فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۱ تا ۲

سخن سردبیر

بهمن طباطبائی

در کار گلاب و گل حکم ازلی این بود　　کاین شاهد بازاری و آن پرده نشین باشد
(حافظ)

سابقهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی به بلندای سابقهٔ پیدایش انسان است و تا زمانی که انسان بتواند در دنیا بماند و زندگی کند نیاز به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی دارد، زیرا نیاز به ریاضی دارد. باید توجه داشت از زمانی که انسان چشم به روی عالم باز کرده است بی آن که خودش بداند، بدون ریاضی زندگی برایش غیر ممکن بوده است و همین امر باعث می‌شود که کمتر به اهمیت آن فکر کند. همانند ماهی که می‌پرسد این آب که می‌گویند چیست و کجاست؟ زمانی که او را از آب بیرون می‌اندازند پی به وجود و ارزش آب می‌برد. بسیاری از چیزهایی که از کودکی بطور رایگان در اختیار انسان است کمتر به اهمیت آن فکر می‌کند مثلاً ویژگی‌های زیبای اعداد حقیقی، هوای سالم و پاک، محبت پدر و مادر، حس دیدن، شنیدن، ... . نبود هر کدام از این نعمت‌های خداداد ارزش وجودی آنها را ثابت می‌کند و اما عدم برای فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی تعریف نشده است و شاید به همین علت باشد که پرده‌نشین شده است، در حالی که خود ریاضیات که در بستر فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی تولید می‌شود شاهد بازاری است و این پرده نشین بودن فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی منحصر به جامعهٔ ما نیست، در سراسر عالم این چنین است. حدود ۲۵ سال پیش در دیار بعضی از پیش کسوتان اندیشهٔ ریاضی مانند اسحق نیوتون، وایتهد، راسل و ... . دوستی هم دانشگاهی داشتم که معمولاً در پایان روز که دانشگاه را ترک می‌کردیم در راه منزل مسافتی را با هم بودیم. دوست بنده معمولاً از هوا صحبت می‌کرد که بی ضرر و زیان باشد ولی صحبت از هوا نمی‌توانست برای آن همه مسافت کافی باشد، لذا گاهی صحبتش می‌بایست از حیطهٔ هوا خارج می‌شد. ایشان می‌دانست که من در ریاضی محض کار می‌کنم و رشتهٔ تحصیلی ایشان هم نساجی بود. در یکی از روزها پس از پایان بحث هوا، گفتند شما از صبح تا عصر انتگرال میگیرید؟ گفتم خیر، حدود دو سالی است که با انتگرال سروکار نداشته‌ام ولی اوایل این هفته با مفهوم انتگرال یک عملگر آشنا شده‌ام ولی چه آشنایی، آن‌طور که دلم می‌خواهد موضوع را درک نکرده‌ام و باید روی آن بیشتر کار کنم. گفتند باید ساده باشد و

در ادامه افزودند ساده است! یادم آمد به داستانی در مثنوی مولوی که می‌فرماید:

روستائی گاو در آخور ببست　　　شیر گاوش خورد و بر جایش نشست.

در تاریکی شب روستائی ساده متوجه نشد که گاوی در کار نیست و شیر در جای گاوش ایستاده است و به گمان این که این موجود گاو است او را تیمار می‌کرد و دست به پُشت و دم شیر می‌کشید. مولوی از قول شیر می‌فرماید:

این چنین گستاخ زان میخاردم　　　کو در این شب گاو میپنداردم

و ادامه می‌دهد که اگر نور بود و این بنده خدا می‌دید که این جا شیر ایستاده است هرگز جرأت نمی‌کرد که به این نواحی نزدیک شود. من نتیجه گرفتم که در این دیار هم فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی پرده‌نشین است و این اظهار نظر شجاعانهٔ دوست ما نتیجهٔ مستقیم آن است. اکنون از جامعهٔ ریاضی ایران تقاضا می‌کنم که بیائید دست به دست هم بدهیم و فرهنگ و اندیشه ریاضی را از پرده‌نشینی نجات دهیم تا مانند خود ریاضیات «شاهد بازاری» شود.

در پایان از همهٔ عزیزانی که تا شهریور ٨٦ به نحوی از انحاء در راه‌اندازی، چاپ و انتشار مجلهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی همکاری نموده‌اند، از طرف هیات تحریریه، تشکر، قدردانی و سپاسگزاری می‌کنم. بی‌تردید همهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی که با نگارش، چاپ و انتشارات سروکار دارند قدر گام‌های سازنده‌ای که توسط دست اندکاران مجله برداشته شده است را خواهند دانست.

از شهریور ماه ١٣٨٦ به بعد که حقیر به عنوان عضوی کوچک با هیأت تحریریهٔ مجله فوق افتخار همکاری داشته‌ام از سر دبیر محترم جناب آقای دکتر زنگنه از دانشگاه صنعتی شریف، جناب آقای دکتر جلوداری ممقانی ویراستار ارشد از دانشگاه علامه طباطبائی، جناب آقای دکتر سیفلو از دانشگاه تبریز، جناب آقای دکتر میرزاوزیری از دانشگاه فردوسی مشهد و جناب آقای دکتر پورمهدیان از دانشگاه صنعتی امیرکبیر که جای خود را به همکاران جدید داده‌اند بینهایت سپاسگزاری می‌کنم. خصوصاً سردبیر محترم جناب آقای دکتر زنگنه و ویراستار ارشد جناب آقای دکتر جلوداری ممقانی که اگر نبود کوشش شبانه روزی این عزیزان، هرگز انتشار مجله به روز نمی‌شد. به جرأت می‌توان گفت که وجود این دو بزرگوار در هیأت تحریریهٔ مجله به نعمت سلامتی می‌ماند که ارزش و اهمیت آن در غیبت آن شناخته می‌شود. و نتیجه آن که:

به راه بادیه رفتن به از نشستن باطل　　　که گر مراد نیابم به قدر وسع بکوشم

(سعدی)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۳ تا ۱۹

ریاضیات بدون بنیادها

محمدصالح زارع پور

چکیده

به نظر می‌رسد که امروزه کمتر ریاضی‌دانی را می‌توان یافت که تصویری بنیادگرایانه[۱] از ریاضیات نداشته باشد[۲]. با این همه، فیلسوفانی هستند که تحقق *ریاضیات بدون بنیادها*[۳] را ممکن می‌دانند. یکی از ایشان، هیلاری پاتنم[۴] است که معتقد است «ریاضیات نه بنیادی دارد و نه احتیاجی به آن». پاتنم از یک سو تلاش می‌کند تا نشان دهد که هیچ یک از گزینه‌های مختلف برای قرار گرفتن در جایگاه بنیاد ریاضیات، رجحانی بر سایر گزینه‌ها ندارد و این گزینه‌ها تنها وصف‌هایی هم‌ارز[5] هستند (دیدگاه سلبی) و از سوی دیگر در صدد پی‌ریزی یک نظام معناشناسی[۶] جدید برای گزاره‌های ریاضی است (دیدگاه ایجابی). در این مقاله سعی داریم تا به شرح دیدگاه‌های پاتنم در این زمینه بپردازیم و تأثیرات این دیدگاه‌ها بر دیگر فلاسفهٔ ریاضیات را مختصراً شرح دهیم.

۱. مقدمه

کتاب اصول اقلیدس و روش[۷] حیرت‌انگیزی که او در تألیف این کتاب به‌کار بسته بود، برای قرن‌ها موضوع بسیاری از مناقشات جدی ریاضی‌دانان بود؛ چرا که به نظر می‌رسید وی در اثبات

1) foundationalistic

۲) نویسنده برای این ادعا دلیلی جز مشاهدات شخصی‌اش از ریاضی‌دانان و به‌خصوص ریاضی‌دانان حرفه‌ای بی‌علاقه به مسائل فلسفی ریاضیات ندارد. البته این مشاهدات را نقل قول‌هایی شبیه به این تقویت می‌کند: «می‌گویند ریاضی‌دانان در روزهای کاری هفته افلاطونی‌اند و در پایان هفته صورتگرا و تخمین زده‌اند که شصت و پنج درصد ریاضی‌دانان افلاطونی‌اند، سی درصد صورتگرا، پنج درصد شهودگرا» (لاجوردی و اردشیر ۱۳۸۸؛ ۵۵). دست‌کم افلاطونی‌ها بی هیچ مناقشه‌ای، نمونهٔ کامل بنیادگرایان هستند.

3) *Mathematics Without Foundations* 4) Hilary Putnam 5) equivalent descriptions

6) semantics

۷) در اینجا منظور همان روش اصل موضوعی (axiomatic) است.

برخی از قضایای کتاب خود، تلویحاً از گزاره‌ها و احکامی استفاده کرده است که نه در میان اصول موضوعه قید شده و نه قابل استنتاج از آن‌ها بودند؛ یا این‌که برخی از تعاریف او از مفاهیم هندسی، منجر به ابهاماتی می‌شدند (و نیز ایراداتی دیگر). مجموعهٔ این ایرادات و ابهامات، منجر به مناقشات و مباحثاتی شدند که اوج آن‌ها در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ و چند سال ابتدایی قرن ۲۰ شکل گرفت و به بازنویسی و اصلاح اساسی ساختار هندسهٔ اقلیدسی (اصول موضوعهٔ آن و نحوهٔ تعریف مفاهیم اصلی) منتهی شد. موفقیت ریاضی‌دانان در این امر، از یک سو و پارادوکس‌های تازه کشف شده در ریاضیات از سوی دیگر، آنان را ترغیب کرد تا درصدد بنا نهادن چنین ساختاری برای سایر شاخه‌های ریاضیات و، به‌طور خاص، حساب برآیند. به همین منظور، تلاش‌هایی گسترده برای تنظیم برخی اصول به‌عنوان اصول موضوعه و استنتاج تمامی قضایای حساب از آن‌ها (به نحوی که منجر به پارادوکس‌های مذکور نشود) آغاز شد. فیلسوفان و منطق‌دانان بسیاری بر آن شدند تا با فراهم آوردن بنیادی برای ریاضیات، آن را به‌صورت اصل‌موضوعی بازنویسی و سازگاری ساختمان به‌دست آمده را اثبات کنند. در این سال‌ها، کمتر ریاضی‌دانی باوری جز این داشته است که «ریاضیات حتماً بنیادی دارد». صدای اندکْ افرادی هم که باوری جز این داشتند، در هیاهوی تلاش همگانی برای یافتن بنیادی برای ریاضیات به گوش نمی‌رسید[۱]. در نهایت، این هیاهو با اقبال یافتن نظریهٔ مجموعه‌ها در میان سایر گزینه‌هایی که برای بنیاد ریاضیات در نظر گرفته شده بودند، فروکش کرد.

نظریهٔ مجموعه‌ها در رقابت با برخی نظریه‌های دیگر مثل نظریهٔ انواع[۲]، نظریهٔ رسته‌ها[۳] و یا منطق وجهی[۴]، مقبولیتی عام در میان ریاضی‌دانان پیدا کرد و امروزه کمتر ریاضی‌دانی هست که نظریهٔ مجموعه‌ها را بنیاد ریاضیات نداند. یعنی دست‌کم تلقی رایج در بین ریاضی‌دانانی که دغدغه‌های فلسفی جدی ندارند، این است که نظریهٔ مجموعه‌ها بنیاد مناسبی برای ریاضیات است. اما آیا به‌راستی چنین است؟ آیا نظریهٔ مجموعه‌ها حقیقتاً بنیاد ریاضیات است؟ از این مهم‌تر، آیا اساساً ریاضیات بنیادی دارد؟ این‌ها سؤالاتی است که هیلاری پاتنم در مقالهٔ مناقشه‌برانگیز خود، *ریاضیات بدون بنیادها* (Putnam 1967)، مطرح می‌کند و در پاسخ آن‌ها مدعی می‌شود که «ریاضیات نه بنیادی دارد و نه احتیاجی به آن». پاتنم در این مقاله می‌کوشد تا اولاً مقبولیت نظریهٔ مجموعه‌ها و یا برخی جایگزین‌های مهجورتر آن مانند منطق وجهی را برای قرار گرفتن در جایگاه بنیادهای ریاضیات نفی کند و ثانیاً با پی‌ریزی نظام معناشناسی جدیدی مبتنی بر ثنویت شیئی ـ وجهی[۵] گزاره‌های ریاضی، بی‌نیازی ریاضیات به بنیادها را اثبات کند. البته در نگاه اول، ممکن است چنین به نظر برسد که پاتنم، احتیاج ریاضیات به بنیاد را مرتفع نکرده است و تنها گزینه‌ای جدید برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات طرح کرده است؛ اما خود او صریحاً این نظر را تکذیب می‌کند.

۱) این تعابیر، قریب به تعبیری از خود پاتنم است.

2) type theory 3) category theory 4) modal logic 5) objective-modal

در این مقاله سعی داریم تا با تشریح دیدگاه‌های پاتنم، برخی برهان‌هایی را که به تأیید نظر او کمک می‌کنند اقامه و در نهایت، پیامدهای پذیرش این نظر، محاسن و نواقص آن را تحلیل کنیم. اساساً برای نشان دادن این‌که A بنیادی مناسب برای ریاضیات نیست، به دو روش می‌توان عمل کرد. روش اول این است که با بررسی امکاناتی که پذیرفتن A به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات، در اختیار ما قرار می‌دهد و نیز محدودیت‌هایی که به ما تحمیل می‌کند، نشان دهیم که A قابلیت توضیح و توجیه برخی ویژگی‌ها و یا وقایع عالم ریاضی را ندارد. روش دوم این است که نشان دهیم A نسبت به سایر گزینه‌های موجود (برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات)، رجحانی ندارد. در حقیقت، ادعا می‌کنیم که مثلاً A و B در تحلیل دنیای ریاضیات به یک اندازه کارآمد هستند و در نتیجه الزامی برای این‌که یکی بنیاد ریاضیات باشد و دیگری اشتقاقی از آن، وجود ندارد.

پاتنم در اثبات نظریات خود فقط از روش دوم استفاده کرده است؛ شاید به این دلیل که دیدگاه ایجابی او متکی بر همین عدم رجحان گزینه‌های موجود (برای قرار گرفتن به‌عنوان بنیاد ریاضیات) بر یکدیگر است. ما در این‌جا علاوه بر استدلال پاتنم که با روش دوم ایراد شده است، به‌عنوان نمونه، استدلالی مبتنی بر روش اول نیز ارائه خواهیم کرد.

۲. پارادوکس اسکولم[۱]

اسکولم یکی از معدود ریاضی‌دانانی است که در همان دهه‌های ابتدایی قرن بیستم و در اوج اقبال نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات، این مقبولیت را زیر سؤال برد و آن را نفی کرد. اسکولم در سال ۱۹۲۲ و با پیگیری و تعمیم کارهای لوونهایم[۲]، قضیه‌ای مهم را اثبات کرد که از آن به‌بعد سلاحی برای حمله به نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات شد:

قضیه ۱. فرض کنید A مجموعه‌ای سازگار از جمله‌ها در زبان L باشد و $|L| = \kappa$. اگر A مدلی نامتناهی داشته باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد اصلی مانند λ که $\lambda \leq \kappa$، مدلی به اندازهٔ λ دارد.[۳]

فرض کنید AST مجموعهٔ اصول موضوع دلخواهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. اگر این اصول سازگار باشند (اگر نباشند عملاً بحث منتفی است)، مدلی خواهند داشت و بنابر قضیهٔ بالا، دارای یک مدل شمارا هستند. از سوی دیگر، یکی از گزاره‌هایی که از اصول مورد نظر ما استنتاج می‌شود، تصریح می‌کند که دست‌کم یک مجموعهٔ ناشمارا وجود دارد. مثلاً در ZF، این گزاره از اصل مجموعهٔ توانی[۴] و قضیهٔ کانتور[۵] استنتاج می‌شود. در این وضعیت، چون مدل مورد نظر ما باید ارضاکنندهٔ همهٔ نتایج منطقی اصول باشد، لاجرم ارضاکنندهٔ این گزاره هم خواهد بود. یعنی یک مدل شمارا ارضاکنندهٔ گزاره‌ای شده است که وجود یک مجموعهٔ ناشمارا را تصریح می‌کند!

---

1) Skolem paradox   2) Löwenheim

۳) برای مشاهدهٔ برهان این قضیه که به قضیهٔ لوونهایم ـ اسکولم شهرت دارد، به (اردشیر ۱۳۸۳) مراجعه کنید.

4) Axiom of Power Set   5) Cantor's theorem

در نگاه اول، به نظر می‌رسد که به نوعی تناقض رسیده‌ایم اما واقعیت این است که هیچ تناقضی در کار نیست. با این همه، کل مسأله آن‌قدر مناقشه برانگیز بوده است که نام پارادوکس را درخور آن بدانیم. یک مدل می‌تواند آن‌قدر ضعیف باشد که تعریف و اثبات وجود برخی از توابع دوسویی *درون* آن ممکن نباشد و در واقع، مدل شمارایی که برای نظریهٔ مجموعه‌ها ساخته می‌شود نیز چنین است. *درون* این مدل، مجموعه‌هایی وجود دارند که اگرچه از دید ناظر بیرونی شمارا هستند، اما هیچ یک از توابع دوسویی *درون* مدل، این مجموعه‌ها را در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار نمی‌دهند و چون تعریف مجموعهٔ ناشمارا چیزی جز این نیست که مجموعهٔ مورد نظر در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار نگیرد، پس این مجموعه‌ها از دید ناظری *درونی* ناشمارا هستند. بنابراین هیچ تناقضی وجود ندارد و تنها نکتهٔ مناقشه برانگیز، نسبی شدن مفهوم ناشمارایی در مورد این مدل است. اتفاقاً اسکولم صلاحیت نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان بنیادی برای ریاضیات را با تکیه بر همین نکته، نفی می‌کند. از نظر او چیزی که بنیاد ریاضیات تلقی می‌شود، دست‌کم باید قابلیت تبیین مفاهیم ریاضی را به‌صورت مطلق داشته باشد، اما چنان‌که دیدیم برخی مفاهیم در نظریهٔ مجموعه‌ها نسبی می‌شوند (Hart 2000).

۳. وصف‌های هم‌ارز[1]

در این‌جا می‌خواهیم به استدلالی که خود پاتنم به منظور تشکیک در وجود بنیادی برای ریاضیات طرح کرده است بپردازیم. وی معتقد است که یکی از مهمترین ویژگی‌های گزاره‌ها و احکام ریاضی، وجود صورت‌بندی‌های متعدد از آن‌ها است. به این ترتیب که شما در ریاضیات می‌توانید به طرق مختلف از یک واقعیت[2] صحبت کنید، بی آن‌که حرفی از اشیاء طریق دیگر به میان آمده باشد. مثلاً می‌توان نظریهٔ اعداد را به بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل کرد و حکمی دربارهٔ اعداد را به حکمی دربارهٔ مجموعه‌ها تبدیل کرد؛ و بالعکس. یعنی می‌توان یک واقعیت ریاضی را یک بار با صحبت از اعداد، بدون آن‌که صحبتی از مجموعه‌ها به میان بیاید، شرح داد و بار دیگر همان واقعیت را با صحبت از مجموعه‌ها، بدون آن‌که صحبتی از اعداد به میان بیاید، شرح داد. این تمایز در اشیاء[3] طرق مختلف می‌تواند به حدی باشد که حتی تشخیص این‌که این دو طریق از یک واقعیت ریاضی صحبت می‌کنند، مشکل باشد. پاتنم در تبیین این موقعیت از اصطلاحی که رایشنباخ[4] وضع کرده است کمک می‌گیرد: *وصف‌های هم‌ارز*. رایشنباخ این اصطلاح را به منظور

1) equivalent descriptions 2) fact

۳) دقت کنید که در این‌جا تلقی ما از «شیء» یک تلقی افلاطونی نیست. منظور ما از اشیاء یک طریق آن چیزهایی است که زبان اتخاذ شده در آن طریق ما را متعهد به وجود آن‌ها می‌کند؛ فارق از این‌که *واقعاً* این اشیاء وجود دارند یا خیر. به بیان دیگر، منظور ما از اشیاء یک طریق همان چیزهایی است که در زبان آن طریق، تحت سورها می‌آیند. به تعبیر کواین (Willard Van Orman Quine): «بودن عبارت است از مقدار یک متغیر پابند بودن».

4) Reichenbach

تبیین ثنویت موج ــ ذره در مکانیک کوانتومی وضع کرده است. از نظر پاتنم، وضعیتی که در ریاضیات رخ می‌دهد دقیقاً مشابه وضعیتی است که در مکانیک کوانتومی با ثنویت موج ــ ذره دیده می‌شود. در مکانیک کوانتومی چه بگوییم «موجی با طول موج معین λ» و چه بگوییم «ذره‌ای با اندازه حرکت ν و مکان نامعین»، در هر دو حال از یک واقعیت صحبت کرده‌ایم و (در حقیقت) این دو جمله *وصف‌های هم‌ارزی* از یک واقعیت هستند. پر واضح است که این هم‌ارزی به معنای "ترادف" نیست. افزون بر این، هیچ یک از این دو وصف، رجحانی بر دیگری ندارند و بنابراین نمی‌توانیم یکی را *اصل* و دیگری را *اشتقاقی* از آن بدانیم. پاتنم معتقد است که همین وضعیت، دقیقاً در ریاضیات هم اتفاق می‌افتد و بنیادهای متفاوتی که برای ریاضیات پیشنهاد شده‌اند، وصف‌هایی هم‌ارز از گزاره‌های ریاضی ارائه می‌دهند، بی آن‌که هیچ یک از این وصف‌ها رجحانی بر دیگری داشته باشد و بنابراین هیچ دلیلی ندارد که یکی از این گزینه‌ها را به‌عنوان بنیاد ریاضیات و مابقی را به‌عنوان اشتقاق‌های آن در نظر بگیریم.

پاتنم از میان وصف‌های متعددی که برای توصیف بنیادگرانهٔ گزاره‌های ریاضی پیشنهاد شده‌اند، دو وصف را برمی‌گزیند و با مثالی درصدد توجیه هم‌ارزی این دو وصف برمی‌آید. وصف‌هایی که وی انتخاب می‌کند یکی نظریهٔ مجموعه‌ها و دیگری منطق وجهی است. دو وصفی که در یکی، ریاضیات به‌مثابهٔ عالم *اشیاء (مجموعه‌ها و اعداد)* توصیف می‌شود و در دیگری، به‌مثابهٔ عالم *استلزامات منطقی، ضرورت و امکان*. به‌عنوان نمونه، او تلاش می‌کند تا نشان دهد که اگر حدس فرما[1] غلط باشد، چگونه نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق وجهی وصف‌های هم‌ارزی از این واقعیت ارائه می‌دهند. در این‌جا ما همان استدلال پاتنم را در مورد حدس گلدباخ، یعنی این حدس که «هر عدد زوج بزرگتر از ۲، مجموع دو عدد اول است»، بازنویسی می‌کنیم:

فرض کنید که حدس گلدباخ غلط باشد. بنابراین «دست‌کم یک عدد زوج بزرگتر از ۲ موجود است که مجموع هیچ دو عدد اولی نیست». افزون بر این، فرض کنید این جمله را به‌صورت "$\neg Gold$" در حساب مرتبهٔ اول نشان دهیم. اگر $\neg Gold$ اثبات‌پذیر باشد، مجموعه‌ای متناهی از قضایای حساب مرتبهٔ اول موجود است که $\neg Gold$ را نتیجه می‌دهد. چون کل حساب مرتبهٔ اول را می‌توان به‌صورت نظامی متناهی از اصول[2] بیان کرد، پس زیرمجموعه‌ای متناهی از این اصول مانند Ax موجود است که $\neg Gold$ را نتیجه می‌دهد. پیش از ادامهٔ بحث، باید متذکر شویم که اگر $\neg Gold$ درست باشد، می‌توان آن را در حساب مرتبهٔ اول اثبات کرد، اما ممکن است که حتی کل حساب مرتبهٔ اول برای اثبات خود $Gold$ ضعیف باشد. با توجه به این مقدمات، حدس گلدباخ زمانی کاذب است که "$Ax \supset \neg Gold$" معتبر باشد یا

---

۱) این استدلالات در سال ۱۹٦۷ و پیش از اثبات حدس فرما (۱۹۹۴) توسط وایلز، تقریر شده است.

2) axioms

به عبارت دیگر

$$\Box(Ax \supset \neg Gold) \qquad (۱)$$

حالا به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم که صدق (۱) به مفاهیم اساسی حساب وابسته نیست. فرض کنید آن مفاهیم اساسی که Ax و $\neg Gold$ برحسب آن‌ها نوشته شده‌اند، دو نسبت سه‌موضعی «x حاصل جمع y و z است» و «x حاصل ضرب y و z است» باشد. با نشاندن دو محمول سه‌موضعی دلخواه مثل S و T به‌جای این دو جمله، Ax و $\neg Gold$ را به‌صورت $Ax(S,T)$[۱] و $\neg Gold(S,T)$ بازنویسی می‌کنیم. البته باید بین S و T همان نسبت‌هایی وجود داشته باشد که بین دو محمول «x حاصل جمع y و z است» و «x حاصل ضرب y و z است» برقرار است. یعنی مثلاً به همان نحوی که می‌توان ضرب را به جمع تحویل داد، بتوان T را به S تحویل داد. روشن است که در این شرایط اگر (۱) جمله‌ای صادق از منطق وجهی باشد، جملهٔ زیر هم صادق است:

$$\Box[Ax(S,T) \supset \neg Gold(S,T)] \qquad (۲)$$

دو مجموعهٔ (۱) و (۲) وصف‌های هم‌ارز از یک واقعیت (یعنی نقیض حدس گلدباخ) هستند، با این تفاوت که در (۱) صحبت از نوعی وجود *اشیاء مجرد* است، ولی در (۲) بدون آن‌که هیچ صحبتی از اشیاء مجرد به میان بیاید، واقعیت مورد نظر ما یعنی نقیض حدس گلدباخ، صرفاً در قالب *استلزامی منطقی* بیان شده است. به عبارت دیگر، چون "$\neg Gold$" یعنی «دست‌کم یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ موجود است که مجموع هیچ دو عدد اولی نیست»، پس فرمول (۱) از وجود بعضی اشیاء مجرد ــ *اعداد* ــ صحبت می‌کند؛ به‌علاوه از آن‌جایی که تنها حضور محمول‌های جمع و ضرب است که تضمین می‌کند Ax و $\neg Gold$ از اعداد حرف می‌زنند، پس وقتی که جمع و ضرب را با محمول‌های سه‌موضعی *دلخواه* جایگزین کنیم، عملاً در فرمول (۲) حرفی از اعداد (به‌عنوان اشیاء مجرد) به میان نمی‌آید. در واقع، $Ax(S,T)$ و $\neg Gold(S,T)$ وصف‌های هم‌ارزی از Ax و $\neg Gold$ هستند که هیچ اشاره‌ای به عدد (یا هر شئ مجرد دیگری) ندارند و در عوض، دربارهٔ محمول‌ها و روابط بین آن‌ها صحبت می‌کنیم[۲]. این‌جا، جایی است که با چشم‌پوشی از "$\Box$" در مدخل نوعی نامگرایی[۳] تمام‌عیار قرار می‌گیریم. نامگرایی، در حقیقت نامی است که مورخان به یکی از سه دیدگاه رایج دربارهٔ کلیات[۴] در قرون وسطا داده‌اند. نامگرایان بر این باور بودند که کلیات که در حقیقت همان محمول‌های یک‌موضعی (صفات[۵]) یا چندموضعی (روابط[۶]) هستند، چیزی جز نام‌ها نیستند؛

---

۱) طبیعتاً ارتباطی به "AST" در صفحهٔ ۴ ندارد.

۲) در این‌جا ممکن است این شائبه به‌وجود بیاید که اگر ما به همان تعبیر منقول از کواین تکیه کنیم، آنگاه به‌ناچار ملتزم به وجود محمول‌ها به‌مثابهٔ اشیاء دیگری خواهیم شد. اما چنان‌که در ادامه خواهیم دید، برخی نظریات هستند که از پذیرش محمول‌ها به‌عنوان موجوداتی حتی مجرد و ذهنی هم طفره می‌روند.

3) nominalism 4) universals 5) properties 6) relations

نام‌هایی که نه به اشیائی افلاطونی ارجاع دارند و نه به اشیاء ذهنی. نامگرایی وجود هرگونه شیء مجردی را رد می‌کند و ریاضیات کلاسیک را صرفاً بازی با نام‌ها و علائمی بدون مدلول می‌داند. صورتگرایی[1] به تعبیر کواین، شکل نوظهور همان نامگرایی قرون وسطایی است. با این توضیحات باید روشن شده باشد که چرا ایدهٔ پاتنم ما را در مدخل یک تعبیر نامگرایانه از ریاضیات قرار می‌دهد. (۱) و (۲) دو تصویر کاملاً متفاوت و متمایز از یک واقعیت را در اختیار شما می‌گذارند. یکی تصویری شکل گرفته از مصداق‌ها و اشیاء مجرد و دیگری تصویری که هیچ شیء خاصی متعلق به آن نیست؛ تصویری که فقط از استلزامات منطقی و روابط میان محمول‌ها (و نه اشیاء مجرد) و نیز ضرورت یا امکان این استلزامات صحبت می‌کند. حال اگر همان دیدگاه نامگرایانهٔ قرون وسطایی نسبت به کلیات و محمول‌ها را اتخاذ کنیم، آنگاه یک فلسفهٔ کاملاً نامگرایانه متولد خواهد شد.

در ادامه، پاتنم مدعی می‌شود که این هم‌ارزی میان نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق وجهی را می‌توان به سایر گزاره‌ها نیز تعمیم داد. چیزی که اگرچه وی استدلال متقنی برای آن ذکر نمی‌کند، اما بعدها و با اثبات قضیهٔ تمامیت حسابی سولوی[2] در ۱۹۷٦، باورپذیر می‌شود:

قضیه ۲. $GL \vdash A$ اگر و تنها اگر که به ازای هر ترجمه مانند f، $PA \vdash f(A)$.

در این قضیه، GL همان منطق اثبات‌پذیریِ گزاره‌ای است که یک منطق وجهی محسوب می‌شود و بعد از گودل[3] و لُب[4] به این نام خوانده می‌شود. منظور از یک ترجمه[5]، تابعی مثل f است که به هر گزاره از GL، گزاره‌ای از PA را نسبت می‌دهد، به‌طوری که:

۱- $f(\bot)=\bot$؛

۲- تابع f حافظ ادات منطقی است، یعنی مثلاً $f(A \supset B) = (f(A) \supset f(B))$؛

۳- $f(\Box A) = Pr(\ulcorner A \urcorner)$، که در آن Pr همان محمول اثبات‌پذیری قضیهٔ گودل و $\ulcorner A \urcorner$ عدد گودلی A است.

در حقیقت، این قضیه بخشی از همان ایدهٔ فلسفی پاتنم را به زبانی ریاضی اثبات می‌کند. چون این قضیه نوعی هم‌ارزی بین GL و PA را نشان می‌دهد و از آن‌جایی که می‌توان PA را به بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل داد، پس این قضیه ابزاری ریاضی برای نشان دادن نوعی هم‌ارزی بین GL به‌عنوان یک منطق وجهی و بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها در اختیار ما می‌گذارد[6].
این مطالب، استدلالات پاتنم را به منظور رد صلاحیت نامزدهای مختلف برای قرار گرفتن در جایگاه

---

1) formalism 2) Solovay's arithmetical completeness theorem 3) Gödel 4) Löb

۵) در متون مربوط به این موضوع گاهی به‌جای واژهٔ «ترجمه» یا "translation" از واژه‌های "realization" یا "interpretation" استفاده می‌شود.

٦) برای مطالعهٔ برهان دقیق این قضیه به (Smorynski 1995) و برای مطالعهٔ برخی مباحث فلسفی پیرامون این قضیه، به (Verbrugge 2003) مراجعه کنید.

بنیاد ریاضیات، تبیین می‌کند. در گام بعدی او تلاش می‌کند تا دیدگاه ایجابی خود را ارائه دهد. پیش از این‌که به تشریح دیدگاه ایجابی او بپردازیم، باید موانعی را که بر سر راه تحقق ایدهٔ ریاضیات بدون بنیادها سبز می‌شود، برطرف کنیم.

