \le i < j \le s$، داریم $\mathrm{NF}_{\le, \mathcal{G}}(S(g_i, g_j)) = 0$.

برای اثبات به [27, Cor. 2.5.3] مراجعه کنید.

روش بوخبرگر برای ساختن یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل I با استفاده از یک مولد داده شده این است که نخست S ـ چندجمله‌ای‌های دو به دوی مولدها را محاسبه می‌کند و سپس فرم نرمال آن‌ها نسبت به مجموعه‌ی مولد را به دست می‌آورد و آنگاه فرم‌های نرمال غیرصفر را به مجموعه‌ی مولد اضافه می‌کند. این روند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که دیگر هیچ S ـ چندجمله‌ای با فرم نرمال غیر صفر نسبت به مولد جدید وجود نداشته باشد. در نهایت یک پایه گربنر به دست می‌آید. جزئیات این روش در الگوریتم زیر بیان شده است.

الگوریتم بوخبرگر. فرض کنید $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s) \in P^s$ و I ایدآل تولید شده توسط $g_1, \ldots, g_s$ باشد. به ازای هر $i = 1, \ldots, s$، فرض کنید $\mathrm{LM}(g_i) = c_i t_i$ که $c_i \in K \setminus \{0\}$ و $t_i \in T^n$. مراحل زیر را انجام دهید.

۱− قرار دهید $s' = s$ و $B = \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq s'\}$.

۲− اگر $B = \emptyset$، $\mathcal{G}$ را بنویسید. در غیر این صورت $(i,j) \in B$ را انتخاب و از B حذف کنید.

۳− اگر $\mathrm{NF}_{\leq, \mathcal{G}}(S(g_i, g_j)) = 0$ به مرحله ۲ بروید. در غیراین صورت به مرحله‌ی ۴ بروید.

۴− قرار دهید $s' = s' + 1$ و $g_{s'} = \mathrm{NF}(S(g_i, g_j))$ را به $\mathcal{G}$ اضافه کنید. همچنین همه زوج‌های (i, s') که $1 \leq i < s'$، را به B اضافه کنید و سپس به مرحله ۲ بروید.

قضیه‌ی ۱۴. الگوریتم بوخبرگر پس از اجرای تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و مؤلفه‌های $\mathcal{G}$ به دست آمده در پایان، تشکیل یک پایه‌ی گربنر (نسبت به ترتیب $\leq$) برای I می‌دهند.
برای اثبات به [27, Theo. 2.5.5] مراجعه کنید.

اگر مولدی برای ایدآل I داده شده باشد، به وسیله‌ی الگوریتم بوخبرگر می‌توان یک پایه‌ی گربنر به دست آورد. اجرای این الگوریتم به سبب تعداد زیاد محاسبات S ــ چندجمله‌ای‌ها و فرم‌های نرمال، به زمان طولانی نیاز دارد. پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم در حالت کلی در رده‌ی exp-space complete و در حالت ایدآل‌های صفربعدی در رده‌ی NP-complete قرار دارد. البته تلاش‌های زیادی شده است که زمان اجرای الگوریتم کاهش یابد. بهترین الگوریتم شناخته شده برای محاسبه‌ی یک پایه‌ی گربنر الگوریتم‌های F4 و F5 متعلق به فوگر است که گرچه هنوز در رده‌ی NP-complete قرار دارند ولی به مراتب زمان کمتری را صرف می‌کنند [18]. اساس ریاضی این الگوریتم‌ها مشابه الگوریتم بوخبرگر است. الگوریتم F4 با استفاده از یک محک جدید و روش‌های جبرخطی، تعداد محاسبات فرم‌های نرمال را کاهش می‌دهد. الگوریتم F5 نخست پایه‌ی گربنر یک جفت چندجمله‌ای از مولدهای ایدآل را محاسبه و سپس در هر مرحله یک مولد دیگر از ایدآل را به پایه قبلی اضافه کرده و با استفاده از محک جدیدی که توسط فوگر ابداع شده است، پایه گربنر آن را به دست می‌آورد.

اگر $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل I باشد، با اضافه کردن چندجمله‌ای‌های دیگر به G، همچنان یک پایه گربنر خواهیم داشت. بنابر این پایه‌ی گربنر یک ایدآل یکتا نیست. با این حال می‌توان پایه گربنر تحویل‌یافته را تعریف کرد که یکتاست.

تعریف ۱۵. فرض کنید $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب داده شده $\leq$ برای ایدآل I باشد. G را یک پایه گربنر تحویل یافته[1] گویند اگر شرایط زیر برقرار باشند.

الف) به ازای هر $i = 1, \ldots, s$، $\mathrm{LC}(g_i) = 1$.

ب) مجموعه $\{\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_s)\}$ یک مولد مینیمال برای $\mathrm{LT}(I)$ است.

1) reduced Gröbner basis



۱) مارتین کروتزر، کتاب دوجلدی او و روبیانو با عنوان «جبر جابجایی محاسباتی» یکی از غنی‌ترین منابع برای پایه‌های گربنر و کاربردهای آن است. ۲) آلدو کونکا، از پژوهشگران مطرح جبر جابجایی که نتایج عمیقی در استفاده از پایه‌های گربنر در ایدآل‌های دترمینانی و ایدآل‌های ژنریک به دست آورده است. ۳) پیتر پائوله، از همکاران نزدیک بوخبرگر در ریسک.

ج) به ازای هر $i = ۱, \dots, s$، هیچ کدام از بخش‌های غیرپیشرو g_i در ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ نیستند.

قضیه‌ی ۱۶. برای هر ایدآل I از P و هر ترتیب بخشی داده شده، پایه گربنر تحویل‌یافته وجود دارد و یکتاست.

اثبات. برای آشنایی با نحوه‌ی اثبات این نوع قضایا، اثباتی برای قضیه‌ی ۱۶ می‌آوریم. فرض کنید $G = \{g_۱, \dots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب داده شده $\leq$ برای ایدآل I باشد چون ضرایب چندجمله‌ای‌ها در میدان K هستند، می‌توان ضرایب پیشرو مولدها را برابر ۱ قرار داد.

اگر در مجموعه‌ی $\{\mathrm{LT}(g_۱), \dots, \mathrm{LT}(g_s)\}$ یکی از اعضاء مثلاً $\mathrm{LT}(g_i)$ توسط دیگری بخش شود، این عضو به عنوان مولد، اضافه است و می‌توان g_i را در مجموعه‌ی G حذف کرد بدون این که به پایه‌ی گربنر بودن G لطمه‌ای وارد شود. پس از حذف این نوع چندجمله‌ای‌ها، به جای هر عضو g_j از G، فرم نرمال آن نسبت به $(g_۱, \dots, g_{j-۱}, g_{j+۱}, \dots, g_s)$ را قرار می‌دهیم. در این صورت یک پایه‌ی گربنر تحویل یافته به دست آمده است. برای اثبات یگانگی، فرض کنید $G = \{g_۱, \dots, g_s\}$ و $H = \{h_۱, \dots, h_t\}$ دو پایه‌ی گربنر تحویل یافته نسبت به ترتیب $\leq$ برای ایدآل I باشند. می‌دانیم که مجموعه‌ی مولد مینیمال ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ یگانه است و بنابراین $s = t$ و با اندیس‌گذاری مجدد می‌توان فرض کرد به ازای هر $i = ۱, \dots, s$، $\mathrm{LT}(g_i) = \mathrm{LT}(h_i)$. از طرف دیگر $g_i - h_i \in I$ و اگر غیر صفر باشد، طبق تعریف هیچ بخش $g_i - h_i$ به ویژه بخش پیشرو آن در ایدآل $\langle \mathrm{LT}(g_۱), \dots, \mathrm{LT}(g_s) \rangle$ نیست، که یک تناقض با پایه‌ی گربنر بودن G است. بنابراین $g_i = h_i$.

همان طور که قبلاً نیز ذکر شده است، با تغییر ترتیب بخشی، پایه‌ی گربنر و حتی پایه‌ی گربنر تحویل یافته یک ایدآل می‌تواند دستخوش تغییر شود. برخی از ایدآل‌ها دارای مولدی هستند که نسبت به هر ترتیب بخشی دلخواه یک پایه گربنر است. چنین مولدی را پایه‌ی گربنر جهانی [1] گویند. البته برای هر ایدآل دلخواه، لزوماً پایه گربنر جهانی وجود ندارد.

۳. برخی از کاربردها

شاید اساسی‌ترین کاربرد پایه‌های گربنر که بیشتر کاربردهای دیگر بر آن استوار هستند، بررسی تعلق یک چندجمله‌ای به ایدآل مورد نظر است. می‌دانیم که اگر I یک ایدآل در $S = K[x_۱, \dots, x_n]$ و G یک پایه گربنر برای آن باشد، چندجمله‌ای f در I قرار دارد اگر و تنها اگر فرم نرمال f نسبت به G برابر صفر باشد. بنابراین الگوریتمی برای بررسی عضویت یک چندجمله‌ای در یک ایدآل وجود دارد. همچنین اگر I و J دو ایدآل در S باشند، با محاسبه‌ی پایه‌های گربنر تحویل یافته آنها که منحصر به فرد است، می‌توان شمول هرکدام در دیگری و یا تساوی آن‌ها را فقط با مشاهده این پایه‌ها دریافت.

یک مسأله‌ی مهم که در حل دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای مطرح می‌شود، نحوه‌ی حذف یکی از متغیرها در این دستگاه است به طوری که از مجموعه جواب دستگاه با متغیر کمتر بتوان جواب‌های دستگاه اول را به دست آورد. فرض کنید $f_۱ = f_۲ = \cdots = f_t = ۰$ یک دستگاه از چندجمله‌ای‌ها در S باشد. مجموعه جواب‌های این دستگاه، یعنی نقاطی از K^n مانند $a = (a_۱, \dots, a_n)$ که $f_۱(a) = f_۲(a) = \cdots = f_t(a) = ۰$، برابر مجموعه صفرهای ایدآل $I = \langle f_۱, f_۲, \dots, f_t \rangle$ یا همان واریته متناظر با I است. بنابر این حذف متغیر $x_۱$ در دستگاه فوق معادل به دست آوردن ایدآل $I \cap K[x_۲, \dots, x_n]$ است. این کار با کمک پایه‌های گربنر به راحتی انجام می‌شود.

قضیه‌ی ۱۷. فرض کنید $I \subseteq K[x_۱, \dots, x_n]$ یک ایدآل و G یک پایه‌ی گربنر برای I با ترتیب لغت‌نامه‌ای باشد. در این صورت، زیرمجموعه‌ای از G متشکل از اعضایی که متغیرهای $x_۱, \dots, x_l$ را ندارند، یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل $I_l = I \cap K[x_{l+۱}, \dots, x_n]$ است. پس اگر یک پایه‌ی گربنر برای I با ترتیب لغت‌نامه‌ای داشته باشیم، پایه‌ی گربنر و درنتیجه مولد I_l که همان دستگاه حاصل از حذف متغیرهای $x_۱, \dots, x_l$ می‌باشد، قابل دسترسی است.

محاسبه‌ی اشتراک دو ایدآل به صورت زیر امکان‌پذیر است.

قضیه‌ی ۱۸. فرض کنید $I, J \subseteq K[x_۱, \dots, x_n]$ دو ایدآل باشند. در این صورت

$$I \cap J = (tI + (۱ - t)J) \cap K[x_۱, \dots, x_n],$$

که در آن، $(tI + (۱ - t)J)$ به عنوان ایدآلی در $K[t, x_۱, \dots, x_n]$ در نظر گرفته شده است.

برای بررسی عضویت در رادیکال یک ایدآل نیز روشی وجود دارد. یادآوری می‌شود که برای ایدآل I رادیکال به صورت

$$\sqrt{I} = \{f : f^m \in I, \text{for some integere } m > ۰\}$$

تعریف می‌شود که یک ایدآل است. ایدآلی که برابر رادیکال خودش است، ایدآل رادیکال گفته می‌شود.

۱) بوخبرگر در سال ۲۰۰۲ بازنشست شد و سمت‌های مدیریتی را به دیگران واگذار کرد. وی فعالیت‌های علمی و عملی خود را همچنان ادامه می‌دهد. ۲) کاخ هاگنبرگ که زمانی تبدیل به یک مخروبه شده بود، اکنون محلی آرام و دلپذیر برای پژوهشگران محاسبات نمادین است. ۳) رحیم زارع‌نهندی، اولین کسی که پایه‌های گربنر را در ایران معرفی نمود.

لم ۱۹. فرض کنید $I = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle \subset S$ یک ایدآل باشد. چندجمله‌ای f در $\sqrt{I}$ قرار دارد اگر و تنها اگر ۱ در ایدآل $\langle f_1, \ldots, f_t, 1 - yf \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, y]$ باشد.

با همین روش‌ها می‌توان پوچساز[1] یک ایدآل و یا یک مدول، و هسته و برد یک همریختی را محاسبه کرد. برخی از موارد دیگر که قابل محاسبه هستند، عبارتند از: تابع هیلبرت، سری هیلبرت، چندجمله‌ای هیلبرت، چندگانگی[2]، h ـ بردار، تجزیه‌ی اولیه، تحلیل آزاد مینیمال، اعداد بتی و ....

۴. حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{S} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

که در آن f_1، ...، f_s چندجمله‌ای‌هایی در $K[x_1, \ldots, x_n]$ هستند. نخستین سؤالی که مطرح می‌شود، شرایط وجود جواب برای این دستگاه است. به این سؤال در حالت کلی پاسخی داده نشده است. ولی در حالتی که میدان K بسته جبری باشد (مانند میدان اعداد مختلط)، قضیه‌ی صفرهای هیلبرت جواب کاملی ارائه می‌دهد.

تعریف ۲۰. فرض کنید $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ ایدآلی در $K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد. واریته متناظر با I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : \forall f \in I, f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}.$$

1) annihilator 2) multiplicity

به راحتی مشاهده می‌شود که مجموعه جواب دستگاه S برابر $V(I)$ است.

قضیه‌ی ۲۱. (قضیه‌ی ضعیف صفرهای هیلبرت[1]) فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری باشد. با مفروضات بالا، $V(I)$ تهی است اگر و تنها اگر $I = K[x_1, \ldots, x_n]$.

بنابراین، اگر دستگاه S داده شده باشد، می‌توان با محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر تحویل یافته ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های دستگاه، و بررسی این که این پایه برابر $\{1\}$ است یا نه، به وجود یا عدم وجود جواب دستگاه پی برد. سؤال دیگری که مطرح می‌شود، تشخیص متناهی بودن تعداد جواب‌ها و نحوه‌ی به دست آوردن آن‌ها است. قضیه‌ی زیر روشی برای این کار ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۲۲. فرض کنید S یک دستگاه معادلات و I ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های این دستگاه است. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب بخشی روی T^n باشد. شرایط زیر با هم معادلند.

الف) دستگاه S تعداد متناهی جواب دارد.

ب) K—فضای برداری $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ دارای بعد متناهی است.

ج) مجموعه $T^n \setminus \mathrm{LT}_{\leq}\{I\}$ متناهی است.

د) به ازای هر i در $\{1, \ldots, n\}$، عدد صحیح نامنفی α_i وجود دارد که $x_i^{\alpha_i} \in \mathrm{LT}_{\leq}(I)$.

برای اثبات به [27, Prop. 3.7.1] مراجعه کنید.

با داشتن یک پایه‌ی گربنر برای I و با استفاده از بند (د) قضیه بالا، به راحتی می‌توان متناهی بودن مجموعه جواب دستگاه S را تحقیق کرد. در واقع، قضیه قوی‌تری وجود دارد که ثابت می‌کند تعداد جواب‌های دستگاه در $\overline{K}^n$، که $\overline{K}$ بستار جبری K است، برابر بعد K—فضای برداری $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ است، مشروط بر این که تکرر صفرها در شمارش در نظر گرفته شده باشد. بنابراین می‌توان در حالت کلی، کران بالایی برای تعداد جواب‌های یک دستگاه به دست آورد.

تعریف ۲۳. ایدآل I با $V(I)$ متناهی، ایدآل صفربعدی گفته می‌شود.