۴. برهان و صدق

برهان و از آن مهم‌تر، *صدق*، اصلی‌ترین مفاهیمی هستند که در مقابل کوچکترین تغییر موضع در فلسفهٔ ریاضیات، مقاومت می‌کنند و اگر این تغییر موضع به‌قدر کافی محتاطانه نباشد، ممکن است دردسرهایی بیافریند. حال باید دید که آیا این دنیای جدید فلسفهٔ ریاضیات که پاتنم ما را به آن فراخوانده است تا چه حد در تقابل با تعابیر پذیرفته شده از این مفاهیم است. به نظر می‌رسد که دیدگاه او هیچ خللی به تعبیر معمول از برهان وارد نمی‌کند. تعبیر معمول از برهان یک گزاره، رشته‌ای متناهی از گزاره‌ها است که به آن گزاره ختم می‌شود و در آن هر گزاره، یا یکی از اصول است و یا با قواعد منطقی از گزاره‌های پیشین به‌دست آمده است. به نظر می‌رسد که با پذیرفتن هر یک از گزینه‌های موجود به‌عنوان بنیاد ریاضیات، خللی در این تعبیر ایجاد نمی‌شود و با هر انتخاب تنها صورت گزاره‌هایی که در این رشته‌ها قرار می‌گیرند، تغییر می‌کند. بنابراین با پذیرفتن ایدهٔ ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم نیز همچنان این تعبیر قابل قبول است؛ چرا که تنها نکتهٔ مهم در مورد برهان، تثبیت گزارهٔ مورد نظر است، حال از هر طریقی که ممکن باشد. البته اگر مفهوم برهان را در تقابل با صدق (یعنی مسألهٔ تمامیت[1]) بررسی کنیم، ممکن است مشکلاتی به‌وجود بیاید.

تحلیل مسألهٔ صدق به‌سادگی مسألهٔ برهان نیست به این دلیل که سازگار کردن ایدهٔ پاتنم با موجه‌ترین نظریهٔ صدقی که در اختیار داریم، یعنی نظریهٔ صدق تارسکی کار ساده‌ای نیست. بر اساس نظریهٔ صدق تارسکی، صدق گزاره‌ها با ارجاع به *جهانی* که این گزاره‌ها در توصیف آن جهان ذکر شده‌اند، تعیین می‌شود در حالی که با پذیرفتن ایدهٔ پاتنم عملاً ما هیچ جهانی از اشیاء ریاضی در اختیار نداریم تا با رجوع به آن، صدق و کذب گزاره‌های ریاضی را تعیین کنیم. مخالفان ایدهٔ پاتنم (مثلاً ضدواقع‌گرایان[2]، شهودگرایان[3] و همهٔ فیلسوفان دیگری که قانون طرد شق ثالث[4] را قبول ندارند) مدعی هستند که وقتی جهانی برای تحقیق در صدق و کذب گزاره‌های ریاضی در اختیار نداریم، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر عملاً *ارزش صدق*[5] خود را از دست می‌دهند و این مسأله‌ای فراتر از تصمیم‌ناپذیری است؛ چرا که مثلاً با پذیرش دیدگاه‌های واقع‌گرایانه[6] راجع به ریاضیات، ریاضی‌دانان معترف به وجود جهانی از اشیاء ریاضی‌اند که مستقل از معرفت ما وجود دارد و بنابراین حتی اگر ما نتوانیم بدانیم که فلان گزاره صادق است یا کاذب، باز هم این گزاره در آن جهان مستقل، یا متحقق است و یا نامتحقق و در نتیجه حتی اگر معرفتی نسبت به صدق یا کذب آن نداشته باشیم، ارزش

---

1) completeness 2) anti-realists 3) intuitionists 4) Law of Excluded Middle
5) truth value 6) realistic

صدق این گزاره هم‌چنان حفظ می‌شود. پاتنم اذعان می‌کند که اولاً این‌که ما نتوانیم ارزش صدق یک گزاره را درک کنیم به این معنا نیست که آن گزاره ارزش صدق ندارد و ثانیاً معتبر دانستن چنین استدلالی به این معنی است که «نوعی متافیزیک ایده‌آلیستی در پشت بوته‌ها[ی ذهنمان] مخفی شده است!» (Putnam 1967). به بیان دیگر، پاتنم از یک طرف، واقع‌گرایی در هستی‌شناسی[۱]، یعنی قول به وجود جهانی از هستی‌ها و اشیاء ریاضی (جهانی که مستقل از ما و معرفت ما نسبت به آن، وجود دارد) را با صراحت رد می‌کند و از طرف دیگر، خود را ملتزم به واقع‌گرایی در معناشناسی می‌کند. او بر این باور است که اگرچه هیچ جهانی از هستی‌ها و اشیاء ریاضیِ مستقل از ما وجود ندارد، گزاره‌های ریاضی معنادار هستند و می‌توان به نحو معناداری از صدق و کذب آن‌ها، مستقل از اذهان بشری، صحبت کرد[۲].

به عقیدهٔ پاتنم حتی با وجود قضایای گودل و اثبات وجود گزاره‌های مطلقاً تصمیم‌ناپذیر، عملاً ارزش صدق هیچ گزاره‌ای از دست نمی‌رود. در نظر او، ارزش صدق فرضیهٔ پیوستار به همان اندازه است که ارزش صدق ۴ = ۲ + ۲. وی به سؤال «اصلاً چه معنایی دارد که بگوییم فرضیهٔ پیوستار صادق است؟»، این چنین پاسخ می‌دهد: «معنایش این است که اگر S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد که نه متناهی است و نه نامتناهیِ شمارش‌پذیر، آنگاه S می‌تواند در تناظر یک‌به‌یک با بازهٔ [۰, ۱] قرار بگیرد». پاسخ وی آن‌چنان طبیعی است که گویی هم‌چنان به تصویر نظریهٔ مجموعه‌ای از ریاضیات پای‌بند است؛ اما در حقیقت چنین نیست.

باید اذعان کرد که اگرچه پاتنم از تصویر نظریهٔ مجموعه‌ها که وصف ریاضیات به‌مثابهٔ اشیاء است، دست می‌کشد، هم‌چنان خود را متعهد به واقع‌گرایی در معناشناسی می‌داند و همهٔ گزاره‌های ریاضی را دارای ارزش صدق می‌داند. این مسأله وقتی روشن‌تر می‌شود که توجه کنیم او در تثبیتِ ارزش صدق برای گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر ریاضیات، از قیاس این گزاره‌ها با گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر علوم طبیعی بهره می‌برد. او اظهار می‌کند که هیچ‌کس در این‌که گزارهٔ «تعداد ستاره‌های دوقلو بی‌نهایت است» دارای ارزش صدق است، شک نمی‌کند در حالی که «می‌توان جهان منطقاً ممکنی را توصیف کرد که در آن (۱) تعداد ستاره‌های دوقلو بی‌نهایت باشد، و (۲) هرگز نتوان این واقعیت را [...] کشف کرد» (Putnam 1967). پاتنم با ذکر این جملات مدعی می‌شود که هیچ دلیلی برای متمایز دانستن شرایط گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر ریاضیات نسبت به گزاره‌های مشابه در علوم طبیعی وجود ندارد و همین قیاس کافی است تا باور کنیم که او نمی‌خواهد از واقع‌گرایی معناشناسانه دست بکشد. در حقیقت او می‌خواهد معناشناسی واقع‌گرایانهٔ جدیدی از ریاضیات ارائه دهد که صرفاً به وجود اشیاء ریاضی و واقع‌گرایی هستی‌شناسانه وابسته نباشد. حال باید دید که چنین چیزی

---

1) ontology

۲) برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص تمایز واقع‌گرایی در هستی‌شناسی و واقع‌گرایی در معناشناسی به (Landry 1998) مراجعه کنید.

ممکن است یا خیر. شاید قضاوت در مورد امکان تحقق ایده‌های پاتنم، بعد از تشریح دیدگاه‌های ایجابی او ساده‌تر باشد. اما پیش از تشریح این دیدگاه‌ها، خالی از لطف نیست که به نکتهٔ ظریفی توجه کنیم: چنان‌که دیدیم، در ریاضیات بدون بنیادها خللی در مفهوم برهان ایجاد نمی‌شود. این مسأله از آن جهت اهمیت دارد که با یکی دانستن مفهوم برهان و صدق (و تعریف گزارهٔ صادق به‌مثابهٔ گزاره‌ای که برهانی دارد، همانند شهودگرایان)، عملاً از همهٔ دردسرهایی که برای اعادهٔ حیثیتِ صدق در ریاضیات بدون بنیادها، با آن‌ها مواجهیم رهایی خواهیم یافت. البته باید متذکر شد که با اعتقاد به وحدت صدق و برهان، عملاً علاوه بر واقع‌گرایی در هستی‌شناسی، از واقع‌گرایی در معناشناسی هم دست کشیده‌ایم.

۵. دیدگاه ایجابی

پاتنم برای ارائهٔ ایدهٔ ایجابی خود از مسألهٔ جدلی الطرفین‌ها [1] و پارادوکس‌های ریاضی آغاز می‌کند. وی مدعی است که اگرچه جدلی الطرفین‌ها در تقابل با مفهوم "مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها" قرار می‌گیرند، اما هیچ ضربه‌ای به مفهوم "مجموعهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح" نمی‌زنند. به‌علاوه از نظر او، این‌که بگوییم مفهوم مجموعه در بعضی عبارات (مثل "مجموعهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح") روشن است و در بعضی دیگر (مثل "مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها") مبهم، توجیه مناسبی برای این وضعیت نیست؛ چرا که ما عملاً معنای برخی عبارات دربارهٔ همهٔ مجموعه‌ها را، مثل اصل مجموعهٔ توانی یا اصل جفت‌سازی [2] که در آن‌ها از هر مجموعه‌ای صحبت می‌شود، می‌فهمیم و همین می‌تواند ما را به فهمیدن مفهوم "همهٔ مجموعه‌ها" یا دست‌کم نیل به شهود نسبی از آن امیدوار کند. در مرحلهٔ بعد، پاتنم سعی می‌کند تا با تکیه بر ثنویت شیء ــ وجه، در صدد ایضاح مفهوم مجموعه برآید. در گذشته، برخی از ریاضی‌دانان و فلاسفهٔ ریاضی سعی کرده بودند تا از مفهوم مجموعه برای روشن کردن معنای امکان و ضرورت ریاضی استفاده کنند؛ مثلاً کارناپ در *معنا و ضرورت* [3] سعی کرد تا با یکی گرفتن مفهوم مدل و جهان ممکن، نظام S5 از منطق وجهی را توجیه کند. حال پاتنم تلاش می‌کند تا عکس این مسیر را بپیماید و با خالی از ابهام فرض کردن مفاهیم ضرورت و امکان، تعبیری روشن از مفهوم مجموعه ارائه دهد. او مدعی است که در بعضی موارد، مفهوم مجموعه روشن‌تر از معنای ضرورت و امکان است حال آن‌که در موارد دیگر ضرورت و امکان از وضوح بیشتری نسبت به مفهوم مجموعه برخوردارند و درست به همین دلیل است که از منظر وصف‌های هم‌ارز امکانات بیشتری برای فهم امور در اختیار داریم و در حقیقت جمع همهٔ اطلاعاتی که از تصویرهای مختلف به‌دست می‌آوریم، اعتبار فهم ما را تعالی می‌بخشد. پاتنم تلاش می‌کند تا جملات نظریهٔ مجموعه‌ها را در زبان منطق وجهی به جملاتی تعبیر کند که *ضرورتاً آن‌طور می‌بودند اگر مدلی استاندارد برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود می‌داشت.*

---

1) antinomies 2) Axiom of Pairing 3) Meaning and Necessity

این توضیح لازم به نظر می‌رسد که در این‌جا بدون کم شدن از کلیت مسأله، صرفاً دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ـ فرنکل[1] یا همان ZF بحث خواهیم کرد. اکنون باید کمی حوصله کنیم تا مقدمات فنی شرح دیدگاه پاتنم فراهم شود. در نظریهٔ مجموعه‌ها مفهومی تعریف شده است به‌نام رتبهٔ[2] مجموعه. اگر با استفاده از استقرای ترامتناهی[3] تعریف کنیم که

$$V_\alpha = \varnothing$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \qquad \text{اگر } \alpha \text{ یک عدد ترتیبی حدی باشد}$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

آنگاه قضیهٔ زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه ۳. به ازای هر مجموعه مانند x، عددی ترتیبی مانند α وجود دارد به‌طوری که x عضوی از V_α است[4].

قضیهٔ بالا خوش‌تعریفی مفهوم رتبه را تضمین می‌کند. پاتنم می‌خواهد با تکیه بر مفهوم رتبه، مدل‌هایی انضمامی[5] برای ZF ارائه دهد. به همین منظور، هر مدل را به‌شکل یک گراف طراحی می‌کند. در یک گراف، رأس‌ها به‌مثابهٔ مجموعه‌ها تعبیر می‌شوند البته با این فرض که محدودیت فضایی برای تعداد رأس‌ها به اندازهٔ اعداد اصلی[6] بزرگتر از عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی هم، وجود ندارد. در این گراف، یال‌های جهتدار بین رأس‌ها، نمایندهٔ رابطهٔ تعلق بین مجموعه‌هایی است که رأس‌های گراف، جانشین آن‌ها شده‌اند. چنین مدلی *مدل انضمامی* یا *مدل انضمامی استاندارد* نامیده می‌شود. به یک مدل وقتی استاندارد می‌گوییم که (۱) در گراف آن هیچ دنباله‌ای نزولی و نامتناهی از یال‌های جهتدار وجود نداشته باشد و (۲) توسیع مدل با افزایش تعداد مجموعه‌ها و بدون افزایش در حداکثر رتبهٔ آن‌ها ممکن نباشد. اکنون باید سعی کنیم که گزاره‌های نظریهٔ مجموعه‌ها را در این مدل تعبیر کنیم. یک گزاره را *گزاره‌ای با رتبهٔ کراندار* یا به‌طور خلاصه *گزارهٔ کراندار* می‌نامیم اگر این گزاره تنها از مجموعه‌هایی صحبت کند که رتبهٔ آن‌ها از عدد ترتیبی معینی بیشتر نباشد. این عدد ترتیبی را می‌توان تلویحاً کران بالایی برای این گزاره نامید. حالا اگر (بدون اثبات) بپذیریم که می‌توان گزارهٔ «گراف G مدلی استاندارد برای ZF است» را با نمادهای کاملاً نامگرایانه (به‌جز "$\square$" که آن هم چندان دردسرساز نخواهد بود) توصیف کرد، در این صورت مانع دیگری بر سر راه تعبیر جملات نظریهٔ مجموعه‌ها در مدل‌های انضمامی نیست. اگر S گزاره‌ای با رتبهٔ کراندار باشد و بتوانیم کران بالایی برای آن پیدا کنیم که نسبت به مدل‌های استاندارد ZF ناوردا باشد، آنگاه S به‌راحتی قابل ترجمه به زبان منطق وجهی است. ترجمهٔ S در زبان منطق وجهی چنین خواهد بود: «اگر G

---

1) Zermelo-Fraenkel 2) rank 3) transfinite induction

۴) برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه، به صفحات ۷۱ و ۷۲ از (Jech 1997) مراجعه کنید.

5) concrete 6) cardinal

یک مدل استاندارد انضمامی برای ZF و شامل رتبهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه S ضرورتاً در G برقرار است». بنابراین، تنها مشکل ما ترجمهٔ گزاره‌های با رتبهٔ بی‌کران یا به‌طور خلاصه گزاره‌های بی‌کران، به زبان منطق وجهی است. برای تشریح روشی که در ترجمهٔ این جملات به‌کار می‌بریم، به بازخوانی مثالی که خود پاتنم ارائه کرده است، اکتفا می‌کنیم. گزارهٔ $\forall x\, \exists y\, \forall z\, Mxyz$ را در نظر بگیرید که در آن M فاقد سور است. ترجمهٔ این گزاره به زبان منطق وجهی و با استفاده از مدل‌های انضمامی چنین است:

«اگر G یک مدل استاندارد انضمامی برای ZF و x نقطه‌ای دلخواه از آن باشد، آنگاه ممکن است که ابرگراف G' برای G و نقطه‌ای مانند y در درون آن موجود باشد به‌طوری که G' یک مدل استاندارد انضمامی برای ZF بشود. افزون بر این، اگر G'' ابرگراف G' و یک مدل استاندارد انضمامی برای ZF باشد، آنگاه به‌ازای هر نقطه‌ای از آن مانند z، $Mxyz$ *ضرورتاً* در G'' برقرار است».

اگرچه این ترجمه چندان ساده نیست، به‌سادگی قابل تعمیم به همهٔ گزاره‌های بی‌کران است. بنابراین، با این ترجمه، مقصود پاتنم برآورده شده است. از آن‌جایی که هیچ مدل انضمامی استاندارد ماکسیمالی وجود ندارد و هر مدلی از این نوع را می‌توان توسیع داد، ترجمهٔ وی شهود مطلوبی از گزاره‌هایی راجع به "همهٔ مجموعه‌ها" در اختیار ما می‌گذارد. به بیان دیگر، با ترجمهٔ پاتنم دیگر نیازی نیست که به مجموعه‌ها به‌عنوان اشیایی در یک جهان نگاه کنیم تا بتوانیم گزاره‌هایی در مورد "همهٔ مجموعه‌ها" را —دست‌کم به‌طور شهودی— ادراک کنیم. اگر سؤال کنید که پارادوکس راسل در این‌جا چگونه تعبیر می‌شود، در جواب باید گفت که معنای پارادوکس راسل در تعبیر پاتنم برای مدل‌های انضمامی، این است که هیچ مدل استاندارد انضمامی‌ای برای مفهوم همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد و هر مدلی قابل توسیع به مدلی با مجموعه‌های بیشتر است.

با تعبیر پاتنم، گزاره‌هایی که در مورد مجموعه‌ها صحبت می‌کنند به گزاره‌هایی ترجمه شده‌اند که از مدل‌های انضمامی استاندارد صحبت می‌کنند. حال از آن‌جایی که می‌توان این مدل‌های انضمامی ممکن و یا حتی وسیع‌تر از آن، جهان‌های ممکن، را به‌صورت اشیاء تعبیر نکرد، در حقیقت گزاره‌های اولیهٔ ما به گزاره‌هایی ترجمه می‌شوند که در آن‌ها صحبت از هیچ شیئی به میان نیامده است. در این‌جا پاتنم با تکیه بر ثنویت شیء ــ وجه در ریاضیات، از منظر وجه به اشیاء نگاه کرده است و عادت پیشینیان در نگاه کردن از منظر شیء به وجه را قلب کرده است. به بیان دیگر، بدون دست کشیدن از واقع‌گرایی معناشناسانه، از اشیاء دست کشیده است. حال باید دید که در عوض پرداخت این بهای سنگین، چه به‌دست می‌آید و چه معضلاتی در فلسفهٔ ریاضی حل می‌شوند.

٦ . مؤخره

در بخش پایانی این مقاله، به بررسی چگونگی مواجهٔ ایدهٔ *ریاضیات بدون بنیادهای* پاتنم با برخی مسائل مورد مطالعهٔ دیگر فلاسفهٔ ریاضی خواهیم پرداخت. افزون بر این، به‌اختصار تأثیرات

دیدگاه او بر تحقیقات و آرای برخی فلاسفهٔ متأخر را شرح خواهیم داد.

شاید بتوان گفت که یکی از انگیزه‌های اصلی پاتنم برای نگارش مقالهٔ *ریاضیات بدون بنیادها* پاسخ به سؤالی بوده است که پال بناسراف[۱] در سال ۱۹٦۵ و در مقالهٔ *آن‌چه اعداد نمی‌توانند باشند* (Benacerraf 1965)، طرح کرده بود. در آن مقاله، بناسراف ضمن امتناع از پذیرش تلقی نامگرایانه نسبت به اعداد، سؤال می‌کند که اگر تنها ویژگی اعداد، ترتیب آن‌ها در یک ω ــ دنبالهٔ مشخص است، آنگاه چگونه ممکن است که آن‌ها شیء باشند؟ پاتنم برای پاسخ به این سؤال از همان تعبیر وصف‌های هم‌ارز سود می‌جوید و به تبعیت از کواین، اظهار می‌کند که «اعداد شیء هستند به این معنی که عمل تسویر روی آن‌ها انجام می‌شود». پاتنم معتقد است که اعداد وجود دارند، اما وجود را با تکیه بر همان دیدگاه ثنویت شیء ــ وجه تعبیر می‌کند و می‌گوید که معنای وجود اعداد چیزی جز این نیست که اولاً ω ــ دنباله‌ها ممکن هستند و ثانیاً حقایقی *ضروری* به‌شکل «اگر α یک ω ــ دنباله باشد، آنگاه...» در مورد آن‌ها وجود دارد. پاتنم با در نظر گرفتن همین تعبیر و پافشاری بر ثنویت شیء ــ وجه، دو گزارهٔ «مجموعه‌ای از اعداد وجود دارد که در فلان شرط صدق می‌کنند» و «انتخاب اعدادی که شرط فلان را ارضا کنند، ممکن است» را هم‌معنی می‌داند.

نکتهٔ دومی که پاتنم در معنای وجود اعداد از آن یاد می‌کند (یعنی این‌که حقایقی ضروری به‌شکل «اگر α یک ω ــ دنباله باشد، آنگاه...» وجود دارد)، در حقیقت بنیان همان دیدگاهی است که به دیدگاه *اگر ــ آنگاهی*[۲] معروف است. در حقیقت پاتنم برای هم‌ارز کردن وجود اشیاء با وجوه ضرورت یا امکان، چه در تعبیری که از اعداد دارد و چه در تعبیر گزاره‌های نظریهٔ مجموعه‌ها به زبان منطق وجهی (چنان که دیدیم)، از دیدگاه اگر ــ آنگاهی بهره می‌برد. وی از یک سو با دیدگاه اگر ــ آنگاهی، اصالت اشیاء را سلب می‌کند و از سوی دیگر با تکیه بر ثنویت شیء ــ وجه، مُصر است که شیئیت[۳] یا به تعبیر دقیق‌تر عینیت را حفظ کند. او باور دارد که «شیئیت یا عینیت بدون شیء» قابل تحقق است (Putnam 2004).

چند سال پس از ارائهٔ مقالهٔ *ریاضیات بدون بنیادها*، بناسراف در ۲۷ دسامبر سال ۱۹۷۳ و در همایش به‌نام *صدق ریاضی* که از طرف انجمن فلسفی آمریکا[۴] و انجمن منطق نمادی[5] برگزار می‌شد، سخنرانی چالش‌برانگیزی کرد. او در آن سخنرانی[٦] سؤال مهم دیگری، این‌بار در خصوص صدق و معرفت ریاضی، طرح کرد. با توجه به اهمیت این سؤال، خالی از لطف نیست که نگاهی به پاسخ پروژهٔ ریاضیات بدون بنیادها در قبال این سؤال، بیاندازیم. پس اجازه دهید تا ببینیم که سؤال بناسراف چه بوده است:

بسیاری از فلاسفهٔ ریاضیات معتقدند که معناشناسی گزاره‌های ریاضی باید همگن با معناشناسی سایر گزاره‌ها باشد. از سوی دیگر، اکثر این افراد بر این باورند که تعبیر ما از صدق ریاضی باید

1) Paul Benacerraf 2) If-Thenism 3) objectivity 4) American Philosophical Association
5) Association for Symbolic Logic

٦) ناگفته نماند که طرح ابتدایی این سؤال در سخنرانی‌های گذشتهٔ بناسراف در دههٔ ۱۹٦۰ انجام شده بود.

توجیه‌کنندهٔ چگونگی معرفت ما از گزاره‌های ریاضی نیز باشد. بناسراف در سخنرانی مذکور مدعی شد که این دو تمایل قابل جمع در کنار هم نیستند و هرقدر که به ارضای یکی از آن دو نزدیک شویم، امکان ارضای دیگری کمتر خواهد شد. غایت کلام او این است که بهترین نظریهٔ صدقی که در اختیار داریم یعنی نظریهٔ صدق تارسکی[1]، با بهترین نظریهٔ معرفتی که در اختیار داریم یعنی نظریهٔ علّی معرفت[2] (Goldman 1967) سازگار نیست؛ حال آن‌که اگر بخواهیم صدق اشیاء ریاضی همگن با صدق سایر اشیاء و چگونگی معرفت به گزاره‌های ریاضی همگن با چگونگی معرفت به سایر گزاره‌ها تعبیر شود، چاره‌ای جز پذیرفتن این دو نظریه نداریم. نظریهٔ صدق تارسکی شرایط صدق گزاره‌های ریاضی را برحسب تحقق یک امر در میان اشیایی به‌دست می‌دهد که ماهیت آن اشیاء، آن‌ها را فراتر از دسترس متداول‌ترین ابزارهای کسب معرفت ما (یعنی حواس) می‌برد و این چیزی است که با نظریهٔ علی معرفت در تضاد است. دقیقاً به همین دلیل تعابیر کلاسیک مدل‌ها از اعداد و مجموعه‌ها (که در حقیقت بقایای افلاطون‌گرایی است) توجیه کنندهٔ چگونگی معرفت ما از اشیاء ریاضی نیستند. خود گلدمن که مبدع نظریهٔ علّی معرفت است هم تصریح دارد که آنچه می‌گوید ربطی به ریاضیات ندارد و در واقع به‌طور ضمنی معترف است که اگر نظریهٔ او قابل دفاع باشد، معرفت ریاضی با سایر معارف بشری همگن نیست.

روشن است که برای حل این معضل و به حصر عقلی، تنها سه راه پیش رو داریم: اصلاح در نظریه‌ی صدق تارسکی، اصلاح در نظریهٔ علّی معرفت و یا اصلاح در هر دوی آن‌ها. برخی از فلاسفهٔ ریاضی حاضر به دست کشیدن از نظریهٔ صدق کلاسیک نشده‌اند و به‌ناچار نظریهٔ معرفت‌شناسی خود را تغییر داده‌اند. نظریات گودل نمودار کاملی از ذبح نظریهٔ علّی معرفت به پای افلاطون‌گرایی است. گودل به هیچ وجه از این‌که اعداد شیء هستند عدول نمی‌کند و در عوض، قوهٔ *شهود گودلی* را عامل و علت معرفت به اشیاء ریاضی (اشیایی که در دسترس حواس نیستند) می‌داند. شهودی که ابهام در آن، به‌قدری است که امیدی به حل مسألهٔ بناسراف از طریق آن نداشته باشیم. راه دیگری که برای حل مسأله‌ی بناسراف پیش رو داریم، تغییر در نظریهٔ صدق مورد پذیرش خود است. برخی فلاسفهٔ ریاضیات به تعریف صدق بر اساس ملاحظات نحوشناختی[3] روی آورده‌اند و دیدگاه‌هایی ارائه کرده‌اند که بناسراف آن‌ها را دیدگاه‌های ترکیبی[4] می‌نامد. در این دیدگاه‌ها، تعابیر صدق با برخی معیارهای نحوشناختی که عمدتاً ریشه در تعبیر نحوی برهان دارند در هم آمیخته می‌شود. این توضیح لازم به نظر می‌رسد که شهودگرایان نیز با تعبیر صدق به‌مثابهٔ برهان داشتن، عملاً با مسألهٔ بناسراف موجه نیستند، با این تفاوت که در منظر آنان اساساً زبان امری ثانوی است (اردشیر ۱۳۷۶) و بنابراین نمی‌توان گفت که دیدگاه آن‌ها در خصوص صدق، آمیخته‌ای از نحو را به همراه خود دارد.

---

1) Tarski's Theory of Truth 2) Causal Theory of Knowledge 3) syntactic 4) combinatorial

حال ببینیم که دیدگاه ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم، چه جوابی برای مسألهٔ بناسراف دارد. بناسراف در مقالهٔ *صدق ریاضی* می‌گوید که راه دیگری هم در مواجهه با این شکاف معرفت‌شناختی[1] وجود دارد. این راه، تعریف معناشناسی جدیدی برای گزاره‌های ریاضی است به‌گونه‌ای که این معناشناسی جدید مبتنی بر ملاحظات معرفت‌شناختی تعریف شده باشد. اگرچه بناسراف تصریح می‌کند که بسیار بعید است کسی تاکنون عملاً پای در این راه گذاشته باشد اما در (پانوشت) آن مقاله چنین آورده است: «گاهی گمان می‌کنم که این [یعنی تعریف معناشناسی جدید مبتنی بر ملاحظات معرفت‌شناختی]، همان کاری است که پاتنم در مقالهٔ بحث برانگیز *ریاضیات بدون بنیادها* می‌خواهد بکند» (Benacerraf 1973). تعبیر تردیدآمیز بناسراف در خصوص کار پاتنم، چندان هم بیراه به نظر نمی‌رسد. پاتنم از یک سو با ثنویت شیء ــ وجه بر آرمان‌های واقع‌گرایانهٔ خود پافشاری می‌کند و از سوی دیگر، با ارائهٔ معناشناسی جدید از گزاره‌های ریاضی مبتنی بر مدل‌های انضمامی استاندارد و دیدگاه اگر ـ آنگاهی، سعی در حل مسألهٔ بناسراف و گذشتن از این شکاف معرفت‌شناختی دارد.

در انتها مناسب است که با نگاهی اجمالی به بررسی تأثیر ریاضیات بدون بنیادهای پاتنم بر متأخرین بپردازیم. برجس[2] و روزن[3] در کتاب مشهور خود (*موضوعی بلا شیء*)، کار پاتنم در *ریاضیات بدون بنیادها* را کاری کاملاً نامگرایانه تعبیر می‌کنند. نامگرایی برنامه‌ای در ریاضیات و بیشتر در فلسفهٔ ریاضیات است که با تشکیک در وجود هویات مجرد آغاز می‌شود و درصدد بنای ریاضیاتی بر می‌آید که از هرگونه تعهد وجودشناسانه نسبت به این هویات اجتناب کند (پارسونز ۱۳۷۸). برجس و روزن اگرچه تأکید می‌کنند که کار پاتنم کاملاً نامگرایانه است، معتقدند که «پاتنم در مقالهٔ خود، نظریهٔ بازساختی‌اش را نامگرایانه نمی‌داند؛ چرا که او نامگرایی را شامل نفی وجه [ضرورت و امکان] درست به‌شکل نفی شیء مجرد، می‌داند» (Burgess & Rosen 1997;201). حال آن‌که به عقیدهٔ آن‌ها، تعبیر ادعاهای وجودی در مورد اعداد به‌صورت ادعاهایی دربارهٔ وجود ممکن، یعنی همان کاری که پاتنم کرده است، تعبیر نامگرایانه‌ای از حساب براساس منطق وجهی است. چیهارا[4] همین کار را در مورد آنالیز محمولی کرده و به موفقیت‌هایی هم دست یافته است. نمونهٔ دیگری از استفادهٔ این ایده برای طرح تعابیر نامگرایانه از ریاضیات، در کارهای هلمن[5] دیده می‌شود[6]. خلاصه این که نمود تأثیرات عمدهٔ کار پاتنم بر فلاسفهٔ ریاضی را باید در میان نامگرایان جست.

---

1) epistemological gap 2) John P. Burgess 3) Gideon Rosen 4) Charles S. Chihara 5) Geoffrey Hellman

۶) فصل دوم از (Burgess & Rosen 1997) به شرح دیدگاه‌های چیهارا و هلمن، با تکیهٔ بیشتر بر دو کتاب (Chihara 1990) و (Hellman 1994) اختصاص دارد.

قدردانی

نسخهٔ ابتدایی این مقاله در روز ۷ اسفند ۱۳۸۴ در *سمینار دو روزهٔ فلسفهٔ ریاضی* در *مؤسسهٔ پژوهشی حکمت و فلسفهٔ ایران* ارائه شد. مقالهٔ حاضر تکمیل‌شدهٔ همان نسخهٔ اولیه با بهره‌مندی از تذکرات داور(ان) محترم مجلهٔ *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی* و نیز با بهره‌مندی از گفت‌وگوهایی است که با دکتر محمد اردشیر، دکتر ضیاء موحد، بهرام اسدیان و کاوه قاسملو داشته‌ام. از همهٔ ایشان سپاسگزارم.

مراجع

[۱] اردشیر، محمد، ”شهودگرایی براؤری“، *نشر ریاضی*، سال ۹، شمارهٔ ۱ (۱۳۷٦).

[۲] اردشیر، محمد، *منطق ریاضی*، انتشارات هرمس، ۱۳۸۳.

[۳] پارسونز، چارلز، ”موضوعی بلا شیء“ [نقدی بر (Burgess & Rosen 1997)]، ترجمهٔ محمد اردشیر، *نشر ریاضی*، سال ۱۱، شماره ۱ (۱۳۷۸).

[۴] کواین، ویلرد ون اورمن، ”در باب آنچه هست“، ترجمهٔ منوچهر بدیعی، مجله *ارغنون*، شماره‌های ۷ و ۸، چاپ دوم، صص ۲۴۹ – ۲۳۱ (۱۳۸٦).

[۵] لاجوردی، کاوه و اردشیر، محمد، ”مناظره‌ای دربارهٔ فلسفهٔ براوئر“، *نشر ریاضی*، سال ۱۷، شماره ۲، صص ٦۰ – ۵۷ (۱۳۸۸).

[6] Benacerraf, Paul, “What Numbers Could Not Be”, *The Philosophical Review*, **74** (1965), No. 1, 47–73.

[7] Benacerraf, Paul, “Mathematical Truth”, *Journal of Philosophy*, **70** (1973), No. 19, 661–679.

[8] Burgess, John P. and Rosen, Gideon, *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford University Press, 1997.

[9] Chihara, Charles S., *Constructability and Mathematical Existence*, Oxford University Press, 1990.

[10] Goldman, Alvin, “A Causal Theory of Knowing”, *The Journal of Philosophy*, **64** (1967), No. 12, 357–372.

[11] Hart, W. D., “Skolem Redux”, *Notre Dame Journal of Philosophy*, **41** (2000), No. 4, 399–414.

[12] Hellman, Geoffrey, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford University Press, 1994.

[13] Jech, Thomas, *Set Theory*, 2nd Ed, Springer–Verlag, 1997.

[14] Landry, Elaine, "Semantic Realism: Why Mathematicians Mean What They Say?", *Proceedings of The Twentieth Word Congress of Philosophy*, Boston, 1998, web: http://www.bu.edu/wcp/MainMath.htm/

[15] Putnam, Hilary, "Mathematics without Foundations", *Journal of Philosophy*, **64** (1967), No. 1, 5–22.

[16] Putnam, Hilary, "Objectivity without Objects", pp. 52–70 in *Ethics without Ontology*, Harvard University Press, 2004.

[17] Smorynski, Craig, *Self-reference and Modal Logic*, New York, Springer–Verlag, 1995.

[18] Verbrugge, Rineke, "Provability Logic", Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2003, web: http://www.illc.uva.nl/~seop/entries/logic-provability/

محمدصالح زارع پور zarepour@modares.ac.ir و ms_zarepour@yahoo.com
دانشگاه تربیت مدرس
دانشکدهٔ علوم انسانی، گروه فلسفه

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۲۱ تا ۲۹

فزون از حد، ریاضیدان‌های «م. و. زِر»* وجود دارند**

ملوین هنریکسن

ترجمه: احسان ممتحن

من همواره در آموختن کارهای ریاضیدانان دیگر کند بوده‌ام و در همهٔ عمر از نقدِ کسانی که شهرتی جدی به‌سبب پژوهش‌هایشان کسب نموده‌اند، اکراه داشته‌ام. در اواسط دهه‌ی ٦٠ [میلادی]، همکار سابقم هولبروک مکنایل [1] که پیش از آن‌که نخستین مدیر اجرایی انجمن ریاضی آمریکا شود برای کمیسیون انرژی اتمی کار می‌کرد، اغلب خاطرنشان می‌ساخت که برخلاف دانشمندان تجربی که حامی یکدیگر در ارزش‌دهی به طرح‌های پژوهشی هم هستند، ریاضی‌دانان به‌ندرت از ارزان فروختن یکدیگر ابا می‌کنند. من به شکوهٔ وی اعتنای چندانی نمی‌کردم، زیرا در آن زمان بیشترین اعتبار پژوهشی در آمریکا سرمایه‌گذاری شده بود و به نظر می‌رسید پول کافی برای همه وجود داشت مگر عدهٔ کمی زیاده‌طلب. شاید مقداری خُبث طینت وجود داشت، اما نه در مقیاسی که آسیب جدی ایجاد کند.

حمایت‌های دولت فدرال از پژوهش‌های ریاضی در دانشگاه‌ها پس از جنگ دوم جهانی، نتیجهٔ کمکی بود که ریاضیدانان و دانشمندان در پیروزی متفقین کردند. بورس‌های پژوهشی پیش از آن‌که در اختیار نهادها گذارده شود، به افراد اختصاص می‌یافت تا وحشت از کنترل آموزش توسط دولت فدرال را تخفیف دهد. علت این بود که برخلاف امروز، در سال‌های پس از جنگ، دغدغه‌های زیادی دربارهٔ رشد بی‌سابقهٔ دولت فدرال وجود داشت. هرچند وحشت آمریکاییان از

*) توضیح در پاورقی صفحهٔ ۱۸

) Henriksen, Melvin, “There are too many B.A.D. mathematicians”, *The Mathematical Intelligencer*, **15(1993), No 1, 6–9.

1) Holbrook MacNeille

سیطرهٔ دولت، تحت‌الشعاع جنگ سرد و جنون ملی شکست‌دادنِ روس‌ها در پاگذاشتن بر کرهٔ ماه قرار گرفته بود.

تعداد بورس‌های اعطایی به افراد به‌سرعت رشد یافت. مدیریت دانشگاه‌ها شکایت از آن داشتند که تدارک آزمایشگاه و دفتر کار برای میهمانان پژوهشی و (یا) جانشین‌سازی اعضای هیئت علمی ثابت که زمان فرصت‌های مطالعاتی‌شان فرا رسیده، هزینه‌های غیرمستقیمی را بر دانشگاه تحمیل می‌کند. به‌زودی «هزینه‌های عمومی» به این بورس‌های پژوهشی اضافه شد. در آغاز، به‌میزان کم، اما آرام آرام مثل دماغ شتر وارد شدند و تمامی خیمه را پر کردند. هزینهٔ عمومی مربوط به این بورس‌های پژوهشی تبدیل به بخش مهمی از بودجهٔ دانشگاه‌ها شد و کارمندانی استخدام شدند تا آن‌ها را برای اعضای هیأت علمی فراهم کنند و پژوهشی که پول حمایتی جذب می‌کرد، با ارزش‌تر تلقی می‌شد. عشق به جیفهٔ دنیا با کمی جنگ و دعوا، بر وحشت موجود از استیلای دولت فدرال یا دیگر مؤسسات اعطای بورس بر آموزش و پژوهش، چیرگی یافت. پول از در و دیوار می‌ریخت و کسی گمان نمی‌برد که مبدل ساختن دانشمندان پژوهشگر به مشتی اعتبارساز مساوی است با خلق کردن یک هیولای فرنگنشتاین.

جامعهٔ ریاضی، مشتاقانه قدردان این رفاه و مُکنت جدید بود. با این وجود، در بسیاری از مجلات صفحه بهایی برای چاپ مقالات طلب می‌شد که مقداری از هزینهٔ چاپ را به جیب مراکز اعطای بورس برگرداند. آنانی که بورس پژوهشی نداشتند مجبور بودند صفحه بهای چاپ مقاله‌شان را از مؤسسهٔ مطبوعشان گدایی کنند یا جیره‌بگیر بیت المال ریاضی شوند. برنامهٔ تحصیلات تکمیلی موجود توسعه یافت و برنامه‌های تکمیلی جدیدی با تخصیص اعتبار کمک هزینهٔ تحصیلی از جانب دولت مرکزی، ایجاد شدند. تعداد دکتراهای اعطا شده در حوزهٔ علوم ریاضی در ایالات متحدهٔ آمریکا و کانادا از ۳۰۰تا در ٦٠ ــ ۱۹۵۹ به بیش از ۱۲۰۰تا در ٦٨ ــ ١٩٦٧ افزایش یافت و انتظار می‌رفت که تا سال ۱۹۷۵ به دو برابر این تعداد، افزایش یابد (در واقع اوجِ این میزان، اندکی بیش از ۱۵۰۰ تا بود). این گونه بود که مؤسسات مالی ــ دولتی حامیِ ریاضی‌کاران، تأثیر هزینه‌های کمرشکن را احساس کردند. پس از گذشت بیش از یک دهه مُکنت و ثروت، عشق جماعت به علم و فناوری پایان گرفت، شاید به‌خاطر آن‌که ما اول از همه پا به کرهٔ ماه گذاشتیم و به احتمال قوی‌تر، به این دلیل که صورت حساب جنگ ویتنام هنوز در راه بود.

۱. نسل گمشده از ریاضیدانان

در سال ۱۹۷۰، توهم تمام‌نشدنی بودنِ نیاز به ریاضیدانان تا آن‌جا که به مالیات دهندگان مربوط بود، از میان رفت و بخش‌های تحصیلات تکمیلی پر از دانشجویان توانا بودند که قصد اخذ مدرک دکترا و رقابت با یکدیگر برای کسب چند جای خالی جهت استخدام داشتند: پست‌های خالیِ کسانی که توسط نهادهای علمی و صنعتی به‌دلیل کسر بودجه اخراج شده بودند. بورس‌های علمی نتوانستند پا به پای رشد تعداد ریاضیدانان مستعد و مشتاقی که برای پژوهش تربیت شده

بودند، افزایش یابند. دانشگاه‌ها غبطهٔ روزهایی را می‌خوردند که به‌دلیل کمک‌های مالی مداومِ دولت فدرال رشد می‌یافتند. دیگر وابستگی به پول دولت جزو گناهانی شده بود که مدیریت دانشگاه‌ها نمی‌بایست مرتکب آن می‌شدند. از پست استادی تمام وقت که زمانی خودبه‌خود به افراد توانا و سخت‌کوش اعطا می‌شد، خبری نبود مگر در مؤسسه‌های بسیار سطح بالا. کرسی استادی به کیمیا تبدیل شده بود. مواجهه با اعضای هیئت علمی که بیش از نیمی از آنان پست تمام وقت داشتند، رؤسای دانشکده‌ها و دانشگاه‌ها را بر آن داشت که دکتراهای تازه‌کار را استخدام کنند و از تعداد پست‌هایی که احتمال تبدیل شدن به یک کرسی استادی تمام وقت داشت، بکاهند. در نیمهٔ اول دههٔ ۷۰، تعداد قابل توجهی از ریاضیدانان قابلْ حرفهٔ خود را برای یافتن موقعیت‌های متفاوت اما نه لزوماً پرمنفعت‌تر رها کردند. سر و صداها که در اواسط دههٔ مذکور فرو نشست، بیشتر دکترهای تازه‌کار در دانشکده‌هایی که صرفاً به تربیت دانشجوی کارشناسی اختصاص داشتند، صاحب شغل شدند بدون آن‌که کسی قبلاً نام آن‌ها را شنیده باشد.

غالب این ریاضیدانان جوان، لبریز از آرمان‌های استادان راهنمایشان و سرشار از اشتیاق در حوزهٔ پژوهشی مربوط به رسالهٔ دکتری‌شان، می‌خواستند همچنان فعّال باقی بمانند. اما در رویارویی با سنگینی بار ساعات تدریس زیاد، مسئولیت کارهای اجرایی، تشویق اندک یا حتی عدم تشویق همکاران پیشکسوت‌تر خود (که تلقی‌شان از پژوهش اغلب بر اساس عدم استخدام دائمشان توسط یک گروه ریاضی پژوهش ــ بنیاد، شکل گرفته بود)، ظرف یکی دو سال آرمان‌هایشان را رها کردند. کسادی و بی‌رونقی نامنتظرهٔ استادان راهنمای سابق این دکترهای جوان را گرفتار مرهم نهادن بر زخم‌های خودشان یا تیمارداری همکاران جوان‌ترشان در گروه کرده بود. تا آن‌جا که به موقعیت‌های پژوهشی مربوط می‌شد، بیشتر Ph.D. هایی که در دههٔ ٦۰ تربیت شدند، وا دادند. بنا به گفتهٔ ای. ت. بل[1]، پونسله[2] هندسهٔ تصویری را در زندان بسط و رامانوجان[3] کارهای بزرگی را در عزلت انجام داد، پس برای این بی‌پناهان جوان نیز ممکن بود که همچنان در مسیرِ پژوهش پویا باقی بمانند. در واقع، تعدادی از آن‌ها نیز پویایی‌شان را حفظ کردند اما اکثر آن‌ها با وجود نیرو و هزینه‌ای که صرف تربیت‌شان شده بود، به نسلی گمشده در حوزهٔ پژوهش تبدیل شد.

بورس‌های پژوهشی در ایالات متحده، جهت ازدیاد حقوق اعضای هیأت علمی دانشگاه‌ها، تا ۲.۹ برابر افزایش یافتند (هرچند به نظر می‌رسید همهٔ فعالیت‌های پژوهشی در ماه‌های تابستان انجام می‌شود) و آن هم برای جلب هزینه‌های عمومی به خزانهٔ دانشگاه بود تا ابزاری برای تشویق علمی محققان جوان یا تشویق پژوهش در بیرون از دایرهٔ تنگ تعداد محدودی مرکز پژوهشی. رقابت برای به‌دست آوردن حمایت مالی تشدید شد و از دست دادنش به‌مثابهٔ قطع حقوق و کسری بودجهٔ یک عضو هیئت علمی بود. در بسیاری از مؤسسات، قاعدهٔ «بنویس یا تلف شو»[4] برای به‌دست آوردن بورس تحقیقاتی تبدیل به شرطی لازم برای کسب کرسی استادی یا ارتقاء علمی شد. این کار باعث

1) E. T. Bell 2) Poncelet 3) Ramanujan 4) Publish or Perish!

افزایش میزان پول بورس‌ها شد و آنانی که بورسی به‌دست می‌آوردند از قسمت کردنش با برادران کوچکتر اکراه داشتند، به‌ویژه که بیشتر فارغ التحصیلان دکتری آن‌ها شغلی برای خودشان دست و پا کرده بودند. پول مشخصی برای تشویق ریاضی‌دانان جوانی که پژوهش‌های زیربنایی انجام داده بودند، کنار گذاشته می‌شد اما کار اندکی برای کمک به فعال ماندن غالب دکترهای جوانی که در شرایط سخت حرفه‌ای قرار داشتند و انگیزه‌شان نیز اندک بود، انجام گرفت. در تفاوتی آشکار، کانادا برنامه‌ای را پیش گرفت که بر مبنای آن، ریاضیدانان پیش‌کسوت با موقعیت تثبیت شده، کنترل بیشتر بورس‌های پژوهشی را در اختیار گرفتند اما نمی‌توانستند آن‌ها را جهت ترمیم حقوق ماهیانهٔ خود به‌کار گیرند. نتیجه آن شد، که ریاضیدانان جوانی که میل شدید به پژوهش داشتند، می‌توانستند روی دو یا سه سال حمایت مالی حساب کنند و قابل‌ترینشان به‌مدت پنج سال از بورس استفاده می‌کرد آن هم به قیمت مواجهه با بازار کاری که حتی از بازار کار در ایالات متحده سخت‌تر و محدودتر بود.

به نظر می‌رسد در ایالات متحده به‌جای تلاش در جهت رشد، بالندگی و تقویت جامعهٔ ریاضی، تحت تأثیر گروه کوچک ولی پر نفوذی قرار گرفته‌ایم که متعصب و زیان آورند. من آن‌ها را ریاضیدانانِ م. و. زِر می‌نامم[1]. آن‌ها همواره با ما بوده‌اند، اما آنچه دو چندان شده است قدرت ویران‌گری آن‌ها است. آن‌ها اغلب در پژوهش بسیار توانا هستند و ساده می‌توان باور کرد که قابلیت تخصصی به اثبات رسیدهٔ آن‌ها در یک حوزه از ریاضیات، به آن‌ها این اجازه را می‌دهد که دربارهٔ هر بخشی از ریاضیات حکم صادر کنند، درست همان‌طور که انتظار داشته باشیم کسی که درون بشکه‌ای از آبشار نیاگارا سقوط کرده و زنده مانده است، می‌تواند صلح را به خاورمیانه بازگرداند. چون نخبه‌اند، در تشخیص آنچه مهم است از چیزهای بدیهی و بی‌نتیجه، شک به خود راه نمی‌دهند. آن‌ها معمولاً فقط برای رفقای متخصص خود مطلب می‌نویسند و نوشتن برای یک عرصهٔ عمومی‌تر از مخاطبین را اتلاف وقت می‌دانند. آن‌ها اغلب گزارش‌های داوری یا مرور طرح‌های تحقیقاتی را می‌نویسند که وظیفه‌ای نامطبوع اما فخرفروشانه است. استنباط‌شان از توصیفات روشن‌کننده‌ای که باعث افزوده شدنِ چند صفحه‌ای به مقدمهٔ یک مقاله شده است، نتیجهٔ تحقیرآمیزی دارد: این مقاله باید برای *ماهنامهٔ انجمن ریاضی آمریکا* فرستاده شود. اغلب می‌گویند بیش از حد مقاله انتشار می‌یابد. امکان ندارد آن‌ها را در نشست انجمن ریاضی آمریکا در حالی که ما را به یک سخنرانی ۱۰ دقیقه‌ای مفتخر ساخته‌اند، گیر بیاوری. در حالی‌که مدعی تعهد عمیق به بالاترین استانداردهای علمی هستند، با کاستن از شمار رقبای جدی برای بورس‌های تحقیقاتی یا فضا برای چاپ در مجلات سطح بالا، جای پای خودشان را مستحکم‌تر می‌کنند، زیرا در بسیاری از دانشگاه‌ها کرسی استادی یا ارتقاء علمی در گرو چاپ مقاله در مجلات «درست و حسابی» است.

۱) «متعصب و زیان آور» برگردان واژگان Bigoted and destructive است. مخفف این واژگان انگلیسی B.A.D است که خود باری منفی دارد. مخفف واژگان «متعصب و زیان آور» نیز «م. و. زِر» است که در شنیدن، واژه‌ی «مُضّر» را تداعی می‌کند که آن نیز باری منفی دارد ـ م.

البته که تفاوت بسیاری در کیفیت پژوهش‌های ریاضی وجود دارد و همه موافق هستیم که برخی مسائل ریاضی مهم‌تر یا مشکل‌تر از بقیه هستند. اما این دلیل بی‌اعتنایی به تقریباً همهٔ ریاضیات نمی‌شود. دفاع از دیدگاهی منفی نسبت به شاخه‌ای از ریاضیات که شخص به سختی چیزی از آن می‌داند در عرصه عمومی، به‌آسانی انجام نمی‌پذیرد. ریاضیدانان متعصب، مثل هم پالکی‌های نژادپرست یا مذهبی‌شان، کارِ ریاضیدانانِ حوزه‌های پَست را فاقد ارزشِ هرگونه توجهی می‌دانند. درست مثل بازجوی گالیله، نیازی به نگریستن در تلسکوپ نمی‌بینند. در اوایل کارم، وقتی مقاله‌ای به مجله‌ای می‌فرستادی، بادقت و حوصله توسط داور خوانده می‌شد و جمعی از نکات ظریف و نظرات انتقادی را به‌همراه تصمیم در باب قابل چاپ بودن یا نبودن مقاله به‌دست می‌آوردی. لزوماً همیشه با نظر داور یا ویراستاران موافق نبودم اما من و همکارانم از این‌که مقالهٔ ما، اگر نه با همدلی، با دقت خوانده شده بود، مشعوف می‌شدیم. ده سال بعد یا کمی بیشتر، به نظر می‌رسید مقالات در بهترین حالت با شتاب‌زدگی خوانده می‌شوند به‌ویژه هنگامی که نتیجهٔ داوری منفی بود. گفته می‌شد که نتایجِ نویسندهٔ مقاله «شناخته شده»[1] است بدون آن‌که دست‌کم به مرجعی راهنمایی شوم، یا مقاله بی هیچ نقد سازنده‌ای، پر حشو و زواید یا آشفته، خوانده می‌شد. مکاتبه با ویراستار جهت توضیح بیشتر یا تصحیح نکات اشتباهی که گفته بود، کاری عبث بود. این نظر که بخشی از کار داور یا ویراستار کمک به نویسندگان است تا مقاله‌شان را ضمن التزام به استانداردهای عالی، به اثری که ارزش چاپ داشته باشد تبدیل کنند و در زمان جوانی من، این نظر کم و بیش مقبولیت عام یافته بود، مثل ببر مازندران منقرض شده است.

من از وجود ریاضی‌دانان متعصبْ بی‌خبر بودم تا آن‌که در سال ۱۹۵۶ به‌عنوان عضو موقت مرکز مطالعات پیش‌رفته به پرینستون رفتم. همکار و هم‌اتاق من در مرکز، دکترایش را از پرینستون اخذ کرده بود. یکی از استادان سابقش در پرینستون از روی کنجکاوی خواسته بود بداند من که هستم. هنگامی که مطلع شده بود استاد راهنمای من آر. اچ. بروک[2] (یک خبرهٔ برجسته در نظریهٔ لوپ‌ها و جبرهای شرکت‌ناپذیر و هندسه‌های تصویری منشعب از آن‌ها) است، با لحن تحقیرآمیزی پرسیده بود: «راستی روی چه کار می‌کند، موپ‌ها؟». به‌زودی دریافتم که در بسیاری از مراکز علمی این عمل رایجی است که بخش‌های دیگر ریاضی و افراد آن حوزه‌ها را در برابر دانشجوی تحصیلات تکمیلی‌شان کوچک کنند. در واقع، رسالهٔ دکتری من دربارهٔ حلقه‌های توابع تام و حلقه‌های توابع پیوستهٔ حقیقی ــ مقدار بود که مرا به پژوهش در توپولوژی عمومی سوق داد. خیلی زود فهمیدم که توپولوژی عمومی دارای چنان ارزش اندکی در نزد عموم است که در حلقهٔ نخبگان حتی از نام بردنِ آن ابا دارند؛ توپولوژی جبری‌دانان از هیچ صفت متمایزکننده‌ای در کنار اسم «توپولوژی» برای توضیح تخصصشان استفاده نمی‌کنند.

در ابتدا، این نظرات آزار دهنده بود و نظیر یک محکوم به تبعیض نژادی، احساس حقارت می‌کردم. در واقع، هیچ کس از نخبگان، در حوزهٔ مورد علاقهٔ من کار نمی‌کرد. کمی بعد آموختم

---

1) well-known 2) R. H. Bruck

که چگونه با گناه نخستین خویش زندگی کنم و علاوه بر پژوهش در جبر و توپولوژی عمومی، مقالاتی در نظریهٔ اعداد و آنالیز عددی منتشر و پروژه‌هایی را در ریاضیات کاربردی راهنمایی کردم. معقول جلوه‌دادن بی‌اعتنایی به برخی از انواع ریاضی صرفاً با این دیدگاه که آن‌ها «پَست» هستند، مضحک به نظر می‌رسد. در عهد پیری، به این‌جا رسیده‌ام که نکند لباسی که من قادر به دیدن آن نیستم تنها در ذهن کسانی وجود دارد که به‌راحتی دیگران را لعن می‌کنند.[۱] ریاضیدانانی که با حوزه‌های دور از تخصص‌شان اهل تساهل نیستند می‌توانند بسیار مخرب باشند. وقتی ریاضیات به‌طرز گسترده‌ای در صنعت به‌کار برده شد و ریاضیدانان صنعتی برای انتشار مقالات در باب این کاربردهای جدید اهتمام ورزیدند، متوجه شدند که در بیشتر موارد، کارشان تنها بر اساس کیفیت ریاضی نوینی که ارائه می‌کردند داوری می‌شد اما مدل‌سازی ریاضی هوشمندانهٔ آن‌ها و نفْس کاربردها چندان جدی گرفته نمی‌شد. مطمئناً، همین تعصب‌ورزی‌ها به شکل‌گیری سیام (S.I.A.M) کمک کرد و کمبود مقالات ایراد شده در نشست‌های انجمن ریاضی آمریکا در حوزهٔ پژوهش‌های کاربردی یا چاپ شده در مجلاتش نیز از همین جا سرچشمه می‌گیرد.

۲. حوزه‌های مطرود ریاضیات

آفت ریاضیدان‌های متعصب در طول زمان تغییر می‌کند. سالیان متمادی، بخش‌هایی از جبرخطی که محاسبات طولانی و سنگین با ماتریس‌ها را طلب می‌کرد، مورد بی‌مهری قرار می‌گرفتند و آن بخش‌هایی که از محاسبات طولانی در آن‌ها خبری نبود، قدر می‌دیدند و بر صدر می‌نشستند. نکته‌سنجی‌های این نوع مقالات به درکِ بهتر و آسان‌تر آنالیز تابعی و ساختار جبرهای متناهی ـ بعد کمک می‌کرد با وجود این، محاسباتِ سخت، نیازِ مبرم آنالیز عددی و بخش‌هایی از معادلات دیفرانسیل بود. وقتی رایانه‌ها به‌طرز روزافزونی در دسترس قرار گرفتند، اهمیت آنالیز عددی دیگر نمی‌توانست انکار شود و متعصبان ریاضی باید حوزه‌های دیگری را برای به‌سُخره گرفتن پیدا می‌کردند. به آسانی حکم می‌کردند که اگر کاربردِ یک حوزه از ریاضی را در حوزهٔ مطبوعشان نبینند، آن حوزه باید از مجلات عمومی «مهم» کنار گذاشته شود. انجام این کار در مجلات منتشر شده توسط انجمن ریاضی آمریکا آسان نیست، اما اگر قرار به انجامش باشد، سازوکار مورد استفاده چنین است که هیئت ویراستاران و (یا) مقام ویراستار ارشد را به کنترل خویش در می‌آورند تا اطمینان حاصل کنند که هیچ کدام از ویراستاران، متخصص یکی از حوزه‌های «پَست» ریاضی نیست. برخلاف قول مجلاتی که هنوز مدعی چاپ مقاله در تمامی شاخه‌های ریاضی هستند، به کسی که مقاله‌ای در حوزه‌ای خاص را به آن مجله فرستاده است گفته می‌شود که هیچ یک از ویراستاران،

۱) اشاره به داستانی از هانس کریستین اندرسن: امپراطوری بود که دستور دوخت لباسی منحصر بفرد را صادر کرد و خیاط ناقلا مدعی شد این لباس چنان لطیف است که به چشم نمی‌آید. امپراطور که مشتاق بود «لباس جدیدش» را خلایق ببینند و تحسین کنند لخت و عور در شهر به گردش درآمد در حالی که هیچ کس جرأت اشاره به لخت بودن امپراطور را نداشت تا آن که کودکی فریاد زد امپراطور لباس بر تن ندارد ... (م).

صاحب آن تخصص نیست و نمی‌تواند مقاله را ارزیابی کند، یا این‌که مقاله «بیش از حد لزوم فنی است» و باید به یک مجلهٔ تخصصی فرستاده شود. چون این هیئت ویراستاران تا مدت‌ها تغییر نمی‌کند، مادامی که حوزه‌ای نامتناسب تشخیص داده شود، برخورد با مقالات نوشته شده در آن حوزه به همین منوال ادامه می‌یابد. من قصه‌های بسیاری در بارهٔ روشِ (بنا بر اقوال) افزایش مقام یک مجلهٔ عمومی با متوقف ساختن نشر مقالاتی که در حوزه‌های «پَست» قرار دارند، شنیده‌ام و خودم دو بار شاهد عینی آن بوده‌ام. در اوایل دههٔ ۷۰، ویراستار اجرایی جدید مجلهٔ دیوک[1] بی‌خبر از آن‌که من در بارهٔ هر چیزی مقاله نوشته‌ام مگر جبر[2]، نزد من لاف می‌زد که بی سر و صدا چاپ مقالات در حوزهٔ توپولوژی عمومی را متوقف ساخته است. هنگامی که از او پرسیدم آیا این مقالات را برای داوری می‌فرستد یا نه، پاسخ داد اگر چنین کند، داورِ یک متخصص توپولوژی عمومی خواهد بود و ممکن است مقاله را برای چاپ توصیه کند. بدین سان، هنگامی که جیمز دوگانجی[3] درگذشت، تا آن‌جا که به ویراستاران مجلهٔ پاسیفیک[4] مربوط می‌شد، توپولوژی عمومی نیز درگذشت. من و دو نفر از هم ــ نویسانم[5] در سال ۱۹۸۴، نامهٔ «مقالهٔ شما به‌طرز زایدی فنی است» را دریافت داشتیم و با علم به بی‌فایده بودنِ پرسش از این‌که آیا مقاله برای داوری هم فرستاده شده است یا نه، مقاله را به ترانس‌اکشن انجمن ریاضی آمریکا فرستادیم که آن‌جا مقاله را دارای شرایط لازم برای انتشار تشخیص دادند. تلاش برای آن‌که این ویراستاران قبول کنند که مجلهٔ مطبوعشان در حوزهٔ توپولوژی عمومی مقاله نمی‌پذیرد، با چنان ترفند و زیرکی پاسخ داده می‌شود که مقامات رسمی تگزاس پیش از جنبش حق رأی، زمانی که با این سؤال مواجه شدند که چرا تنها سیاهان در آزمون‌های باسوادی برای رأی دادن، نمرهٔ قبولی نمی‌گیرند، حسرت چنین پاسخ زیرکانه‌ای را می‌خورند. تحصیل‌کردگان دانشگاهی، معمولاً با سختی بسیار، حتی در خلوت، می‌پذیرند که بر مبنای علایق شخصی‌شان رفتار می‌کنند، به همین دلیل متعصبان ریاضی در معقول جلوه‌دادن خودخواهی یا بی‌صداقتی‌شان زیر نامِ حفظ استانداردهای عالی پژوهش، متحمل زحمت زیادی نمی‌شوند.

(در پایان دههٔ شصت، روبرت سولوی[6] پیش‌گام استفاده از روش‌هایی شد که پال کوهن برای اثبات استقلال فرض پیوستار به‌کار برده بود تا نشان دهد که برخی از مسائل حل نشده در توپولوژی عمومی، تصمیم‌ناپذیرند. از آن پس، توپولوژی عمومی دیگر مثل سابقش نبود و ارتباط‌های قدرتمند و مستحکمی میان نظریهٔ مدل‌ها، نظریهٔ مجموعه‌ها و توپولوژی عمومی ایجاد شد. تصمیم‌ناپذیری دربارهٔ وجود یک نُرم ناتمام روی حلقهٔ توابع پیوسته بر روی یک فضای نامتناهی فشرده توسط

1) Duke

۲) شاید منظور هنریکسن تا آن زمان بوده است وگرنه تا آن‌جا که من می‌دانم وی مقالات متعددی در جبر منتشر کرده است ــ م.

3) James Dugndji   4) Pacific

۵) Co-authors را هم ــ نویسان ترجمه کرده‌ام همچون همسرایان یا همیاران، ... ــ م.

6) Robert Solovay

دیْلز[1]، استرل[2] و وودین[3]، به استحکام پیوند میان توپولوژی عمومی و آنالیز تابعی و همچنین ساختارهای جبری مرتب، یاری رساند. تلاش برای کنار گذاشتن مقالات مربوط به توپولوژی عمومی از مجلات، درست زمانی نمایان شد که این حوزه در حال افزایش نیروهای حیاتی و پیوندهایش با دیگر بخش‌های ریاضیات بود.)

من هیچ اعتراضی به ویراستارانی که داوران را ملزم به رعایت معیارهای عالی می‌کنند ندارم، در مقام معاون ویراستار مجلهٔ ماهانهٔ ریاضی آمریکا، خودم اغلب چنین توصیه‌هایی می‌کردم و همین‌طور در مقام داور. من مدعی هستم که عدم پذیرش مقاله‌ای که هیچ خبره‌ای آن را نخوانده، همراه با ادله‌ای که با حسن نیت آن‌ها را طفره رفتن می‌نامم، صاف و ساده بگویم تعصب‌ورزی است. همچنین واضح است که اعضایی از هیئت ویراستاران مجلاتی که به چنین اقداماتی دست می‌یازند تا زمانی که اخذ بورس‌های تحقیقاتی، ارتقاء و افزایش حقوق در بسیاری از مراکز دانشگاهی در گرو توان انتشار مقاله در مجلات «سطح بالا» باشد، در موضع مخالف باقی می‌مانند.

یکی از اثرات مخرب کنار گذاشتن بسیاری از حوزه‌های [ریاضی] از مجلات [عمومی‌تر]، رشد وسیع مجلات تخصصی بوده است. نویسندگانی که برای این قبیل مجلات مطلب می‌نویسند، تمایلی به نوشتن برای متخصصین حوزهٔ تخصصی‌شان دارند و در نتیجه ریاضیات در حال تبدیل شدن به برج بابل است. هر قدر متخصص‌تر می‌شویم، با اکراه قبول می‌کنیم که حتی درسی در سطح پیشرفتهٔ کارشناسی در حوزه‌ای بیرون از تخصص خود ارائه کنیم و این گناه کبیره به نسل بعدی نیز انتقال می‌یابد. حتی بدتر از این، انتشار مقالات ریاضی برای همه مگر تعداد اندکی از نخبگان دشوار می‌شود. قدر و مقام یک حوزه از ریاضیات با گذشت زمان تغییر می‌کند، گاه به دلیلی پسندیده، اما بیشتر اوقات در نتیجهٔ جنگ قدرت و این امر، بر مراکز اعطاکنندهٔ بورس‌های پژوهشی و ترکیب هیئت ویراستاران مجلات، تأثیر می‌گذارد. چندتایی نتیجهٔ داوری غیرمنصفانه یا نامه‌های طفره‌رونده کافی است تا «غیر خودی‌ها» را از گردونهٔ پژوهش دور افکند. اعضای هیئت علمی که پژوهش نکنند آهنگ تحولشان را حفظ نخواهند کرد و آهسته آهسته می‌توان چنین انتظار داشت که بیشتر مراکز تربیت کارشناس ریاضی قادر به رهسپار کردن دانش‌آموختگان خود به مراکز تحصیلات تکمیلی بهتر نشوند. دانشجویان به‌ندرت مراکز کارشناسی را که تمایل به پرورش نیروهای کارشناسی جهت ادامه تحصیل در مقاطع عالی‌تر ریاضی دارند، انتخاب می‌کنند و همین سبب می‌شود که از توانمان در جذب جوانان با استعداد به ریاضیات کاسته شود. تأثیر این ضایعه با حضور پرشمار خارجیان بااستعداد در ایالات متحده به تعویق افتاده است، اما در آینده‌ای نه‌چندان دور، بسیاری از استادانی که توان کار در اسپوتنیک را داشتند، بازنشسته خواهند شد.