با توجه به قضیه‌ی ۲۲، صفربعدی بودن ایدآل I معادل متناهی بودن بعد فضای برداری $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ است که نتیجه می‌دهد بعد کرول حلقه‌ی $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ برابر صفر است؛ که نام‌گذاری «صفربعدی» برای این نوع ایدآل‌ها را توجیه می‌کند. قضایای دیگری نیز وجود دارند که روش‌هایی برای به دست آوردن صفرهای یک ایدآل صفربعدی ارائه می‌کنند.

دانستن تعداد جواب‌های یک دستگاه و یا حتی کران بالای مناسب برای آن، کاربردهای جالبی دارد که در زیر یکی از آنها را می‌آوریم.

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ باشد. در حلقه‌ی $K[x_1, \ldots, x_n]$ که در آن به ازای هر i، متغیر x_i

1) week Hilbert nullstellensatz

مدرسهٔ تابستانی پایه‌های گربنر و کاربردهای آن، ۱۳۸۴ دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان

متناظر یال e_i می‌باشد، ایدآل $I(G)$ را برابر ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های زیر در نظر بگیرید.

الف) همه چندجمله‌ای‌های به صورت $x_i^۲ - x_i$، به ازای $i = ۱, \ldots, n$.

ب) همه تک‌جمله‌ای‌های به صورت x_ix_j، اگر یال e_i با یال e_j در G در یک راس مشترک باشند.

ج) همه چندجمله‌ای‌های به صورت $x_{i_۱} + \cdots + x_{i_s} - ۱$، به طوری که راسی مانند v_i در G وجود دارد و $e_{i_۱}, \ldots, e_{i_s}$ تمام یال‌هایی هستند که یک طرف آن‌ها رأس v_i است.

قضیه‌ی ۲۴. تعداد تطابق‌های کامل[1] در گراف G برابر تعداد اعضای $V(I)$ است.

برای اثبات به [51] مراجعه کنید.

یادآوری می‌شود که یک تطابق کامل در یک گراف، زیرمجموعه‌ای از یال‌های آن مانند $M \subseteq E(G)$ است که اولاً هیچ دو یالی از M راس مشترک ندارند و ثانیاً یال‌های M همه رأس‌های G را می‌پوشانند. معمولاً می‌توان یک مولکول شیمیایی را با یک گراف نمایش داد که در آن رأس‌ها نشان دهنده‌ی اتم‌ها و یال‌ها پیوندهای موجود بین اتم‌ها هستند. در دسته بسیار مهمی از مولکول‌ها به نام مولکول‌های فولرن[2] که از اتم‌های کربن تشکیل شده‌اند، تعداد تطابق‌های کامل گراف متناظر، برابر تعداد ایزومرهای مولکول مورد نظر است [20]. بنابراین، یافتن تعداد تطابق‌های کامل این گراف‌ها منجر به دانستن تعداد ایزومرهای یک مولکول فولرن می‌شود که به نوبه خود می‌تواند به حدس‌هایی در مورد وجود مولکول‌های جدید و ناشناخته بیانجامد.

1) perfect matching 2) Fullerene

تشکر و قدردانی. نگارنده از رحیم زارع نهندی و امیر هاشمی که با مطالعه نسخه اولیه این نوشتار، نکات مهمی را تذکر داده و راهنمایی‌های ارزنده‌ای کردند، تشکر می‌کند. وی از لورنزو روبیانو و پیتر پائوله که ابهاماتی را در رابطه با تاریخچه پایه‌های گربنر برای نگارنده روشن کردند قدردانی می‌کند. از آکادمی علوم اتریش برای دعوت نگارنده به اتریش و تامین هزینه‌های وی در طول تابستان ۱۳۸۵، و از برونو بوخبرگر که وقت قابل‌توجهی را برای مصاحبت با نگارنده صرف کرد، و همچنین از همه اعضای انستیتو تحقیقاتی محاسبات نمادین به ویژه فرانتز وینکلر به خاطر مهمان‌نوازی‌شان تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع و کتابنامه

[1] S. Abhyankar, *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*, Math. Surveys and Monographs 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[2] W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[3] T. Becker and V. Weispfenning, *Gröbner Bases*, Springer, New York, 1993.

[4] W. Bruns and A. Conca, Gröbner bases and determinantal ideals, Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra (Sinaia, 2002) 9–66, NATO Sci. Ser. II M. P. C. 115, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[5] B. Buchberger, On finding a vector space basis of the residue class ring modulo a zero dimensional polynomial ideal (in German), PhD Thesis, Universitat Innsbruck, Innsbruck, 1965.

[6] B. Buchberger, Ein algorithmisches kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems, *Aequations Math.* 4 (1970) 374–383.

[7] B. Buchberger, A thoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms, PhD Thesis, *ACM SIGSAM Bull.* 10 no. 3 (1976) 19–29.

[8] B. Buchberger A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases, Symbolic and algebraic computation (EUROSAM '79, Internat. Sympos., Marseille, 1979), pp. 3–21, Lecture Notes in Com. Sci. 72, Springer, Berlin-New York, 1979.

[9] B. Buchberger, A note on the complexity of constructing Gröbner-bases, Computer Algebra (London, 1983), 137–145, Lecture Notes in Comp. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[10] B. Buchberger, A critical-pair completion algorithm for finitely generated ideals in rings, Logic and machines: decision problems and complexity (Mnster, 1983), 137–161, Lecture Notes in Comp. Sci. 171, Springer, Berlin, 1984.

[11] B. Buchberger and F. Winkler, *Gröbner Bases and Applications*, London Math. Soc. Lecture Note 251, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[12] A. Capani, G. Niesi and L Robbiano, CoCoA: A system for doing computations in commutative algebra, http//cocoa.dima.unige.it.

[13] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (New Orleans, LA, 1991), 130–139, Lecture Notes in Comput. Sci. 539, Springer, Berlin, 1991.

[14] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, New York, 1992.

[15] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algeraic Geometry*, Second Edition, Springer, New York, 2004.

[16] L. E. Dickson, Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with distance prime factors, *Amer. J. Math.* 35 (1913) 413–426.

[17] J-C. Faugere, P. Gianni, D. Lazard and T. Mora, Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering, *J. Symbolic Comput.* 16 no. 4 (1993) 329–344.

[18] J-C. Faugere, A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4), Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998), *J. Pure Appl. Algebra* 139 no. 1-3 (1999) 61–88.

[19] R. Fröberg, *An Introduction to Gröbner Bases*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[20] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 207. Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] P. Gordan, Les invariants des forms binaries, *J. de Mathématiques Pures et Appliqués* 6 (1900) 141–156.

[22] D. Grayson and M. Stillman, Macaulay 2: A software system for algebraic geometry and commutative algebra, www.math.uiuc.edu/ Macaulay2.

[23] G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann, *Singular Reference Manual*, http://www.mathe,atik.uni-kl.de/~ zca/Singular.

[24] W. Gröbner, Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Monatsh. Math.* 47 (1939) 247–284.

[25] W.Gröbner, Über die Eliminationstheorie,*Monatsh. Math.* 54 (1950) 71-78.

[26] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II, *Ann. Math.* 79 (1964) 109–203.

[27] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer, 2000.

[28] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 2*, Springer, 2005.

[29] D. Lazard, Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations, Computer Algebra (London, 1983), 146–156, Lecture Notes in Comput. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[30] F. S. Macaulay, *Algebraic Theory of Modular Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[31] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* 26 (1927) 372-393.

[32] E. Mayr and A. R. Meyer, The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals, *Adv. Math.* 45 (1982) 305-329.

[33] F. Mora and H. M. Muller, The computation of the Hilbert function, Computer Algebra (London, 1983) 157–167, Lecture Notes in Comput. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[34] H. M. Muller and B. Buchberger, The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros, Computer Algebra (Marseille, 1982) 24–31, Lecture Notes in Comput. Sci. 144, Springer, Berlin, 1982.

[35] H. M. Muller and F. Mora, Upper and lower bounds for the degree of Groebner bases. EUROSAM 84 (Cambridge, 1984) 172–183, Lecture Notes in Comput. Sci. 174, Springer, Berlin, 1984.

[36] F. Pauer and M. Pfeifhofer, The theory of Gröbner bases, *Enseign. Math.* 34 no. 3-4 (1988) 215–232.

[37] F. Pauer and A. Unterkircher, Gröbner bases for ideals in Laurent polynomial rings and their application to systems of difference equations, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* 9 no. 4 (1999) 271–291.

[38] F. Pauer, Gröbner bases with coefficients in rings, *J. Symbolic Comput.* 42 no. 11-12 (2007) 1003–1011.

[39] L. Robbiano and G. Valla, On set-theoretic complete intersections in the projective space, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 53 (1983) 333–346.

[40] L. Robbiano and G. Valla, Some curves in P^3 are set-theoretic complete intersections, Algebraic Geometry - Open Problems (Ravello, 1982) 391–399, Lecture Notes in Math. 997, Springer, Berlin, 1983.

[41] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Second edition, Progress in Mathematics 41, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[42] Symbolic and Algebraic Computation, EUROSAM (Marseille, 1979) Edited by W. Edward, Lecture Notes in Computer Science 72, Springer, Berlin, 1979.

[43] C. Traverso, A study on algebraic algorithms: the normalization, Conference on Algebraic Varieties of Small Dimension (Turin, 1985), Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1986, Special Issue (1987) 111–130.

[44] C. Traverso, Gröbner trace algorithms, Symbolic and Algebraic Computation (Rome, 1988) 125–138, Lecture Notes in Comput. Sci., 358, Springer, Berlin, 1989.

[45] C. Traverso, Hilbert functions and the Buchberger algorithm, *J. Symbolic Comput.* 22 no. 4 (1996) 355–376.

[46] G. Valla, On set-theoretic complete intersections, Complete Intersections (Acireale, 1983) 85–101, Lecture Notes in Math. 1092, Springer, 1984.

[47] W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[48] F. Winkler, The Churchmhy Rosser property in computer algebra and special theorem proving: an investigation of critical pair, completion algorithms, Dissertationen der Johannes-Kepler-Universitat Linz [Dissertations of the Johannes Kepler University of Linz], 49.

[49] F. Winkler, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer, Wien, 1996.

[50] Rahim Zaare-Nahandi and Rashid Zaare-Nahandi, Gröbner basis and free resolution of the ideal of 2-minors of a $2\times n$ matrix of linear forms, *Comm. Alg.* 28 np. 9 (2000) 4433–4453.

[51] Rashid Zaare-Nahandi, Perfect matchings in graphs; an approach via Gröbner bases, *Southeast Asian Bull. Math.* 30 (2006) 341–345.

رشید زارع نهندی
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
rashidzn@iases.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۸۱ تا ۹۰

شما و تحقیق

ریچارد همینگ

مترجم: سید محمد غلامزاده محمودی

مطالب کمی درباره‌ی مدیریت کار تحقیقی، و مطالب بسیار کمتری درباره‌ی نحوه‌ی برخورد با افرادی که کار تحقیقی شما را مدیریت می‌کنند نوشته شده است. با این حال، کار تحقیقی بیش از آنچه تصور می‌کنید، تحت کنترل‌تان است.

در اینجا می‌خواهیم درباره‌ی کارهای تحقیقی اثرگذار صحبت کنیم. کارهایی که مورد مقبولیت وسیع و فراگیر قرار می‌گیرند یا حتی شاید منجر به بردن جایزه‌ی نوبل شوند. مقاله‌ی چاپ شده‌ی متوسط را نویسنده، داوران و شاید شخص دیگری و مقاله‌های کلاسیک را هزاران نفر می‌خوانند. در این نوشته می‌خواهیم درباره‌ی کارهای تحقیقی‌ای صحبت کنیم که اهمیت دراز مدت و ارزشی بیشتر از یک پانویس در مورد تاریخ دارند.

اگر می‌خواهید کار مهم انجام دهید باید روی یک مسأله‌ی خوب، در یک زمان خوب، و با یک روش خوب کار کنید. بدون فراهم شدن هر یک از این سه شرط هم گاهی می‌توان کارهای خوب انجام داد ولی به احتمال قریب به یقین فرصت تولید کار برجسته را از دست خواهید داد.

بزرگی، به سبک و سیاق نیز بستگی دارد. مثلاً، بعد از آموختن مبانی نقاشی، باید تحت نظر یک استاد به یادگیری ادامه داد. هنگام شاگردی، شما آنچه استاد می‌گوید را سر لوحه‌ی کار خود قرار می‌دهید ولی اگر بخواهید ماندگار شوید، لازم است که سبک و سیاق خود را پیدا کنید. به علاوه، سبک و سیاق یک دوره، لزوماً مناسب حال دوره‌ی دیگر نیست. همچنان که سبک کوبیسم در دوره‌ی رئالیسم ممکن بود به تعالی خود نرسد.

به همین ترتیب فرمول ساده‌ای که برجستگی و اهمیت یک کار تحقیقی در علوم یا مهندسی را نشان دهد، وجود ندارد.

*) Richard W. Hamming

در اینجا فقط می‌خواهم باب بحث درباره‌ی این موضوع را بگشایم. در این که این موضوع بسیار مهم است شک نکنید، زیرا از آنجا که عمر بشر فانی است، عاقلانه است به جای زندگی کردن صرف، طوری زندگی کنیم که حداقل از نظر خودمان، قادر به انجام کارهای مهم باشیم. بی معنی است که زندگی خود را به خاطر چیزهایی که حتی به صورت یک پانویس هم جایی ثبت نمی‌شوند، تلف کنیم.

انتخاب مسأله

بحث را با انتخاب مسأله شروع می‌کنم. خیلی از دانشمندان تقریباً همه‌ی وقتشان را روی مسائلی صرف می‌کنند که حتی خودشان هم قبول دارند که نه مهم‌اند و نه به کارهای برجسته منجر می‌شوند. بنابراین، خیلی بعید است که آنها کار مهمی انجام دهند. بایستی توجه کرد که اهمیت راه حل، خود مسأله را مهم نمی‌کند. تمام سی سالی که در آزمایشگاه‌های تلفن بل BTL[۱] کار می‌کردم، (قبل از قطع رابطه)، تا آنجا که اطلاع دارم هیچ کس روی مسائلی همچون مسافرت در زمان، تله پورت کردن، یا ضد گرانش کار نمی‌کرد. چرا؟ زیرا آنها هیچ ترفندی برای حمله به این مسأله‌ها نداشتند. بنابراین یکی از جنبه‌های مهم هر مسأله‌ی خوب این است که یک ترفند خوب برای حمله به آن، یک نقطه شروع خوب، و ایده‌ای معقول درباره‌ی چگونگی شروع به کار داشته باشید.

برای نمونه، کمی درباره‌ی تجربیاتم در BTL صحبت می‌کنم. در چند سال اول من با ریاضیدانان ناهار می‌خوردم. خیلی زود متوجه شدم که آنها بیشتر به دنبال شوخی و بازی کردن هستند تا کار جدی! بنابراین برای ناهار با فیزیکدانان هم سفره شدم. چند سال گذشت تا این که بیشتر آدم‌های جالب به خاطر دریافت جایزه‌ی نوبل، ارتقاء، انتصاب و پیشنهادهای مختلف از شرکت‌های دیگر، از آنجا رفتند. بنابراین تصمیم گرفتم چند مدتی هم از میز شیمی فیض ببرم. ناگفته نماند که یک دوست هم آنجا داشتم.

در ابتدا پرسیدم مسأله‌های مهم در شیمی کدامند، و این که آنها روی چه مسائل مهم، یا مسائلی که ممکن است به نتایج مهم منجر شوند، کار می‌کنند. یک روز پرسیدم: اگر آنچه آنها رویش کار می‌کنند، مهم نیست و احتمالاً به چیزهای مهم هم منجر نمی‌شود، اصلاً چرا زحمت کار کردن روی آن را به خودشان می‌دهند و چنین شد که بعد از آن مجبور شدم همنشین مهندس‌ها سر میز ناهار باشم!