جام جهان‌بین من اینک غبار آلوده شده است. حتی اگر دل نگرانی‌ها و ترس‌های من اغراق‌آمیز باشد، مسائلی که در مقام ریاضی‌دان با آن‌ها روبه‌روییم دلهره آورند و میدان‌دادن به ریاضیدان‌های

1) Dales 2) Esterle 3) Woodin

م. و. زر فقط باعث بدتر شدن امور می‌شود. درست مثل این است که بگذاریم جوانان ما در هنگامی که نرخ تولد (ریاضیدان) در حال کاهش است سرخورده شوند. در حالی‌که تعداد افراد این گروه مخرب، اندک است و برای توطئه نیز گرد هم جمع نمی‌شوند، اگر چشمانمان را بر هم گذاریم و اجازه دهیم بی‌واهمه هر کاری که می‌خواهند بکنند، در گناهشان شریک هستیم، آن هم از ترس این‌که مبادا ما را از مدافعان میانمایگی به‌حساب آورند.

رها ساختن خویش از این نوع خودویرانگری، آسان یا مطبوع نخواهد بود. باید تلاش در پاسخگو کردن آن دسته از ویراستاران و مرورگران طرح‌های پژوهشی کنیم که بدون ارائهٔ هیچ ادلهٔ روشنی در تأیید عملشان، بخش‌های گسترده‌ای از ریاضیات را طرد و انکار می‌نمایند. دیگر نمی‌توانیم چشمهایمان را بر این اختلاف منافع بی‌شرمانه ببندیم با این توضیح که وضع همین است که هست و اجازه دهیم ریاضی‌دانان م. و. زر با به‌دست گرفتن کنترل مجلات کلیدی، رقابت سالم را به‌طور کامل مطرود کنند. دیگر این ادعای بی‌پایه و اساس را نمی‌پذیریم که فقط مجلاتی که این گروه خود دعوت کردهٔ سانسورچی در آن‌ها مقاله چاپ می‌کند، دارای استانداردهای سطح بالا هستند. این مسائل فیصله نخواهند یافت مگر این‌که ما باشهامت سخن بگوییم و فریبکاری ریاضیدان‌های م. و. زر را محکوم کنیم.

مترجم: احسان ممتحن
گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج
momtahan_e@hotmail.com

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۳۱ تا ۴۰

مروری بر مهتری‌های عادی و تعمیم‌یافته و بررسی ساختار نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

علی آرمندنژاد

چکیده

در این مقاله، مفهوم مهتری[1] در گونه‌های مختلف برداری، ماتریسی، چندگانه و تعمیم‌یافته بررسی می‌شود. فرض کنیم $\mathbf{M}_{nm}$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times m$ با درایه‌های حقیقی باشد. هر یک از انواع مهتری‌های ذکر شده، یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ تعریف می‌نماید. فرض کنید $\sim$ یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ باشد. تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ را نگهدارنده (متناظراً، نگهدارندهٔ قوی) $\sim$ می‌نامند هرگاه $TX \sim TY$ اگر (و فقط اگر) $X \sim Y$. در ادامه، ساختار نگهدارنده‌های خطی بعضی از انواع مهتری‌ها را مشخص نموده و مقاله را با ذکر چند مسألهٔ حل نشده به پایان می‌رسانیم.

واژه‌های کلیدی: مهتری، ماتریس‌های‌تصادفی، ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته، مهتری تعمیم‌یافته، نگهدارندهٔ خطی.

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 15A03,15A04,15A51.

مقدمه

مهتری برداری، یکی از موضوعات جالب و کاربردی در شاخه‌های متعددی از ریاضیات و آمار است که بیشتر در حوزهٔ جبرخطی و کاربردهای آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. علی‌رغم این‌که این مفهوم، نسبتاً قدیمی است، همچنان یک زمینهٔ فعال پژوهشی باقی مانده و اخیراً مقالات پژوهشی فراوانی در این موضوع چاپ شده است [۳،۴،۵،۶،۱۲،۱۳،۱۴].

1) majorization

وقتی گفته می‌شود بردار y مهترِ بردار x است، در واقع نشانگر نوعی از تسلط مؤلفه‌های بردار y بر مؤلفه‌های بردار x است و یا به‌طور دقیق‌تر، پراکندگی مؤلفه‌های x از y کمتر است.

تعریف ۱.۱ ([۹، ۱۷]) فرض کنیم $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$. برای هر $x, y \in D$ گوییم بردار y مهترِ بردار x است اگر برای هر $k = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$ و همچنین $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$. حال برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ فرض کنیم $x_\downarrow$ و $y_\downarrow$ به‌ترتیب، تجدید آرایش‌هایی از x و y در $\mathbb{R}^n$ باشند که از مرتب کردن نزولی مؤلفه‌های x و y به‌دست آمده‌اند. بنابراین $x_\downarrow, y_\downarrow \in D$. می‌گوییم بردار y مهترِ بردار x است و با نماد $x \prec y$ نشان می‌دهیم هرگاه بردار $y_\downarrow$ مهترِ بردار $x_\downarrow$ باشد.

تاکنون تعمیم‌های گوناگونی از مهتری برداری معرفی گردیده است. اولین آن‌ها، مهتری چندگانه است که مارشال و الکین در کتابی جامع [۱۷] به معرفی آن پرداخته‌اند. در واقع، قضیهٔ زیر، الهام‌بخش تعریف مهتری چندگانه بوده است. قبل از بیان این قضیه، نیاز به یادآوری ماتریس‌های تصادفی داریم.

تعریف ۲.۱ ([۹، ۱۷]) الف) ماتریس مربعی نامنفی R تصادفی سطری است هرگاه مجموع درایه‌های روی هر سطر آن برابر با یک شود. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های تصادفی سطری از مرتبهٔ n را با $\mathbf{R}_n$ نشان می‌دهیم.
ب) ماتریس مربعی نامنفی D تصادفی دوگانه است هرگاه D و D^t تصادفی سطری باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های تصادفی دوگانه از مرتبهٔ n را با $\mathbf{D}_n$ نشان می‌دهیم.
ج) ماتریس تصادفی دوگانه P یک جایگشت است هرگاه درایه‌های آن ۰ یا ۱ باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های جایگشت از مرتبهٔ n را با $\mathbf{P}_n$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱ (هاردی، لیتلوود و پولیا [۹، ۱۷]) فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. بردار y مهتر بردار x است اگر و تنها اگر ماتریس تصادفی دوگانهٔ D یافت شود به‌طوری که $x = Dy$.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، می‌توان در قضیهٔ قبل به‌جای بردارهای x و y ماتریس‌های A و B را جایگزین نمود و عملاً مفهوم مهتری برداری را به‌صورت زیر به مهتری ماتریسی تعمیم داد.

تعریف ۴.۱ ([۱۷]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. گوییم B مهتر چندگانهٔ A است و آن را با نماد $A \prec_m B$ نشان می‌دهیم هرگاه ماتریس $D \in \mathbf{D}_n$ یافت شود به‌طوری که $A = DB$.

در سال ۱۹۹۹ داهل [۱۱] تعمیمی از تعریف قبل ارائه کرد و نوعی دیگر از مهتری ماتریسی را به‌صورت زیر معرفی نمود:

تعریف ۵.۱ ([۱۱]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. گوییم B مهتر ماتریسی A از راست است و با نماد $A \prec_r B$ نشان می‌دهیم هرگاه ماتریس $R \in \mathbf{R}_m$ یافت شود که $A = BR$.

پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی یک رابطهٔ خاص، جزو مسائلی است که از سال‌های نسبتاً دور، همواره مورد علاقهٔ ریاضی‌دانان بوده است. برخی از انواع این مسائل، به‌صورت‌های گوناگون مطرح گردیده و به آن‌ها پاسخ داده شده است. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۵۹ ساختار همهٔ تبدیل‌های خطی $T : M_n \to M_n$ که نگهدارنده معکوس‌پذیری هستند مشخص گردید (X معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر TX معکوس‌پذیر باشد). در واقع، مارکوس [۱٦] نشان داد که چنین تبدیل‌های خطی باید به‌صورت $X \mapsto AXB$ یا $X \mapsto AX^tB$ باشند که در آن A و B ماتریس‌هایی معکوس‌پذیرند.

تعریف ٦.۱ ([۷، ۱۵]) در حالت کلی، فرض کنید T و $\sim$ به‌ترتیب یک عملگر خطی و یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ باشند. گوییم T نگهدار خطی (متناظراً، نگهدار خطی قوی) $\sim$ است، اگر $X \sim Y$ نتیجه دهد $TX \sim TY$ (متناظراً، و برعکس).

با توجه به این‌که هر یک از انواع مهتری ماتریسی، یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ است، تعداد زیادی مسأله در مورد ساختار نگهدارنده‌های خطی این روابط، قابل طرح و بررسی می‌باشند.

این مقاله، شامل دو بخش است. در بخش اول، همهٔ حالت‌های مهتری ماتریسی و ساختار نگهدارنده‌های خطی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم، مهتری‌های تعمیم‌یافته و ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی آن‌ها ارائه گردیده است.

۲. مهتری‌های ماتریسی و نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

در این بخش، تعریف انواع مختلف مهتری ماتریسی همراه با ساختار نگهدارنده‌های خطی این روابط که طی سال‌های اخیر شناخته شده، بیان گردیده است. در سرتاسر این مقاله، منظور از $\mathbf{J}$ ماتریسی مربعی با درایه‌های ۱، e برداری با مؤلفه‌های ۱ و e_i برداری است که مؤلفهٔ i−ام آن ۱ و بقیهٔ مؤلفه‌هایش صفر می‌باشند (مرتبهٔ $\mathbf{J}$، e و e_i بستگی به مورد استفادهٔ آن‌ها دارد).

علاوه بر تعریف‌های ۴.۱ و ۵.۱، تعمیم‌های دیگری نیز از مهتری موجود است که همهٔ آن‌ها را در تعریف زیر خلاصه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ ([۹،۱۱،۱۵،۱۷]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. انواع مهتری ماتریسی عبارتند از:

الف) مهتری ماتریسی چپ: $A \prec_l B \Leftrightarrow \exists\, R \in \mathbf{R}_n \ni A = RB$

ب) مهتری ماتریسی راست: $A \prec_r B \Leftrightarrow \exists\, R \in \mathbf{R}_m \ni A = BR$

ج) مهتری جهتی: $A \prec_d B \Leftrightarrow Ax \prec Bx, \forall x \in \mathbb{R}^m$

د) مهتری چندگانه: $A \prec_m B \Leftrightarrow \exists\, D \in \mathbf{D}_n \ni A = DB$

همان‌طور که پیش از این گفتیم، مهتری برداری، حالت خاص $m = ۱$ در مهتری چندگانه روی $\mathbf{M}_{nm}$ است. در سال ۱۹۸۹ آندو [۲] در مقاله‌ای اساسی که دربارهٔ مهتری نوشت، نشان داد که

نگهدارنده‌های مهتری برداری به‌صورت زیر می‌باشند (برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، منظور از $\overline{x}$ میانگین مؤلفه‌های x است).

قضیه ۲.۲ ([۲]) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد. آنگاه T نگهدارندهٔ خطی $\prec$ است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
الف) بردار $a \in \mathbb{R}^n$ یافت شود چنان‌که

$$Tx = n\overline{x}a, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

ب) ماتریس جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ و اسکالرهای α و β یافت شوند، به‌طوری که

$$Tx = \alpha Px + \beta \mathbf{J}x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

با توجه به این‌که مهتری چندگانه، تعمیم مهتری برداری است، این سؤال به‌طور طبیعی مطرح گردید که ساختار نگهدارنده‌های خطی مهتری چندگانه به چه شکل است؟ در سال ۲۰۰۰، مؤلفان [۷] در راستای پاسخ به این سؤال، قضیهٔ زیر را اثبات نمودند اما نتوانستند ساختار نگهدارنده‌های $\prec_m$ را روی $\mathbf{M}_{nm}$ به‌طور واضح مشخص نمایند.

در قضیهٔ زیر، برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$ منظور از $D(X)$، ماتریسی قطری در $\mathbf{M}_n$ است که درایهٔ (i,i) آن، مجموع درایه‌های سطر i–ام X می‌باشد. منظور از $\mathbf{M}_n(۰,۱)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ است که درایه‌های آن‌ها، ۰ یا ۱ می‌باشند. برای هر $i = ۱,\ldots,n$، D_i ماتریسی مربعی است که درایهٔ (i,i) آن ۱ و بقیهٔ درایه‌هایش ۰ است.

قضیه ۳.۲ ([۷]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی است. آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:

الف) T نگهدارنده خطی مهتری چندگانه است.
ب) یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:
(۱) ماتریس‌های $G \in \mathbf{M}_n(۰,۱)$ و $H_۱,\ldots,H_m \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$T(X) = \sum_{i=۱}^{m} D_i G D(X) H_i, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

(۲) ماتریس‌های $B, C \in \mathbf{M}_n$ و جایگشت $P \in \mathbf{P}_m$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = BXP + CD(X)\mathbf{J}, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در سال ۲۰۰۱، لی و پون [۱۵] ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_m$ و $\prec_d$ را به‌طور کامل و روشن روی $\mathbf{M}_{nm}$ به‌صورت زیر مشخص نمودند. منظور از $X = [X_۱ \mid \cdots \mid X_m]$ ماتریسی $n \times m$ است که ستون i–ام آن X_i می‌باشد. یکی از روش‌های مهمی که در اثبات قضیهٔ زیر و قضایای بعدی مورد استفاده قرار گرفته این است که برای هر تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$، تبدیل‌های خطی

$T_i^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، $i,j = ۱,\dots,m$، وجود دارند به‌قسمی که

$$T(X) = [\sum_{j=۱}^{m} T_i^j(X_j) \mid \cdots \mid \sum_{j=۱}^{m} T_m^j(X_j)]$$

که در آن X_j، ستون j−ام ماتریس X می‌باشد. در واقع $T_i^j = E^j \circ T \circ E_i$ که در آن

$$E^j : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbb{R}^n, \qquad E_i : \mathbb{R}^n \to \mathbf{M}_{nm}$$

$$A \mapsto Ae_j, \qquad x \mapsto xe_i^t.$$

حال اگر T یک نگهدارندهٔ خطی $\sim$ باشد، آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که T_i^j نیز یک نگهدارندهٔ خطی $\sim$ است.

قضیه ۴.۲ ([۱۵]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{n,m} \to \mathbf{M}_{n,m}$ یک تبدیل خطی است. آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:

الف) T نگهدارندهٔ $\prec_d$ است؛

ب) T نگهدارندهٔ $\prec_m$ است؛

ج) یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

(۱) ماتریس‌های $A_۱,\dots,A_k \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$TX = n\sum_{j=۱}^{k} \overline{X}_j A_j, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

(۲) ماتریس‌های $R,S \in \mathbf{M}_m$ و جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$TX = PXR + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

اگر $\sim$ هر یک از انواع مهتری باشد که در بالا به آن اشاره کردیم، به‌آسانی می‌توان نشان داد که نگهدارنده‌های خطی قوی $\sim$ معکوس‌پذیرند. با یافتن ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_m$ در قضیهٔ، قبل پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی قویِ این مفهوم، کار چندان سختی نیست و تنها از این مطلب استفاده می‌شود که تبدیل خطی $X \mapsto PXR + \mathbf{J}XS$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $R(R+nS)$ معکوس‌پذیر باشد [۵، ۱۲].

قضیه ۵.۲ ([۱۲]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی است. T نگهدارندهٔ قویِ $\prec_m$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های $R,S \in \mathbf{M}_m$ و $P \in \mathbf{P}_n$ یافت شوند چنان‌که $R(R+nS)$ معکوس‌پذیر باشد و

$$TX = PXR + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در مورد مهتری چندگانه، مفهوم راست و چپ را مطرح نکردیم و در واقع، چیزی هم از دست ندادیم چرا که با یک عمل ترانهاده، این مفاهیم قابل تبدیل به یکدیگرند؛ یعنی، اگر مهتری چندگانهٔ راست و چپ را به‌ترتیب با $\prec_{rm}$ و $\prec_{lm}$ نشان دهیم، آنگاه $A \prec_{rm} B$ اگر و فقط اگر $A^t \prec_{lm} B^t$. همچنین برای به‌دست آوردن نگهدارنده‌های خطی $\prec_{rm}$ کافی است تبدیل خطی $X \mapsto [T(X^t)]^t$ را همراه با قضایای فوق به‌کار بندیم. داستان پیدا کردن نگهدارنده‌های خطی $\prec_r$ و $\prec_l$، یک داستان طولانی است که بیش از یک دهه، افراد گوناگونی را به خود مشغول ساخت و سرانجام، پس از کش و قوس‌های فراوان، در سال ۲۰۰۸ به پایان رسید. در مورد $\prec_r$ و $\prec_l$ ابتدا، کار بر روی پیدا نمودن نگهدارنده‌های خطی روی $\mathbf{M}_n$ متمرکز شد و قضایای زیر اثبات گردیدند.

قضیه ۶.۲ ([۸]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_n$ یک عملگر خطی باشد که $T(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+)) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+)$، $T(I) = I$ و T نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ است. جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ یافت می‌شود چنان‌که

$$T(X) = P^t X P, \quad \forall\ X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+).$$

قضیه ۷.۲ ([۸]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_n$ یک عملگر خطی است که نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ می‌باشد. ماتریس جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ و ماتریس معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_n$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = MXP, \quad \forall\ X \in span(\mathbf{R}_n).$$

کار پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی و نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_r$ و $\prec_l$، توسط محمدحسنی و رجبعلی‌پور به‌صورت زیر تکمیل گردید.

قضیه ۸.۲ ([۱۲]) فرض کنید $S, T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ دو تبدیل خطی باشند. S و T به‌ترتیب نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ و $\prec_l$ می‌باشند اگر و فقط اگر جایگشت‌های $Q \in \mathbf{P}_n$ و $P \in \mathbf{P}_m$ و ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_n$ و $L \in \mathbf{M}_m$ یافت شوند چنان‌که

$$SX = MXP, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}, \qquad TX = QXL, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در قضیهٔ زیر منظور از $X = [x_{ij}] = [X_1/\cdots/X_n] \in \mathbf{M}_{nm}$، ماتریسی است که X_i، سطر i–ام آن می‌باشد و $\overline{X} = [\overline{X}_1/\overline{X}_2/\cdots/\overline{X}_n] \in \mathbb{R}^n$ که در آن

$$\overline{X}_i = m^{-1}(x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im})$$

برای هر $i = 1, \ldots, n$.

قضیه ۹.۲ ([۱۳]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی باشد. T نگهدارنده $\prec_r$ است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) ماتریس $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}_m)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$T(X) = \mathcal{A}\overline{X}, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

ب) ماتریس‌های $L \in \mathbf{M}_n$ و $Q \in \mathbf{P}_m$ و اسکالرهای $c, d \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $Q \neq I$، $c \neq d$، $cd \geq 0$ و $T(X) = LX(cI + dQ)$ برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$. علاوه بر این، اگر $m \geq 3$، آنگاه $cd = 0$ و همچنین $cI + dQ$ مضرب غیرصفری از یک ماتریس $P \in \mathbf{P}_m$ است.

ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_l$ تا حدود زیادی شبیه به ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_r$ است، اما نمی‌توان هیچ‌کدام را از روی دیگری به‌دست آورد. اثبات‌هایی که در حالت راست وجود دارد کمی دشوارتر از حالت چپ می‌باشد و تکنیک‌های استفاده شده در اثبات‌ها متفاوت‌اند.

قضیه ۲.۱۰ ([۱۴]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی باشد. آنگاه T نگهدارندهٔ $\prec_l$ است است اگر و فقط اگر ماتریس های $P \in \mathbf{P}_n$ و $L \in \mathbf{M}_m$ و اسکالرهای $a, b \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $P \neq I$، $a \neq b$، $ab \leq 0$ و $T(X) = (aI + bP)XL$ برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$. علاوه بر این، اگر $n \neq 2$، آنگاه $ab = 0$.

۳. مهتری‌های تعمیم‌یافتهٔ ماتریسی و نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

در سال ۲۰۰۶، سالمی و نویسنده، با توجه به ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته، مفهوم مهتری تعمیم‌یافته را برای ماتریس ها تعریف نمودند [۴، ۵]. ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته برای اولین بار، به‌صورت زیر معرفی گردیدند.

تعریف ۳.۱ ([۱۰]) الف) ماتریس مربعی مختلط R را تصادفی سطری تعمیم‌یافته یا به‌اختصار g ـ سطری تصادفی گوییم هرگاه مجموع درایه‌های هر سطرآن برابر با یک شود. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های g ـ سطری تصادفی $n \times n$ را با $\mathbf{GR}_n$ نشان می‌دهیم.

ب) ماتریس مربعی مختلط D را تصادفی دوگانهٔ تعمیم‌یافته یا به‌اختصار g ـ دوگانهٔ تصادفی گوییم هرگاه D و D^t ماتریس‌های g ـ سطری تصادفی باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های g ـ دوگانهٔ تصادفی $n \times n$ را با $\mathbf{GD}_n$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲ ([۳، ۴، ۵]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. انواع مهتری تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است:

الف) مهتری ماتریسی چپ تعمیم‌یافته: $A \prec_{lg} B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{GR}_n \ni A = RB$

ب) مهتری ماتریسی راست تعمیم‌یافته: $A \prec_{rg} B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{GR}_m \ni A = BR$

ج) مهتری چندگانه تعمیم‌یافته: $A \prec_{gm} B \Leftrightarrow \exists\ D \in \mathbf{GD}_n \ni A = DB$

با معرفی مهتری تعمیم‌یافته، دریچه‌ای رو به تعداد زیادی مسأله باز شد که به برخی از آن‌ها پاسخ داده شده و تعداد زیادی هنوز بدون جواب باقی مانده‌اند. ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی

مهتری‌های تعمیم‌یافته به‌طور کامل مشخص گردیده‌اند، اما ساختار نگهدارنده‌های خطی هیچ‌یک از انواع مهتری تعمیم‌یافته هنوز مشخص نگردیده و به‌عنوان مسائل حل نشده، مبارز می‌طلبند. نکتهٔ جالبی که وجود دارد این است که می‌توان ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی مهتری را از روی ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی مهتری تعمیم‌یافته به‌دست آورد.

در سال ۲۰۰۶، در [۵] قضیهٔ زیر اثبات گردید که تا حدود زیادی ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_{gm}$ را مشخص نمود، اما نتوانست آن‌ها را به‌طور کامل تعیین نماید (قضیه دو طرفه نیست).

قضیه ۳.۳ ([۵]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی $\prec_{gm}$ باشد. آنگاه یکی از شرایط زیر برقرار است:

الف) ماتریس‌های $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = n \sum_{j=1}^{m} \overline{X}_j A_j, \qquad \forall X = [X_1|\cdots|X_m] \in \mathbf{M}_{nm};$$

ب) ماتریس $S \in \mathbf{M}_m$، ماتریس‌های معکوس‌پذیر $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{GD}_n$ و بردارهای $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$T(X) = [A_1 X a_1 \mid \cdots \mid A_m X a_m] + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X = [X_1|\cdots|X_m] \in \mathbf{M}_{nm}.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که شکل عملگر T قضیهٔ ۳.۳ (ب) ممکن است قابل تبدیل به‌شکل عملگر T در قضیهٔ ۴.۲ (ج ـ۲) نباشد.

مثال ۴.۳ ([۵]) عملگر خطی $T : \mathbf{M}_{3,2} \to \mathbf{M}_{3,2}$ که در آن $TX = [Xe_1 \mid PXe_1]$ و $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ یک نگهدارندهٔ خطی $\prec_{gm}$ است که قابل تبدیل به‌شکل عملگر T در قضیهٔ ۴.۲ (ج ـ۲) نیست.

ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_{gm}$ که در قضیهٔ زیر کاملاً مشخص شده‌اند تا حدودی شبیه به نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_m$ است.

قضیه ۵.۳ ([۵]) عملگر خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{gm}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های $S \in \mathbf{M}_m$، $R \in \mathbf{M}_n$ و $D \in \mathbf{GD}_n$ یافت شوند به‌طوری که $R(R + nS)D$ معکوس‌پذیر است و

$$TX = DXR + \mathbf{J}XS, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در مورد نگهدارنده‌های خطی $\prec_{rg}$ و $\prec_{lg}$ هنوز هیچ مطلبی ثابت نشده است، اما ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی آن‌ها در [۳،۴،۶] به‌صورت زیر به‌دست آمده است.

قضیه ۶.۳ ([۳]) تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{rg}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_m$ و $R \in \mathbf{GR}_m$ یافت شوند چنان‌که

$$TX = MXR, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

قضیه ۷.۳ ([۴، ۶]) تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{lg}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_m$ و $R \in \mathbf{GR}_n$ یافت شوند چنان‌که

$$TX = RXM, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

علی‌رغم این‌که به نظر می‌رسد بتوان نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_{gr}$ و $\prec_{gl}$ را از روی یکدیگر به‌دست آورد، اما این کار عملی نیست و این نتایج چندان ارتباطی با هم ندارند. لازم به ذکر است که اصولاً، کار در مهتری‌های راست نسبت به مهتری‌های چپ، دشوارتر است.

در پایان، چند مسألهٔ باز را مطرح می‌نماییم.

۱ــ ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_{gr}$، $\prec_{gl}$، $\prec_{gm}$ چگونه است؟

۲ــ اگر $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{pq}$ یک تبدیل خطی و $\sim$ یکی از روابط مهتری یا مهتری تعمیم‌یافته باشد، شرایط لازم و کافی برای این‌که T نگهدارندهٔ $\sim$ باشد، چیست؟

مراجع

[1] A. Armandnejad and H. Heydari, Linear functions preserving gd-majorization from $M_{n,m}$ to $M_{n,k}$ Bull. Iranian Math. Soc. (to appear).

[2] T. Ando, "Majorization and inequalities in matrix theory", *Linear Algebra Appl.*, **199** (1978), 17-67.

[3] T. Ando, "Majorization, Doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues", *Linear Algebra Appl.*, **118** (1989), 163-248.

[4] A. Armandnejad, "Right gw-majorization on $\mathbf{M}_{n,m}$", *Bull. of Iranian Math. Soc.*, 35(2) (2009), 59-66.

[5] A. Armandnejad and A. Salemi, "Strong linear preservers of gw-majorization on M_n", *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, **5**(2) (2007), 165-168.

[6] A. Armandnejad and A. Salemi, "The structure of linear preservers of gs-majorization", *Bull. of Iranian Math. Soc.*, **32**(2) (2006), 31-42.

[7] A. Armandnejad and A. Salemi, "On linear preservers of lgw-majorization on $M_{n,m}$, Bull. Malaysian Math. Soc. (to appear).

[8] L. B. Beasley and S. G. Lee, "Liner operators preserving multivariate majorization", *Linear Algebra Appl.*, **304** (2000), 141-156.

[9] L. B. Beasley, S. G. Lee and Y. H. Lee, "A characterization of strong preservers of matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **367** (2003), 341-346.

[10] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[11] H. Chiang and C.K. Li, "Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers", *Linear and Multilinear Algebra,* **53** (2005), 1-11.

[12] G. Dahl, "Matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **288** (1999), 53-73.

[13] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "The structure of linear operators strongly preserving majorizations of matrices", *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15** (2006), 260-268.

[14] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "On linear preservers of (right) matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **423** (2007), 255-261.

[15] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "Linear preservers of matrix majorization", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32**(4) (2006), 475-482.

[16] C. K. Li and E. Poon, "Linear operators preserving directional majorization", *Linear Algebra Appl.*, **325** (2001), 141-146.

[17] M. Marcus, "All linear operators leaving the unitary group invariant", *Duke Math. J.*, **26** (1959), 155-163.

[18] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1972.

علی آرمندنژاد
گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج)، رفسنجان
armandnejad@mail.vru.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۴۱ تا ۵۰

گراف‌های هم انرژی

ایوان گوتمن، علی‌رضا اشرفی و غلامحسین فتح‌تبار فیروزجایی

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. هر مقدار ویژهٔ ماتریس مجاورت G، یک مقدار ویژهٔ G نامیده می‌شود. انرژی یک گراف G به‌صورت مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ آن تعریف می‌شود. دو گراف با انرژی‌های یکسان، هم‌انرژی نامیده می‌شوند. این مقاله به توصیفی تاریخی و شرحی از نتایج جدید در زمینهٔ انرژی گراف می‌پردازد.

کلمات کلیدی: گراف‌های متناهی، مقادیر ویژه، انرژی گراف، گراف‌های هم‌انرژی.

رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا (MSC 2000): 05C60.

۱. مقدمه

امروزه، بخش مهمی از نظریهٔ جبری گراف به مطالعهٔ طیف ماتریس مجاورت آن که به طیف گراف نیز معروف است، اختصاص دارد. منظور از طیف یک گراف، طیف ماتریس‌هایی است که به‌شکل یکتا ساختمان گراف را نمایش می‌دهند. طیف چندین نوع از این قبیل ماتریس‌ها با جزئیات لازم مطالعه شده‌اند. به‌عنوان مثال طیف ماتریس مجاورت، ماتریس لاپلاسی و ماتریس فاصله در مراجع [۵ − ۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله، نگاه خود را به طیف ماتریس مجاورت معطوف می‌کنیم. فرض کنید G گرافی با رئوس $v_۱$، $v_۲$، ... ، v_n باشد. ماتریس مجاورت G که با نماد $A(G)$ نشان داده می‌شود، ماتریسی از مرتبهٔ $n \times n$ است که ij ـ امین درایهٔ آن تعداد یال‌های بین v_i و v_j است. اگر برای بردار n ـ بعدی ناصفر C_i و یک عدد λ_i، تساوی $A(G)C_i = \lambda_i C_i$ برقرار باشد، آنگاه C_i بردار ویژهٔ ماتریس $A(G)$ نظیر مقدار ویژهٔ λ_i نامیده می‌شود. در نظریهٔ طیفی گراف، C_i بردار ویژه و λ_i مقدار ویژهٔ گراف G نامیده می‌شود. قضیهٔ معروفی در جبرخطی بیان می‌کند که هر ماتریس متقارن حقیقی، دارای پایه‌ای مرکب از n بردار ویژه است. به‌زبان جبرخطی، چنین ماتریس‌هایی قطری‌پذیرند. اگر G گرافی n ـ رأسی باشد، ماتریس مجاورت آن، ماتریسی از مرتبهٔ $n \times n$ است و لذا n بردار ویژهٔ مستقل خطی دارد. فرض کنیم اعداد $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... ، λ_n

مقادیر ویژهٔ G باشند. این مقادیر را طیف گراف G می‌نامند. اگر دو گراف n ــ رأسی طیف یکسان داشته باشند، هم‌طیف نامیده می‌شوند. چون $A(G)$ متقارن و حقیقی است، مقادیر ویژهٔ گراف G همگی حقیقی هستند ولی نیازی نیست متمایز باشند. مرسوم است که این مقادیر را به‌شکل $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_۲ \geq \lambda_۱$ در نظر می‌گیرند. چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس مجاورت G، به‌شکل $\phi(G,\lambda) = \det(\lambda I_n - A(G))$ تعریف می‌شود که در آن، I_n ماتریس همانی از مرتبهٔ $n \times n$ است. $\phi(G,\lambda)$ را چندجمله‌ای مشخصهٔ گراف G می‌نامیم. از جبرخطی می‌دانیم که هر مقادیر ویژه ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصه است. خوانندهٔ علاقه‌مند برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص این مفاهیم می‌تواند به [٦] مراجعه کند.

۲. انرژی یک گراف

مفهوم انرژی یک گراف اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط ایوان گوتمن[1] یکی از نویسندگان مقالهٔ حاضر ارائه شد [۷].

تعریف ۱.۲ فرض کنید $G = (V,E)$ گرافی ساده با n رأس باشد. انرژی گراف G که با $E(G)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ آن تعریف می‌شود:

$$E = E(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|. \qquad (۱.۲)$$

انگیزهٔ این تعریف مفاهیمی در علم شیمی بوده است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود. یک مولکول با اتم‌های $x_۱$، $x_۲$، … ، x_n را در نظر بگیرید. این اتم‌ها را رئوس یک گراف G در نظر می‌گیریم. اگر بین این اتم‌ها پیوند کووالانسی موجود باشد، آن دو رأس را مجاور در نظر می‌گیریم. گراف حاصل از این طریق را گراف مولکولی می‌نامند. اگر G یک گراف مولکولی باشد، $E(G)$ برابر انرژی π ــ الکترون آن مولکول خواهد بود که از نظریهٔ هوکل محاسبه می‌شود. برای جزئیات بیشتر، مراجع [۸، ۹] را ببینید. در مرجع [۱۰] می‌توان مسائل زیادی در خصوص انرژی گراف پیدا کرد. مطالعهٔ انرژی گراف در ریاضیات و شیمی بخش بسیار فعالی را تشکیل می‌دهد. در این مقاله، یکی از جنبه‌های این نظریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم، یعنی گراف‌های هم‌انرژی که اول بار در سال ۲۰۰۴ در مراجع [۱۱، ۱۲] به‌طور مستقل مورد توجه قرار گرفتند.

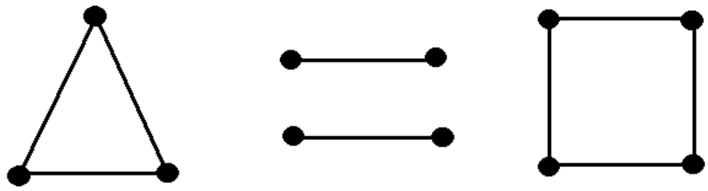
تعریف ۲.۲ فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف n رأسی باشند. $G_۱$ و $G_۲$ هم‌انرژی نامیده می‌شوند هرگاه $E(G_۱) = E(G_۲)$.

بدیهی است که اگر دو گراف هم‌طیف باشند، هم‌انرژی نیز خواهند بود. بنابراین ما به گراف‌های هم‌انرژی و غیر هم‌طیف علاقه‌مند هستیم. ساختن گراف‌های هم‌انرژی غیر هم‌طیف کاری ساده است. به‌عنوان مثال فرض کنید G دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، … ، λ_n باشد. G' را از روی G

---

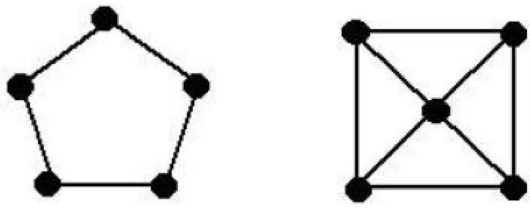
1) Gutman

با اضافه کردن یک رأس تنها می‌سازیم. به‌وضوح طیف G' دارای مقادیر ویژهٔ ۰، λ_1، λ_2، ...، λ_n است و لذا $E(G) = E(G')$.



شکل ۱.۲. گراف‌های هم‌انرژی و بدون رأس تنها

حتی اگر بخواهیم رئوس تنها وجود نداشته باشند، باز هم می‌توان به‌آسانی گراف‌های هم‌انرژی ساخت. در شکل ۱.۲، سه گراف هم‌انرژی و بدون رأس تنها ارائه شده است. با مراجعه به شکل، می‌توان دید که طیف‌های این گراف‌ها به‌ترتیب مجموعه‌های $\{۲, -۱, -۱\}$، $\{۱, ۱, -۱, -۱\}$ و $\{۲, ۰, ۰, -۲\}$ هستند. از این محاسبات نتیجه می‌شود که این گراف‌ها دو به‌دو غیر هم‌طیف با انرژی ۴ هستند.



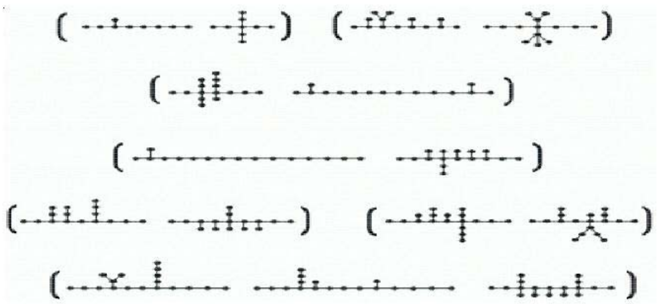
شکل ۲.۲. زوج گراف‌های غیر هم‌طیف و همبند هم‌انرژی با تعداد مساوی رأس

مثال فوق ما را به‌سوی دو محدودیت راهنمایی می‌کند: یکی این‌که تعداد رئوس گراف‌ها یکسان و دیگر این‌که هر دو همبند باشند. یافتن زوج گراف‌های غیر هم‌طیف و همبند با تعداد مساوی رأس نیز کار سختی نیست. کوچکترین چنین زوج‌هایی در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. طیف‌های این دو زوج عبارتند از:

$$\left\{۲, \tfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, \tfrac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, -\tfrac{\sqrt{۵}+۱}{۲}, -\tfrac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right\},$$
$$\{۰, ۰, ۱+\sqrt{۵}, -\sqrt{۵}, -۲\}.$$

با محاسباتی ساده، می‌توان دید که انرژی این گراف‌ها برابر $۲ + ۲\sqrt{۵}$ است. گراف‌های این شکل تعداد متفاوتی یال دارند. بنابراین محدودیت بعدی تعداد یال‌هاست. فرض کنیم دو گراف داده

شده، همبند، غیر هم‌طیف و دارای تعداد مساوی رأس و یال و نیز هم‌انرژی باشند. بخش بعد به مطالعهٔ چنین گراف‌هایی اختصاص دارد.



شکل ۳.۲: زوج درخت‌های غیر هم‌طیف و هم‌انرژی

۳. درخت‌های هم‌انرژی

برانکوف [۱۱] توانست با جستجوی کامپیوتری، درخت‌های غیر هم‌طیف و هم‌انرژی با تعداد کمی رأس و یال بسازد. او با محاسباتی عددی، زوج‌هایی از درخت‌های با طیف متفاوت به‌دست آورد که مقادیر انرژی آن‌ها در اولین رقم اعشاری‌شان یکسان بودند. اگرچه این خاصیت برای هم‌انرژی بودن کافی نیست و نهایتاً باید فهرست به‌دست آمده را اصلاح کرد. برای مثال فرض کنید T_1 و T_2 اولین دو درخت در شکل ۳.۲ باشند. روش‌هایی استاندارد وجود دارند که به‌کمک آن‌ها می‌توان چندجمله‌ای مشخصهٔ یک درخت را محاسبه نمود. با استفاده از این روش‌ها و محاسبات دستی، می‌توان ثابت کرد

$$\begin{aligned}\phi(T_1,\lambda) &= \lambda^9 - 8\lambda^7 + 20\lambda^5 - 17\lambda^3 + 4\lambda\\ \phi(T_2,\lambda) &= \lambda^9 - 8\lambda^7 + 18\lambda^5 - 16\lambda^3 + 5\lambda.\end{aligned}$$

با توجه به این محاسبات، T_1 و T_2 هم‌طیف نیستند. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}\phi(T_1,\lambda) &= \lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)(\lambda^4-3\lambda^2)\\ \phi(T_2,\lambda) &= \lambda(\lambda^2-1)^3(\lambda^2-5).\end{aligned}$$

از این تجزیه‌ها می‌توان طیف درخت‌های T_1 و T_2 را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{array}{l}\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}},\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\ -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}\}\\ \{0,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ +\sqrt{5},\ -\sqrt{5}\}\end{array}.$$

حال محاسباتی ساده نشان می‌دهد که مجموع قدرمطلق‌های این مقادیر ویژه برابر $۶ + ۲\sqrt{۵}$ است.

درخت T را شیمیایی گویند هرگاه درجهٔ هر رأس آن حداکثر ۴ باشد. علت این موضوع ظرفیت اتم کربن است که برابر ۴ می‌باشد و این حداکثر ظرفیتی است که این اتم می‌تواند اختیار کند. در شکل ۳.۲ همهٔ زوج‌های هم‌انرژی و یک سه‌تایی غیر هم‌طیف از درخت‌های شیمیایی با حداکثر ۱۸ رأس ارائه شده است [۱۱]. دومین و سومین درخت شیمیایی در ردیف ۳ تایی دارای ۱۸ رأس بوده و هم‌طیف هستند اما طیف آن‌ها متفاوت از درخت اول است. درخت‌های ۹ رأسی $T_۱$ و $T_۲$ کوچکترین زوج از درخت‌های شیمیایی هم‌انرژی را تشکیل می‌دهند. برای مقادیر بزرگتر n، زوج‌ها و ۳ تایی‌های دیگری از درخت‌های هم‌طیف کشف شده‌اند (شکل ۳.۲ را ببینید). نشان دادن این‌که این درخت‌ها حقیقتاً هم‌انرژی هستند مسأله‌ای ملال‌آور است. به‌خاطر بیاورید که در مثال بالا توانستیم مقادیر ویژهٔ گراف را به‌وسیلهٔ رادیکال‌ها بیان کنیم و توجه کنید در حالت کلی چنین چیزی امکان‌پذیر نخواهد بود. بنابراین بررسی این‌که چه زمان دو درخت هم‌انرژی هستند مسأله‌ای جبری است که الگوریتم‌های مناسبی برای آن‌ها پیدا نشده است. تاکنون هیچ روش جامعی برای ساختن زوج درخت‌های هم‌انرژی ارائه نشده است.

فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند. ضرب تانسوری $G_۱$ و $G_۲$ که با نماد $G_۱ \otimes G_۲$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن $V(G_۱) \times V(G_۲)$ است و دو رأس (a,b) و (c,d) در آن مجاورند هرگاه $ac \in E(G_۱)$ و $bd \in E(G_۲)$.

بالاکریشنان در [۱۲] نشان داد که برای هر دو گراف $G_۱$ و $G_۲$

$$E(G_۱ \bigotimes G_۲) = E(G_۱)(E(G_۲). \qquad (۲.۳)$$

این نتیجه قبلاً در مرجع [۱۴] به اثبات رسیده بود. فرمول (۲.۳) مستقیماً از رابطهٔ (۱.۲) با به‌خاطر آوردن این که مقادیر ویژهٔ $G_۱ \otimes G_۲$ حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ $G_۱$ در مقادیر ویژهٔ $G_۲$ است، به‌دست می‌آید [۱]. به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲.۳) می‌توان تعداد زیادی از زوج گراف‌های هم‌انرژی ساخت. اگر G_a و G_b دو زوج باشند، آنگاه برای هر گراف G زوج $G_a \otimes G$ و $G_b \otimes G$ نیز هم‌انرژی خواهند بود. نتیجهٔ دیگری از این نوع، قبلاً به‌وسیلهٔ ایندولال و ویجی‌کومار در [۱۵] به‌دست آمده بود. فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف دلخواه باشند. حاصل ضرب دکارتی $G_۱$ و $G_۲$ که با نماد $G_۱ \odot G_۲$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $G_۱ \odot G_۲ = V(G_۱) \times V(G_۲)$ و

$$E(G_۱ \bigodot G_۲) = \{(a,b)(c,d) | (a = c, bd \in E(G_۲)) \ or \ (b = d, ac \in E(G_۱))\}.$$

به‌سادگی می‌توان دید که $G_۱ \odot G_۲$ در حد یکریختی، دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری است. به‌علاوه $G_۱ \odot G_۲$ همبند است اگر و تنها اگر $G_۱$ و $G_۲$ همبند باشند. برای مطالعهٔ بیشتر، [۱۳] را ببینید. فرض کنید l و k اعداد طبیعی داده شده‌ای باشند چنان‌که $l \geq ۲k$ و K_l معرف گراف کامل روی l رأس باشد. همچنین فرض کنید G گرافی n ـ رأسی باشد که طیف آن در بازهٔ $[-k, k]$

قرار دارد. در این صورت

$$E((k_l)^k \bigodot G) = ۲nk(l-۱)^k. \quad (۳.۳)$$

چون طرف راست معادلهٔ (۳.۳) تنها به پارامترهای n و k و l بستگی دارد، لذا برای گراف‌های هم‌انرژی G_a و G_b، زوج‌های $(k_l)^k \bigodot G_a$ و $(k_l)^k \bigodot G$ هم‌انرژی هستند.

در ادامه، اتصال دو گراف و انرژی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم G و H دو گراف با رئوس مجزا باشند. اتصال G و H گرافی است که با $G\nabla H$ نشان داده می‌شود و مجموعهٔ رئوس آن اجتماع رئوس G و H است و دو رأس a و b در $G\nabla H$ مجاورند اگر و تنها اگر هر دو به‌عنوان دو رأس G مجاور باشند یا هر دو به‌عنوان دو راس H مجاور باشند و یا یکی در G و دیگری در H باشد. رامان و والیکار در مرجع [۱۶] ثابت کردند

$$E(G\nabla H) = E(G_۱) + E(G_۲) + \sqrt{(r_۱+r_۲)^۲ + ۴(n_۱n_۲ - r_۱r_۲)} - (r_۱+r_۲) \quad (۴.۳)$$

توجه کنید که در رابطهٔ (۴.۳) گراف‌های G و H منظم فرض شده‌اند. حالت خاصی از این نتیجه به‌طور مستقل به‌وسیلهٔ لیو در [۱۷] به‌دست آمده بود. به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۴.۳) می‌توان زوج‌هایی از گراف‌های هم‌انرژی با n رأس برای $n \geq ۹$ ساخت.

۴. گراف خطی هم‌انرژی

در این بخش، نتایج مقالات [۱۸ − ۲۱] را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض کنیم $L(G)$ معرف گراف یالیِ گراف G باشد. این گراف بدین صورت تعریف می‌شود که رئوس $L(G)$ همان یال‌های G بوده و دو رأس $L(G)$ مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر در G، رأس مشترک داشته باشند. اگر $n \geq k \geq ۱$، آنگاه k ـ امین گراف خطی مکرر G به‌صورت $L^k(G) = L(L^{k-۱}(G))$ تعریف می‌شود که در آن $L^\circ(G) = G$ و $L^۱(G) = L(G)$. گراف یالی یک گراف منظم G از مرتبهٔ $n_\circ$ و از درجهٔ $r_\circ$ گرافی منظم از مرتبهٔ $\frac{n_\circ r_\circ}{۲}$ و از درجهٔ $r_۱ = ۲r_\circ - ۲$ خواهد بود. در نتیجه، مرتبه و درجهٔ $L^k(G)$ عبارتند از $r_k = ۲r_{k-۱} - ۲$ و $n_k = \frac{۱}{۲}r_{k-۱}n_{k-۱}$ که n_i و r_i مرتبهٔ و درجهٔ گراف $L^i(G)$ را نشان می‌دهند. بنابراین

$$r_k = ۲^k r_\circ - ۲^{k+۱} + ۲ \quad (۵.۴)$$

$$n_k = \frac{n_\circ}{۲^k} \prod_{i=\circ}^{k-۱} r_i = \frac{n_\circ}{۲^k} \prod_{i=\circ}^{k-۱} (۲^i r_\circ - ۲^{i+۱} + ۲) \quad (۶.۴)$$

اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... ، λ_n مقایر ویژهٔ یک گراف منظم G از مرتبهٔ n و از درجهٔ r باشند، آنگاه بنابر نتایج [۱]، مقادیر ویژهٔ $L(G)$ عبارتند از

$$\begin{pmatrix} \lambda_۱ + r - ۲ & \ldots & \lambda_n + r - ۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & n(r-۲)/۲ \end{pmatrix} \quad (۷.۴)$$

که مقادیر سطر دوم معرف مرتبهٔ تکرار مقدار ویژهٔ متناظر می‌باشد. با توجه به این واقعیت که $L(G)$ گرافی منظم از مرتبهٔ $\frac{nr}{2}$ و از درجهٔ $2r-2$ است و با استفاده از معادلهٔ (۷.۴)، مقادیر ویژهٔ $L^2(G)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+3r-6 & \ldots & \lambda_n+3r-6 & 2r-6 & -2 \\ 1 & \ldots & 1 & n(r-2)/2 & nr(r-2)/2 \end{pmatrix} \qquad (8.4)$$

فرض کنید $\lambda_1 = r$، λ_2، ... ، λ_n مقادیر ویژهٔ گراف r ـ منظم G باشند. در این صورت، مقادیر ویژهٔ $\overline{G}$ عبارتند از

$$\begin{pmatrix} \lambda_2-1 & \ldots & \lambda_n-1 & n-r-1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9.4)$$

با استفادهٔ مجدد از معادلات (۸.۴) و (۹.۴)، مقادیر ویژهٔ گراف $\bar{L}^2(G)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1-3r+5 & \ldots & \lambda_n-3r+5 & 2r+5 & 1 & \frac{nr(r-1)}{2}-4r+5 \\ 1 & \ldots & 1 & \frac{n(r-2)}{2} & \frac{n(r-2)}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad (10.4)$$

قضیه ۱.۴ فرض کنید G گراف r ـ منظم با $r \geq 3$ و از مرتبهٔ n باشد. در این صورت تنها مقدار ویژهٔ منفی $L^2(G)$ عبارت است از -2 با مرتبهٔ تکرار $\frac{nr(r-2)}{2}$. به‌علاوه در بین مقادیر ویژهٔ مثبت $L^2(\bar{G})$، یکی برابر درجهٔ $L^2(\bar{G})$ و باقی مقادیر برابر یک هستند.

برهان. همهٔ مقادیر ویژهٔ G در شرط $-r \geq \lambda_i \geq r$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$ صدق می کنند. بنابراین اگر $r \geq 3$، آنگاه $\lambda_i + 3r - 6 \geq 0$، $3r - 6 \geq 0$، $-\lambda_i - 3r + 5 \leq 0$ و $-3r + 5 \leq 0$. اکنون نتیجهٔ مورد نظر از معادلات (۸.۴) و (۱۰.۴) به‌دست می‌آید. □

تبصره ۲.۴ فرض کنید $k \geq 2$. -2 تنها مقدار ویژهٔ $L^k(G)$ است در حالی‌که در بین مقادیر ویژهٔ مثبت $L^k(\bar{G})$، یکی معادل با درجهٔ $L^k(\bar{G})$ و دیگر مقادیر برابر یک هستند.

قضیه ۳.۴ اگر G گرافی r ـ منظم با $r \geq 3$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} E(L^2(G)) &= nr(r-2), && (11.4) \\ E(\bar{L}^2(G)) &= (nr-4)(2r-3)-2. && (12.4) \end{aligned}$$

برهان. چون $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$، می‌توان دید $E(G) = 2\sum_{+} \lambda_i = -2\sum_{-} \lambda_i$ که در آن $\sum_{+}$ و $\sum_{-}$ جمع روی مقادیر ویژهٔ مثبت و منفی هستند. بدین ترتیب معادلهٔ (۱۱.۴) بی درنگ از قضیهٔ

۱.۴ به‌دست می‌آید. مشابهاً از معادلهٔ (۱۰.۴) نتیجه می‌شود که

$$E(\bar{L}^{2}(G)) = 2[(\frac{nr(r-1)}{2} - 4r + 5) + \frac{nr(r-2)}{2}] = 2nr^{2} - 3nr - 8r + 10$$

که مستقیماً ما را به معادلهٔ (۱۲.۴) رهنمون می‌شود. □

از قضیهٔ ۳.۴ می‌دانیم که انرژی دومین گراف یالی یک گراف منظم G از درجهٔ بزرگتر از ۲ به‌طور کامل به‌وسیلهٔ مقادیر n و r تعیین می‌شود.

لم ۴.۴ فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف منظم از درجه و مرتبهٔ یکسان باشند. در این صورت برای هر $k \geq 2$ گراف های $L^k(G_1)$ و $L^k(G_2)$ از مرتبهٔ یکسان و تعداد مساوی از یال‌ها برخوردارند. به‌علاوه $L^k(G_1)$ و $L^k(G_2)$ هم‌طیف هستند اگر و تنها اگر G_1 و G_2 چنین باشند.

برهان. عبارت اول از معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) و این واقعیت که تعداد یال‌های $L^k(G)$ مساوی با تعداد رأس‌های $L^{k+1}(G)$ است، به‌دست می‌آید. عبارت دوم از (۷.۴) به‌دست می‌آید. فقط کافی است به دفعات کافی، قضیه اعمال شود. □

با ترکیب لم ۴.۴ و قضیهٔ ۳.۴ می‌توان به قضیهٔ زیر رسید.

قضیه ۵.۴ فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف منظم غیر هم‌طیف از یک مرتبه و درجهٔ $r \geq 3$ باشند. در این صورت برای هر $k \geq 2$، گراف خطی تکراری $L^k(G_1)$ و $L^k(G_2)$ تشکیل زوج گراف‌های هم‌انرژی غیر هم‌طیف از درجه و اندازهٔ مساوی می دهند. اگر به‌علاوه G_1 و G_2 همبند انتخاب شوند، آنگاه $L^k(G_1)$ و $L^k(G_2)$ نیز چنین خواهند بود.

حال ساختن خانوادهٔ بزرگ گراف‌های هم‌انرژی صادق در شرایط داده شده در قضیهٔ ۵.۴ آسان است. برای مثال، ۲، ۵، ۱۹ و ۸۵ گراف همبند منظم از درجهٔ ۳ و مرتبهٔ ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ به‌ترتیب وجود دارند [۱] که هیچ دوتای آن‌ها هم‌طیف نیستند. گراف‌های خطی تکراری از مرتبهٔ ۲ و بالاتر تشکیل خانواده‌ای شامل ۲، ۵، ۱۹ و ۸۵ ... گراف هم‌انرژی می‌دهند.

مراجع

[1] D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs- Theory and Application*, Academic Press, New York, 1980; 2nd revised ed. Barth, Heidelberg, 1995.

[2] D. M. Cvetkovic, M. Doob, I. Gutman, A. Torgasev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, American Math. Soc., Providence, 1997.

[4] Y. Colin de Verdiere, *Spectres de Graphes*, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[5] C. D. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[7] I. Gutman, *The energy of a graph*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsz. Graz **103** (1978) 1-22.

[8] I. Gutman, O. E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[9] I. Gutman, "Topology and stability of conjugated hydrocarbons. The dependence of total π - electron energy on molecular topology", *J. Serb. Chem. Soc.*, **70** (2005), 441-456.

[10] I. Gutman, "The energy of a graph: Old and new results", in: *Algebraic Combinatorics and Applications*, A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2001, 196-211.

[11] V. Brankov, D. Stevanovic, I. Gutman, "Equienergetic chemical trees", *J. Serb. Chem. Soc.*, **69** (2004), 549-553.

[12] R. Balakrishnan, "The energy of a graph", *Lin. Algebra Appl.*, **387** (2004), 287-295.

[13] W. Imrich, S. Klavzar, *Product Graphs-Structure and Recognition*, Wiley, New York, 2000.

[14] D. Stevanovic, "Energy and NEPS of graphs", *Lin. Multilin. Algebra*, **53** (2005), 67-74.

[15] G. Indulal, A. Vijayakumar, "Energies of some non-regular graphs", *J. Math. Chem.*, in press.

[16] S. Ramane, H. B. Walikar, "Construction of equienergetic graphs", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **57** (2007), 203-210.

[17] J. Liu, B. Liu, "On a pair of equienergetic graphs", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, in press.

[18] H. S. Ramane, H. B. Walikar, S. B. Rao, B. D. Acharya, P. R. Hampiholi, S. R. Jog, I. Gutman, "Equienergetic graphs", *Kragujevac J. Math.*, **26** (2004), 5-13.

[19] H. S. Ramane, I. Gutman, H. B. Walikar, S. B. Halkarni, "Another class of equienergetic graphs", *Kragujevac J. Math.*, **26** (2004), 15-18.

[20] H. S. Ramane, H. B. Walikar, S. B. Rao, B. D. Acharya, P. R. Hampiholi, S. R. Jog, I. Gutman, "Spectra and energies of iterated line graphs of regular graphs", *Appl. Math. Lett.*, **18** (2005), 679-682.

[21] H. S. Ramane, I. Gutman, H. B. Walikar, S. B. Halkarni, "Equienergetic complement graphs", *Kragujevac J. Sci.*, **27** (2005), 67-74.

ایوان گوتمن، دانشگاه کراگوجواک (صربستان) gutman@kg.ac.rs

علی‌رضا اشرفی، دانشگاه کاشان ـ گروه ریاضی ashrafi@kashanu.ac.ir

غلامحسین فتح‌تبار فیروزجایی، دانشگاه کاشان ـ گروه ریاضی fathtabar@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۵۱ تا ۶۰

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش

احسان سیاوشی

مقدمه

ریاضیات در طول تاریخ از نظر اکثر فلاسفه و دانشمندان، بهشتی برین برای متفکر به‌حساب می‌آمده است. نظام اصل‌موضوعی که اولین بار اقلیدس برای ارائهٔ هندسه‌اش به‌کار برد، نمونهٔ کامل خردورزی و اقناع‌کننده‌ترین روش عقلی بود، به‌طوری که متفکران سایر حوزه‌های اندیشه به آن رشک می‌بردند. چنان‌که مثلاً اسپینوزا در کتاب «اخلاق» و نیوتن در «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی» به‌تقلید از اقلیدس، نظراتشان را در قالب دستگاه‌های اصل‌موضوعی بیان کردند. ایمانوئل کانت، فیلسوف عصر روشنگری، معارف ریاضی را حقایق پیشینی می‌دانست و حتی راسل و کارنپ با او در این مورد هم عقیده بودند. اما چنان‌که در این مقاله هم خواهیم دید، چنین برداشتی از معرفت ریاضی از سوی برخی از برجسته‌ترین فیلسوفان و ریاضی‌دانان معاصر، به انحاء مختلف مورد تردید قرار گرفته است. ایمره لاکاتوش از آن جمله است.

۱. ایمره لاکاتوش (۱۹۲۲—۱۹۷۴)

ایمره لاکاتوش نام جعلی ایمره لیپزیتس[۱] است که در سال ۱۹۲۲ در یک خانوادهٔ یهودی اهل مجارستان متولد شد. او دو بار تغییر نام داد، یک بار برای خلاصی از اردوگاه‌های کار اجباری نازی از اسم تیبور مولنار[۲] استفاده کرد و بار دیگر پس از حملهٔ روس‌ها در سال ۱۹۴۵، اسمش را به ایمره لاکاتوش تغییر داد.

لاکاتوش قبل از اشغال مجارستان توسط نازی‌ها، ریاضیات، فلسفه و فیزیک خوانده بود. بعد از جنگ، تحصیلاتش را در دانشگاه اتووش[۳] ادامه داد و در عین‌حال در جناح چپ نیز فعال بود.

1) Imre Lipssitz 2) Tibor Molnar 3) Eötvös

در سال ۱۹۴۷ به‌عنوان مسئول اصلاحات در آموزش عالی انتخاب شد و سه سال بعد، به اتهام اقدام برای براندازی دستگیر شد و سه سال در زندان و یک سال را در انفرادی به‌سر برد. پس از آزادی، به دانشگاه بازگشت و زیر نظر آلفرد رنی[1]، روی نظریهٔ احتمال و نظریهٔ اندازه کار کرد. در همین زمان، کتاب معروف «چگونه مسأله را حل کنیم؟»[2] اثر جورج پولیا[3] را به مجارستانی ترجمه کرد. پس از سرکوب انقلاب توسط ارتش شوروی، مجارستان را به‌سوی وین ترک نمود. در سال ۱۹۵۷ یک بورس تحصیلی از کینگز کالج لندن به‌دست آورد و تز دکترایش را که بعدها با عنوان «برهان‌ها و ردها» منتشر شد، نوشت. کار روی حدس دکارت ــ اویلر پیشنهاد پولیا به لاکاتوش بود. بعدها در ۱۹۶۰ لاکاتوش در مدرسهٔ اقتصاد لندن زیر نظر کارل پوپر مشغول به‌کار شد و در سال ۱۹۶۹ به‌عنوان استاد منطق در همان‌جا انتخاب گردید. او در دوم فوریهٔ ۱۹۷۴ در سن ۵۱ سالگی درگذشت [۱].

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش عمدتاً از دو منبع الهام می‌گیرد: یکی از استادش پوپر و دیگری از جورج پولیا و آموزه‌هایش در باب فلسفه و آموزش ریاضی. کارل ریموند پوپر فیلسوفی بود که با انتشار کتاب «منطق اکتشاف علمی» [۱۳] در سال ۱۹۳۴، مدعی شد که گزاره‌های علمی قابل اثبات نیستند بلکه صرفاً قابل رد و ابطال‌اند. فرضیه‌های علمی هیچگاه اثبات نمی‌شوند. آن‌ها صرفاً حدس‌هایی هستند که چون از کورهٔ آزمون‌هاموفق بیرون آمدند، موقتاً پذیرفته می‌شوند. فلسفهٔ علم لاکاتوش اوج مکتب پوپری است. لاکاتوش در «روش‌شناسی برنامه‌های پژوهشی» [۲] سعی کرده است با عرضهٔ ابطال‌گرایی پیشرفتهٔ خود، انتقادات وارد بر ابطال‌گرایی پوپری را رفع کند.

کتاب «برهان‌ها و ردها» اغلب به‌عنوان تلاشی برای به‌کاربستن ابطال‌گرایی پوپری در قلمروی ریاضیات تلقی شده است. گویی همان‌طور که استاد علیه اثبات گرایی در علوم‌تجربی شورید تا نشان دهد که نظریات علمی قابل اثبات نیستند بلکه تنها قابل رد و ابطالند، شاگرد هم کوشیده است تا در تلقی سنتی از اثبات یقین‌آور ریاضی رخنه کند و نقش حدس‌ها و ردها را در ریاضیات نشان دهد. لاکاتوش اصطلاح ابطال‌پذیری[4] را در فلسفهٔ ریاضی خود از پوپر اخذ می‌کند.

جورج پولیا هم ریاضیدانی است که خصوصاً به‌خاطر نظراتش دربارهٔ آموزش ریاضی مورد توجه است. او نظراتش را در کتاب «ریاضیات و استدلال‌های اقناعی» [۳] آورده است. پولیا با روش متداول آموزش ریاضی که تحت تأثیر صورتگرایی مکتب بورباکی[5] قرار دارد شدیداً مخالف است. نویسندگان این مکتب ریاضیات را به‌صورت دستگاه‌های خشک صوری و انتزاعی به خواننده معرفی می‌کردند؛ در مقابل، پولیا روشی موسوم به روش اکتشافی[6] را ارائه می‌کند. در این روش به حدس‌های ریاضی، برهان‌های غیرصوری، استدلال‌های اقناعی و ... میدان داده می‌شود. لاکاتوش در فلسفهٔ ریاضی خود اصطلاح اکتشافی را هم از پولیا وام می‌گیرد.

1) Alfred Renyi 2) How to Solve It? 3) George Polya 4) Fallibilism 5) Bourbaki
6) Heuristic

۲. منطق اکتشاف ریاضی

«برهان‌ها و ردها: منطق اکتشاف ریاضی» [۴] اسم کتاب معروف لاکاتوش دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی است. عنوان کتاب، تأثیر پوپر را نشان می‌دهد. ادعای لاکاتوش در این کتاب این است که اکتشاف ریاضی روندی دیالکتیکی دارد. به عبارت دیگر، اکتشاف ریاضی با حرکت یکراست از اصول به سمت قضایا حاصل نمی‌شود بلکه فرایندی است که با آزمون و خطا راه خود را می‌یابد. لفظ دیالکتیک یادآور نام سقراط است. این یادآوری بی‌مورد نیست. محاورهٔ منون [۱۴] گفتگویی بین سقراط و یک برده‌ی امّی با نام منون است دربارهٔ این سؤال که «اندازهٔ وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن یک باشد، چقدر است؟» منون مکرراً پاسخ‌های غلطی می‌دهد. اما سقراط به روش دیالکتیکی خود و با وانمایی نقایص آن پاسخ‌ها، در طی گفتگو منون را به کشف قضیهٔ فیثاغورس رهنمون می‌شود. این همان روشی است که لاکاتوش در «برهان‌ها و ردها» به‌کار می‌بندد تا طی دیالکتیکی بین معلم و شاگردان (که با حروف الفبای یونانی نامیده می‌شوند) به اثبات حدس اویلر بپردازند. از سوی دیگر، منطق غیردیالکتیکی خود را با روابط بین گزاره‌ها مشغول می‌کند در حالی که منطق دیالکتیکی متوجهٔ بسط و گسترش مفاهیم است. همان‌طور که افلاطون با بحث دیالکتیکی دربارهٔ عدالت به مفهوم عدالت و تعریف جدیدی از آن می‌رسد، نگاهی به تاریخ ریاضیات و بسط مفاهیمی چون پیوستگی، همگرایی، میل کردن و ... از زمان نیوتن و لایب‌نیتز تا توپولوژی معاصر، اتفاق مشابهی را نشان می‌دهد.