چهار ماه گذشت، یک روز دوستم مرا در راهرو متوقف کرد و گفت که سؤالات من باعث دگرگونی او شده‌اند. او تابستان را صرف فکر کردن درباره مسائل مهم در زمینه‌ی کاری‌اش کرده و با این که زمینهٔ تحقیقاتی‌اش را عوض نکرده است، ولی فکر می‌کند ارزش تلاش کردن را دارد. از او تشکر کردم و شروع به قدم زدن کردم. چند هفته بعد خبر رسید او رئیس بخش شده است. چند سال

*) Bell Telephone Laboratories

بعد او عضو آکادمی ملی مهندسی شد. تا آنجا که می‌دانم تنها فردی که گوش شنوا داشت به کارهای مهم پرداخت و دیگران هیچ کار مهمی که توجه عمومی را جلب کند نکردند.

مسائل خوب بسیاری وجود دارند، ولی معدودی از افراد به دقت آنها را جستجو می‌کنند. خیلی از افراد بدون هدف و چشم بسته به دنبال موضوعاتی که پیش می‌آید راه می‌افتند، و آسان‌ترین و بی دردسرترین راه به آینده را تعقیب می‌کنند. همه‌ی دانشمندان بزرگ، وقت و تلاش بسیار زیادی را صرف وارسی کردن مسائل مهم در زمینه‌ی کاری‌شان می‌کنند. بسیاری لیستی از ده تا بیست مسأله‌ی مهم دارند و مترصد یافتن یک ترفند یا ابزار مناسب برای حمله به آنها هستند. هنگامی که بارقه‌ی امیدی ایجاد شود یا به چیزی مرتبط با مسأله برخورد کنند که قبلاً از آن بی اطلاع بودند، آماده‌ی برگشتن به مسأله هستند تا روی آن کار کنند و در رسیدن به حل آن گوی سبقت را از دیگران بربایند.

شاید مشاهده کرده باشید که درهای اتاق بعضی افراد هنگام کار کردن باز است و آنها در معرض دید افرادی که عبور می‌کنند به فعالیت مشغولند. بعضی دیگر خیلی مراقب‌اند تمرکزشان از بین نرود. آنهایی که با درهای باز کار می‌کنند، شاید در روز کمتر کار کنند، ولی آنهایی که پشت درهای بسته کار می‌کنند، نه می‌دانند روی چه مسأله‌ای کار کنند و نه از فرصت برخورد با ایده‌هایی که به حل قطعه‌های مجهول معمایشان کمک کند استفاده می‌کنند. البته شاید نتوان اثبات کرد که درهای باز باعث به وجود آمدن ذهن‌های باز می‌شود، ولی همبستگی این دو، انکار ناپذیر است. بر این باورم، هریک دیگری را تقویت می‌کند، و احتمال این که درهای باز شما را به مسائل مهم سوق دهد، بیشتر از درهای بسته است.

سختکوشی یکی از خصایص اکثر دانشمندان بزرگ است. ادیسون گفته است، نبوغ، ۹۹ درصد عرق ریختن و ۱ درصد الهام است. نیوتن گفته است، اگر دیگران همانند او سخت کار می‌کردند، آنها نیز به دستاوردهای مشابهی می رسیدند. سخت کوشی لازم است ولی کافی نیست. بیشتر افراد آنچنان که باید و شاید، سخت کار نمی‌کنند. با این حال، خیلی از آنهایی هم که سخت کار می‌کنند یا روی یک مسأله‌ی نامناسب یا در یک زمان نامناسب یا در جهت نامناسب کار می‌کنند و ماحصل کار آنها ناچیز است و بازدهی بسیار کمی دارند.

بارها اتفاق می‌افتد که همزمان بیش از یک نفر مشغول به کار کردن روی یک مسأله هستند. در زیست شناسی داروین و والاس هر دو تقریباً همزمان، ایده‌ی نظریه‌ی تکامل را در ذهن داشتند. به غیر از اینشتین، افراد بسیار دیگری از جمله پوانکاره، روی ایده‌های اصلی نسبیت خاص کار می‌کردند، ولی این اینشتین بود که روی آن ایده‌ها در یک جهت صحیح کار کرد.

کل اعتبار نصیب نخستین نفری می‌شود که نتایج نهایی را به دست می‌آورد. دیگر افراد به زودی به دست فراموشی سپرده می‌شوند. این اهمیت و ضرورت کار کردن روی مسأله در زمان

مناسب را نشان می‌دهد. اینشتین بیشتر اواخر عمر خود را صرف کار کردن روی نظریه‌ی وحدت[1] کرد. در واپسین لحظات زندگی، موقعی که در بستر بیماری بود این مسأله هنوز یکی از مشغله‌هایش بود. ولی بدون به دست آوردن نتایج قابل توجه، از دنیا رفت. ظاهراً او به مسأله زود حمله کرده بود یا شاید این مسأله در آن زمان نابجا بود.

حتی وقتی که فکر می‌کنید روی یک مسأله‌ی مناسب و در یک زمان مناسب کار می‌کنید دو خطای بزرگ اغلب اتفاق می‌افتد. یکی زود تسلیم شدن و دیگری سماجت بیهوده است. دومی بسیار رایج است. بدیهی است اگر با یک مسأله‌ی نامناسب شروع کنید و قبول نکنید آن را رها کنید، ناخواسته محکوم به تلف کردن بقیه‌ی عمرتان خواهید شد، مثال اینشتین را به یاد آورید. دانستن این که فرد چه هنگامی سماجت بیهوده می‌کند آسان نیست، اکثر اوقات سماجت‌های بیهوده از کله شقی و لجاجت نشأت می‌گیرند. البته صبر در حل مسأله و سماجت بیهوده متفاوت‌اند، بدون صبر و عزم استوار، بارقه‌های امید هرگز پدید نمی‌آیند.

اکنون به بهانهٔ عمده‌ای که خیلی‌ها برای کار نکردن روی مسائل مهم عنوان می‌کنند می پردازم. آنها همیشه مدعی هستند که موفقیت مرهون شانس است. دیر زمانیست که پاستور جواب این ادعا را داده است: شانس به سراغ ذهن‌های آماده می آید.

بسیاری از تجارب مستقیم، تجارب غیر مستقیم از راه پرسش از دیگران، و مطالعه بسیار مرا متقاعد به درستی این گفته‌ی پاستور کرده است. این که موفقیت‌های برجسته اغلب به وسیله‌ی ذهن‌های آماده به دست می‌آید تصادفی نیست. مثلاً هنگامی که اولین بار با فاینمن در لس آلاموس در دوره‌ی جنگ جهانی دوم ملاقات کردم، معتقد شدم که او جایزه‌ی نوبل خواهد گرفت. عزم و انرژی، سبک و سیاق و توانایی‌هایش، همگی گواه این بودند که او مرد کارهای بزرگ است. اینشتین هنگامی که ۱۲ یا ۱۴ ساله بود، از خودش پرسیده بود یک موج نور به چه می‌ماند اگر او هنگامی که به آن نگاه می‌کند، با سرعت نور حرکت کند. او می‌دانست که نظریه‌ی ماکسول، رخ دادن یک ماکسیمم مانای موضعی را تأیید نمی‌کرد ولی اگر نظریه‌ی مرسوم کلاسیک درست بود این چیزی بود که او می‌بایست مشاهده کند. بنابراین تعجب‌آور نیست که او بعدها نظریه‌ی نسبیت خاص را گسترش داد زیرا ذهن او از مدت‌ها قبل آماده‌ی این موضوع بود.

گفتگو با افرادی که به تازگی کارهای تحقیقی مهم انجام داده‌اند بسیار سودمند است زیرا سبب خواهد شد یک توصیف تقریباً گام به گام از چگونگی رسیدن به نتایج آنها به دست آورید. آنها به طور پیوسته و متمرکز روی آن مسأله کار کرده‌اند و بهتر از هر کس دیگری با زیر و بم آن آشنا هستند. وقتی از مدت‌ها قبل روی یک مسأله کار کرده باشید، با همه‌ی جوانب آن آشنا هستید و ذهن خود را کاملاً آماده کرده‌اید و فقط جرقه‌ای باعث می‌شود گام نهایی را بردارید.

1) unified theory

خصوصیت‌های فردی

ویژگی‌های شخصیتی وجود دارند که شاید همگی ضروری نباشند، ولی در اغلب آنهایی که در علم کارهای برجسته انجام داده‌اند قابل مشاهده‌اند. اول، افراد موفق، فعالیت بیشتری در معرض نمایش قرار می‌دهند و نسبت به اکثر افراد پر انرژی‌ترند. آنها دید وسیع‌تری دارند، سختکوش‌ترند و نسبت به افراد معمولی توانایی و صبر بیشتری برای فکر کردن به مدت طولانی دارند. علم و دانش خیلی شبیه بهره مرکب است یعنی سود امروز به منزله سرمایه فرداست و هر چه امروز بیشتر انجام دهید، فردا افزون‌تر می‌توانید انجام دهید و درهای بیشتری به روی شما گشوده می‌شوند. بنابراین، در کنار عوامل دیگر، این انرژی فاینمن و تلاش بی وقفه و خستگی ناپذیر او در آزمودن چیزهای جدید بود که سبب شکل گیری تصویری از او به عنوان فردی موفق در ذهن خاص و عام شد.

البته این خصوصیات باید با احساس تعهد همراهی شود. تواناترین ریاضیدانی که من از نزدیک با وی آشنا بودم، به مسائلی که روی آنها کار می‌کرد عمیقاً اهمیت می‌داد. او کارهای درجه اول بسیاری انجام داده است، با این که ممکن است بعضی از آنها از کیفیت فوق‌العاده بالا برخوردار نبوده باشند. احساس تعهد عمیق برای رسیدن به موفقیت لازم است. دلیل آن آشکار است. احساس تعهد شما را وادار به فکر کردن و برنامه‌ریزی شبانه روزی درباره‌ی مسأله می‌کند، و شما را به استفاده از همه‌ی پتانسیل و توانایی‌های ذاتی‌تان سوق می‌دهد.

هنگامی که بعد از جنگ در لس آلاموس بودم، مشغول فکر کردن درباره‌ی مسأله‌ی معروف سوزن بوفون شدم که احتمال این را محاسبه می‌کند که یک سوزن انداخته شده روی سطحی با خطوط موازی هم فاصله، یکی از خطوط را قطع کند. از خود پرسیدم، آیا لازم است که سوزن، یک پاره خط راست باشد (به شرط اینکه نقاط برخورد چندگانه هم شمرده شوند)؟ نه. آیا لازم است خطوط موازی، راست باشند؟ نه. آیا لازم است که خطوط هم فاصله باشند یا این که فقط چگالی متوسط خطوط روی صفحه است که اهمیت دارد؟ چند سال بعد هنگامی که در BTL یک متالورژیست از من پرسید چگونه می‌توان مقدار مرزدانه [1] روی بعضی از میکرو فتوگراف‌ها را اندازه گرفت، بیدرنگ جواب دادم تعداد برخوردهای پاره خط‌های تصادفی از طول ثابت را روی عکس شمارش کنید. تفکر پیشین روی یک مسأله‌ی جالب و مهم در نظریه‌ی احتمال، مرا به طور آنی به آن ایده برای حل مسأله‌ی آن متالوژیست، هدایت کرد. شاید به نظر رسیدن آن ایده‌ی خارق‌العاده نبود، ولی کل این ماجرا، مکانیسم آماده سازی فکری و نقش مشغولیت‌های ذهنی قبلی برای حل مسائل را به تصویر می‌کشد.

تجربه‌ی بالا اهمیت سنگ تمام گذاشتن در انجام کارها و نگاه عمیق به ماهیت مسائل را آشکار می‌کند. این مصداقِ مَثَلِ کار نیکو کردن از پر کردن است، می‌باشد. تلاش مداوم برای فهمیدن

1) grain boundry

یک مسأله و موقعیت، نه به صورت ظاهری و سطحی، بلکه به صورت عمیق و ژرف، شما را برای به‌دست آوردن کاربردهای جدید و متفاوت از آموخته‌هایتان آماده می‌کند. تا غرق یک کاربرد مهم و مشغول دست و پنجه نرم کردن با آن نشوید، قادر به پیدا کردن و حل مسائل مهمی همانند مسأله‌ی سوزن بوفون نخواهید شد.

شجاعت و جرأت یکی دیگر از صفات ممیزه‌ی آنهایی است که کارهای بزرگ انجام می‌دهند. شنون[1] یک نمونه‌ی بارز در این است. او چند مدتی حدود ساعت ۱۰ صبح سر کار می‌آمد، تا ساعت ۲ بعد از ظهر شطرنج بازی می‌کرد و به خانه برمی‌گشت.

نکته‌ی اصلی در این بود که او چگونه شطرنج بازی می‌کرد. اگر اصلاً مورد حمله واقع می‌شد، به ندرت به دفاع از موقعیتش می‌پرداخت و در عوض به ضد حمله روی می‌آورد. این شیوه‌ی بازی کردن، خیلی زود یک صفحه‌ی شطرنج بسیار به هم پیچیده و گره خورده و همبسته پدید می‌آورد. او سپس با مکثی طولانی وزیرش را با گفتن این که، من از هیچ چیز نمی‌ترسم، جلو می‌آورد. چند مدتی طول کشید تا دریابم به همین خاطر بود که او قادر به اثبات وجود روش‌های خوب کدگذاری شد. چه کسی به جز شنون به ذهن‌اش می‌رسید که متوسط همه کدهای تصادفی را در نظر گیرد به امید این که میانگین به ایده‌آل نزدیک است؟ روش او درس‌های زیادی به من آموخت، گاهی اوقات روش او مرا قادر ساخت تا نتایج قابل توجهی به دست آورم. بدون جرأت و شهامت بعید است بتوان با پافشاری و استواری تمام، به مسائل مهم حمله کرد و بنابراین بعید است بتوان در راه انجام کارهای مهم، گام برداشت. جرأت و شهامت موجب تقویت اعتماد به نفس می‌شود، چیزی که یکی از ملزومات اساسی برای انجام کارهای مشکل است. البته باید مواظب خطر بزرگ غرور و اطمینان خاطر بیش از حد به خود بود، زیرا این‌ها بیش از این که عوامل مثبت و کمک کننده‌ای باشند، موانع بزرگی نیز در مسیر پیشرفت هستند.

خصوصیت فردی دیگری وجود دارد که سال‌ها طول کشید تا متوجه اهمیت آن در تحقیق شوم، و آن توانایی پذیرفتن عدم قطعیت و کنار آمدن با ظنّ و تردید است. بیشتر افراد می‌خواهند باور کنند که همه‌ی آنچه یاد می‌گیرند و همه‌ی آنچه گفته شده، حقایق خدشه‌ناپذیر و وحی منزل هستند. معدودی از افراد هستند که در همه چیز تردید می‌کنند. اگر زیاد به همه چیز باور داشته باشید نباید امیدوار باشید که دیدگاه واقعاً جدید که یک رشته را دگرگون کند، به دست آورید. اگر هم زیاد تردید کنید، اصلاً قادر نخواهید بود کارهای زیادی انجام دهید. باید تعادل مناسبی بین ایمان و تردید به باورها و آموخته‌ها وجود داشته باشد. در علم گام‌های رو به جلو بزرگ، همواره با تغییر نگرش به محیط و موضوع، نسبت به آنچه دید استاندارد و نگرش عادی در آن شاخه است، همراه بوده‌اند.

---

1) Claude E. Shannon

هنگام آموختن مفاهیم جدید لازم است آنها را سبک و سنگین، و از زوایا و جوانب گوناگون بررسی نماییم. با مرتبط کردن آنها به طرق گوناگون با دانسته‌های قبلی، می‌توان در آینده آنها را در موقعیت‌های غیر معمول بازیابی کرد و کاربردهای جدیدی از آنها یافت. مدتی طول کشید تا دریابم که از هر آموخته‌ی جدید باید همانند قلاب بهره برد تا با استفاده از آن چیزهای دیگری به دست آورد. این وجهی دیگر از تلاش اضافی، مطالعه‌ی عمیق‌تر و در یک کلام مصداق همان مثل کار نیکو کردن از پرکردن است، می‌باشد. همه‌ی این‌ها از ویژگی‌های دانشمندان بزرگ است.

شواهد و قراین بسیار محکم وجود دارند که نشان می‌دهند گام‌هایی که باعث تحول در یک رشته یا دگرگونی در یک شاخه می‌شوند اغلب به وسیله‌ی افراد بیرون از آن رشته‌ها برداشته می‌شوند. در باستان شناسی، روش تعیین عمر کربنی از فیزیک آمده است. اولین هواپیما به وسیله‌ی برادران رایت ساخته شد که در ساخت انواع دوچرخه سررشته داشتند.

به عنوان یک صاحب نظر و متخصص در یک رشته، مشکلات زیادی گریبان گیر شماست. اقیانوسی از آدمهای مجنون با ایده‌های درخشان دور و بر شماست. با این حال، گاهی بدبختانه اگر یک قدم بزرگ رو به جلو برداشته شود، احتمالاً به وسیله‌ی یکی از آنها برداشته می‌شود! اگر زیاد به آنها گوش کنید یا وقت زیادی برای آنها صرف کنید، از کارهای خود باز می‌مانید، ولی اگر هم آنها را کاملاً نادیده بگیرید، ممکن است فرصت‌های بزرگی از دست بدهید. هیچ راه حل ساده‌ای برای مواجهه با این معضل ندارم به جز این توصیه که غیر خودی‌ها و افراد بیرون از رشته خود را فوراً طرد نکنید.

داشتن هوش مفید است، با این وجود اغلب دانشجویان باهوش دوره‌های تحصیلات تکمیلی و دکتری خیلی هم بیش از دانشجویان با بهره‌ی هوشی پایین‌تر، در تولید علم سهم و مشارکت ندارند. البته هوش به صورت‌های متفاوت ظاهر می‌شود. فیزیک‌دانان تجربی، همانند فیزیک‌دانان نظری با روش یکسانی فکر نمی‌کنند. به نظر می‌رسد بعضی تجربی‌کارها با دستانشان فکر می‌کنند، یعنی بازی کردن با تجهیزات به آنها اجازه می‌دهد واضح‌تر فکر کنند. چند مدتی طول کشید تا دریابم که حتی افرادی که خیلی ریاضیات نمی‌دانند، هنوز می‌توانند در تولید علم، سهم و مشارکت داشته، و مدد رسان باشند. این که آنها نمی‌توانند معادله‌ی درجه دوم را ذهنی حل کنند به معنی این نیست که باید آنها را نادیده گرفت. وقتی زمینه‌ی هوشی یک فرد با زمینه‌ی هوشی شما مطابقت ندارد، دلیل دو چندانی می‌دهد که به آن فرد توجه کنید.

داشتن چشم‌انداز و دوراندیشی نسبت به آینده

داشتن شناخت از خود و دورنمایی از این که شاخه تحقیقاتی‌تان به چه سمت و سویی می‌رود بسیار اهمیت دارد. شاید داستان ملوان مست را شنیده باشید. او با گام‌های مستقل و تصادفی به این طرف و آن طرف تلو تلو می‌خورد. در گام n ام او به طور متوسط، با یک فاصله‌ی متناسب با $\sqrt{n}$ گام، از جایی که شروع کرده است دور خواهد شد. اما اگر یک منظره‌ی زیبا در یک طرف باشد، او با

فاصله‌ای متناسب با n گام، از نقطه‌ی اولیه دور خواهد شد. تفاوت بین n و $\sqrt{n}$ در یک عمر انتخاب، بسیار زیاد است و تفاوت داشتن یا نداشتن دوراندیشی و بصیرت را نشان می‌دهد. این که چه جهان‌بینی‌ای داشته باشید مهم است ولی این که حداقل یک جهان بینی داشته باشید مهم‌تر است زیرا راه‌های زیادی برای رسیدن به موفقیت وجود دارند. بنابراین داشتن دورنمایی از این که چه بر شما خواهد رفت، به کجا خواهید رفت و همچنین چگونه به مقصد خواهید رسید، فوق‌العاده مهم هستند. بدون داشتن دورنما، شانس انجام کارهای بزرگ زیاد نیست با داشتن دورنما، شانس خوبی خواهید داشت.

مبحث دیگری که باید مطرح کنم، مسأله‌ی سن است. به طور تاریخی، بیشترین سهم و مشارکت ریاضیدانان، فیزیکدانان نظری و اختر فیزیکدانان در تولید علم، هنگام جوانی آنها اتفاق افتاده است. از طرف دیگر، در موسیقی، سیاست، ادبیات، این کارهای واپسین هستند که به وسیله‌ی جامعه ارزش بیشترین می‌گیرند و موجب اجر و احترام می‌شوند. رشته‌های دیگر بین این دو حالت اکستریم قرار می‌گیرند. بنابراین لازم است آگاه باشید در بعضی زمینه‌ها، باید بیدرنگ وارد عمل شوید تا از قافله عقب نمانید.

افراد اغلب از شرایط کاری شان شکایت و اظهار نارضایتی می‌کنند. اما واقعیت این است که بسیاری از بزرگترین کارها، تحت شرایط کاملاً مساعد و مطلوب انجام نشده‌اند. آنچه اغلب افراد معتقدند بهترین شرایط کاری برای آنها است، حتی اگر مهیا شود، به ندرت به پیشرفت آنها کمک می کند. به نظر من، موسسه مطالعات پیشرفته در پرینستون، تعداد افراد خوب و با استعدادی را که نابود کرده است بیشتر از تعدادی است که به شکوفایی آنها کمک کرده است. تنها کافیست در مورد کارهای انجام شده توسط خیلی از این افراد، قبل و بعد از آمدن به آنجا، قضاوت کنید تا به این نتیجه‌گیری برسید. استثناهایی هم وجود دارد، اما به طور متوسط، حالت آرمانی شرایط کاری، به نظر می‌رسد افراد را از نظر علمی عقیم می‌کند.

خصوصیت دیگر افراد بزرگ این است که آنها کارهایشان را به گونه‌ای انجام می‌دهند که دیگران می‌توانند بر پایه‌ی کارهای آنها، فعالیت‌های جدیدی انجام دهند یعنی کارهایشان اساسی و همانند شالوده و زیربنا هستند که دیگران را قادر می‌سازند که روی آنها بناهای استواری بر پا کنند. نیوتن گفته است اگر توانستم افق های دور را ببینم به این خاطر بود که بر شانه‌های غول‌ها ایستاده بودم. افراد بسیاری هستند که به نظر می‌رسد نه تنها تمایلی ندارند دیگران بر پایه‌ی کارهای آنها، بنایی بر پا کنند، بلکه چهارچشمی مواظب نگه داشتن کارها برای خودشان هستند و در واقع به انبار کردن و احتکار علمی روی می‌آورند. کار را طوری انجام ندهید که وصله پینه‌ای باشد و در آینده، خودتان یا دیگران را مجبور به دوباره کاری کند، بلکه به گونه‌ای انجام دهید، که نمایانگر یک گام معنی‌دار رو به جلو باشد.

عرضه و ارائهٔ کار

اکنون باید به مبحث ناخوشایند و حساسیت برانگیز ارایه‌ی کارها و عرضه‌ی ایده‌ها بپردازم. بعضی از دانشمندان فکر می‌کنند که مایه‌ی افت آنهاست اگر بخواهند به عرضه و نمایش کار خود بپردازند و این وظیفه‌ی اهل عالم است که باید علاقمند به کار آنها باشند و برای فهمیدن نتایج عمیق آنها، پشت در اتاقشان صف بکشند. واقعیت این است که، محققان دیگر مشغول به کارهای خود هستند و دغدغه‌های خاص خودشان را دارند. شما باید نتایج خود را آنچنان معرفی کنید که دیگران کار خودشان را متوقف کنند و به شما گوش دهند. عرضه‌ی کار معمولاً در سه شکل ظاهر می‌شود: چاپ مقاله، سخنرانی‌ها و موقعیت‌های فی‌البداهه. شما باید در هر سه، استاد باشید.

چه بسا کارهای خوبی که فقط به علت ارائه‌ی ضعیف به دست فراموشی سپرده شدند و بعدها به وسیله‌ی دیگران دوباره انجام شدند. خطر واقعی ارائه‌ی ضعیف این است که اعتبار آنچه انجام داده اید و زحماتی که کشیده‌اید، نصیبتان نگردد. من بارها شاهد نمونه‌هایی بوده‌ام که یک کاشف زحمت آن را به خود نداده تا کارهایش را به روشنی ارائه کند و در نتیجه فعالیت‌هایش برای جامعه سودمند واقع نشده است.

سخن پایانی

تا اینجا در مورد بزرگی و رسیدن به موفقیت قلم فرسایی کردیم، سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا برجستگی ارزش این همه تلاش و زحمت که برای آن لازم است را دارد یا خیر. آنهایی که به موفقیت‌های بزرگ نائل آمده‌اند و از مرزهای دانش عبور کرده‌اند، در محفل‌های خصوصی، عموماً اظهار می‌دارند، بزرگی بهتر از می و مستی و یار و آواز دست جمعی است! واقف شدن به این که به موفقیت نائل آمده‌اید خود به تنهایی لذت بخش و مفرح است.

البته من فقط با آنهایی که به موفقیت‌های بزرگ نائل آمدند رایزنی کردم، و جرأت نکردم از آنهایی که به هیچ موفقیتی دست نیافتند، اندر فواید موفقیت یا عدم موفقیت سؤال کنم! شاید آنها به گونه‌ای دیگر پاسخ می‌دادند. همانطور که اغلب گفته شده است، در تلاش و کوشش است که منفعت حقیقی ظاهر می‌شود نه در موفقیت. گفته شده است که در تلاش و جهد در انجام کارهای بزرگ است که شما، خود را به فرد بهتری تغییر می‌دهید و خود موفقیت اهمیت کمتری دارد. من به درستی این دیدگاه ایمان دارم.

مواردی که اینجا برای شما بیان کردم، هیچگاه به من گفته نشد و من خود مجبور شدم آنها را کشف کنم. امیدوارم در مورد چگونگی نائل آمدن به موفقیت ایده‌هایی گرفته باشید و بهانه ای برای عدم تلاش نداشته باشید. این گوی و این میدان.

توضیح مترجم: این نوشته بر اساس یکی از نسخ خلاصه‌ی مکتوب یک سخنرانی همینگ تحت عنوان «شما و تحقیق» که در ۷ مارس ۱۹۸۶، در سمینار تحقیقات مخابراتی بل ایراد شده، ترجمه شده است.

مترجم: سید محمد غلامزاده محمودی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
mmahmoudi@sharif.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۹۱ تا ۱۰۶

نگاهی به دوره‌های کارشناسی ریاضیات در ایران

وحید مؤمنائی کرمانی، حسین مؤمنائی کرمانی

چکیده
مقالهٔ حاضر در صدد است برخی نارسایی‌های دوره کارشناسی ریاضیات در ایران و نتایج آن را مورد بررسی قرار دهد. قسمتی از این مشکلات به برنامه مصوب دوره باز می‌گردد، که با استثناءهایی در کلیه دانشگاه‌های کشور به مورد اجرا گذاشته می‌شود. جهت مستند شدن اطلاعات، ویژگی‌های اصلی برنامه‌های دوره کارشناسی رشته ریاضیات برخی دانشگاه‌های معتبر دنیا بررسی و اختلاف نگرش آنها با برنامه موجود در ایران مقایسه خواهد شد. در انتها نیز راهکارهایی جهت برون رفت از وضعیت حاضر ارائه می‌گردد.

وضعیت فعلی دوره‌های کارشناسی ریاضی ایران

بدون تردید ارزیابی برنامه مصوب دوره‌های کارشناسی ریاضیات در ایران اصلی‌ترین شاخصی است که می‌بایست در بررسی و نقد این دوره‌ها مورد توجه قرار گیرد. شالوده‌ی این برنامه در ستاد انقلاب فرهنگی و در زمان تعطیلی دانشگاه‌ها در حد فاصل سال‌های ۱۳۶۱—۱۳۵۹ ریخته شد. یکی از اهداف ستاد انقلاب فرهنگی در آن زمان تهیه و اجرای طرح هماهنگی برنامه‌های درسی برای کلیه دانشگاه‌های ایران بود که علیرغم مخالفت اعضاء کمیته‌ی برنامه‌ریزی ریاضی این ستاد، نهایتاً به دلیل شرایط خاص آن مقطع زمانی برنامه متمرکز تدوین و تصویب گردید [۱۰]. برنامه مزبور که بعدها در سالهای ۱۳۶۵ و ۱۳۷۲ مورد بازنگری قرار گرفت، مشتمل بر دروس و سر فصل‌هایی می‌شود که تا به امروز نیز تقریباً بدون تغییر بر جای خود باقی مانده‌اند [۷و۸]. ساختار برنامه از سه گرایش ریاضیات کاربردی، ریاضیات محض و دبیری ریاضی تشکیل یافته و مهمترین تغییر نسخه نهایی نسبت به نسخه قبلی آن می‌باشد که در برنامه‌ی پیشین گرایش ریاضی کاربردی مشتمل بر چندین شاخه از جمله کاربرد در فیزیک، تحقیق در عملیات، کامپیوتر و آمار می‌شده و از

ادغام آنها در سال ۱۳۷۲، برنامه‌ی گرایش ریاضی کاربردی به صورت فعلی در آمده است.

بر کارشناسان و مسئولین امر پوشیده نیست که جای بسیاری از موضوعاتی که در دنیا به عنوان شاخه‌های مختلف ریاضیات شناخته می‌شوند در دانشگاه‌های کشور ماخالی است [۱و۲]. هرچند این نقیصه با توجه به وقوف برنامه‌ریزان برعدم وجود امکانات داخلی و به ویژه نیروهای متخصص در شاخه‌های نوین ریاضیات در آن زمان قابل توجیه است، لیکن به رغم پیشرفت کمی و کیفی ریاضیات طی سال‌های گذشته در کشور هنوز اکثریت دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی مجری دوره‌های کارشناسی موظف به اجرای برنامه‌های مصوب فعلی هستند. در این زمینه نگاهی به ظرفیت پذیرش دانشجو در گرایش‌های مختلف مقطع کارشناسی ریاضیات در سال تحصیلی ۸۸—۸۷ نیز می‌تواند راهگشا باشد. جدول ۱ بر اساس اطلاعات مندرج در [۳و۴] تهیه شده است.

جدول ۱ ــ ظرفیت پذیرش دانشجو در گرایش‌های مختلف رشته ریاضی به تفکیک نوع دانشگاه

نوع دانشگاه / گرایش	کاربردی	محض	دبیری	ریاضی (بدون گرایش)	ریاضی (گرایش صنعتی)	جمع	درصد از کل
دولتی (روزانه)	۱۶۲۵	۱۵۱۹		۱۰۵	۲۵	۳۲۷۹	۱۹/۵
دولتی (شبانه)	۶۸۸	۶۵۹		۴۰		۱۳۸۷	۸/۲
آزاد اسلامی	۱۸۵۰	۱۱۵۰	۴۰۰			۳۴۰۰	۲۰/۲
پیام نور	۵۴۷۰	۲۵۹۲	—			۸۰۶۲	۴۷/۹
غیر دولتی غیر انتفاعی	۶۵۵	۶۰	—			۷۱۵	۴/۲
جمع	۱۰۳۱۸	۵۹۸۰	۴۰۰	۱۴۵	۲۵	۱۶۸۴۳	۱۰۰
درصد از کل	۶۱/۱	۳۵/۵	۲/۴	۰/۹	۰/۱	۱۰۰	

تبصره ۱ ــ اطلاعات این جدول شامل تغییر ظرفیت‌های اعلام شده بعدی نمی‌گردد.

تبصره ۲ ــ اطلاعات این جدول شامل دوره‌های کارشناسی ناپیوسته ریاضی نمی‌شود. در واقع، بر اساس [۵و۶] در سال ۱۳۸۷، ۴۴ مرکز دانشگاه آزاد اسلامی، ۱۰ مرکز تربیت معلم و دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی مبادرت به پذیرش دانشجو در دوره‌های کارشناسی ناپیوسته آموزش ریاضی نموده‌اند. این دوره‌ها به ویژه از سوی معلمین دارای مدرک کاردانی ریاضی مورد استقبال قرار می‌گیرند.