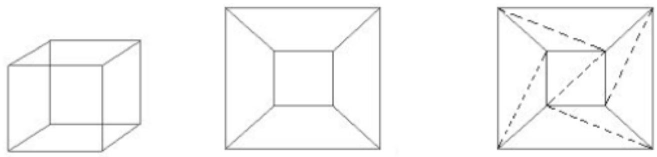
برهان‌های ریاضی عمدتاً در آغاز، غلط یا ناقص هستند. به‌تدریج مفروضات نهفته و استدلال های آن‌ها مورد نقد قرار می‌گیرند. در صورتی که راه حلی برای رفع این انتقادات وجود داشته باشد برهان تکامل می‌یابد، واگرنه برهان اصلاح یا به‌کلی کنار گذاشته می‌شود. این خلاصه‌ای از تبیین لاکاتوش برای منطق اکتشاف ریاضی بود. او با ذکر دو مثال از موضع خود دفاع می‌کند: حدس دکارت ــ اویلر و قضیهٔ پیوستگی کُشی.

الف) حدس دکارت ــ اویلر

فرض کنید V تعداد رئوس، E تعداد یال‌ها و F تعداد وجوه یک چندوجهی باشند. در این صورت بنابر حدس دکارت ــ اویلر، $V - E + F = ۲$. لاکاتوش در [۴] به‌شیوهٔ بحث بین معلم و شاگردان، به اثبات این حدس می‌پردازد. نخست معلم ادعا می‌کند برهانی برای این حدس دارد.

معلم:«من یک برهان دارم. برهان من بر اساس تجربهٔ ذهنی زیر است. مرحلهٔ اول: تصور کنید چندوجهی مورد نظر توخالی است و سطح آن نیز از لاستیک نازکی ساخته شده است. اگر یکی از وجوه آن را ببُریم، بقیهٔ وجوه را می‌توانیم بکشیم و روی تخته سیاه پهن کنیم بدون آن‌که پاره شود. البته وجه‌ها و اضلاع تغییر شکل می‌یابند اما E و V ثابت می‌مانند ولی از F یکی کم می‌شود (همان وجهی که روی تخته سیاه باز کردیم). بنابراین فرمول $V - E + F = ۲$ برای چندوجهی اصلی

درست است تنها اگر فرمول $V - E + F = 1$ برای این شبکهٔ مسطح درست باشد (شکل ۱).

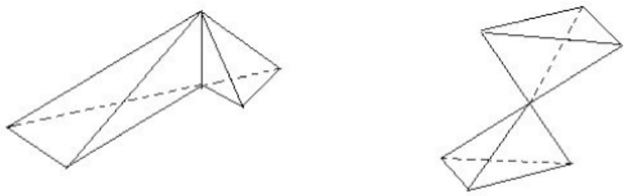


مرحلهٔ دوم: شبکهٔ مسطح را مثلث‌بندی می‌کنیم. با رسم هر قطر از یک چندضلعی، یکی به E و یکی به F اضافه می‌شود. بنابراین مقدار $V - E + F$ ثابت می‌ماند. پس در شبکهٔ مثلث‌بندی شده، هنوز رابطهٔ $V - E + F = 1$ برقرار است.

مرحلهٔ سوم: حالا از شبکهٔ مذکور یکی یکی مثلث‌ها را برمی‌داریم. برای حذف یک مثلث، یا یکی از یال‌های شبکه را برمی‌داریم که در این صورت یک وجه و یک یال کم می‌شود یا دو یال بر می‌داریم که در این صورت، دو یال، یک وجه و یک رأس کم می‌شود. بنابراین رابطهٔ $V - E + F = 1$ همچنان برقرار می‌ماند. در پایان، تنها یک مثلث باقی خواهد ماند که به‌وضوح رابطهٔ $V - E + F = 1$ برای آن برقرار است. پس ما حدسمان را به اثبات رساندیم.»

این استدلال دلتا را قانع می‌کند اما آلفا، بتا و گاما قانع نمی‌شوند. هر یک از اینان یکی از مراحل سه‌گانهٔ معلمشان را مورد تردید قرار می‌دهند و معلم نقص برهانش را می‌پذیرد.

به نظر می‌رسد برای اثبات این حدس به مفروضات بیشتری نیاز داریم. در ادامهٔ گفتگو، شاگردان چند مثال نقض برای حدس اویلر می‌آورند (شکل ۲).



همان‌طور که می‌بینیم لاکاتوش به ریاضی‌دانان پیشنهاد می‌کند دو کار متناقض را با هم انجام دهند: حدس‌ها را اثبات کنند و سپس در رد آنان بکوشند. از نظر او نه اثبات‌ها برهان قاطع هستند و نه مثال‌های نقض به‌کلی قضیه را منتفی می‌کنند [۵]. این رویکردی تکاملی به نحوهٔ کسب معرفت ریاضی است. به این معنی که ما به حقایق ریاضی توسط سلسله‌ای از برهان‌ها و ردهای پیاپی و به‌تدریج دست می‌یابیم.

گفتگو ادامه می‌یابد. آن‌ها می‌کوشند برای ایرادات بیان شده راه حل‌هایی بیابند. نخست دلتا که از استدلال معلم قانع شده بود، می‌گوید:

دلتا: «اما چرا باید مثال نقض را بپذیریم؟ ما حدسمان را اثبات کرده‌ایم و حالا تبدیل به یک قضیه شده است. البته من می‌پذیرم که قضیهٔ ما با این مثال‌های نقض در تقابل است و یکی باید کنار گذاشته شود، اما چرا باید قضیه را کنار گذاشت؟ در حالی که اثبات شده است!»

گاما: «چرا که نه؟ چندوجهی یک جسم صلب است که رویه‌هایش به‌شکل چندضلعی مسطح هستند و مثال‌های نقض ما این ویژگی را دارند.»

در اینجا معلم سعی می‌کند بحث را به تعریف چندوجهی بکشد. سه تعریف از چندوجهی ارائه می‌دهند. هربار سعی می‌شود نقایص تعریف پیشین برطرف شود و از مثال‌های نقض اجتناب کنند. در نهایت، آن‌ها به این نتیجه می‌رسند که قضیهٔ اویلر را برای حالتی که چندوجهی مذکور ساده باشد، یعنی اولاً حفره نداشته باشد و ثانیاً بتوان سطح آن را به‌گونه‌ای دگردیس کرد که به کره تبدیل شود، اثبات کرده‌اند [۵، ۱۵].

ب) قضیهٔ پیوستگی کُشی

در ضمیمهٔ [۴] و نیز در [٦]، لاکاتوش به قضیهٔ پیوستگی کُشی می‌پردازد. این مثال نسبت به مثال قبل این برتری را دارد که نمونه‌ای واقعی است. کُشی که در استوار ساختن پایه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال سهم بسزایی دارد، قضیهٔ نادرست زیر را اثبات کرد.

فرض کنید سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ برای هر x به $f(x)$ همگرا و هر f_n پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

این قضیه غلط است و امروزه مثال‌های نقض زیادی برای آن می‌شناسیم. یکی از این مثال‌ها سری فوریهٔ زیر است که در سال ۱۸۰۷ منتشر شد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

در سال ۱۸۴۷ زایدل[1] که متوجه این مثال نقض بود، به بررسی مجدد قضیهٔ کُشی پرداخت و فرض پنهان در اثبات کُشی را که موجب اشکال شده بود، یافت. کُشی از شرط همگرایی نقطه‌ای استفاده کرده بود در حالی‌که برای اثبات این قضیه باید از شرطی قوی‌تر که امروزه آن را به اسم «همگرایی یکنواخت» می‌شناسیم استفاده کرد. به این ترتیب، تکمیل یک برهان به کشف یک مفهوم جدید منتهی شد [١٦].

---

1) Seidel

۳. رویکرد تجربی به ریاضیات

همان‌طور که پیش از این هم اشاره شد، برخی از فلاسفهٔ معاصر علم به دلایل مختلف از نوعی تجربه‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی طرفداری کرده‌اند. اینان ریاضیات را بیش از پیش به فیزیک نزدیک می‌بینند، منکر پیشینی بودن معرفت ریاضی هستند، از رویکرد اکتشافی و حدس‌های ابطال‌پذیر ریاضی سخن می‌گویند و در پرتوی قضیهٔ ناتمامیت گودل، ریاضیات را فارغ از دستگاه‌های اصل موضوعی دارای هویتی مستقل می‌دانند. حتی برخی مانند هیلاری پاتنم [۲] به‌دنبال ریاضیاتی بدون اصول موضوع هستند [۷].

باید توجه داشت که مراد همهٔ این فلاسفه از ریاضیات تجربی یکسان نیست. لاکاتوش ریاضیات را دانشی تجربی می‌داند اما مقصود او کاملاً با آنچه کواین از این اصطلاح در ذهن دارد، متفاوت است.

ویلارد ون اورمن کواین [۳] از یک سو تمایز سنتی ترکیبی ــ تحلیلی گزاره‌ها را انکار کرد و از سوی دیگر قائل به کلگرایی [۴] شد [۸، ۹]. نتیجهٔ چنین موضعی این است که ریاضیات و منطق را نیز به همان معنایی که فیزیک را علمی تجربی می‌دانیم، دانشی تجربی به‌حساب آوریم. به عبارت دیگر، یک آزمایش در جهان فیزیکی (مثلاً در ذرات بنیادی) می‌تواند ریاضیات ما را تغییر دهد. اما منظور لاکاتوش از ریاضیات تجربی این است که حدس‌های ریاضی را می‌توان به محک تجربه گذاشت، اما نه تجربهٔ فیزیکی، بلکه تجربه و آزمایش ذهنی.

لاکاتوش [۱۰] نقل قول‌های متعددی از فیلسوفان و ریاضی‌دانان معاصر آورده است تا تغییر جهت به سمت تجربه‌گرایی در ریاضیات را نشان دهد. بعضی از آن‌ها را در ادامه می‌آوریم. دو نقل قول اول از راسل و کارنپ است که بیشتر به منطق‌گرایی [۵] معروفند، اما این نقل قول‌ها نشان می‌دهند که بعدها به سمت تجربه‌گرایی متمایل شده‌اند.

راسل (۱۹۲۴):

> «منطق (و ریاضیات) کاملاً مانند معادلات ماکسول در الکترودینامیک هستند: اعتقاد به هر دوی آن‌ها تنها به‌خاطر مشاهدهٔ صدق نتایج منطقی‌شان است.»

کارنپ (۱۹۶۳):

> «یک نظریه در فیزیک را مادامی که پیش‌بینی‌های مفیدی می‌کند می‌پذیریم و به محض این‌که چنین نکند آن را اصلاح یا ترک می‌کنیم. این همان اتفاقی است که برای نظریه‌های ریاضی در گذشته رخ داده است. جایی که اکتشاف یک تناقض، منتهی به اصلاحاتی در دیدگاه‌های ریاضی مقبول شده است.»

---

1) Hillary Putnam 3) Willard Van Orman Quine 4) Holism 5) Logicism

برخی دیگر از این قبیل اظهارات تحت تاثیر قضیهٔ ناتمامیت گودل ابراز شده‌اند. گودل ثابت کرد اگر حساب سازگار باشد، آنگاه ناتمام است. این قضیه امیدهای بلند هیلبرت را به یأس تبدیل نمود.

وایل (۱۹۴۹):

> «هیچ هیلبرتی قادر نخواهد بود ما را برای همیشه نسبت به سازگاری مطمئن سازد. باید رضایت دهیم که یک دستگاه اصل موضوعی ریاضی هم تاکنون از کورهٔ آزمایش‌های مفصل ما موفق بیرون نیامده است. یک ریاضیات واقع‌بینانه باید مانند فیزیک شاخه‌ای از ساختار نظری جهان واقعی باشد و مانند فیزیک برای توسعهٔ مبانی خود با احتیاط گام بردارد.»

گودل در مقالهٔ معروف خود «فرضیهٔ پیوستار کانتور چیست؟» ادراک ما از اشیاء ریاضی را با ادراکمان از اشیاء فیزیکی چنین مقایسه می‌کند:

> «از اشیاء نظریهٔ مجموعه‌ها هم چیزی شبیه ادراک داریم و این واقعیت نشان می‌دهد که اصول، خود را بر ما تحمیل می‌کنند. من هیچ دلیلی نمی‌بینم که به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، اطمینان کمتری داشته باشم تا به ادراک حسی که به ساختن نظریه‌های فیزیکی و امید بستن به این که در آینده با آن‌ها سازگار درآیند، ترغیبمان می‌کند.»[۱۵]

از آنجا که نظریات علمی دارای ابطال‌گرهایی بالقوه هستند، لازم است لاکاتوش برای تأکید بر شباهت بین روش‌های اکتشاف در علوم تجربی با ریاضیات، ابطال‌گرهای بالقوهٔ ریاضی را معرفی کند. اولین ابطال‌گر، تناقض است که در این مورد با ریاضیات سنتی هم‌داستان است. نوع دیگر ابطال‌گر، مثال‌های نقض هستند که غالباً به تجدید نظر در تعاریف منجر می‌شود. نوع آخر ابطال‌گرها وقتی پیش می‌آیند که در صدد اصل‌موضوعی کردن بخشی از ریاضیات هستیم و بعد معلوم می‌شود دستگاه ارائه شده، انتظارات مورد نظر را برآورده نمی‌کند. لاکاتوش سه مثال از نظریه‌های صوری ابطال شده ارائه می‌کند: ۱. صوری‌سازی نظریهٔ خمینه‌ها (مانیفلدها) توسط ریمان که به‌وسیلهٔ نوار موبیوس ابطال شد. ۲. ساختار اصل موضوعی کولموگروف برای نظریهٔ احتمالات که در چهارچوب آن گزاره‌ای شهودی مانند «همهٔ اعداد طبیعی احتمال وقوع برابر دارند» را نمی‌توان صوری کرد. ۳. نظر گودل دربارهٔ این‌که دستگاه صوری زرملو ــ فرانکل (ZF) و دستگاه‌های مشابه آن، تعبیر درستی از نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌باشند، زیرا در چهارچوب آن‌ها نمی‌توان فرضیهٔ پیوستار کانتور را نفی کرد [۱۱].

لاکاتوش با صورتگراها در مورد این که ریاضیات را صرفاً مجموعه‌ای از دستگاه‌های صوری بدانیم مخالف است. او می‌گوید یک برهان نباید لزوماً صوری باشد. یک نمونه از برهان غیرصوری همان استدلال معلم برای حدس دکارت ــ اویلر است. نمونهٔ دیگر، قضیهٔ زیر است:

اگر حدس گلدباخ در نظام اصل موضوعی نظریهٔ اعداد (اصول پئانو) تصمیم‌ناپذیر باشد، آنگاه این حدس در تعبیر ریاضی مینیمال ما صحیح خواهد بود.

برهان: اگر حدس گلدباخ تصمیم‌ناپذیر باشد، آنگاه در برخی تعبیرهای دستگاه اصل موضوعی پئانو صحیح و در برخی از آن‌ها غلط است. از طرفی، یک تعبیر مینیمال از این نظریه وجود دارد که جزٔ همهٔ تعبیرهای دستگاه پئانو است. اگر در این تعبیر حدس گلدباخ غلط باشد، آنگاه در همهٔ تعبیرها غلط خواهد بود و لذا تصمیم‌پذیر خواهد شد. بنابراین این حدس در تعبیر مینیمال صحیح است [۱۲].

لاکاتوش مدعی است که استدلال فوق را هر ریاضی‌دانی می‌پذیرد در حالی‌که نمی‌توان آن را به‌زبان صوری برگرداند. یک صورتگرا احتمالاً نباید چنین برهان‌هایی را بپذیرد. از سوی دیگر، لاکاتوش ادعا می‌کند که اثباتی ممکن است کاملاً صوری باشد اما هیچ‌کس را قانع نکند. او برای حدس اویلر، برهان دیگری می‌آورد. برهانی صوری به این ترتیب: دستگاهی صوری بسازید که فقط شامل یک اصل موضوع باشد. این اصل را A بنامید. این دستگاه تنها یک قاعدهٔ استنتاج دارد: همهٔ اصول موضوعه، قضیه هستند. حال A را قضیهٔ اویلر تعبیر کنید. از نظر لاکاتوش این برهان دقیقترین اصول صورتگرایی را رعایت می‌کند اما آیا صورتگرا آن را می‌پذیرد؟! [۱۱]

نتیجه‌گیری و نقد

۱. اگر رویدادهایی را که در دهه‌های اخیر در فلسفهٔ ریاضی و فلسفهٔ علوم طبیعی رخ داده است مرور کنیم، در می‌یابیم که این دو به هم نزدیکتر شده‌اند. یعنی مثلاً فیزیک انتزاعی‌تر و ریاضیات تجربی‌تر ملاحظه شده‌اند.

مشاهده مسبوق به نظریه است. مفهوم مشاهده از عینیت محض فاصله گرفته و جنبه‌های ذهنی و انتزاعی آن بیش از پیش آشکار شده است. از سوی دیگر، خود اشیاء مورد بحث در فیزیک نظیر پوزیترون، کوارک، ریسمان و ... موجوداتی انتزاعی هستند که دیگر به مفهوم سنتی «مشاهده‌پذیر» نیستند و از لحاظ دسترس‌پذیری دست‌کمی از اشیاء ریاضی ندارند. مکانیک موجی تماماً بر پایهٔ تابعی موسوم به ψ است که به خودی خود هیچ نمود فیزیکی ندارد و کاملاً یک شیٔ ریاضی است.

همان‌طور که در این مقاله هم دیدیم، در فلسفهٔ ریاضی، نوعی تلقی تجربه‌گرایانه رواج یافته است. شهود ریاضی اهمیت یافته و بر صورتگرایی صِرف چیره شده است. نقل‌قولی که از گودل آوردیم موید همین نکته است. از اشیاء ریاضی نیز ادراکی مانند ادراک حسی داریم.

۲. فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش محل بحث بوده است. مثلاً ففرمن ده نقد بر آن وارد کرده است [۱۶]. تصور می‌کنم اگر بناست فلسفهٔ یک علم توضیحی از نحوهٔ تکامل و پیشرفت آن ارائه کند، چنان‌که ظاهراً لاکاتوش چنین قصدی دارد (به هر حال او مدعی «منطق اکتشاف ریاضی» است)، آنگاه باید دید که این فلسفه چگونه کشف هندسه‌های نااقلیدسی را توضیح خواهد داد. با استناد به شواهد تاریخی که از [۱۸] می‌آورم می‌خواهم نشان دهم در این‌که فلسفهٔ لاکاتوش در این مورد موفق باشد، می‌توان تردید کرد.

تلاش‌های مکرر ریاضیدانان در طول بیش از دو هزار سال برای اثبات اصل پنجم به‌وسیلهٔ سایر اصول، ناکام ماند. تا این‌که ساکری (۱۶۶۷—۱۷۳۳) و لامبرت (۱۷۲۸—۱۷۷۷) تصمیم گرفتند با برهان خلف عمل کنند. آن‌ها نقیض اصل توازی را به سایر اصول افزودند و کوشیدند تناقضی به‌دست آورند. این دو اگرچه هرگز تناقضی نیافتند، اما قادر نبودند این نتیجه را بپذیرند. در واقع آن‌ها بدون آن‌که خود بدانند هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کرده بودند. بنابراین آن‌ها هیچ شهود پیش‌صوری از آنچه به‌دست می‌آوردند، نداشتند. چنین نبود که حدس زده باشند هندسهٔ دیگری ممکن است و آنگاه در صدد اثبات آن برآیند. حتی برای گاوس هم مسأله از این قرار بود: «همهٔ تلاش‌های من برای یافتن یک تناقض یا ناسازگاری در این هندسهٔ نااقلیدسی به شکست انجامیده است.»

لاکاتوش می‌گوید یک شاخه از ریاضیات ابتدا به‌وسیلهٔ برهان‌های نادقیق و غیرصوری ساخته می‌شود و در مرحلهٔ بعد، در جستجوی صوری‌کردن آن به‌وسیلهٔ یک دستگاه اصل موضوعی بر می‌آییم. اما به نظر می‌رسد کشف هندسه‌های نااقلیدسی چنین الگویی ندارد. هندسهٔ نااقلیدسی در مقابل سرسختی و انکار کاشفانش، سال‌ها پس از این که کشف شد، سرانجام پذیرش خود را به همه تحمیل کرد.

۳. باید توجه داشت که فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش بیشتر روش‌شناسی است تا یک فلسفهٔ ریاضی تمام‌عیار، زیرا در آن، مسائل هستی‌شناختی ریاضی، ماهیت این اشیاء و مسائلی از این دست، بسیار کمرنگ هستند و در انتقادهای او به صورتگرایی خلاصه می‌شوند.

۴. نتیجهٔ آخر این‌که ریاضیات و فلسفه به یکدیگر وابسته‌اند. چنان‌که فرگه گفته است: «فیلسوفی که ریاضیات نداند نیمی از یک فیلسوف است و ریاضی‌دانی هم که فلسفه نداند نیمی از یک ریاضی‌دان.»

تشکر و سپاس:

از استادانم آقایان دکتر محمد اردشیر از دانشکدهٔ ریاضی و دکتر امیر احسان کرباسی‌زاده از گروه فلسفهٔ علم دانشگاه صنعتی شریف به‌خاطر خواندن مقاله، بحث‌ها و راهنمایی‌های ارزشمندشان سپاسگزارم و برای ایشان آرزوی بهروزی می‌کنم.

مراجع

[1] Larvor, Brendan, *Lakatos: An Introduction*, Routledge, London, 1998.

[2] Lakatos, Imre, *Falsification and Methodology of Scientific Research Programs*, Cambridge University Press, 1978.

[3] Polya, George, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University press, 1990.

[4] Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1979.

[5] Brown, Robert, *Philosophy of Mathematics*, Routledge, London, 1999.

[6] Lakatos, Imre, *Cauchy and the Continuum, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[7] P. Benacerraf and H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

[8] Quine, Willard. O, *Two Dogmas of Empiricism*, in: "From a Logical Point of View", Harvard University Press, 1953.

[9] Quine, Willard. O, *Methods of Logic*, Routledge and Kegan Paul, (1974).

[10] Lakatos, Imre, *A Renaissanse of Empricism in the Recent Philosophy of Mathematics?, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[11] Lakatos, Imre, *What Does a Mathematical Proof Prove?, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[12] Lakatos, Imre, *Infinite Regress and Foundations of Mathematics, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[۱۳] پوپر، کارل، منطق اکتشاف علمی، سید حسین کمالی، علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۰.

[۱۴] افلاطون، دورهٔ کامل آثار افلاطون (جلد اول)، محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳٦۷.

[۱۵] لاکاتوش، ایمره، اثبات ریاضی چیست؟ (دیدگاه‌ها و برهان‌ها، شاپور اعتماد، نشر مرکز، تهران، ۱۳۷۵.

[۱٦] اردشیر، محمد، نقد ففرمن بر فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی،شمارهٔ ۲۷، تهران، پاییز ۱۳۸۰.

[۱۷] گودل، کرت، مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟، ضیاً موحد، نشر ریاضی، مرکز نشر دانشگاهی، سال دوم شمارهٔ ۱، تهران، ۱۳٦۸.

[۱۸] گرینبرگ، ماروین، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، م. ه. شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.

احسان سیاوشی
دانشگاه ملایر، گروه ریاضی
پست الکترونیک: siavashi.e@gmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۶۱ تا ۷۳

مسألهٔ اعداد همنهشت و حدسیهٔ BSD دربارهٔ رتبه‌های خم‌های بیضوی

علی سرباز جانفدا ــ سجاد سلامی

چکیده

در این مقاله، مسألهٔ حل نشدهٔ تاریخی اعداد همنهشت مورد مطالعه قرار گرفته و ارتباط تنگاتنگ این مسأله با حدسیه BSD درباره رتبه‌های خم‌های بیضوی تعریف شده روی میدان اعداد گویا مطرح شده است. حدسیهٔ BSD یکی از مسائل یک میلیون دلاری بنیاد ریاضیات کلِی[1] است که توسط بیرچ و سوینرتون ــ دایر[2] در سال ۱۹۶۵ میلادی بیان شده است. با استفاده از قضیهٔ تانِل راه‌حلی برای مسألهٔ اعداد همنهشت بیان شده است که مشروط به درست بودن حدسیهٔ BSD است.

واژه‌های کلیدی: اعداد همنهشت، خم‌های بیضوی، حدسیهٔ BSD.
رده بندی موضوعی (MSC2000): 14G10، 14H52.

۱. مقدمه

در ریاضیات، به‌ویژه در نظریهٔ اعداد، مسائلی وجود دارند که خیلی طبیعی و ساده مطرح می‌شوند ولی یافتن جوابی برای آنها خیلی مشکل بوده و برای اثبات یا رد کردن آنها روش‌های خیلی پیچیده‌ای لازم است. یکی از این مسائل، مسألهٔ اعداد همنهشت، طرح و بیان خیلی ساده‌ای دارد با این حال، بیش از ده قرن است که ذهن خیلی از ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرده است. در این مقاله، قصد داریم ارتباط این مسأله را با یکی از حدسیه‌های مهم و پرطرفدار در نظریهٔ اعداد بررسی کنیم. این کار را با استفاده از نظریهٔ خم‌های بیضوی انجام خواهیم داد. در واقع، همین نظریه بود که در اثبات قضیهٔ آخر فرما، توسط وایلز[3] نقش اساسی ایفا کرد. برای اطلاع از روند این اثبات خواننده را به [۲۲] ارجاع می‌دهیم.

1) Clay Mathematical Institute 2) Birch & Swinnerton-Dyer 3) Andrew Wiles

ساختار این مقاله به این صورت است که ابتدا، در بخش ۲، مسألهٔ اعداد همنهشت را به‌طور مختصر از جنبهٔ تاریخی مطرح و برخی از نتایج به‌دست آمده را ذکر می‌کنیم. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ تاریخچهٔ این مسأله می‌توانید به [۹] و [۱۷] مراجعه کنید. در بخش ۳، یک الگوریتم ساده برای به‌دست آوردن اعداد همنهشت بیان و معایب آن را بررسی می‌کنیم. در بخش ۴، مختصری از نظریهٔ خم‌های بیضوی را مطرح کرده و حدسیهٔ BSD را دربارهٔ رتبه‌های خم‌های بیضوی ارائه می‌کنیم. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ نظریهٔ خم‌های بیضوی و حدسیهٔ BSD می‌توانید مراجع [۳] و [۲۰] را مطالعه کنید. در بخش ۵، ضمن بیان ارتباط بین مسألهٔ اعداد همنهشت با حدسیهٔ BSD، برخی از نتایج مهم به‌دست آمده را ذکر می‌کنیم که قضیهٔ تانل [۲۴] مهم‌ترین آنها است. در دههٔ اخیر، با استفاده از نظریهٔ گراف‌ها برای محاسبهٔ گروه‌های سِلمر خم‌های بیضوی تعریف شده توسط رابطهٔ $y^2 = x^3 - n^2x$، نتایج جالبی دربارهٔ مسألهٔ اعداد همنهشت به دست آمده است که به‌دلیل طولانی شدن مطلب از آوردن آنها در این مقاله خودداری کرده‌ایم. علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه به [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] رجوع کنند.

۲. تاریخچه‌ای مختصر از مسألهٔ اعداد همنهشت

در این بخش قصد داریم تاریخچهٔ مختصری از مسألهٔ اعداد همنهشت بیان کنیم که قدمتی بیش از ده قرن داشته و هنوز هم جذابیت خود را از دست نداده است و جزء مسائل جالب نظریهٔ اعداد به‌شمار می‌آید. کارمان را با تعریف عدد همنهشت آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. عدد طبیعی n را یک عدد همنهشت[1] می گوییم هرگاه برابر با مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع گویا باشد؛ یعنی اعداد گویای مثبت a، b و c موجود باشند که

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad ab = 2n, \quad a < b < c. \tag{۳}$$

به‌عنوان مثال، ٦ عدد همنهشت است چون برابر با مساحت مثلثی قائم‌الزاویه با اضلاع $(3, 4, 5)$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲. عدد طبیعی n را خالی از مربع[2] می‌گوییم هرگاه مربع هیچ عددی آن را عاد نکند. به‌طور مثال، ۵ و ٦ خالی از مربع هستند ولی $5 \cdot 2^2 = 20$ خالی از مربع نیست.

مسأله ۳.۲. کدام یک از اعداد طبیعی n اعداد همنهشت هستند؟

مسألهٔ اعداد همنهشت از دیرباز مورد مطالعهٔ ریاضیدانان قرار گرفته ولی تاکنون به‌طور کامل حل نشده است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که سابقهٔ مسألهٔ اعداد همنهشت حداقل به زمان دیوفانتوس برمی‌گردد [۵].

1) congruent number 2) square-free

قضیه ۴.۲. عدد طبیعی n یک عدد همنهشت است اگر و فقط اگر دستگاه معادلات چهار مجهولی

$$\begin{cases} x^۲ + ny^۲ = z^۲ \\ x^۲ - ny^۲ = t^۲ \end{cases}$$

دارای جواب غیر بدیهی باشد؛ یعنی جوابی با $y > ۰$ وجود داشته باشد.

در قرن سیزدهم میلادی، فیبوناتچی در یکی از کتاب‌های خود، بدون ارائهٔ هیچ اثباتی، ادعا کرده بود که عدد ۱ عددی همنهشت نیست. در اوایل قرن شانزدهم میلادی فرما با استفاده از روش نزول نامتناهی[۱] این ادعا را ثابت کرد. وی همچنین نشان داد که ۲ و ۳ نیز اعداد همنهشت نیستند [۹]. در سال ۱۲۲۰ میلادی فیبوناتچی نشان داد که عدد ۵ یک عدد همنهشت است. درستی این مطلب را می‌توان با به‌کار بردن قضیهٔ ۴.۲ برای $n = ۵$ و با توجه به تساوی‌های زیر نتیجه گرفت:

$$۴۱^۲ + ۵ \cdot ۱۲^۲ = ۴۹^۲, \quad ۴۱^۲ - ۵ \cdot ۱۲^۲ = ۳۱^۲.$$

چون آن زمان عدد همنهشت به‌مفهوم امروزی جا افتاده نبود، وی مسألهٔ یافتن مجذور کاملی را مطرح کرد که اگر ۵ بدان اضافه یا از آن کاسته شود، عدد حاصل مجذور کامل $(\frac{۴۱}{۱۲})^۲$ را بدهد. تقسیم روابط بالا بر $۱۲^۲$ نشان می‌دهد که این مسأله با همنهشت بودن عدد ۵ معادل است [۹]. بدین ترتیب، ۵ کوچک‌ترین عدد همنهشت است.

بعضی از ریاضی‌دان‌های دورهٔ اسلامی هم از دیرباز به مسألهٔ اعداد همنهشت پرداخته‌اند چنان‌که دیکسون در فصل ۱۶ از [۹] می‌نویسد: «در یک نسخهٔ خطی که پیش از سال ۹۷۲ میلادی به زبان عربی و با عنوان موضوع اساسی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی گویا، نوشته شده و در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود ولی نویسندهٔ آن نامعلوم است، مسألهٔ اعداد همنهشت مطرح و در آن ۳۰ عدد خالی از مربع زیر آمده‌اند که در واقع از لحاظ تاریخی اولین فهرست از اعداد همنهشت به شمار می‌آید:

$$۵, ۶, ۱۴, ۱۵, ۲۱, ۳۰, ۳۴, ۶۵, ۷۰, ۱۱۰, ۱۵۴, ۱۹۰, ۲۱۰, ۲۲۱, ۲۳۱, ۲۸۶, ۳۳۰, ۳۹۰,$$
$$۴۲۹, ۵۴۶, ۱۱۵۵, ۱۲۵۴, ۱۷۸۵, ۱۹۹۵, ۲۷۳۰, ۳۵۷۰, ۴۲۹۰, ۵۶۱۰, ۷۸۵۴, ۱۹۳۷۴.$$

لم زیر نشان می‌دهد که مسألهٔ اعداد همنهشت را می‌توان از مجموعهٔ اعداد طبیعی به مجموعهٔ اعداد طبیعی خالی از مربع تقلیل داد. بنابراین، در ادامه، n را یک عدد طبیعی خالی از مربع در نظر خواهیم گرفت.

لم ۵.۲. هرگاه عدد طبیعی n به‌صورت $n = t^۲m$ باشد که $t, m \in \mathbb{N}$، آن‌گاه n یک عدد همنهشت است اگر و تنها اگر m یک عدد همنهشت باشد.

---

1) infinite descend

برهان. به‌راحتی می‌توان نشان داد که اعداد گویای مثبت a، b و c در برابری اول رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند اگر و تنها اگر به‌ازای هر $u \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$، اعداد a/u، b/u و c/u در برابری اول رابطهٔ (۱) صدق کنند. □

فهرست زیر، تمامی اعداد همنهشت خالی از مربع کمتر از ۱۰۰ را به‌دست می‌دهد [۲۱]:

$$5, 6, 7, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 29, 30, 31, 34, 37, 38, 39, 41, 46,$$
$$47, 53, 55, 61, 62, 63, 65, 69, 70, 71, 78, 79, 85, 86, 87, 93, 94, 95.$$

در سال ۱۹۷۲ آلتر[1]، کورتز[2] و کوبوتا[3] حدسیه‌ای را مطرح کردند که تاکنون درستی یا نادرستی آن به اثبات نرسیده است بلکه فقط برای اعداد طبیعی $n \leq 10^8$ توسط گروهی به سرپرستی اِلکیس[4] در دانشگاه هاروارد بررسی شده است.