تبصره ۳ ــ اطلاعات جدول ۱ لزوماً معرف تعداد واقعی پذیرفته‌شدگان دوره‌های کارشناسی ریاضیات در دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی کشور نمی‌باشد.

در ستون کارشناسی ریاضی (بدون گرایش) در جدول ۱، ظرفیت ۱۴۵ نفری مربوط به دانشگاه‌های صنعتی شریف و شهید باهنر کرمان قابل ملاحظه است. در واقع چند سالی است برنامه دوره‌های کارشناسی ریاضی در این دو دانشگاه از برنامه مصوب سال ۱۳۷۲ تبعیت نمی‌کند. در

دانشگاه شهید باهنر کرمان رشته ریاضی در ۵ گرایش محض، کاربردی، منطق و کامپیوتر، آموزش ریاضی و ریاضیات صنعتی و در دانشگاه صنعتی شریف در ۲ گرایش صنعتی و نظری ارائه می‌گردد. در دانشگاه صنعتی اصفهان و در گرایش ریاضیات صنعتی، تعداد ۲۵ نفر دانشجو مستقیماً از طریق آزمون سراسری پذیرش گردیده که در ستون خاص خود در جدول ۱ قابل مشاهده است. در برنامه برخی دیگر از دانشگاه‌ها مانند اصفهان و فردوسی مشهد نیز تغییراتی نسبت به برنامه مصوب ایجاد شده است، که این‌ها همه نشانه‌های آغاز حرکتی واقع گرایانه و منطبق بر نگرش‌های موجود در سیستم‌های معتبر آموزش عالی دنیاست.

در ادامه سعی بر آن خواهد بود که به سؤالات زیر پاسخ داده شود:

- ایرادات اصلی بر دوره‌های کارشناسی ریاضی در ایران کدام‌اند؟
- در حال حاضر دوره‌های کارشناسی ریاضی در دانشگاه‌های معتبر خارجی با چه ویژگی‌هایی ارائه می‌شوند؟
- چه راهکارهایی می‌توان جهت بهبود دوره‌های کارشناسی ریاضی پیشنهاد نمود؟

آسیب شناسی دوره‌های کارشناسی ریاضیات در ایران

۱ ــ هر چند بار مالی اندک، تعداد نسبتاً قابل توجه مدرسین و البته نیاز به سرویس دهی به سایر رشته‌ها سبب گردیده که آموزش عالی رشته ریاضی در ایران طی بیست سال گذشته رشد کمی قابل توجهی پیدا کند، اما بازار کار متناسب با تعداد فارغ التحصیلان رشته ریاضی به ویژه در مقاطع کاردانی و کارشناسی فراهم نبوده است. باید توجه داشت که معضل عدم کاریابی حتی در کشورهای پیشرفته نیز برای دانش آموختگان رشته ریاضی وجود داشته و دارد. ظهوری زنگنه در [۱۱] به این نکته اشاره دارد که در دانشگاه‌های کشورهای غربی، دیدگاهی که وظیفه دانشگاه را منحصر به تولید علم دانسته و ایجاد اشتغال را بر عهده جامعه قرار می‌داد در حال تغییر بوده و به دنبال بیکاری گسترده فارغ التحصیلان دانشگاهی پاسخگویی به مسئله اشتغال جزء دغدغه‌های اصلی دانشگاه‌ها در آمده است. در این ارتباط دانشگاه‌ها به راهکارهایی دست یافته‌اند که در قسمت‌های بعد به آن اشاره خواهد شد.

۲ ــ پس از آغاز نظام جدید آموزش و پرورش و دگرگونی محتوای کتب درسی، برنامه تحصیلی دانشگاه‌ها متناسب با آن تغییر پیدا نکرد که در برخی موارد نارسایی‌هایی را باعث شده است. مثلا درس مثلثات در نظام قدیم آموزشی طی دو سال به شیوه‌ای سنتی و بیش از حد لازم به دانش آموزان رشته ریاضی و فیزیک تدریس می‌شد که در نتیجه به تعلیم مجدد آن در دانشگاه نیازی نبود. اما علی رغم تعدیل این روند در نظام جدید آموزشی هنوز هم مبحث مثلثات به دلیل فشردگی سرفصل دروس ریاضیات عمومی در دانشگاه‌ها آن گونه که باید تدریس نمی‌گردد که این مسأله باعث ایجاد مشکلاتی برای دانشجویان به ویژه در رشته های علوم پایه و مهندسی شده است.

۳ ــ در حالی که به طور طبیعی اهداف، تخصص اعضاء هیات علمی و سطح متوسط دانشجویان ورودی هر دانشگاه با دانشگاه دیگر متفاوت است، بر اساس مقررات فعلی کلیه دانشگاه‌ها (به جز تعدادی اندک) باید از یک برنامه‌ی آموزشی متمرکز در آموزش ریاضیات پیروی کنند که به بروز مشکلاتی برای مدرسین در تطبیق دادن سرفصل دروس با توانایی‌های دانشجویان انجامیده است.

۴ ــ عدم توجه جدی به شیوه‌های جدید آموزشی در دوره‌های کارشناسی ریاضیات معضلی بسیار مهم و بنیادین است و پرداختن به آن در این مختصر نمی‌گنجد. در یک نظر اجمالی، باید اذعان نمود به مرور زمان و در ذهن بسیاری از متعلمین حفظ مفاهیم ریاضی به جای یادگیری آنها به گونه‌ای نهادینه شده که تغییر این عادت در مقاطع آموزش عالی بسیار مشکل می‌نماید. عدم آشنایی برخی مدرسین دانشگاهی با روش‌های جدید آموزشی نیز می‌تواند باعث تداوم و حتی تشدید این وضعیت گردد، و این در حالی است که طی چند دهه‌ی اخیر بر اساس نظریات نوین روانشناسی تغییرات شگرفی در شیوه‌های آموزشی پدید آمده است [۹]. نگرش جدید به امر آموزش ریاضی در دنیا منجر به تحولات عمده‌ای در شیوه‌های برنامه‌ریزی دوره‌های کارشناسی، روش‌های تدریس، تعیین سرفصل دروس و روش‌های متنوع پذیرش دانشجو گردیده که در جای خود به آنها اشاره خواهد شد.

۵ ــ روش متمرکز برگزاری آزمون و پذیرش دانشجو در امتحانات ورودی دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد خواه ناخواه باعث ایجاد روال‌های آموزشی نادرستی می‌گردد که به جای افزایش سطح ادراک فرد از دانش، منجر به کسب مهارت‌هایی می‌شوند که به قبولی وی در آزمون ورودی کمک نمایند. این وضعیت، بازاری کردن یا عرضه‌ی بازاری علوم را تشدید نموده و دیر یا زود به افت سطح دانش در کشور خواهد انجامید، به گونه‌ای که بیم آن می‌رود در آینده‌ای نه چندان دور و با سرایت این نوع نگرش به سطوح بالاتر آینده‌ی علمی کشور با مشکلات جدی مواجه گردد.

ویژگی‌های برنامه کارشناسی ریاضیات در دانشگاه‌های معتبر دنیا

بر اساس آخرین تقسیم بندی انجمن ریاضی آمریکا (AMS)، در حال حاضر دانش ریاضیات به ۶۳ شاخه‌ی اصلی و حدود ۵۰۰۰ زیر شاخه‌ی فرعی تقسیم گردیده و مرزهای دقیق و خط کشی شده بین ریاضیات محض و کاربردی در حال فروریختن است [۱۲]. دقت در عناوین این شاخه‌ها نشان می‌دهد که پیشرفت ریاضیات منجر به نفوذ آن در شاخه‌هایی از علم و تکنولوژی شده است که پیش از این به عنوان علوم کاملاً کاربردی شناخته می‌شدند، از جمله شاخه‌هایی همچون اطلاعات و مخابرات، مکانیک سیالات، نظریه سیستم‌ها و کنترل، بیولوژی، اپتیک و الکترومغناطیس، ژئوفیزیک، نظریه‌ی بازی‌ها، اقتصاد، علوم اجتماعی و رفتاری و ... .

بر این اساس دانشگاه‌های تراز اول دنیا به بازسازی برنامه‌های خود پرداخته و می‌پردازند. اما این بازسازی بر اساس یک هدف‌گذاری معین وبا توجه به وضعیت و حقایق موجود انجام می‌گیرد، بدان معنا که سیاستگزاران هنگام طراحی دوره به مسائلی همچون

ـ کمیت و کیفیت اعضاء هیأت علمی دانشگاه و تخصص‌های ایشان،
ـ سطح علمی متوسط دانشجویان ورودی و بررسی نیازها و اهداف ایشان از تحصیل ریاضیات،
ـ نگرش به سایر رشته‌های موجود در دانشگاه و حتی سایر دانشگاه‌ها و امکان سنجی جهت ایجاد دوره‌های مشترک و بین رشته‌ای،
ـ پاسخ دهی به نیازهای منطقه‌ای و ملی با تربیت این گونه فارغ‌التحصیلان و
ـ امکانات سخت‌افزاری از قبیل بودجه، کتابخانه و دسترسی به منابع علمی، فضای فیزیکی و ... توجه می‌نمایند. در نتیجه برنامه‌های دوره کارشناسی ریاضی در دانشگاه‌های مختلف دنیا تقریباً دارای تنوعی به تعداد خود این دانشگاه‌ها بوده و بررسی تک به تک آنها امری غیرممکن می‌نماید. لیکن از آنجا که سیستم آموزش عالی در کشور ما از جهات گوناگون شبیه نظام آموزشی دانشگاه‌های آمریکای شمالی می‌باشد، می‌توان با مطالعه‌ی روش‌های آموزشی متداول در دانشگاه‌های معتبر این منطقه به برخی نتایج کلی دست پیدا کرد. این مطالعه باید با وقوف بر این نکته همراه باشد که اصطلاحات به کار گرفته شده در منزلگاه‌ها و بولتن‌های دانشگاه‌ها دارای معانی استانداردی نمی‌باشند، بدین معنا که گاه یک اصطلاح خاص دارای تعریف غیر همسان در دو دانشگاه است و گاهی از عبارات متفاوت جهت مفهومی واحد استفاده شده است. حتی بعضی اوقات برنامه‌هایی دیده می‌شوند که از لحاظ ساختاری بسیار شبیه به یکدیگرند اما منجر به مدارکی با عناوین متفاوت شده‌اند، و در هر مورد باید به تعاریف خاص آن دانشگاه مراجعه نمود. به منظور داشتن همه‌ی موارد فوق، می‌توان مهمترین دلایل ایجاد تغییرات مستمر در نحوه‌ی ارائه‌ی دوره‌های کارشناسی ریاضی دانشگاه‌های معتبر طی سه دهه‌ی اخیر را بدین صورت برشمرد:
۱ ـ توسعه‌ی انفجارگونه‌ی ریاضیات و پیدایش کاربردهای وسیع آن در سایر شاخه‌های علم و فناوری که منجر به ایجاد نظام‌های بین رشته‌ای گردیده و نیاز به تربیت متخصصانی در این نظام‌ها،
۲— توسعه‌ی نظریه‌ی آموزش ریاضی و ایجاد روش‌های جدید آموزشی مبتنی بر روان‌شناسی مدرن،
۳— امکان ایجاد اشتغال برای فارغ‌التحصیلان رشته‌ی ریاضی.

به منظور پاسخگویی به سه هدف یاد شده، برنامه‌های جدید رشته‌ی ریاضی در مقطع کارشناسی در اکثر مراکز علمی معتبر دنیا دارای دو ویژگی مهم ذیل می‌باشند:
الف ـ تنوع در برنامه‌های آموزشی ارائه شده در هر دانشگاه.
ب ـ تنوع در نحوه‌ی ارائه‌ی دروس و استفاده از روش‌های مدرن آموزشی در برنامه‌ریزی و تعیین سرفصل دروس.
در ادامه جزئیات اجرایی ویژگی‌های یاد شده در نمونه‌های عینی ارائه می‌گردد.

1) Interdisciplinary program

الف ـ تنوع در برنامه‌های آموزشی ارائه شده

۱ ـ **نظام‌های بین رشته‌ای**[1]: با توجه به کاربردهای روزافزون ریاضیات در سایر شاخه‌های علم و فناوری، در بسیاری بخش‌های ریاضی دانشگاه‌ها برنامه‌های تحصیلی ویژه‌ای به صورت ترکیبی از دروس ریاضی با یک یا چند رشته‌ی علمی ـ کاربردی ارائه می‌گردد که اصطلاحاً با نام دوره‌ها یا نظام‌های بین رشته‌ای شناخته شده‌اند. معمولاً در این گونه دوره‌ها ریاضیات، آمار و کامپیوتر به عنوان ابزار اصلی در مدلسازی مسائل گوناگون شاخه کاربردی مورد نظر به کار گرفته می‌شوند. ویژگی مهم این دوره‌ها ارتباط تنگاتنگ بین ریاضیات و شاخه کاربردی مورد نظر است، ضمن آن که غالباً عنوان رشته با نام یکی از شاخه‌های اصلی ریاضی در فهرست انجمن ریاضی امریکا مطابقت دارد. از جمله این برنامه‌ها می‌توان به آموزش ریاضی (دانشگاه ایالتی ایندیانا[2] [۱۳])، اقتصاد ریاضی (دانشگاه‌های پیتسبورگ[3] [۱۴]، کالیفرنیا (لس آنجلس)[4] [۱۵]، تورنتو[5] [۱۶]، ایالتی نیویورک[6] [۱۷])، ریاضیات مالی (دانشگاه‌های واترلو[7] [۱۸] و ویلفرید لوریه[8] [۱۹] در کانادا و اکثر دانشگاه‌های انگلستان)، تجزیه و تحلیل سیستم ها (دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا[9] [۲۰])، زیست ریاضی (دانشگاه‌های مینه‌سوتا[10] [۲۱]، راتگرز[11] [۲۲] و ایالتی ایلینویز[12] [۲۳])، کاربرد ریاضیات در بیمه (پیتسبورگ [۲۴]، تگزاس[13] [۲۵] و مینه‌سوتا[۲۶])، ریاضیات و علوم اجتماعی (واشینگتن[14] [۲۷] و اوهایو[15] [۲۸])، ریاضیات و مدیریت (تگزاس [۲۹])، ریاضیات و کاربرد آن در رشته‌های مهندسی (دانشگاه‌های کوئینز[16] [۳۰] و برکلی[17] [۳۱])، ریاضیات صنعتی (دانشگاه چستر غربی[18] [۳۲]) و ... اشاره کرد. به دلیل نیاز به متخصصین در دوره‌های نوین بین رشته‌ای و نیز ارائه نمایشی زیبا از کاربردهای عملی ریاضیات، کمیت و کیفیت دانشجویان این دوره‌ها رو به افزایش است.

۲ ـ **دوره‌های کارشناسی ارشد پیوسته**: در برخی از دانشگاه‌ها دوره‌های کارشناسی ارشد ریاضی به صورت پیوسته (معمولاً در دوره‌های زمانی ۵ ساله) ارائه می‌شوند. به عنوان مثال این وضعیت در رشته‌های ریاضیات مالی، آموزش ریاضی، ریاضیات صنعتی و مهندسی سیستم‌ها، تحقیق درعملیات، اقتصاد ریاضی و آمار ریاضی در دانشگاه راتگرز [۳۳] دیده می‌شود. در دانشگاه ایالتی مری لند[19] برنامه‌ای ۵ ساله برای دانشجویان زبده دوره کارشناسی پیشنهاد شده که منجر به هر دو مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد در ریاضیات می‌گردد [۳۴] و مزیت آن در کوتاه‌تر بودن طول دوره نسبت به دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته ذکر شده است.

۳ ـ **مهاد[20] در ریاضیات و کهاد[21] در رشته‌ای متفاوت**: در اکثر دانشگاه‌های مورد مطالعه

---

1) Interdisciplinary program 2) Indiana 3) Pittsburg 4) UCLA 5) Toronto 6) SUNY 7) Waterloo 8) Wilfrid Laurier 9) Pennsylvania 10) Minnesota 11) Rutgers 12) Illinois 13) Texas 14) Washington 15) Ohio 16) Queens 17) Berkley 18) West Chester 19) Meryland 20) major 21) minor

دانشجویی که در یک رشته به عنوان رشتهٔ اصلی (مهاد) ثبت نام کرده قادر است با انتخاب برنامه‌ای فرعی (کهاد) از یک (یا بعضاً چند) رشتهٔ متفاوت، اطلاعاتی در زمینه‌های کاربردی به دست آورد. در چنین برنامه‌هایی بر خلاف دوره‌های بین رشته‌ای لزومی به ارتباط مستقیم بین رشته مهاد و رشته کهاد وجود ندارد، اما این که دانشجویان هر رشته مهاد در چه رشته‌هایی می‌توانند مدرک کهاد دریافت کنند به سیاستگزاری خاص آن دانشگاه مرتبط است. به عنوان مثال دانشجوی با مهاد ریاضی در دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا در صورت تمایل می‌تواند مدرک کهاد در زبان ایتالیایی، حسابداری ، جغرافیا و بسیاری موضوعات دیگر دریافت نماید. برنامه کهاد هر رشته، معمولاً شامل بر ۶ تا ۸ درس اصلی معین از دپارتمان ارائه دهنده آن رشته است و دانشجو حق تخطی از آن را ندارد. ذکر این نکته ضروری است که اخذ مدرک کهاد باعث افزایش طول مدت تحصیل افراد نمی‌شود، چرا که این برنامه با کاستن از واحدهای اختیاری و برخی دروس رشته‌ی اصلی اجرایی می‌گردد. در نهایت عنوان رشته‌ی کهاد نیز همراه با رشته‌ی مهاد در مدرک فارغ‌التحصیلی فرد ذکر خواهد شد. مدرک کهاد به ویژه برای دانشجویان رشته ریاضی که پس از فراغت از تحصیل با مشکل کاریابی مواجه‌اند حائز اهمیت است. در منزلگاه دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا [۳۵] اطلاعات کاملی در مورد رشته‌های مهاد و کهاد در آن دانشگاه را می‌توان ملاحظه نمود.

۴ ــ **کهاد در ریاضیات و مهاد در رشته‌ای متفاوت:** در بسیاری از دانشگاه‌های معتبر برنامه‌ای جهت جذب دانشجویان سایر رشته‌ها که علاقمند به دروس ریاضی باشند وجود دارد که طی آن اجازه گذراندن دروسی تحت عنوان کهاد در ریاضیات همراه با رشته اصلی داده می‌شود. در مدرک رسمی دانشجویی که برنامه کهاد در ریاضیات را انتخاب کرده باشد، علاوه بر قید نام رشته اصلی (مهاد)، عنوان کهاد در ریاضیات نیز درج می‌گردد که ضمن تشویق وی برای ادامه تحصیل در ریاضیات، موقعیت‌های شغلی مناسب‌تری را نصیب وی خواهد ساخت. این برنامه در اکثر دانشگاه‌های مورد مطالعه مانند هاروارد[1] [۳۶]، انستیتو تکنولوژی ماساچوست[2] [۳۷]، استانفورد[3] [۳۸] و ... به مورد اجرا گذاشته می‌شود.

۵ ــ **دوره‌های تحصیل همراه با کار:** در دانشگاه‌های واترلو [۳۹]، ایالتی پنسیلوانیا [۴۰]، مک گیل[4] [۴۱] و بسیاری دانشگاه‌های دیگر امکان کار همزمان با تحصیل به ویژه در برخی دوره‌های بین رشته‌ای وابسته به رشته‌ی ریاضی فراهم آمده است. این برنامه (که در دانشگاه‌های واترلو و ایالتی پنسیلوانیا با عنوان co ــ op و در دانشگاه مک گیل تحت عنوان internship شناخته می‌شود) با کمک شرکت‌ها و مؤسساتی انجام می‌گیرد که در نهایت مایلند از تخصص فرد پس از فراغت از تحصیل بهره ببرند. با وجود طولانی‌تر بودن زمان برای فارغ‌التحصیلی در این دوره‌ها، به لحاظ

1) Harvard 2) M.I.T. 3) Stanford 4) McGill 5) British Colombia

کیفیت بالاتر آموزش‌های توام نظری ـ عملی و اطمینان از آینده‌ی شغلی استقبال متقاضیان از دوره‌های کار همزمان با تحصیل نسبت به برنامه‌های متداول کارشناسی ریاضیات بیشتر است.

۶ ـ **مدارک دوگانه و چندگانه**: در برخی دانشگاه‌ها تحت شرایط ویژه امکان تحصیل همزمان در بیش از یک رشته و دریافت مدارک متناسب برای افراد مستعد فراهم آمده است. به دلیل آن که بسیاری از دانشجویان برتر به ویژه در رشته‌های مهندسی و علوم پایه ذاتاً به ریاضیات علاقمندند، این گزینه باعث تشویق دانشجویان با استعداد سایر رشته‌ها جهت جذب و حتی ادامه تحصیل آنها در رشته ریاضی خواهد شد. دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا [۲۰] در آمریکا و دانشگاه بریتیش کلمبیا[۵] [۴۲] در کانادا از جمله این دانشگاه‌ها می‌باشند.

ب ـ تنوع در نحوه‌ی ارائه‌ی دروس و استفاده از روش‌های مدرن آموزش

۱ ـ در برخی دانشگاه‌ها، سر فصل‌های متنوع برای دروس همسان به گونه‌ای تعیین شده‌اند که دانشجو بر اساس سطح توانایی و اطلاعات خود بتواند درس مناسب را اختیار کند. دانشجویان مستعدتر قادرند برخی دروس مقدماتی را در صورت تمایل در حالت پیش ترم گذرانده و یا دروس سطح بالاتر و حتی کارشناسی ارشد را با اجازه‌ی استاد راهنمای خود اختیار کنند. برخی دروس با عناوین یکسان نیز در دو سطح عادی و پیشرفته برای دانشجویان متفاوت ارائه می‌گردد.

۲ ـ مطالعه فایل‌هایی که بعضی از مدرسین، تحت عنوان یادداشت‌های درسی[1] در اینترنت در معرض عموم قرار داده‌اند نشان می‌دهد که اساتید به جای تکیه بر اثبات‌های طولانی و خسته‌کننده بر تعاریف، مفاهیم و ایجاد قدرت محاسبه و حل مسأله ـ به ویژه مسائلی که جنبه‌های محاسباتی آنها نسبت به وجوه تحلیلی‌شان اولویت داشته و به درک مفاهیم کمک می‌نمایند ـ تأکید دارند. در واقع با استفاده از شیوه‌های جدید آموزشی علاوه بر ایجاد فرصت کافی جهت پوشاندن کامل سرفصل دروس در طول یک ترم تحصیلی، بازدهی آموزش به گونه‌ای معنادار افزایش می‌یابد.

۳ ـ در بسیاری از دانشگاه‌ها، به منظور جبران کمبودها در برنامه‌های دوران دبیرستان دروسی تحت عناوینی مانند حسابان پیش دانشگاهی، مقدمه‌ای بر جبر، مقدمه‌ای بر هندسه و مثلثات و مشابه آنها ارائه می‌گردد. از جمله این دانشگاه‌ها می‌توان به واترلو و ایالتی پنسیلوانیا اشاره نمود.

موارد کم اهمیت‌تری از ویژگی‌های دوره‌های کارشناسی ریاضیات می‌توان یافت که گر چه در تعداد چندان زیادی از مراکز آموزشی عمومیت ندارند، اما می‌توانند در برنامه‌ریزی‌های مشابه داخلی مفید واقع گردند:

۴ـ دربرخی دانشگاه‌ها همزمان با دروس مقدماتی حسابان، درسی عملی تحت عنوان ماشین حساب ارائه می‌شود تا در آن دانشجو در حد نیاز با این وسیله محاسبه عمومی آشنا گردد (استفاده از تکنولوژی در آموزش).

---

1) lecture notes

۵ ــ در بعضی دانشگاه‌ها دروسی خاص جهت آموزش نحوه نوشتن مطالب ریاضی ارائه می‌گردد . ارائه چنین درسی در دانشگاه‌ها از آن جهت می‌تواند مفید واقع شود که بسیاری از دانشجویان — حتی در سطوح کارشناسی ارشد و یا دکترا ــ قادر به صحیح نوشتن آنچه می‌دانند نیستند.
٦ ــ مسألهٔ جالب توجه دیگر نقش انکار ناپذیر دروس احتمال و آمار کاربردی در کلیهٔ برنامه‌های وابسته به رشته ریاضی به عنوان یک درس اصلی است. برعکس درس فیزیک از برنامه بسیاری از شاخه‌های ریاضی حذف گردیده است، مگر در دوره‌هایی مانند کاربرد ریاضیات در فیزیک یا ریاضیات صنعتی که درس فیزیک ارتباط مستقیم با اهداف مورد نظر داشته باشد.
۷ ــ دروس سمینار در بسیاری از برنامه‌های دوره کارشناسی دیده می‌شود.

راهکارها وپیشنهادها

۱ ــ جهت بالا رفتن سطح علمی دانشجویان ورودی رشته ریاضی باید انگیزه‌های لازم برای ادامه تحصیل در این رشته در افراد صاحب استعداد ایجاد شود. ایجاد نظام‌های بین رشته‌ای، برگزاری دوره‌های مهاد با کهاد متناسب و ذکر عنوان هر دو دوره در مدرک نهایی، برگزاری دوره‌های کارشناسی ارشد پیوسته برای دانشجویان توانمند و سایر روش‌های مذکور در بخش ویژگی‌های دوره‌های کارشناسی ریاضی در دانشگاه‌های دیگر کشورها همگی می‌توانند سبب ایجاد انگیزه‌های قوی‌تر برای دانشجویان جهت انتخاب و یا ادامه رشته ریاضی شوند.

۲ ــ برنامه هر دانشگاه باید متناسب با توان اعضا هیات علمی، دانشجویان ورودی و امکانات و واقعیات موجود تنظیم گردد. اما از آنجا که به دلیل افزایش سریع مؤسسات دارای دوره‌های ریاضی اعم از دولتی یا غیر دولتی شوراهای برنامه‌ریزی یا نظارتی متمرکز قادر به نظارت مستمر و مستقیم بر این تعداد از مؤسسات آموزش عالی نخواهند بود پیشنهاد می‌گردد هر دانشگاه با رعایت یک سری قوانین و استانداردهای عمومی، برای تدوین و تصویب برنامه‌های خود به مراکز و قطب‌های منطقه‌ای دانشگاهی در همان ناحیه کشور مراجعه نماید تا معضل تمرکزگرایی به گونه‌ای دیگر و در زمینه آموزش علم ریاضیات نیز به تدریج حل و فصل گردد.
۳ ــ برنامه‌ریزی دروس می‌تواند به گونه‌ای صورت پذیرد که از یک سو دانشجویان قوی‌تر در یک دانشگاه مجبور به گذراندن همه دروس پایه‌ای نشوند و از طرف دیگر دانشجویان ضعیفتر موظف به گذراندن برخی دروس سطح پایین‌تر جهت جبران کمبودهای دوره دبیرستان و رسیدن به آمادگی مطلوب باشند.

۴— در حال حاضر پذیرش دانشجو در دوره‌های دکترا و کارشناسی ارشد فقط در برخی رشته‌های خاص و عمدتاً محض ریاضیات انجام می‌گیرد که آن هم به طور طبیعی به تخصص اساتید راهنما وابسته است. باید راهکارهای عملی ایجاد شود که همین اساتید قدرت ریسک پذیرش دانشجو در رشته‌های کاربردی وابسته و یا نزدیک به رشته خود و یا دوره‌های بین رشته‌ای را پیدا کنند تا امکان تاسیس دوره‌های ترکیبی در سطوح کارشناسی یا کارشناسی ارشد در آینده فراهم آید. راهکارهای

متعددی می‌توان جهت تحقق این امر پیشنهاد کرد، از جمله:

ـ همکاری بین بخش‌ها و دانشکده‌های دیگر با بخش ریاضی جهت تربیت دانشجویان مشترک،
ـ قبول هزینه ریسک افزایش طول مدت تحصیل از سوی مراجع برنامه‌ریز، به ویژه وزارت علوم ، تحقیقات و فن آوری و دانشگاه‌های عامل تربیت دانشجویان دوره‌های دکترا و کارشناسی ارشد،
ـ همکاری عمیق تر با دانشگاه‌های معتبر خارج از کشور، مثلاً به صورت اعزام دانشجو و یا دعوت از اساتید آنها و به ویژه اساتید ایرانی که به موفقیت‌های قابل توجه در زمینه‌های کاربردی تر ریاضیات دست یافته‌اند، برای دوره‌های کوتاه مدت یا میان مدت،
ـ منحصر کردن ظرفیت پذیرش رشته‌های محض در مقطع دکترا به دانشجویان بسیار سطح بالایی که مایلند تنها در رشته مورد نظر خود ادامه تحصیل دهند،
ـ ایجاد انگیزه‌های مالی برای اساتید و دانشجویانی که در رشته‌های اولویت دار و مورد نیاز کشور به فعالیت می‌پردازند.

تشکر و قدردانی

مؤلفین مایلند مراتب قدردانی خود را از آقایان دکتر مهدی رجبعلی‌پور و دکتر بیژن ظهوری زنگنه به واسطهٔ در اختیار گذاشتن مراجع [۱]، [۱۰] و [۱۱] و ارائهٔ نقطه نظرات سازنده در جهت بهبود مقاله و نیز مسئولین محترم دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان به خاطر فراهم نمودن امکانات پژوهش اعلام نمایند.

پیوست‌ها

پیوست ۱
برنامه‌های دوره کارشناسی ریاضیات در دانشگاه مک گیل (سال تحصیلی ۸–۲۰۰۷)
برنامه‌های بخش ریاضی دانشکده علوم دانشگاه مک گیل [۴۱] به دو دسته تقسیم می‌شوند:
(الف) برنامه‌های مخصوص دانشجویان ریاضی که در یک برنامه ریاضیات در سطوح مهاد و یا ویژه[1] ثبت نام کرده‌اند. باید توجه داشت که نحوه ارائه دروس در برنامه سطح ویژه از دروس همنام در سطح مهاد و نیز سایر سطوح کامل‌تر می‌باشد.
(ب) برنامه‌هایی برای دانشجویان غیر ریاضی که در یک برنامه کهاد در ریاضیات و یا آمار ثبت نام کرده و یا آن که دانشجوی رشته‌ای دیگر از دانشکده علوم بوده و وارد یک برنامه دانشکده‌ای در دانشکده علوم شده‌اند.

این برنامه‌ها به تفکیک بر حسب سطح دروس ریاضی برنامه (به ترتیب: برنامه‌های ویژه، برنامه‌های مهاد، برنامه‌های دانشکده علوم، برنامه‌های کهاد) و دانشکده‌هایی که این برنامه‌ها

1) honours

در آنها ارائه می‌شوند در جدول ۲ آمده است. اعداد داخل پرانتز مشخص کننده تعداد واحدهای اجباری از دروس ریاضی یا آمار است که دانشجو جهت تکمیل دوره باید از سال دوم به بعد اخذ نماید. دروس سال اول برای رشته ریاضی شامل بر ٦ درس اجباری ریاضی و ۴ درس اختیاری در سایر زمینه‌هاست. همچنین دانشجویان غیر ریاضی بر اساس رشته تحصیلی خود می‌بایست در سال اول تا سقف ۳۰ واحد درسی اخذ نمایند که در بین آنها نیز تعدادی دروس ریاضی اجباری وجود دارد. از آنجا که تمامی دانشجویان مقطع کارشناسی ریاضی جهت فراغت از تحصیل در دوره‌ای ۴ ساله نیاز به گذراندن ۱۲۰ واحد دارند، مابقی واحدهای مورد نیاز برای اخذ مدرک ــ به جز تعداد مذکور در جدول و ۳۰ واحد سال نخست ــ می‌تواند از بین دروس اختیاری انتخاب شود، و یا آن که با یک برنامه کهاد مناسب (۱۸ تا ۲۴ واحد) از رشته‌ای دیگر به صورت کامل تحت پوشش قرار گیرد. دلیل ارائهٔ جدول برنامه‌ها برای سال دوم به بعد آن بوده است که برخی دانشجویان دروسی معادل دروس سال نخست را در کالج‌های محلی و قبل از ورود به دانشگاه مک گیل گذرانده‌اند.