حدسیه ۶.۲. اگر n یک عدد طبیعی خالی از مربع باشد که $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$ (به‌پیمانه ۸)، آنگاه n یک عدد همنهشت است.

لازم به یادآوری است که به‌ازای هر $r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$، تعداد نامتناهی عدد همنهشت n با شرط $n \equiv r$ (به پیمانه ۸) وجود دارند [۶]. همچنین، وجود خانواده‌های پارامتری شده‌ای از اعداد همنهشت ثابت شده است. به‌عنوان مثال، در [۱۹] ثابت شده است که تمامی اعداد طبیعی به شکل زیر اعداد همنهشت هستند:

$$n = \frac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 + m_2), \quad \gcd(m_1, m_2) = 1, \quad m_1, m_2 > 1.$$

از طرف دیگر، وجود خانواده‌هایی از اعداد غیرهمنهشت با تعداد دلخواهی از عامل‌های اول نیز ثابت شده است. به‌عنوان مثال، اعداد طبیعی $n = p_1 \cdots p_t$ که در آن $p_i \equiv 3$ (به‌پیمانه ۸) اعداد غیرهمنهشت هستند. علاقه‌مندان می‌توانند برای دیدن خانواده‌های دیگری از اعداد غیرهمنهشت به [۱۱]، [۱۲] و [۱۳] مراجعه کنند.

۳. یک الگوریتم ساده ولی نامناسب

فرض می‌کنیم u و v اعداد صحیح مثبتی باشند که $u < v$ و $u + v$ عددی فرد است. با توجه به تساوی $(u^2 + v^2)^2 = (2uv)^2 + (v^2 - u^2)^2$ نتیجه می‌شود که $v^2 - u^2$ و $2uv$ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $u^2 + v^2$ هستند. بنابراین با انتخاب u و vهای متفاوت می‌توان نتیجه گرفت که قسمت خالی از مربع $uv(v^2 - u^2)$، عددی همنهشت است. جدول ۱، برخی از خروجی‌های این الگوریتم را نشان می‌دهد.

---

1) Ronald Alter 2) Thaddeus B. Curtz 3) K. K. Kubota 4) Noam D. Elkies

u	v	$uv(v^{۲}-u^{۲})$	n	(a,b,c)
۱	۲	۲×۳	۶	$(۳,۴,۵)$
۲	۳	$۲\times۳\times۵$	۳۰	$(۵,۱۲,۱۳)$
۱	۴	$۲^{۲}\times۳\times۵$	۱۵	$(۴,۱۵/۲,۱۷/۲)$
۳	۴	$۲^{۲}\times۳\times۷$	۲۱	$(۱۲,۷/۲,۲۵/۲)$
۲	۵	$۲\times۳\times۵\times۷$	۲۱۰	$(۲۰,۲۱,۲۹)$
۴	۵	$۲^{۲}\times۳^{۲}\times۵$	۵	$(۲۰/۳,۳/۲,۴۱/۶)$
۳	۶	۲×۳^{۵}	۶	$(۳,۴,۵)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۵	۷	$۲^{۳}\times۳\times۵\times۷$	۲۱۰	$(۱۲,۳۵,۳۷)$
۳	۸	$۲^{۳}\times۳\times۵\times۱۱$	۳۳۰	$(۲۴,۵۵/۲,۷۳/۲)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

جدول ۱: برخی از خروجی‌های الگوریتم

از خروجی‌های این جدول نتیجه می‌شود که این الگوریتم دارای معایب زیر است:

(۱) به‌ازای ورودی‌های مرتب u و v، خروجی‌های n نامرتب هستند؛

(۲) به‌ازای یک n داده شده، نمی‌توان گفت که n در خروجی ظاهر خواهد شد یا نه و در صورت ظاهر شدن نمی‌توان زمان محاسبهٔ آن را معین کرد؛

(۳) به‌ازای ورودی‌های متفاوت، خروجی‌های یکسانی ظاهر می‌شوند.

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، برخی از مثلث‌ها دارای اضلاع صحیح هستند. بنابراین هرگاه مسأله‌ی اعداد همنهشت به یافتن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح با مساحت n محدود شود، آنگاه بعد از طی یک الگوریتم با تعداد متناهی مرحله، می‌توان معلوم کرد که آیا عدد n همنهشت است یا نه. ولی هرگاه یافتن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع گویا و مساحت n مطرح باشد، مسأله با پیچیدگی بیشتری مواجه است. در این حالت، ارتباط نزدیکی بین مسألهٔ اعداد همنهشت و نظریهٔ خم‌های بیضوی برقرار است که در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت.

لازم به ذکر است که اضلاع مثلث‌های ظاهر شده در جدول ۱، همیشه دارای صورت و مخرج کوچک نیستند. به‌عنوان مثال، زاگیر[1] در سال ۱۹۸۲ نشان داد [۱۷] که کوچکترین مثلث قائم‌الزاویه با مساحت ۱۵۷ دارای اضلاع گویایی به‌شکل زیر است:

1) Don Zagier

$$a = \frac{۴۱۱۳۴۰۵۱۹۲۲۷۷۱۶۱۴۹۳۸۲۰۳}{۲۱۶۶۶۵۵۵۶۹۳۷۱۴۷۶۱۳۰۹۶۱۰},\ b = \frac{۶۸۰۳۲۹۸۴۸۷۸۲۶۴۳۵۰۶۱۱۲۱۷۵۴۰}{۴۱۱۳۴۰۵۱۹۲۲۷۷۱۶۱۴۹۳۸۳۲۰۳},$$

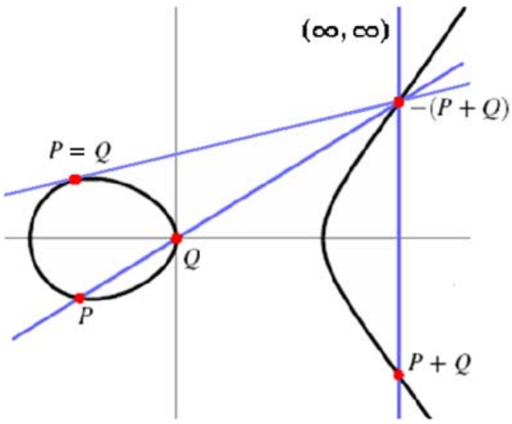
$$c = \frac{۲۲۴۴۰۳۵۱۷۷۰۴۳۳۶۹۶۹۹۲۴۵۵۷۵۱۳۰۹۰۶۷۴۸۶۳۱۶۰۹۴۸۴۷۲۰۴۱}{۸۹۱۲۳۳۲۲۶۸۹۲۸۸۵۹۵۸۸۰۲۵۵۳۵۱۷۸۹۶۷۱۶۳۵۷۰۰۱۶۴۸۰۸۳۰}.$$

۴. مقدمه‌ای بر نظریهٔ خم‌های بیضوی

در این بخش، مختصری از نظریهٔ خم‌های بیضوی را بیان می‌کنیم که یکی از مباحث جدید با کاربردهایی در زمینه‌های رمزنگاری پیشرفته و نظریهٔ اعداد است. به‌جرأت می‌توان گفت که نظریهٔ خم‌های بیضوی نظریه‌ای است که اکثر شاخه‌های ریاضیات در آن نقش‌آفرینی می‌کنند. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ نظریهٔ خم‌های بیضوی، می‌توانید مراجع [۱۷]، [۲۰] و [۲۷] را مطالعه کنید. ابتدا تعریف خم بیضوی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴ منظور از یک خم بیضوی[1] روی میدان $\mathbb{Q}$، خم جبری E است که توسط رابطهٔ وایرشتراس تعریف می‌شود (شکل ۱ را ببینید):

$$y^۲ = x^۳ + ax + b, \quad (a, b \in \mathbb{Z}).$$



شکل ۱: عمل جمع هندسی روی خم بیضوی E

مبین[2] خم بیضوی تعریف شده در بالا، عبارت است از $\Delta = -۱۶(۴a^۳ + ۲۷b^۲)$، و منظور از

1) elliptic curve 2) discriminant

هموار بودن یک خم بیضوی این است که $\Delta \neq ۰$. محل برخورد تمامی خطوط عمودی در صفحه‌ی دکارتی را نقطه در بینهایت نامیده و با $\mathcal{O} = (\infty, \infty)$ نشان می‌دهیم. مطابق با شکل ۱، یک عمل جمع هندسی ـ جبری روی مجموعهٔ

$$E(\mathbb{Q}) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y^{۲} = x^{۳} + ax + b : a, b \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

تعریف می‌کنیم. در واقع، برای جمع دو نقطه P و Q روی یک خم بیضوی، ابتدا خط گذرا از P و Q را رسم می‌کنیم. ثابت می‌شود [۲۷] که این خط خم E را در نقطهٔ دیگری قطع می‌کند. در شکل ۱، این نقطه را با $-(P+Q)$ نشان داده‌ایم. حال، مجموع P و Q را برابر با قرینهٔ این نقطه نسبت به محور xها تعریف می‌کنیم. لازم به ذکر است که مختصات نقطهٔ $P+Q$ توسط توابع جبری گویایی از مختصات P و Q قابل بیان است [۲۰]. همچنین، نرم‌افزار PARI/GP [۱۸] یکی از بهترین نرم‌افزارهای به‌روز در نظریهٔ اعداد است که می‌توان با استفاده از آن، بیشتر محاسبات خم‌های بیضوی را انجام داد.

قضیه ۲.۴. (موردل[۱] [۲۰]) به‌ازای هر خم بیضوی E، مجموعهٔ $E(\mathbb{Q})$ با عمل جمع تعریف شده در بالا یک گروه آبلی متناهیاً تولید شده و نقطهٔ $\mathcal{O}$ عنصر همانی آن است. به عبارت دیگر، یک عدد صحیح نامنفی r و یک گروه متناهی $T(E)$ وجود دارد که $E(\mathbb{Q}) \cong T(E) \oplus \mathbb{Z}^r$.

تعریف ۳.۴. عدد صحیح نامنفی r مذکور در قضیهٔ موردل را رتبهٔ (موردل یا هندسی) E نامیده و به‌صورت $r = rank(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۴. زیرگروه یکریخت با $T(E)$ از گروه $E(\mathbb{Q})$ را زیرگروه تابی[۲] خم بیضوی E خوانده و به‌صورت $E(\mathbb{Q})_{tors}$ نشان می‌دهیم. در واقع زیرگروه تابی، شامل تمامی نقاطی روی E است که نسبت به عمل جمع تعریف شده در بالا دارای مرتبهٔ متناهی هستند.

قضیهٔ زیر یک محدوده برای مرتبهٔ گروه خم‌های بیضوی روی میدان‌های متناهی به‌دست می‌دهد که نقشی اساسی در بیان حدسیه BSD دارد.

قضیه ۵.۴. (هَس[۳] [۲۰]) فرض کنیم p یک عدد اول است و

$$E(\mathbb{F}_p) = \big\{(x,y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid y^{۲} \equiv x^{۳} + ax + b \pmod{p}\big\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

گروه خم بیضوی E روی میدان $\mathbb{F}_p$ با مبین Δ است به‌طوری که $p \nmid \Delta$. در این صورت

$$|p + ۱ - \#E(\mathbb{F}_p)| \leq ۲\sqrt{p}.$$

---

1) Louis J. Mordell 2) torsion subgroup 3) Helmut Hasse

تعریف ۶.۴. $L-$ تابع هَس۔ وِیْل خم بیضوی E به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(E,s)=\prod_{p\nmid\Delta}\left(1-\frac{a_p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}\right)^{-1}\times\prod_{p|\Delta}\ell_p(E,s)^{-1},$$

که $a_p=1+p-\#E(\mathbb{F}_p)$، s متغیری مختلط است و $\ell_p(E,s)=1-a_p/p^s$.

تعریف ۷.۴. مرتبهٔ تابع $L(E,s)$ در $s=1$ را رتبهٔ تحلیلی E نامیده و آن را به‌صورت $rank_{an}(E)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی $rank_{an}(E)=ord_{s=1}(L(E,s))$.

حدسیه ۸.۴ (حدسیه BSD**)** به ازای هر خم بیضوی E احکام زیر برقرارند:

(۱) تابع $L(E,s)$ قابل گسترش به یک تابع تحلیلی روی تمام $\mathbb{C}$ است؛

(۲) $rank(E)=ord_{s=1}L(E,s)$؛ یعنی رتبهٔ خم بیضوی E برابر با مرتبهٔ تابع مختلط $L(E,s)$ در $s=1$ است.

این حدسیه یکی از مسائل یک میلیون دلاری بنیاد ریاضیات کلِی می‌باشد که توسط بیرچ و سوینرتون ـ دایر در سال ۱۹۶۵ میلادی بیان شده است [۳]. قسمت (۱) حدسیهٔ BSD در سال ۲۰۰۲ به اثبات رسید [۲]. قسمت (۲) فقط برای حالتی که $rank(E)\leq 1$ به‌طور کامل اثبات شده و برای حالتی که $rank(E)\geq 2$، به‌جز موارد خاص، هنوز به‌عنوان یک مسألهٔ باز در نظریهٔ خم‌های بیضوی مطرح است. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ این حدسیه و مسائل دیگر مؤسسهٔ کلِی به [۴] رجوع کنید.

۵. ارتباط بین خم‌های بیضوی و مسألهٔ اعداد همنهشت

در این بخش، ارتباط بین مسألهٔ اعداد همنهشت و حدسیه BSD را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم n یک عدد طبیعی خالی از مربع باشد. مجموعه‌های $\mathcal{A}(n)$ و $\mathcal{B}(n)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{A}(n)=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*\,|\,0<a<b<c,\ a^2+b^2=c^2,\ ab=2n\right\},$$
$$\mathcal{B}(n)=\left\{(x,y)\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*\,|y^2=x^3-n^2x,\ y\neq 0\right\}.$$

هرگاه (a,b,c) عضوی از $\mathcal{A}(n)$ باشد، با قرار دادن

$$x=\frac{nb}{c-a},\quad y=\frac{2n^2}{c-a}, \tag{4}$$

نتیجه می‌شود که (x,y) در مجموعهٔ $\mathcal{B}(n)$ قرار دارد. برعکس، هرگاه (x,y) در مجموعهٔ $\mathcal{B}(n)$ قرار داشته باشد، آنگاه با قرار دادن

$$a=\frac{x^{۲}-n^{۲}}{y},\quad b=\frac{۲nx}{y},\quad c=\frac{x^{۲}+n^{۲}}{y}, \tag{۵}$$

نتیجه می‌شود که (a,b,c) عضوی از $\mathcal{A}(n)$ است. بنابراین، بحث بالا را می‌توان در قالب قضیهٔ زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۵. به ازای هر n، مجموعه‌های $\mathcal{A}(n)$ و $\mathcal{B}(n)$ در تناظر دوسویی قرار دارند.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تنها نقاط با مرتبهٔ متناهی روی خم بیضوی E_n، نقاط نابدیهی (x,y) هستند که $y=۰$.

قضیه ۲.۵. به‌ازای هر عدد طبیعی n، فرض می‌کنیم خم بیضوی E_n با رابطهٔ وایرشتراس $y^{۲}=x^{۳}-n^{۲}x$ تعریف شده باشد. در این صورت

$$E_n(\mathbb{Q})_{tors}=\{(\infty,\infty),(۰,۰),(-n,۰),(n,۰)\}.$$

حال فرض کنیم n یک عدد همنهشت باشد. پس مجموعهٔ $\mathcal{A}(n)$ و در نتیجه $\mathcal{B}(n)$ ناتهی است؛ یعنی نقطهٔ (x,y) روی خم بیضوی E_n با $y\neq ۰$ وجود دارد که توسط رابطهٔ (۲) مشخص می‌شود. بنابراین از قضیهٔ ۲.۵ نتیجه می‌شود که $rank(E_n)\neq ۰$. برعکس، هرگاه $rank(E_n)\neq ۰$، آنگاه (x,y) روی خم بیضوی E_n با مرتبهٔ نامتناهی وجود دارد و از قضیهٔ ۲.۵ نتیجه می‌شود که $y\neq ۰$. بنابراین نقطهٔ (x,y) در $\mathcal{B}(n)$ قرار دارد که متناظر با آن می‌توان یک سه‌تایی توسط رابطهٔ (۳) مشخص کرد؛ یعنی عدد n یک عدد همنهشت است. این بحث را می‌توان به‌صورت قضیهٔ زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۳.۵. عدد طبیعی n یک عدد همنهشت است اگر و تنها اگر $rank(E_n)\neq ۰$. در واقع، n یک عدد همنهشت است اگر و تنها اگر مجموعه‌های $\mathcal{A}(n)$ و $\mathcal{B}(n)$ هر دو ناتهی باشد.

با فرض درست بودن حدسیهٔ BSD و در نظر گرفتن قضیهٔ ۳.۵، نتیجه می‌شود که n یک عدد همنهشت است اگر و تنها اگر $L(E_n,۱)=۰$. یک طرف این عبارت در سال ۱۹۷۷ توسط وایلز[1] و کواتس[2] اثبات شده است [۷]:

قضیه ۴.۵. اگر عدد n یک عدد همنهشت باشد، آنگاه $L(E_n,۱)=۰$.

در حالت کلی، با فرض $L(E_n,۱)=۰$ نمی‌توان دربارهٔ همنهشت بودن عدد n چیزی گفت چون هنوز حدسیهٔ BSD در حالت کلی اثبات یا رد نشده است. عکس قضیهٔ بالا در صورتی برقرار است که $ord_{s=۱}L(E_n,۱)=۱$؛ یعنی هرگاه برای یک عدد طبیعی n ثابت شود که $ord_{s=۱}L(E_n,۱)=۱$، آنگاه $rank(E_n)\neq ۰$ و در نتیجه n عددی همنهشت خواهد بود. ولی در

1) Andrew Wiles 2) John Coate

حالت ۱ $> (E_n, ۱)$ $ord_{s=۱}L$ نمی‌توان گفت که حتماً $rank(E_n) \neq ۰$ و در نتیجه n عددی همنهشت است.

در این راستا، بهترین نتیجه‌ای که به دست آمده است، قضیهٔ تانل می‌باشد که خلاصهٔ آن را می‌توان به این صورت بیان کرد.

قضیه ۵.۵. (تانل[1] [۲۴]) به‌ازای هر عدد طبیعی n، کمیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f(n) &= \#\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^۳ :\ x^۲+۲y^۲+۸z^۲=n\},\\ g(n) &= \#\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^۳ :\ x^۲+۲y^۲+۳۲z^۲=n\},\\ h(n) &= \#\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^۳ :\ x^۲+۴y^۲+۸z^۲=n/۲\},\\ k(n) &= \#\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^۳ :\ x^۲+۲y^۲+۳۲z^۲=n/۲\}. \end{aligned}$$

در این صورت،

(۱) اگر n فرد و عدد همنهشت باشد، آنگاه $f(n)=۲g(n)$؛

(۲) اگر n زوج و عدد همنهشت باشد، آنگاه $h(n)=۲k(n)$.

علاوه بر این، اگر حدسیهٔ BSD برای خم بیضوی E_n برقرار باشد، آنگاه

(′۱) هرگاه n فرد باشد و $f(n)=۲g(n)$، آنگاه n عدد همنهشت است؛

(′۲) هرگاه n زوج باشد و $h(n)=۲k(n)$، آنگاه n عدد همنهشت است.

مثال ۶.۵. فرض کنیم n یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۱۰ باشد. به‌راحتی می‌توان دید که

$$\begin{gathered} f(۱)=g(۱)=۲,\ f(۳)=g(۳)=۴,\\ h(۲)=k(۲)=۲,\ h(۱۰)=k(۱۰)=۴. \end{gathered}$$

در نتیجه برای $n=۱$ یا $n=۳$ داریم $f(n)\neq ۲g(n)$؛ و برای $n=۲$ یا $n=۱۰$ داریم $h(n)\neq ۲k(n)$. بنابراین از قضیهٔ تانل نتیجه می‌شود که ۱، ۲، ۳ و ۱۰ عددهای همنهشت نیستند.

$$f(۵)=g(۵)=۰,\ f(۷)=g(۷)=۰.$$

مثال ۷.۵. فرض کنیم n یکی از اعداد ۵ یا ۷ باشد. به‌راحتی می‌توان دید که در نتیجه برای $n=۵$ یا $n=۷$ داریم $f(n)=۲g(n)$. بنابراین از قضیهٔ تانل نتیجه می‌شود که ۵ و ۷ عددهای همنهشت هستند. با در نظر گرفتن قضیهٔ ۳.۵ نتیجه می‌شود که خم‌های بیضوی $E_۵ : y^۲=x^۳-۲۵x$ و $E_۷ : y^۲=x^۳-۴۹x$ دارای رتبهٔ موردل بزرگ‌تر یا مساوی یک هستند. با استفاده از نرم‌افزار MWRANK [۸] نشان داده می‌شود که $rank(E_۵)=rank(E_۷)=۱$.

---

1) Jerrold B. Tunnell

همچنین، با استفاده از نرم‌افزار PARI/GP [۱۸] می‌توان نشان داد که نقطه‌های $P = (-۴, -۶)$ و $Q = (۳۳۶/۲۷, -۹۸۰/۲۷)$، نقطه‌هایی با مرتبهٔ نامتناهی و در نتیجه مولدهایی برای گروه‌های $E_۵(\mathbb{Q})$ و $E_۷(\mathbb{Q})$ هستند. با استفاده از قضیهٔ تانل می‌توان الگوریتمی طراحی کرد که همنهشت نبودن عدد طبیعی n را برای مقادیر نه خیلی بزرگ (مثلاً کوچک‌تر از $۱۰^۹$) مشخص کند. برای مقادیر بزرگ n محاسبهٔ کمیت‌های $f(n)$، $g(n)$، $h(n)$ و $k(n)$ به‌مراتب مشکل‌تر خواهد بود. برعکس، در صورت درست بودن حدسیهٔ BSD، می‌توان از قضیهٔ تانل برای بررسی همنهشت بودن عدد طبیعی n استفاده کرد. بنابراین با درست بودن حدسیه BSD مسألهٔ اعداد همنهشت به‌طور کامل حل خواهد شد که شاید این دلیلی بر اهمیت و جذابیت حدسیهٔ BSD در نظریهٔ اعداد باشد.

مسألهٔ اعداد همنهشت قابل تعمیم به مسألهٔ اعداد $\theta-$ همنهشت است. فرض کنیم $۰ < \theta < \pi$، r و s اعداد صحیحی باشند که $(r,s) = ۱$، $r > |s|$، $\alpha_\theta = \sqrt{r^۲ - s^۲}$ و $\cos(\theta) = s/r$. عدد طبیعی n یک عدد $\theta-$ همنهشت نامیده می‌شود هرگاه مثلثی با اضلاع گویای a، b و c وجود داشته باشد که زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر θ و مساحت آن برابر با $n\alpha_\theta$ است. در حالت خاص، یک عدد همنهشت معمولی چیزی جز یک عدد $\pi/۲-$همنهشت نیست. حالت‌های خاص $\theta = \pi/۳$ و $\theta = ۲\pi/۳$ در [۲۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۲۶] مشابه کار تانل، در مورد خم‌های بیضوی اعداد $\theta-$همنهشت انجام شده است. لازم به ذکر است که خم‌های بیضوی مرتبط با اعداد $\theta-$همنهشت به‌صورت $E_{n,\theta} : y^۲ = x(x + (r+s)n)(x - (r-s)n)$ تعریف می‌شوند. به [۱۴]، [۱۵] و [۱۶]، همچنین برای دیدن تعمیم‌های دیگر از مسألهٔ اعداد همنهشت، به [۲۳] مراجعه فرمایید.

مراجع

[1] R. Alter, T. B. Curtz and K. K. Kubota, *Remarks and Results on Congruent Numbers*, Proc. 3rd South Eastern Conf. Combin., Graph Theory and Comput., 1972, Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla. (1972) 27–35.

[2] C. Breuil, B. Conard, F. Diamond , R. Taylor and A. Wiles, *On the Modularity of Elliptic Curves Over $\mathbb{Q}$ wild 3-adic Exercises,* J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), No. 4, 843-939.

[3] B. Birch and H. P. F. Swinnerton, *Notes on Elliptic Curves II*, J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 79–108.

[4] Clay Mathematical Institute, Mellinum Prize, www.claymath.org/millenium

[5] J. S. Chahal, *Congruent Numbers and Elliptic Curves*, The American Mathematical Monthly, 113 (2006), No 4, 308–317.

[6] J. S. Chahal, *On an Identity of Desboves*, Proc. Japan Acad. 60 (1984), 105–108.

[7] J. Coates and A. Wiles, *On the Conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. 39 (1977), 223–251.

[8] cerJ. Cremona, `MWRANK` Program, available at:
http://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/jec/ftp/progs/.

[9] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Volumn II, Chelsea, New York, 1952.

[10] B. Faulkner and K. James, *A Graphical Approach to Computing Selemer Groups of Congruent Number Curves*, Ramanujan J 14 (2007), 107–129.

[11] K. Feng and Maosheng Xiong, *On Elliptic Curves* $y^۲ = x^۳ - n^۲x$ *With Rank Zero*, Journal of Numbet Theory 109 (2004) 1–26.

[12] K. Feng, *Non-congruent Numbers, Odd Graphs and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture*, ACTA ARTIHMETICA LXXV.1 (1996) 71–83.

[13] K. Feng, *New Series of Odd Non-congruent Numbers*, Science in China Series A: Mathematics 49 (2006), No. 11 1642–1654.

[14] M. Fujiwara, *θ-congruent Numbers*, K.Györy, A.Pethö and V.Sós (eds.) de Gruyter (1997), 235–241.

[15] M. Fujiwara, *Some Properties of θ-congruent Numbers*, Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol. 52, No. 2 (2001), 1–8.

[16] M. Kan, *θ-congruent Numbers and Elliptic Curves*, ACTA ARTIHMETICA XCIV.2 (200), 153–160.

[17] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, GTM 97, Springer-Verleg, 1993.

[18] PARI/GP, A Computer Algebra System Designed for Fast Computations in Number Theory, Version 2.4.1, Bordeaux, 2008:
http://pari.math.u-bordeaux.fr/.

[19] P. Serf, *Congruent Numbers and Elliptic Curves*, Computational Number Theory, A. Petheo, M. Pohst, H. C. William and H. G. Zimmer (eds.) de Gruyter (1991), 227–238.

[20] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM 106, Springer-Verleg, 1983.

[21] N. J. A. Sloane, The on-line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.research.att.com/~njas/sequences

[22] I. Stewart and D. Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*, third edition, A. K. Peters, Ltd. 2002.

[23] J. Top and N. Yui, *Congruent Number Problems and Their Variants*, Algebraic Number Theory, MSRI Publications, Vol. 44 (2008), 613–639.

[24] J. Tunnell, *A Classical Diophantine Problem and Modular Forms of Weight* 3/2, Invent. Math. 72:2 (1993), 323–334.

[25] S. Yoshida, *Some Variants of the Congruent Number Problems, I*, Kyushu J. Math 55:2 (2001), 387–404.

[26] S. Yoshida, *Some Variants of the Congruent Number Problems, II*, Kyushu J. Math 56:1 (2002), 147–165.

[27] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, second edition, CRC, 2008.

علی سرباز جانفدا، a.sjanfada@urmia.ac.ir
سجاد سلامی، salami.sajad@gmail.com
ارومیه، دانشگاه ارومیه، گروه ریاضی

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۷۵ تا ۷۸

اثبات‌های جدیدی برای قضایای اقلیدس و اویلر*

ژان پابلو پیناسکو

ترجمه: حمیدرضا وهابی

در این نوشته، برهانی جدید برای نامتناهی بودن اعداد اول ارائه می‌دهیم. چندین برهان متفاوت با روش‌های گوناگون برای اثبات این مطلب وجود دارد که برخی از آن‌ها را می‌توان در [۱، ۳، ۴، ۵ و ٦] یافت. این برهان بر اساس یک ایدهٔ شمارشی ساده با استفاده از اصل شمول ــ طرد همراه با فرمولی صریح می‌باشد. برهان متفاوتی را بر اساس روش‌های شمارشی از تیو[1] (۱۸۹۷) همراه با چندین تعمیم، در [٦] و نیز روش جالبی را با استفاده از نظریهٔ اطلاعات الگوریتمی از چایتین[2] در [۲] می‌توان یافت. به علاوه ما ثابت می‌کنیم که سری معکوس اعداد اول واگراست. برهان‌های ما حاصل از ارتباطی بین اصل شمول ــ طرد و حاصلضرب نامتناهی اویلرند.

فرض کنید $\{p_i\}_i$ دنبالهٔ اعداد اول باشد. دنبالهٔ بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_0 = 0 \ , \ \ a_{k+1} = a_k + \frac{1 - a_k}{p_{k+1}}$$

N ــ امین جملهٔ این دنبالهٔ بازگشتی مساوی با

$$a_N = \sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{p_1 \cdots p_N}$$

است که می‌توان آن را به شکل

*) Juan Pablo Pinasco, *American Mathematical Monthly*, Vol 116, No 2, February 2009, pp. 172-174.

1) Thue 2) Chaitin

$$a_N = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - \frac{1}{p_i})$$

نوشت و لذا $0 < a_N < 1$ ، زیرا هر یک از عوامل حاصلضرب اکیداً مثبت و کوچک‌تر از یک‌اند. اکنون برای اثبات قضیهٔ اقلیدس آماده‌ایم:

قضیه ۱. بینهایت عدد اول وجود دارد.

برهان. فرض کنید $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$ همهٔ اعداد اول باشند. برای هر $x \geq 1$ و هر $i = 1, \ldots, N$، فرض کنید A_i مجموعهٔ اعداد صحیحی در بازهٔ $[1, x]$ باشد که بر p_i بخش‌پذیرند. بنابراین با به‌کارگیری فرمول شمول ــ طرد در مورد عدد اصلی مجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ ، تعداد اعداد صحیح و مثبت در $[1, x]$ به‌دست می‌آید:

$$[x] = 1 + \sum_{i}\left[\frac{x}{p_i}\right] - \sum_{i<j}\left[\frac{x}{p_i p_j}\right] + \sum_{i<j<k}\left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right] - \cdots + (-1)^{N+1}\left[\frac{x}{p_1 \cdots p_N}\right]$$

که در آن $[s]$ جزء صحیح s است. پس با توجه به

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1}\left[\frac{x}{t}\right] = \frac{1}{t}$$

به تناقض

$$1 = \sum_{i}\frac{1}{p_i} - \sum_{i<j}\frac{1}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k}\frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{N+1}\frac{1}{p_1 \cdots p_N} = a_N < 1$$

می‌رسیم و لذا برهان کامل است.

با مشاهدهٔ برهان قبل درمی‌یابیم که $D(p_1, \ldots, p_N)$ چگالی مجانبی مجموعهٔ اعداد صحیحی که بر هیچ یک از اعداد اول $p_1, \ldots, p_N$ بخش‌پذیر نیستند، دقیقاً مساوی با

$$D(p_1, \cdots, p_N) = 1 - \sum_{i}\frac{1}{p_i} + \sum_{i<j}\frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i<j<k}\frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^{N}\frac{1}{p_1 \cdots p_N}$$

است و لذا

$$1 - a_N = D(p_1, \ldots, p_N) = \prod_{j=1}^{N}(1 - \frac{1}{p_j}).$$

قرار می‌دهیم $D = \lim_{N \to \infty} D(p_1, \ldots, p_N)$. در این صورت با لگاریتم گرفتن، نتیجه می‌گیریم که سری

$$\sum_{p} \ln(1 - \frac{1}{p})$$

همگراست اگر $D > \circ$ و واگراست اگر $D = \circ$. از آن جا که سری $\sum_p \frac{\text{۱}}{p}$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_p \ln(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{p})$ همگرا باشد، پس برای اثبات قضیهٔ اویلر کافی است نشان دهیم $D = \circ$.

قضیه ۲. سری $\sum_p \frac{\text{۱}}{p}$ واگراست.

برهان. هم‌زمان نشان می‌دهیم که $D > \circ$ و همگرایی $\sum_p \frac{\text{۱}}{p}$ رخ نمی‌دهد. برای رسیدن به این هدف، فرض کنید $D > \varepsilon > \circ$ و N را چنان بزرگ انتخاب کنید که

$$\varepsilon < D(p_\text{۱}, \dots, p_N) \qquad \sum_{p>p_N} \frac{\text{۱}}{p} < \varepsilon.$$

اکنون چگالی مجانبی اعداد صحیحی که بر هیچ یک از اعداد اول $p_\text{۱}$، ...، p_N بخشپذیر نیستند

از پایین به ε کراندار است. از طرف دیگر، این اعداد صحیح باید بر برخی از اعداد اول $p > p_N$ بخش‌پذیر باشند، پس چگالی آن‌ها از بالا به

$$\sum_{p>p_N} \frac{\text{۱}}{p} < \varepsilon$$

کراندار است و این یک تناقض است. در نتیجه $D = \circ$ و سری $\sum_p \frac{\text{۱}}{p}$ واگراست.