جدول ۲ ــ برنامه دوره‌های کارشناسی مرتبط با رشته ریاضی در دانشگاه مک گیل

نوع دانشجو	دانشجویان رشته ریاضی		دانشجویان رشته غیر ریاضی	
برنامه ← دانشکده ↓ (عنوان مدرک)	برنامه‌های ویژه *Honours Progs.*	برنامه‌های مهاد *Majors Progs.*	برنامه‌های دانشکده‌ای *Faculty Progs.*	برنامه‌های کهاد *Minors Progs.*
علوم $(B.Sc)$	ریاضیات محض (۶۰)* ریاضیات کاربردی (۶۸)* آمار و احتمال (۶۳)* الحاقی ریاضیات و علوم کامپیوتر (۷۲)* الحاقی ریاضیات و فیزیک (۸۱)* الحاقی آمار و علوم کامپیوتر (۷۶)*	ریاضیات (۵۴)* الحاقی ریاضیات و علوم کامپیوتر (۷۲)* الحاقی فیزیولوژی و ریاضیات (۷۱) الحاقی آمار و علوم کامپیوتر (۷۲)	بیولوژی و ریاضیات (۵۷) شیمی و ریاضیات (۵۵) ریاضیات، شیمی و فیزیک (۵٦) ریاضیات و علوم کامپیوتر (۵۴) ریاضیات ، آمار و علوم کامپیوتر (۵۴)	ریاضیات (۲۴) آمار (۲۴) (این برنامه‌ها می‌توانند با هر برنامه اصلی در دانشکده علوم بجز برنامه‌های رشته ریاضی ترکیب شوند)
هنر** $(B.A)$	ریاضیات محض (۶۰) ریاضیات کاربردی (۶۸) آمار و احتمال (۶۳) الحاقی ریاضیات و علوم کامپیوتر (۷۲) الحاقی ریاضیات و رشته‌های دیگر در دانشکده هنر (۷۲)***	ریاضیات (۳٦) این برنامه‌ها می‌توانند با یک برنامه مهاد دیگر دانشکده و ۱۸ واحد اختیاری یا یک برنامه کهاد و ۳٦ واحد اختیاری یا دو برنامه کهاد و ۱۸ واحد اختیاری ترکیب شوند		ریاضیات (۱۸) آمار(۱۸)
آموزش $(B.Sc./$ $B.Ed.)$		ریاضیات (۵۴) همانند برنامه مهاد ریاضیات در دانشکده علوم		
مدیریت $(B.Com.)$		ریاضیات (۳۹)		ریاضیات (۲۴) آمار (۲۴)
مدرسه موسیقی شولیخ $B.Mus.$				ریاضیات (۱۸)
مهندسی $(B.Eng.)$				ریاضیات (۲۴ واحد)

*: دوره‌های ستاره‌دار مشخص‌کننده برنامه‌هایی هستند که به صورت کار و تحصیل (internship) نیز قابل اجرایند که در آن دانشجو با شرکت در یک برنامه ۸ تا ۱٦ ماهه کاری با مؤسسات خارج از دانشگاه به تجربیات خود می‌افزاید.

**: دانشکده هنر مشتمل بر دپارتمان‌هایی در زمینه‌های علوم انسانی، علوم اجتماعی و هنر می‌باشد.

***: در این دوره ۳٦ واحد از دروس ویژه ریاضیات با یک برنامه کهاد شامل بر ۳٦ واحد ویژه از برخی رشته‌های دانشکده هنر مانند اقتصاد، زبان انگلیسی و ... با هم ترکیب می‌شوند.

مدرک دوگانه .B.A و .B.Sc

این مدرک نتیجه برنامه مشترکی است که توسط دانشکده‌های هنر و علوم ارائه می‌گردد و هدف آن تأمین نظر دانشجویانی است که مایلند اطلاعاتی کمابیش برابر از یک رشته علمی و یک زمینه از زیرمجموعه‌های دانشکده هنر داشته باشند. با فرض امکان اخذ ۹۰ واحد درسی از سال دوم به بعد، انتخاب یکی از دو مسیر زیر متصور است:

۱) مهاد در ریاضیات (۳٦)، همراه با مهادی از دانشکده هنر (۳٦) و مابقی واحدها از بین دروس اختیاری

۲) یک کهاد ۱۸ واحدی از ریاضی یا آمار، کهادی از یکی دیگر از شاخه‌های علوم و یک مهاد از دانشکده هنر و مابقی واحدها از بین دروس اختیاری.

ترکیب اول را می‌توان مطابق جدول از دانشکده هنر با مدرک .B.A نیز به دست آورد، اما روش دوم حالتی است که با برنامه های موجود در جدول قابل قیاس نمی‌باشد.

پیوست ۲

پیشنهاد دروس برای یک رشته بین رشته‌ای: اقتصاد ریاضی

در جداول زیر برنامه‌ای برای رشته بین رشته‌ای اقتصاد ریاضی پیشنهاد شده است. رئوس زیر در تنظیم برنامه مد نظر قرار گرفته اند:

۱) مطالعه برنامه مشابه در دانشگاه ایالتی نیویورک [۱۷]،

۲) برنامه‌ها و سرفصل‌های مصوب فعلی در رشته‌های اقتصاد و ریاضی،

۳) دروس اصلی که در آزمون‌های کارشناسی ارشد هر دو رشته اقتصاد و ریاضی مورد سوال قرار می گیرند،

۴) دستورالعمل‌های موجود برای ارائه برنامه رشته‌های جدید.

در دانشگاه‌هایی که در هر دو رشته اقتصاد و ریاضی دانشجو می‌پذیرند ارائه رشته اقتصاد ریاضی با کمترین هزینه امکان‌پذیر است، چرا که دروس پیشنهادی از بین دروس این دو رشته و بدون تغییر در سرفصل‌ها انتخاب گردیده‌اند. با اضافه کردن دروس عمومی (۲۱ واحد) تعداد واحدهای برنامه پیشنهادی به ۱۱۷ واحد خواهد رسید و در نتیجه امکان اخذ ۱۸ واحد اختیاری (با در نظر گرفتن ۱۳۵ واحد لازم جهت فراغت از تحصیل) وجود دارد. از دروس دیگری که می‌توانستند در برنامه لحاظ گردند می‌توان به زبان تخصصی، بهینه‌سازی، اقتصاد ریاضی (۲) و مقدمه‌ای بر نظریه بازی‌ها اشاره نمود، هرچند سرفصل دروس بهینه‌سازی و تحقیق در عملیات در رشته ریاضی تا حدود زیادی با دروس اقتصاد ریاضی (۱) و (۲) در رشته اقتصاد همپوشانی دارند که باید در تعیین سرفصل‌ها مورد توجه قرار گیرد.

جدول دروس اجباری ریاضیات*

کد درس	نام درس	واحد	ساعت جمع	ساعت نظری	ساعت عملی	پیشنیاز	همنیاز
١	ریاضیات عمومی (١)	۴	٦۴	٦۴		–	
٢	ریاضیات عمومی (٢)	۴	٦۴	٦۴		١	
٣	ریاضیات عمومی (٣)	۴	٦۴	٦۴		٢	
۴	معادلات دیفرانسیل	٣	۴٨	۴٨		٢	
۵	مبانی ریاضیات	۴	٦۴	٦۴		–	
٦	مبانی کامپیوتر و برنامه‌سازی	۴	٦۴	٦۴		–	
٧	آمار و احتمال (١)	۴	٦۴	٦۴		٢	
٨	آمار و احتمال (٢)	۴	٦۴	٦۴		٧	
٩	جبر (١)	۴	٦۴	٦۴		۵	
١٠	جبر خطی (١)	۴	٦۴	٦۴		٢, ۵	
١١	آنالیز ریاضی (١)	۴	٦۴	٦۴		٢, ۵	
١٢	تحقیق در عملیات (١)	۴	٦۴	٦۴		١٠	
١٣	تحقیق در عملیات (٢)	۴	٦۴	٦۴		١٢	
١۴	آنالیز عددی (١)	۴	٦۴	٦۴		٦, ١٠, ١١	
١۵	آنالیز ریاضی (٢)	۴	٦۴	٦۴		١١	
١٦	توابع مختلط	۴	٦۴	٦۴		١١	
١٧	توپولوژی عمومی	۴	٦۴	٦۴		١١	
١٨	برنامه‌سازی کامپیوتری پیشرفته	٣	٦۴	٣٢	٣٢	٦	
		٧٠	١١٣٦	١١٠۴	٣٢		

*) کلیهٔ دروس جدول فوق دارای سرفصلی دقیقاً مشابه با دروس همنام در رشته‌ی ریاضی می‌باشند.

جدول دروس اجباری اقتصاد**

کد درس	نام درس	واحد	ساعت جمع	ساعت نظری	ساعت عملی	پیشنیاز	همنیاز
١٩	اقتصاد خرد (١)	۴	٦۴	٦۴		١	
٢٠	اقتصاد خرد (٢)	۴	٦۴	٦۴		١٩	
٢١	اقتصاد کلان (١)	۴	٦۴	٦۴		١٩	
٢٢	اقتصاد کلان (٢)	۴	٦۴	٦۴		٢١	
٢٣	اقتصاد بخش عمومی (١)	٣	۴٨	۴٨		٢٠, ٢٢	
٢۴	اقتصاد ریاضی (١)	٣	۴٨	۴٨		٣, ٢٠, ٢٢	
٢۵	اقتصاد سنجی	۴	٦۴	٦۴		٨, ٢٠, ٢٢	
	جمع	٢٦	۴١٦	۴١٦			

**) کلیهٔ دروس جدول فوق دارای سرفصلی دقیقاً مشابه با دروس همنام در رشته‌ی اقتصاد می‌باشند.

مراجع

[۱] اسلامی، اسفندیار. رجبعلی‌پور، مهدی، فدائی، محمدرضا. دیدی کلی بر دوره دکتری، مقاله ارائه شده در همایش تأملی بر دوره‌های دکترای تخصصی در ایران، مؤسسه پژوهش و برنامه‌ریزی آموزش عالی، اردیبهشت ۱۳۸۶.

[۲] پیام وزیر علوم، تحقیقات و فناوری به سی و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران، خبرنامه انجمن ریاضی ایران، سال ۲۹، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۶.

[۳] دفترچه راهنمای آزمون سراسری سال ۱۳۸۷، دانشگاه آزاد اسلامی.

[۴] دفترچه راهنمای انتخاب رشته‌های تحصیلی آزمون سراسری ۱۳۸۷، سازمان سنجش و آموزش کشور.

[۵] دفترچه راهنمای آزمون کاردانی به کارشناسی ناپیوسته سال ۱۳۸۷، سازمان سنجش و آموزش کشور.

[۶] دفترچه راهنمای آزمون ورودی دوره کارشناسی ناپیوسته سال ۱۳۸۷، دانشگاه آزاد اسلامی.

[۷] سرفصل دروس رشته‌های کارشناسی ریاضی، شورایعالی برنامه‌ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، ۱۳۶۵.

[۸] سرفصل دروس رشته‌های کارشناسی ریاضی، شورایعالی برنامه‌ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی، ۱۳۷۲.

[۹] . علم‌الهدایی، سیدحسن. راهبردهای نوین درآموزش ریاضی، نشر شیوه، ۱۳۸۱.

[۱۰] ظهوری زنگنه، بیژن. داستان مبانی ریاضی به روایت تاریخ! خبرنامه انجمن ریاضی ایران، شماره ۲، سال ۱۹، تیر ۱۳۷۶.

[۱۱] ظهوری زنگنه، بیژن. دکتری آموزش ریاضی در دانشگاه‌های آمریکا، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹، پاییز ۱۳۸۱.

[12] http://www.ams.org/msc

[13] http://math.indstate.edu/page.aspx?id=17

[14] http://www.mathematics.pitt.edu/undergraduate/requirements_bs_economics.php

[15] http://cis.ucla.edu/studyArea/course.asp?type=MAJ&code=778

[16] http://www.artsandscience.utoronto.ca/ofr/calendar/prg_mat.htm

[17] http://www.oswego.edu/academics/undergraduate/requirements/appliedmathematicaleconomics.htm

[18] http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/Prospective/programs/mathfinance.shtml

[19] http://www.wlu.ca/page.php?grp_id=43&p=880

[20] http://www.math.psu.edu/UG/ughandbookmenu.htm

[21] http://www.math.umn.edu/undergrad/degree_requirements/#math_bio

[22] http://www.biomath.rutgers.edu/

[23] http://www.math.ilstu.edu/undergrad/biomath/index.shtml

[24] http://www.mathematics.pitt.edu/undergraduate/requirements_bs_actuarial.php

[25] http://www.ma.utexas.edu/dev/actuarial/

[26] http://www.math.umn.edu/undergrad/actuarial/

[27] http://www.math.washington.edu/acms/programoptions7.html

[28] http://www.catalogs.ohio.edu/preview_program.php?catoid=4&poid=939

[29] http://www.utdallas.edu/student/catalog/undergrad08/nsm/math.html

[30] http://www.mast.queensu.ca/meng

[31] http://www.berkeley.edu/undergraduate_major_require_applied.html

[32] http://www.wcupa.edu/_ACADEMICS/SCH_CAS.MAT/bs.html

[33] http://www.math.rutgers.edu/undergrad/Major/#minor

[34] http://www.math.umd.edu/undergraduate/majors/bsma.shtml

[35] http://senate.psu.edu/scca/baminors.htm

[36] http://www.fas.harvard.edu/~secfield/index.html

[37] http://web.mit.edu/registrar/www/reg/special_situations.html#undergraduate_minor

[38] http://www.stanford.edu/dept/registrar/bulletin/4898.htm

[39] http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/Prospective/co-op.shtml

[40] http://www.sa.psu.edu/career/Internshipandco-opOffices.shtml

[41] http://www.math.mcgill.ca/students/undergraduate/programs

[42] http://www.ubc.ca

[۴۳] برای دسترسی به آدرس اینترنتی دپارتمان‌های ریاضی تعداد زیادی از دانشگاه‌های دنیا می‌توان به لینک زیر مراجعه نمود:
http://www.math.psu.edu/MathLists/

وحید مؤمنائی کرمانی
بخش ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان
vmkermani@iauk.ac.ir

حسین مومّنائی کرمانی
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان
momenaee@ mail.uk.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱۰۷ تا ۱۱۱

تکنیک تبدیل لاپلاس برای محاسبه سریهای نامتناهی

جیمز. پی. لسکو، وندی. دی. اسمیت

مترجم: سعید علیخانی

افتیمو در مقاله‌ای در همین مجله[۱] [۲]، نشان داد که چگونه می‌توان تبدیل لاپلاس را به عنوان ابزاری برای محاسبه‌ی سری‌های نامتناهی به کار برد. در این مقاله این روش را مورد بررسی و کاربرد این تکنیک را بیشتر شرح می‌دهیم.

تکنیک افتیمو: افتیمو در مجلهٔ مذکور فرمول‌هایی برای سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} \qquad a,b \in \{-1,-2,\ldots\} \tag{1}$$

یافته است. او همان روش را برای محاسبهٔ سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)}$، که در آن P و Q چندجمله‌ای‌هایی هستند که $deg(P) - deg(Q) = 2$ و P قابل تجزیه به عامل‌های خطی بدون ریشه‌های $\{1,2,3,\ldots\}$ می‌باشند، به کار می‌برد.