مراجع

[1] M. Aigner and G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer-Verlag, Heidelberg, 1998.

[2] G. J. Chaitin, Toward a mathematical definition of life, in *the Maximum Entropy Formalism*, R. D. Levine and M. Tribus, eds., MIT Press, Cambridge, 1979, pp. 477-498.

[3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1, Chelsea Publishing, New York, 1952, pp. 413-415.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, London, 1954, pp.12-17.

[5] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, 2000, pp. 1-10.

[6] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 3-11.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر
hrvahabi@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۷۹ تا ۸۱

ملوین هنریکسن* (۱۹۲۷—۲۰۰۹)

احسان ممتحن

ملوین هنریکسن یا آن‌طور که در میان رفقایش معروف بود، مِلْ، ساعت ۲ و ۳۰ دقیقهٔ بامداد چهاردهم اکتبر ۲۰۰۹ در حالی‌که سه فرزندش در کنارش بودند، درگذشت. هشتاد و دو سال زیست و کارها کرد، مقاله‌ها نوشت و با همهٔ وجودش این کارها را کرد. حتماً چندتایی اشتباه نیز در کارنامه‌اش هست. به‌یقین و به‌تأیید خبرگان نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته[1]، او یکی از برجسته‌ترین محققان این حوزه بوده است. فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم باشد، آنگاه منظور از $C(X)$ مجموعهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی ــ مقدار بر X است. $C(X)$ با دو عمل جمع و ضرب نقطه‌وار، به حلقه‌ای تعویض‌پذیر که فاقد عنصر پوچتوان است مبدل می‌شود، هرچند که تا چشم کار می‌کند مقسوم‌علیه صفر دارد. یکی از پرسش‌های بنیادی نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته، یافتن روابطی میان خواص توپولوژیایی X از یک‌سو و خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ از سوی دیگر است. نهضت دوّم مطالعهٔ حلقهٔ توابع پیوسته (اگر نهضت نخست را ثمرهٔ پژوهش‌های اوریسون، تیتسه، چِخ، تیخونوف و استون بدانیم) با مقالهٔ معروف ادوین هویت[2] [۱]، آغاز شد. اما آنان که واقعاً کار او را به سرانجامی نیکو رساندند، ریاضی‌دانان جوانی در دانشگاه پُردو[3] بودند: مل، لئونارد گیلمن[4]، مِیِر جریسن[5]، شاگرد آن‌ها کوهل[6] و سپس دیگر شاگردان آن‌ها. پس از سمیناری که در همان روزها به پیشنهاد مل برگزار شد، مادهٔ اولیهٔ کتابی در این باب را آماده دیدند. در آغاز، گیلمن، جریسن و مل به نوشتن کتاب کمر بستند اما بعد به دلایلی که مل از آن به‌عنوان یکی از اشتباهات بزرگ زندگی‌اش یاد می‌کرد، از ادامهٔ همکاری در نوشتن کتاب دست کشید. با این حال، تا اتمام فرآیند تألیف کتاب، دو دوست و همکارش را از راهنمایی و همفکری بهره‌مند ساخت. شرح زیبایی از چگونگی شکل‌گیری این پژوهش‌های مشترک در حلقه‌های توابع پیوسته به همراه فهرست کاملی از ریاضی‌دانان مهم این حوزه، در [۲] آمده است. مقدمهٔ کتاب منحصر به‌فرد «حلقه‌های توابع پیوسته» [۳]، دیْنِ گیلمن و جریسن را به مل نشان می‌دهد.

---

*) Melvin Henriksen 1) Rings of Continuous Functions 2) Edwin Hewitt
3) Purdue University 4) Leonard Gillman 5) Meyer Jerison 6) Kohl

از جمله کارهای ماندگار مل می‌توان به «قضیهٔ نمایش هنریکسن ــ جانسون» [۴]، اشاره کرد که در آن به توصیف دقیق ساختار f ــ جبرهای به‌طور یکنواخت کامل می‌پردازند؛ همچنین است توصیف کامل هیأت‌های حقیقی ــ بسته که مل آن را به‌اتفاق اردیش و گیلمن در [۵] به انجام رسانیده است. اکنون هر سه نفر به ابدیت پیوسته‌اند، درست همان‌جا که سال‌هاست قضیه‌شان قرار گرفته است. من اولین بار، مل را همین اواخر در اهواز دیدم. پیرمردی کوتاه‌قد (کوتاهی و بلندی نسبی است، بلندی قامتش حدود ۱۶۵ سانتیمتر بود) با ریش یک‌دست سفید. شاید قدش به‌سبب پیری کوتاه‌تر شده بود. یادم هست که می‌گفتند او را در بخش ریاضی دانشگاه خودش به پاپانوئل تشبیه می‌کنند. همه از دیدن او در سی‌وپنجمین کنفرانس ریاضی کشور به هیجان آمده بودیم. معلوم بود که از جریان کنفرانس راضی است، همین‌طور از دستاوردهای پژوهشی خبرگان حلقه‌های توابع پیوسته در اهواز. گه‌گاه در میان بعضی از سخنرانی‌ها، به خوابی خوش فرو می‌رفت و بعد سربزنگاه بیدار می‌شد. این پیرمرد به هیچ‌وجه پیر نشده بود. گذر زمان تنها توانسته بود جسمش را فرتوت کند اما ذهن و روحش نه خسته بود نه ملول. با این‌که سال‌ها از بازنشستگی‌اش می‌گذشت از آموختن بازنایستاده بود. یک بار همین اواخر کتابی به او معرفی کردم که آن را در کتابخانهٔ کالج هاروی مَد نیافته بود. بعد برایم نوشت به شهر دیگری سفر کرده و کتاب را به‌دست آورده است. او چنین آدمی بود، آن هم در هشتاد سالگی. مرا سخت به یاد «سانتیاگو» قهرمان پیرمرد و دریا اثر ارنست همینگوی می‌انداخت. به گمانم تجسم سانتیاگو بود هم از نظر سختکوشی هم از نظر فروتنی. اصلاً خودش را به چیزی نمی‌گرفت. دوست عزیزی که به سفارش دکتر کرمزاده در تهران میزبان او بود نقل می‌کرد که روزی او را به سلمانی برده و برای آرایشگر توضیح داده بود که این پیرمرد ریاضی‌دان بزرگی است، بعد که مل فهمیده بود چه درباره‌اش گفته است، با ناباوری خندیده بود. رفتارش با منِ یک لاقبا هم نشانگر فروتنی‌اش بود. به هر حال با معیار «کمّی» ما، او کسی بود که صد مقاله داشت و من؟ آنچه اصلاً بدان نمی‌اندیشید. **سلطان کجا عیش نهان با رند بازاری کند؟**

بارها تلاش کردم تا به او حالی کنم که در کشور ما چیزی به نام ISI وجود دارد و این معیاری «جهانی» است و خیلی مهم. هرگز به گوشش نخورده بود. فکر می‌کنم تا آخر هم نفهمید که این معیار خیلی «مهم» چیست. گفت از فلانی و بهمانی هم (اسم چند ریاضی‌دان بزرگ را آورد) پرسیده‌ام آن‌ها هم چیزی در این باره نشنیده‌اند. شاید هم فکر کرد این «آی اس آی» را از خودم درآورده‌ام. این چیزها برای او جزء توهمات بود. حتی مجبور شدم اسرار بیشتری را برایش فاش کنم. این‌که اگر مقاله‌ای دارای چند مؤلف باشد، به نفر اول امتیاز بیشتری تعلق می‌گیرد تا به نفر بعد و بعدتر. بنابراین آنان که نامشان با «الف» آغاز می‌شود یا حتی «ب»، محققین خوش‌اقبالی هستند. این توضیحات را که اصلاً متوجه نشد. با پی‌جویی، می‌خواست بداند که فلسفهٔ این کار چیست. برایش توضیح دادم که برای دانشیار شدن یا استاد شدن، هر نفر به مقداری (حدود ۱۱۰) امتیاز نیاز دارد. هر مقاله در بهترین حالت، هفت امتیاز دارد و اگر دارای چند مؤلف باشد، این امتیاز باید به شیوه‌ای خاص بین آن‌ها به‌صورت حلوای نذری تقسیم شود. دیگر پیرمرد به‌کلی گیج شده بود. این را از سؤالاتش می‌فهمیدم. خدا را شکر که موضوع بحث خود به‌خود تغییر کرد.

بسیاری از مقالات او به بعد از بازنشستگی‌اش باز می‌گردد. کاش این را من هم بفهمم. خیلی صریح‌الهجه بود و سخت‌گیر. تعارف نداشت. از هرچه خوشش نمی‌آمد یا درست نمی‌دانست، رک و راست انتقاد می‌کرد.

در پایانِ نامه‌های اینترنتی‌اش می‌نوشت: Once you retire, there are no more vacations[۱]

همهٔ زندگی او تفسیر همین گفته بود. خوانندهٔ مشتاق، فهرست کاملی از آثار ملوین هنریکسن را در [٦] خواهد یافت. همهٔ این آثار به‌صورت فایل PDF قابل استحصال هستند.

بنا به روایتی، پس از مرگ، ارواح بر همه چیز آگاه خواهند شد چرا که تمامی پرده‌ها از برابر چشمانشان کنار خواهد رفت و بنا به روایتی دیگر، ارواح پس از مرگ همچنان به آموختن ادامه خواهند داد. حداقل در مورد مل دوست دارم روایت دوم درست باشد. او را تصور می‌کنم که در آن دنیا هم از این کتابخانه به آن کتابخانه سرک می‌کشد بی آن‌که عطش او برای دانستن کم شود. آنجا اقبال بیشتری برای دیدن بهشت افلاطون دارد.

مراجع

[1] E. Hewitt, "Rings of continuous functions: I", *Trans. Amer. Math. Soc*, **64** (1948), 54-99.

[2] Melvin Henriksen, *Rings of continuous functions in the 1950s*, Handbook of the history of Topology, Vol. 1, 243–253, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1997.

[3] L. Gillman and Meyer Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer-Verlag, D. Van Nostrand Pub. Co., New York, 1960.

[4] M. Henriksen and D. G. Johnson, "On the structure of a class of archimedean lattice-ordered f-algebras", *Fund. Math.*, **50** (1961/62), 73–94.

[5] P. Erdös, L. Gillman and M. Henriksen, "An isomorphism theorem for real closed fields", *Ann. Math*, **61** (1955), no 2, 542–554.

[6] http://www.math.hmc.edu/ henriksen/vita/

احسان ممتحن

گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

momtahan_e@hotmail.com

۱) همین که بازنشسته شوی، دیگر تعطیلاتی در کار نخواهد بود.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۸۳ تا ۸۹

دیدار با مسأله

بامداد یاحقی

« یاد آر ز شمعِ مرده، یاد آر ... »

به یاد استاد گرامی محسن هشترودی

بشتاب! مترس! دلیری کن و بیا!
که چون عزم درست کردی، همهٔ دشواری‌ها بر تو آسان شود.
جان‌کندن، جان پروردن شود!

پیر هرات

به درخواست و توصیهٔ همکاران هیأت تحریریهٔ مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی و نیز به درخواست و توصیهٔ مجلهٔ نشر ریاضی، از این پس، برای مدتی، نگارنده عهده‌دار بخش مسألهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی و بخش آموزش و مسألهٔ نشر ریاضی خواهد بود. در زیر یادداشتِ کوتاهی که برای نخستین قسمت حاصل تلاشم برای نشر ریاضی تحت عنوان «حل مسأله و مسأله برای حل» نوشته‌ام را عیناً می‌آورم، زیرا نمی‌دانم که بهتر از آن چگونه می‌توانم حق مطلب را برای انجام چنین وظیفه‌ای ادا کنم. «دور مجنون گذشت و نوبت ماست   هر کسی پنج روز نوبت اوست!»

مسأله و حل مسأله بخشی جدایی‌ناپذیر از ریاضیات، در کلیت آن، است. نقش مسأله در وجود ریاضی به مانند نقش خون در پیکر آدمی است. مسأله اندیشه، انرژی، و خوراک ریاضی را به دوردست‌ها و جای‌جای سرزمینِ ناکرانمندِ ریاضی می‌رساند. از سوی دیگر، شاخه‌های گوناگون ریاضی که این چنین بیکران از موهبت داشتن مسأله‌های ریاضی برخوردارند، خود به گونه‌ای طبیعی در کار آفرینشِ مسأله‌های زیبا، و در عین حال گاه‌گاه ساده، از نظر بیان مسأله، هستند. به آن سان که «رقصی چنین میانهٔ میدان‌شان» نه تنها دوستداران ریاضی بلکه افراد نظاره‌گر را نیز انگشت به دهان می‌گذارد. ریاضیات جذابیت و توانایی‌اش را، همچنین، با مسأله‌های شگفت‌انگیز و گاه‌گاه کاربردی‌اش به نمایش می‌گذارد. مسأله‌هایی که جادوی احکامشان جانِ کنجکاو را می‌ایستاند. مسأله‌هایی که حل‌هایشان به شعر و موسیقی مانسته، نمایانگر عصارهٔ اندیشهٔ ناب و اصیل ریاضی است. به تعبیر گاوسِ بزرگ کمال زیبایی آنیّت‌های این دانش شریف تنها بر آنان آشکار می‌شود که

دلیریِ فرو رفتن در ژرفای دریای بی‌پایان آن را دارند. مسأله قدر مشترکی است که به واسطهٔ آن دانشجویان و دلبستگان این دانش شریف در سطح اجتماعی با یکدیگر ارتباط برقرار می‌کنند و در سطح فردی اندرون را از زیبایی‌های معنوی و دیگرگونهٔ ریاضی سرشار می‌کنند. خلاصه این که مسأله در ریاضی هم فال است و هم تماشا. با این پیش‌درآمد کوتاه، بر آن خواهم بود که، تا وقتی که عهده‌دار این خدمت به جامعهٔ ریاضی‌مان باشم، از این مجالِ اندک استفاده کرده، با توجه به آنچه که در توان و چنته دارم، در گسترش این زیبایی‌ها بکوشم. کوتاه سخن این که دست در دامنِ مسأله‌های ریاضی زنم و تا جایی که می‌توانم آنها را تماشایی کنم! «حافظ! دگر چه می‌طلبی از نعیم دهر؟! مِی می‌خوریّ و طُرّهٔ دلدار می‌کشی!» باری، «برگِ سبزی است تحفهٔ درویش!...» باشد که مورد پذیرش دوستان ریاضی قرار گیرد.

در این راستا، دوستان علاقه‌مند می‌توانند با شرکت در حل مسأله‌های پیشنهادی یا با طرح و پیشنهاد مسأله‌های مورد علاقه‌شان به این بخش یاری رسانیده، و در نتیجه به کیفیت و غنای این بخش بیفزایند. ناگفته نماند که مسأله‌های حل شده یا پیشنهاد شده به نام حل‌کننده(ها) و پیشنهاددهنده(های) آنها ارائه خواهد شد. خواهشمند است در صورت ارائهٔ مسأله یا حل مسأله، منبع ارائهٔ مسأله یا حل آن ذکر شود. همچنین در صورت داشتن پیشنهاد یا انتقاد مرا از دریافت نظرهایتان محروم نکنید. مسأله‌ها فعلاً در سه بخش «حل مسأله»، «مسأله برای حل»، و «بازدید مسأله» ارائه خواهند شد، تا چه پیش آید! ناگفته نماند که منظور از «بازدید مسأله» دیدار دوبارهٔ مسأله‌ای قبلاً مطرح شده برای بار دوم یا چندم است. به روشنی در این نخستین قسمت بخش بازدید مسأله نخواهیم داشت.

و اما سخنی چند دربارهٔ مسأله‌ها. منبع، منابع، یا انگیزهٔ مسأله‌های بخش «مسأله برای حل» هنگامِ حل آنها آورده خواهد شد مگر این‌که گفتن منبع، منابع، یا انگیزهٔ مسأله‌ها راه حل آنها را آشکار نکند! این سیاست را تا اطلاع بعدی پی خواهیم گرفت!

در پیوند با بخش «حل مسأله» این شماره، مسأله‌های بخش حل مسألهٔ این شماره، به دلیل کوتاهی وقت، همگی از آدرس اینترنتی زیر گرفته شده‌اند.

http://topologicalmusings.wordpress.com/problem-solving-hall-of-fame/

اما در پیوند با بخش «مسأله برای حل» این شماره، مسألهٔ ۱ از نگارنده است. انگیزهٔ طرح مسأله پس از حل آن در میان گذاشته خواهد شد! بخش ۱ مسألهٔ ۲، و احتمالاً دو بخش دیگر آن، استاندارد است و باید برای اهل فن آشنا باشد. با این حال، بخش‌های دو و سه توسط نگارنده تنظیم شده‌اند. بخش‌های یک و دوی مسألهٔ ۳ مسائل مشهوری در هندسه (تحلیلی) هستند. نگارنده نخستین بار با بخش دوم این مسأله در فضاهای اقلیدسی، بدون هیچ راه حلی، در درس ریاضیات عمومی آقای دکتر سیاوش شهشهانی آشنا شد. یاد باد روزهای دور که بر ما گذشتند! مسألهٔ ۵، در

کلیت آن، استاندارد است ولی تنظیم بخش‌های (v) و (vi) و آخر آن از دکتر مهدی رجبعلی‌پور و نگارنده است. مسألهٔ ٦ احتمالاً باید برای اهل فن آشنا باشد با این حال چون مسألهٔ ۲ تنظیم این مسأله از نگارنده است. مسألهٔ ۷ استاندارد است.

۱ حل مسأله

۱. فرض کنید C خمی بسته و ساده در صفحه و p نقطه‌ای متعلق به ناحیهٔ درونی مشخص شده توسط C باشد. نشان دهید دو نقطه $p_۱, p_۲ \in C$ موجودند به طوری که p نقطهٔ وسط بین آن دو نقطه است، یعنی $p = \frac{p_۱+p_۲}{۲}$

حل. بدون آن که از کلیت کاسته شود، در صورت لزوم با اعمال یک انتقال، می‌توان فرض کرد که $p = ۰$. قرار دهید $-C = \{-x : x \in C\}$ به روشنی کافی است ثابت کنیم $C \cap (-C) \neq \emptyset$. در غیر این صورت از همبندی C و $-C$ نتیجه می‌شود که یکی باید زیرمجموعهٔ درون دیگری باشد، که امری ناممکن است زیرا

$$\sup\{|x| : x \in C\} = \sup\{|x| : x \in -C\}.$$

این حکم را به اثبات می‌رساند. ■

۲. تمام توابع $h : \mathbb{N}_۰ \to \mathbb{N}_۰$ را طوری تعیین کنید که $h(p^۲ + q^۲) = h(p)^۲ + h(q)^۲$ به ازای هر $p, q \in \mathbb{N}_۰$. (اینجا $\mathbb{N}_۰ = \mathbb{N} \cup \{۰\}$.)

حل. ادعا می‌کنیم که دقیقاً دو تابع هستند که شرط مسأله را برآورده می‌کنند: تابع ثابت صفر و تابع همانی. به روشنی $h(۰) = h(۰^۲ + ۰^۲) = h(۰)^۲ + h(۰)^۲ = ۲h(۰)^۲$ که ایجاب می‌کند $h(۰) = ۰$. از سوی دیگر $h(۱) = h(۰^۲ + ۱^۲) = h(۰)^۲ + h(۱)^۲ = h(۱)^۲$ که ایجاب می‌کند $h(۱) = ۰$ یا $h(۱) = ۱$. با اثبات این که $h(p) = ph(۱)$ به ازای هر $p \in \mathbb{N}_۰$، حکم را ثابت می‌کنیم. نخست توجه کنید

$$\begin{aligned}
h(۲) &= h(۱^۲ + ۱^۲) = ۲h(۱)^۲ = ۲h(۱)\\
h(۴) &= h(۲^۲ + ۰^۲) = ۴h(۱)^۲ = ۴h(۱)\\
h(۵) &= h(۲^۲ + ۱^۲) = ۵h(۱)^۲ = ۵h(۱)\\
h(۳) &= \sqrt{h(۳^۲ + ۴^۲) - h(۴^۲)} = \sqrt{h(۵^۲) - h(۴^۲)} = ۳h(۱)\\
h(۷) &= \sqrt{h(۵^۲ + ۵^۲) - h(۱^۲)} = \sqrt{۲h(۵^۲) - h(۱^۲)} = ۷h(۱)\\
h(۸) &= h(۲^۲ + ۲^۲) = ۸h(۱)^۲ = ۸h(۱)\\
h(۹) &= h(۳^۲ + ۰^۲) = ۹h(۱)^۲ = ۹h(۱)\\
h(۱۰) &= h(۳^۲ + ۱^۲) = ۱۰h(۱)^۲ = ۱۰h(۱)\\
h(٦) &= \sqrt{h(٦^۲ + ۸^۲) - h(۸^۲)} = \sqrt{h(۱۰^۲) - h(۴^۲)} = ٦h(۱).
\end{aligned}$$

حال حکم را با استقرای قوی روی p ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به ازای اعداد طبیعی کمتر از p برقرار باشد. حکم را به ازای p ثابت می‌کنیم. با توجه به حالت‌های ثابت شدهٔ بالا، دو حالت $p = ۲m + ۱ \geq ۵$ و $p = ۲m + ۲ \geq ۱۰$ در نظر بگیرید. در حالت نخست، از رابطهٔ $(۲m + ۱)^۲ + (m - ۲)^۲ = (۲m - ۱)^۲ + (m + ۲)^۲$ و این‌که h مجموع مربعات را حفظ می‌کند و فرض استقراء می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} h(۲m + ۱) &= \sqrt{h((۲m - ۱)^۲ + (m + ۲)^۲) - h((m - ۲)^۲)} \\ &= \sqrt{h(۲m - ۱)^۲ + h(m + ۲)^۲ - h((m - ۲)^۲)} \\ &= (۲m + ۱)h(۱) \end{aligned}$$

به طوری مشابه از رابطهٔ $(۲m + ۲)^۲ + (m - ۴)^۲ = (۲m - ۲)^۲ + (m + ۴)^۲$ نتیجه می‌شود که $h(۲m + ۲) = (۲m + ۲)h(۱)$. این برهان را به پایان می‌رساند. ■

توضیح. آیا می‌توانید تمام توابع $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را طوری تعیین کنید که $h(p^۲ + q^۲) = h(p)^۲ + h(q)^۲$ به ازای هر $p, q \in \mathbb{N}$؟

۳. (i) مستطیلی با طول اضلاع $a, b \in \mathbb{N}$ که به ab مربع با طول ضلع واحد تقسیم شده است را در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد مربع‌های واحدی که یک قطر مستطیل درونشان را قطع می‌کند برابر با $a + b - \gcd(a, b)$ است.

(ii) قسمت (i) را در n بعد حل کنید. یعنی فرض کنید $n > ۱$ و مستطیلی nـ بعدی در $\mathbb{R}^n$ با طول اضلاع $a_۱, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید که به $a_۱ \cdots a_n$ مربع nـ بعدی با طول ضلع واحد تقسیم شده است. تعداد مربع‌های nـ بعدی که یک قطر اصلی مستطیل nـ بعدی درونشان را قطع می‌کند برابر است با

$$\sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-۱)^{|S|-۱} \gcd(a_i)_{i \in S},$$

که در آن $[n] = \{۱, \ldots, n\}$ و $|S|$ نشانگر تعداد اعضای مجموعهٔ S است.

حل. به روشنی کافی است قسمت (ii) را ثابت کنیم. برای این منظور قرار دهید

$$\circ = (\circ, \ldots, \circ), a = (a_۱, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

فرض کنید $n(a)$ نشانگر تعداد مربع‌هایی که درونشان توسط قطر اصلی $\circ a$ قطع می‌شود باشد. به روشنی داریم $\circ a = \{f(t) = ta : t \in [\circ.۱]\}$ ، که در آن $f : [\circ, ۱] \to \mathbb{R}^n$ یک پرمایش خطی قطر $\circ a$ است. توجه کنید که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ مولفهٔ iام $f(t)$ برابر با ta_i است. نخست ادعا می‌کنیم که

$$n(a) = \left|\{t \in [\circ, ۱) : \exists i \in [n],\ ta_i \in \mathbb{Z}\}\right|.$$

برای دیدن این مطلب، فرض کنید

$$T := \{t \in [0, 1) : \exists i \in [n],\ ta_i \in \mathbb{Z}\} = \{t_0, \dots, t_n\},$$

که در آن $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$. هر t_i متناظر به یک بازهٔ (t_i, t_{i+1}) است که در آن پاره‌خط $a(t_i, t_{i+1})$ (بدون دو سر انتهایی پاره‌خط) در درون دقیقاً یک مربع افراز کننده قرار دارد، چرا که یک نقطه در درون یک مربع افراز کننده قرار دارد اگر و تنها اگر مختصات هیچ‌یک از مؤلفه‌هایش طبیعی نباشد. بنابراین تناظری یک‌به‌یک بین T و مربع‌های افرازکننده‌ای که درونشان توسط قطر $0a$ قطع می‌شود موجود است. این ادعا را ثابت می‌کند. حال به ازای هر $i \in [n]$، قرار دهید $A_i := \{t \in [0, 1) : ta_i \in \mathbb{Z}\}$. با توجه به اصل رد و قبول از آنالیز ترکیبیات می‌توان نوشت

$$n(a) = |T| = \Big|\bigcup_{i\in[n]} A_i\Big| = \sum_{\emptyset\neq S\subseteq[n]} (-1)^{|S|-1}\Big|\bigcap_{i\in S} A_i\Big|.$$

پس برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که $\left|\bigcap_{i\in S} A_i\right| = \gcd(a_i)_{i\in S}$. اما به روشنی، به ازای t داده شده، ta_i به ازای هر $i \in S$ عددی طبیعی است اگر و تنها اگر $t = k/\gcd(a_i)_{i\in S}$، که در آن $k = 0, 1, \dots, \gcd(a_i)_{i\in S} - 1$، یعنی به ازای $\gcd(a_i)_{i\in S}$ مقدار مختلف برای k. این برهان را به پایان می‌رساند. ■

۲ مسأله برای حل

۱. فرض کنید که $a, b \in \mathbb{R}$ ، که $a < b$، $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار، و $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد. تعریف استاندارد انتگرال ریمان ــ اشتیلتیس روی بازهٔ $[a, b]$ به صورت زیر انجام می‌شود.

$$\int_a^b f d\alpha := \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p, f, \alpha) = \inf_{p\in\mathcal{P}[a,b]} U(p, f, \alpha),$$

که در آن $p = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ $(x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b, n \in \mathbb{N})$ یک افرازهٔ بازهٔ $[a, b]$ و $\mathcal{P}[a, b]$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای بازهٔ $[a, b]$ و

$$\begin{aligned} L(p, f, \alpha) &= \sum_{n=1}^{n} (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \\ U(p, f, \alpha) &= \sum_{n=1}^{n} (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x). \end{aligned}$$

در تعریف بالا بسته به این‌که sup و inf را روی $[x_{i-1}, x_i)$، $(x_{i-1}, x_i]$ یا (x_{i-1}, x_i) تعریف کنیم، در مجموع چهار تعریف برای انتگرال ریمان ــ اشتیلتیس روی بازهٔ $[a, b]$ به دست می‌آوریم. ثابت کنید این چهار تعریف با هم معادل‌اند.

۲. (i) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی است و نیز دارای این خاصیت

باشد که در هر نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی است. تابع f را مشخص کنید.
(ii) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و نیز دارای این خاصیت باشد که در هیچ نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی نیست. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.
(iii) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و دارای این خاصیت باشد که در هیچ نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ دارای ماکسیمم موضعی نیست. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است یا یک $a \in \mathbb{R}$ موجود است که f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. به وضوح حکمی مشابه برای حالتی که f فاقد نقطهٔ مینیمم موضعی بر $\mathbb{R}$ است می‌توان تنظیم و ثابت کرد.

۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط، نه لزوماً متناهی بعد، و $||.||$ نشانگر نرم ناشی از ضرب داخلی فضا روی V باشد. فرض کنید $x, y, z \in V$. ثابت کنید

$$||x+y||||x+z|| \leq ||y||||z|| + ||x||||x+y+z||. \qquad \text{(i)}$$

$$||x+y|| + ||x+z|| + ||y+z|| \leq ||x|| + ||y|| + ||z|| + ||x+y+z||. \qquad \text{(ii)}$$

۴. با استفاده از معلومات ریاضیات عمومی گزارهٔ زیر موسوم به دستور جیرارد[1] را ثابت کنید.
مساحت یک مثلث کروی ABC، که اضلاعش کمان‌های سه دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ به شعاع R هستند، برابر است با $A(ABC) = R^{۲}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$، که در آن $\alpha = \angle A$، $\beta = \angle B$، و $\gamma = \angle C$ زاویه‌های مثلث کروی $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند.

۵. فرض کنید D یک حلقه باشد به طوری که $D^{۲} \neq ۰$. در این صورت احکام زیر معادل‌اند.
(i) حلقهٔ D یک حلقهٔ تقسیم است.
(ii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ چپ D است.
(iii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ راست D است.
(iv) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ D است و D دارای این خاصیت است که به ازای هر $x, y \in D$، یک $z \in D$ موجود است به طوری که $xy = zx$.
(v) تنها ایده‌آل‌های چپ در $M_n(D)$ آنهایی هستند که ستون‌هایشان ۰^n یا D^n هستند. منظور از A^n مجموعهٔ همهٔ بردارهای ستونی $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن $a_i \in A$ به ازای هر $۱ \leq i \leq n$.
(vi) تنها ایده‌آل‌های راست در $M_n(D)$ آنهایی هستند که سطرهایشان ۰_n یا D_n هستند. منظور از A_n مجموعهٔ همهٔ بردارهای سطری $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن $a_i \in A$ به ازای هر $۱ \leq i \leq n$.
به علاوه اگر D یک حلقهٔ تقسیم و $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ (به ترتیب : راست) در $M_n(D)$ باشد، آنگاه

1) Girard's Formula

هر دو ستون ناصفر (به ترتیب: سطر ناصفر) ایده‌آل $\mathcal{I}$ یا به هم مربوط‌اند و یا از هم مستقل‌اند.

توضیح. به ازای $A \in M_n(D)$، فرض کنید نمادهای $\mathrm{col}_i(A)$ و $\mathrm{row}_i(A)$ به ترتیب نشانگر ستون و سطر iام ماتریس A باشد. اگر $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ (به ترتیب: راست) در $M_n(D)$ باشد، ستون‌های (به ترتیب: سطرهای) iام و jام را به هم مربوط گوئیم هر گاه یک $a \in D$ موجود باشد به طوری که $\mathrm{col}_j(A) = \mathrm{col}_i(A).a$ (به ترتیب: $\mathrm{row}_j(A) = a.\mathrm{row}_i(A)$) به ازای هر $A \in \mathcal{I}$. ستون‌های (به ترتیب: سطرهای) iام و jام را از هم مستقل گوئیم هر گاه

$$\{(\mathrm{col}_i(A), \mathrm{col}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D^n \times D^n$$

(به ترتیب:

$$.(\{(\mathrm{row}_i(A), \mathrm{row}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D_n \times D_n$$

۶. فرض کنید F یک میدان باشد. ماتریس $A \in M_n(F)$، که در آن $n > ۱$، را فراتحویل‌ناپذیر[۱] گوییم هر گاه $A : F^n \to F^n$ به عنوان تبدیلی خطی دارای زیرفضای فراپایای[۲] غیر بدیهی نباشد. ثابت کنید ماتریس A فراتحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن، به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایبی از F، روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

توضیح. فرض کنید V یک فضای برداری، $T \in \mathcal{L}(V)$، و $M \leq V$ زیرفضایی از V باشد. M را برای T فراپایا گوییم هر گاه $SM \subseteq M$ به‌ازای هر $S \in \mathcal{L}(V)$ که $ST = TS$.

۷. (i) فرض کنید C خمی بسته، محدب، و به‌طور قطعه‌ای هموار در صفحه باشد. دراین صورت خطی مانند ℓ موجود است به طوری که ℓ هم طول خم و هم مساحت محدود به خم C را نصف می‌کند.

(ii) فرض کنید Σ رویه‌ای بسته، محدب، و هموار در $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این صورت صفحه‌ای مانند p موجود است به طوری که p هم مساحت رویه و هم حجم محدود به رویهٔ Σ را نصف می‌کند.

بامداد یاحقی
دانشگاه گلستان، گروه ریاضی
bamdad@bamdadyahaghi.com

1) hyper-irreducible 2) hyper-invariant subspace