تکنیک افتیمو برای سری‌های نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ که جملهٔ عمومی آن یعنی u_n را، بتوان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس $u_n = \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x)dx$ نوشت، به کار می رود. در این حالت تمام جمعوندها (به هر تعدادی که باشند)، به صورت انتگرال نوشته خواهد شد. این مرحله ممکن است خوشایند نباشد، اما با تعویض ترتیب سیگما و انتگرال (البته با بررسی شرایط) به یک سری هندسی که به صورت ساده‌ای قابل محاسبه است، تبدیل می‌شود. تساوی‌های زیر، مراحل فوق را به سادگی بیان می‌کند:

---

*) James P. Lesko and Wendy D. Smith

۱) منظور مجله‌ی "Mathematics Magazine", Vol. 76, No. 5 (Dec 2003) و اصل مقاله "A Laplace Transform Technique for Evaluating Infinite Series" می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x) dx \stackrel{?}{=} \int_0^{\infty} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_0^{\infty} f(x) (\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}) dx$$

اگر این انتگرال به آسانی قابل محاسبه باشد، مجموع را یافته‌ایم.
برای شرح این روش، سری (۱) را با فرض $a \neq b$ در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $-1 < a < b$. جمله‌ی n اُم را (با استفاده از تجزیه‌ی کسرها) می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس زیر نوشت، که می‌تواند نقطه‌ی شروعی برای مراحل فوق باشد، نوشت.

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \int_0^{\infty} e^{-nx} (\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}) dx$$

اکنون باید برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال دلیل بیاوریم. از آنجا که همه انتگرال‌ده‌ها برای $0 < x < \infty$ نامنفی‌اند، با به کاربردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا (برای مثال، [۳] ص ۴۹ را ببینید) برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} (\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}) dx \\ &\stackrel{M.C.T}{=} \int_0^{\infty} (\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) (\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-u} du. \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن $u = e^{-x}$.
به عنوان مثال اول، قرار دهید $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$؛ در این صورت از (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} = 2 \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{2}}}{1-u} du = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{1}{2}}} du = 4(1 - ln2)$$

برای مثال دوم، قرار دهید $a = 0$ و b را عددی صحیح مثبت در نظر بگیرید، در این صورت از (۲)، تساوی سری تلسکوپی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} &= \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{1-u^b}{1-u} du = \frac{1}{b} \int_0^1 (1 + u + u^2 + \cdots + u^{b-1}) du \\ &= \frac{1}{b}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{b}). \end{aligned}$$

خواننده‌ی علاقمند را برای مشاهده‌ی کاربردهای این روش در مورد سری‌های دیگر، به مقاله‌ی افتیمو [۲] ارجاع می‌دهیم.

یک روش کلی‌تر: روش افتیمو را می‌توان به سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ که در اینجا بهتر است فقط v_n به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس نوشته شود، تعمیم داد. مجدداً سری را می‌توان به صورت مجموع انتگرال‌ها نوشت، منتها این بار یک عامل u_n قبل از هر انتگرال وجود دارد. اگر ترتیب مجموع و انتگرال را بتوان عوض کرد (دوباره با

بررسی درستی شرایط)، لازم است مجموع صریح سری $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx}$ را پیدا کنیم. اگر همهٔ شرایط مناسب باشد، خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x)dx \stackrel{?}{=}$$
$$\int_0^{\infty} f(x)(\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx})dx = \int_0^{\infty} f(x)h(x)dx.$$

به عنوان مثال، سری زیر را به ازای $r \in [-1, 1)$، $a > 0$ و $b \geq 0$ در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} \qquad (3)$$

توجه کنید که کسر $\frac{1}{an+b}$ را می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس $\int_0^{\infty} e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})$ نوشت.
هرگاه $r \neq -1$، مجموع‌های جزئی $\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})$ از بالا کراندارند، چرا که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})| = \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})$$

که در آن

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})dx \leq \frac{1}{a}\int_0^{\infty} (\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})dx < \infty$$

حال با به کار بردن قضیه‌ی همگرایی تسلطی لبگ (مجدداً [۳ ص ۵۳] را ببینید) برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})dx \\ &\stackrel{D.C.T}{=} \int_0^{\infty} (\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}) \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx} dx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}})dx = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1-ru}du\end{aligned}$$

ما این فرمول را برای $r \in (-1, 1)$ به دست آورده‌ایم، اما از آنجا که سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b}$ و (۴) به ازای $r = -1$ همگرا هستند بنا بر قضیه‌ی آبل (به عنوان مثال [۱ ص ۲۷۹] را ببینید) باید با هم برابر باشند.
دو مثال پیشنهادی زیر را در نظر می‌گیریم . هرگاه $a = 1$ و $b = 0$، از (۴) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \int_0^1 \frac{r}{1-ru}du = \ln(\frac{1}{1-r}).$$

و برای $r = -1, a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$ از (۴) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = -\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u}du = \frac{\pi}{2} - 2.$$

به عنوان یک مثال دیگر برای این تکنیک، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)}$$، که $r \in [-1, 1]$ و $b > a > -1$

را در نظر بگیرید. ما اکنون می‌دانیم که چگونه $\frac{1}{(n+a)(n+b)}$ را می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس نوشت. هرگاه $r \in (-1, 1)$، تخمین مجموعه‌ای جزیی شبیه آنهایی است که قبلاً بررسی شد و بررسی جزئیات آن به خواننده واگذار می‌شود. با به کار بردن قضیه همگرایی تسلطی لبگ برای تعویض سیگما وانتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-nx}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\right)dx \\ &\overset{D.C.T}{=} \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\right)\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_0^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})\left(\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}}\right)dx \\ &= \frac{r}{b-a}\int_0^1 \frac{u^a-u^b}{1-ru}du \qquad (5)\end{aligned}$$

این استدلال برای $r \in (-1, 1)$ کار می کند، اما از آنجا که سری و (۵) هر دو به ازای $r = \pm 1$ وجود دارند، مانند قبل بنا بر قضیه آبل برای $r = \pm 1$ مساوی هستند. بنابراین برای مثال، به ازای $a = 0$ و $b = 1$، از (۵) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(n+1)} = r\int_0^1 \frac{1-u}{1-ru}du = 1 + \left(\frac{1-r}{r}\right)\ln(1-r).$$

نکتهٔ آخر. قصد ما ارائهٔ این پیشنهاد که فرمول‌های سری‌های بحث شده در این مقاله جدید هستند، نبود، چرا که راه‌های متعددی برای محاسبه‌ی آنها وجود دارند. هدف ما ارائه روشی برای محاسبه‌ی این سری‌ها می‌باشد. امیدواریم این روش را به جعبه ابزارتان برای سری‌ها اضافه کنید.

تمرین: لذت ببرید!

۱—فرض کنید $b \in \{1, 2, 3, \dots\}$. مراحل زیر را طی کنید تا به اثباتی برای اتحاد سری‌های تلسکوپی برسید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{b}\right)$$

(i) از انتگرال تبدیل لاپلاس $\frac{1}{n+b} = \int_0^{\infty} e^{-nx}(e^{-bx})dx$ استفاده کنید و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \int_0^1 u^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)du.$$

(ii) نشان دهید که $\int_0^1 u^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{b}\right)$.

۲— با استفاده از روش‌های توصیف شده در این مقاله، مقدارهای دقیق سری‌های زیر را بیابید. پاسخ‌های خود را با کامپیوتر بررسی کنید!

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n(n+k)}$ ، که $k \in \{1, 2, \dots\}$

مراجع

[1] R. C. Buck, Advanced Calculus, 3rd ed. , McGraw-Hill, New York, 1978.

[2] C. Efthimiou, Finding exact value for infinite sums, Mathematics Magazine 72 (1999), 45-51.

[3] G. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. John Wiley , Sons, New York, 1984.

مترجم: سعید علیخانی
دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد
پست الکترونیک : alikhani@yazduni.ac.ir

James P. Lesko
Grace College
Winona Lake, Indiana 46590
leskojp@grace.edu
Wendy D. Smith
Bowling Green state university
Bowling Green, OH 43403
wendey@bgnet.bgsu.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱۱۳ تا ۱۱۵

آلن شونفیلد

سهیلا غلام آزاد

آلن شونفیلد[۱] استاد آموزش ریاضی در دانشگاه برکلی کالیفرنیا[۲] است. او مدرک لیسانس خود را در سال ۱۹۶۸ از کالج کوئینز[۳] در نیویورک دریافت کرد. در سال ۱۹۶۹ دوره‌ی فوق لیسانس ریاضی را در دانشگاه استنفورد[۴] به پایان رساند و در سال ۱۹۷۳ موفق به دریافت دکتری ریاضی از دانشگاه استنفورد شد. او پایان نامه‌ی دکتری خود را با عنوان «تحقیق درباره‌ی مجموعه‌های کانتور و فضاهای پئانو از دیدگاه توپولوژی و نظریه‌ی اندازه[۵]» زیر نظر کارل دیلیو[۶] از شاگردان امیل آرتین[۷] به پایان رساند. پس از آن، شونفیلد توجه خود را به سمت مقولاتی چون تفکر، تدریس و یادگیری ریاضی معطوف کرد. او با کار در زمینه‌ی حل مسأله به دنبال پاسخ سؤالاتی چون چه چیز افراد را به مسأله‌حل‌کن‌های خوب تبدیل می‌کند؟ یا چگونه افراد می‌توانند در زمینه‌ی حل مسأله بهتر عمل کنند؟، بود. کتاب «حل مسأله ریاضی[۸]» شونفیلد، به نوعی یک درس دوره‌ی کارشناسی مبتنی بر تحقیق در حل مسأله‌ی ریاضی را توصیف می‌کند. در این کتاب شونفیلد ضمن پرداختن به بنیان‌های نظری حل مسأله، نسل جدیدی از تحقیقات را که در رده‌ی تحقیقات کیفی در آموزش ریاضی قرار دارد، ارائه داد. به سبب این ویژگی‌های خاص، کتاب «حل مسأله ریاضی» سال‌هاست که به عنوان یک کتاب مرجع در دوره‌های تحصیلات تکمیلی رشته آموزش ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. او علاوه بر حل مسأله، روی ارزیابی و تصمیم سازی معلمان و همچنین مقولاتی چون عدالت آموزشی و توجه به تنوع با تأکید بر ریاضی کار کرده است. شونفیلد نویسنده‌ی ارشد بخش‌های پایه‌های ۱۲—۹ کتاب «اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای[۹]» بوده است که زیر نظر شورای ملی معلمان ریاضی[۱۰] آمریکا تهیه شد. او یکی از بنیانگذاران پژوهش در آموزش

1) Alan Schoenfeld 2) University of California at Berkeley 3) Queens College 4) Stanford University 5) Topological and Measure-Theoritic Studies on Cantor Sets and Peano Spaces 6) Karel deleeuw 7) Emil Artin 8) Mathematical problem Solving 9) Principles and Standards for School Mathematics 10) National Council of Teachers of Mathematics

ریاضی دانشگاهی است و به عنوان معاون سردبیر مجله‌ی «شناخت و آموزش[۱]» خدمات بسیار زیادی کرده است. او همچنین محقق ارشد در مرکز «تنوع در آموزش ریاضی[۲]» واقع در پردیس دانشگاه برکلی می‌باشد.

شونفیلد به عنوان رئیس انجمن تحقیقات آموزشی آمریکا[۳] و نایب رئیس آکادمی ملی تعلیم و تربیت[۴] آن کشور خدمت کرده است. او از همکاران انجمن توسعه‌ی علوم آمریکا[۵] و برنده‌ی جایزه‌ی کاپا دلتا پای[۶] است. شونفیلد رهبری پروژه‌ی «ارزیابی متعادل[۷]» را بر عهده داشت که حاصل آن ارائه‌ی راهکارهای ارزیابی غیر سنتی برای برنامه‌های درسی $K - ۱۲$[۸] بود. او همچنین مشاور ارشد مدیریت آموزشی منابع انسانی از بنیاد ملی علوم[۹] است.

شونفیلد یکی از تأثیرگذارترین افراد در حوزه‌ی آموزش ریاضی بوده است. او تلاش زیادی کرده است تا با ایجاد پیوند بین ریاضی‌دانان، آموزش‌گران ریاضی، برنامه‌ریزان درسی، روانشناسان علوم شناختی و معلمان ریاضی زمینه‌های تولید برنامه‌های درسی ریاضی متنوع و متناسب با نیازهای گروه‌های مختلف را تدوین کند. او تاکنون نویسنده یا ویراستار ۲۱ کتاب بوده و بیش از ۱۵۰ مقاله‌ی اصیل در زمینه‌ی تفکر و یادگیری ریاضی نوشته است. یادآور می‌شویم که مقاله‌ی «تدریس مهارت‌های حل مسأله[۱۰]» از شونفیلد توسط آقای دکتر جلوداری ممقانی ترجمه و در شماره‌ی اول مجله‌ی نشر ریاضی در سال ۱۳۶۷ به چاپ رسیده است. همچنین، ترجمه‌ی دو مقاله از وی نیز در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است. این دو مقاله عبارت‌اند از: «فراشناخت و ریاضیات[۱۱]» که توسط فرهاد کریمی ترجمه شده و در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۵۵، بهار ۱۳۷۸ به چاپ رسیده است؛ و مقاله‌ی دیگر، «هدف‌ها و روش‌های تحقیق در آموزش ریاضی[۱۲]» ترجمه‌ی رشید اصلانی و سهیلا غلام‌آزاد است که در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۶۵، پاییز ۱۳۸۰ چاپ شده است.

در زیر به بعضی از آثار وی اشاره می‌شود.

[1] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

1) Cognition and Instruction 2) Diversity in Mathematics Education (DiME) 3) The American Educational Research Association 4) The National Academy of Education 5) the American Association for the Advancement of Science 6) Kappa Delta Pi 7) Balanced Assessment

۸) پیش دبستان تا پایان دبیرستان

9) the Educational Human Resources Directorate of the National Science Foundation
10) Skills Teaching problem solving (1983) 11) Metacognition and Mathematics (1991)
12) Purposes and Methods of Research in Mathematics Education (2000)

[2] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

[3] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1987). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[4] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1990). *A Source Book for College Mathematics Teaching.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

[5] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1992). *Research methods in and for the learning sciences,* a special issue of The *Journal of the Learning Sciences,* Volume 2, No. 2.

[6] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1994). *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[7] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1997). *Student Assessment in Calculus A report of the NSF Working Group on Assessment in Calculus.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

[8] Schoenfeld, A. H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.) (1998). *Research in Collegiate Mathematics Education. III.* Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.

[9] Schoenfeld, A. H. (1998) *Issues in Education, Volume 4, Number 1.* The issue presents and critiques Schoenfeld's theory of teaching-in-context.

[10] Schoenfeld, Alan H. (1999) (Special Issue Editor). *Examining the Complexity of Teaching.* Special issue of the *Journal of Mathematical Behavior,* 18 (3).

[11] Holton, D., Artigue, M., Kirchgraber, U, Hillel, J., Niss, M. & Schoenfeld, H. (Eds.) (2001). *The teaching and learning of mathematics at the University Level.* Dordrecht: Kluwer.

[12] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (inpress). *A study of teaching: Multiple lenses, multiple views. Journal for research in Mathematics Education monograph series.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[13] Schoenfeld, A. H. (Ed.) (in preparation). Assessing Mathematical proficiency. Cambridge: Cambridge University Press.

سهیلا غلام آزاد
مؤسسه‌ی پژوهشی و برنامه‌ریزی درسی و نوآوری‌های آموزشی
soheila_azad@yahoo.com

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 29, No. 1, Spring 2010

Editor-in-Chief

B. Z. Zangeneh, Sharif Univ. of Technology
zangeneh@sharif.edu

Editorial Board

S. Gholamazad, Research Institution for Curriculum Development and Educational Innovations
soheila_azad@yahoo.com

R. Jahani Pour, Kashan Univ.
jahanipu@kashanu.ac.ir

M. J. Mamaghani, Alameh Tabatabai Univ.
j_mamaghani@atu.ac.ir

M. Mirzavaziri, Ferdowsi Univ.
mirzavaziri@math.um.ac.ir

M. Motamedi, Shahid Chamran Univ.
motamedi_m@scu.ac.ir

M. Pourmahdian, AmirKabir Univ. of Technology
mpourmahd@aut.ac.ir

H. Saiflu, Tabriz Univ.
saiflu@tabrizu.ac.ir

B. Tabatabaie Shourijeh, Shiraz Univ.
tabataba@math.susc.ac.ir

B. Z. Zangeneh, Sharif Univ. of Technology
zangeneh@sharif.edu

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: