بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۰، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۰

(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۹۰)

شمارهٔ پیاپی: ۴۶

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمد جلوداری ممقانی
سردبیر: بهمن طباطبائی شوریجه
ویراستار ارشد: روح‌اله جهانی‌پور
مدیر اجرایی: سهیلا غلام‌آزاد

حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸—۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:

الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.

ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.

• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

عکس روی جلد: هرمان مینکوفسکی
(Hermann Minkowski)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۱ تا ۳۰

رمزهای موفقیت در تحصیلات تکمیلی

ماری دِزیاردینز

مترجم: علیرضا غفاری حدیقه

چکیده

در این مقاله، برخی از مسائل و مشکلاتی که ممکن است برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی ایجاد شود، مطرح شده و راه‌حل‌هایی برای آن‌ها ارائه می‌شود. همچنین اساتید راهنمایی که می‌خواهند در موفقیت دانشجویان تحصیلات تکمیلی خودشان سهیم باشند، مخاطب قرار گرفته‌اند. هدف این مقاله ارائهٔ فرمول دقیق برای اتمام موفقیت‌آمیز دورهٔ دکتری و یا دستورالعمل گام به گام برای استاد راهنمای خوب بودن، نیست؛ بلکه هدف نویسنده، آگاه ساختن خواننده از رابطهٔ دانشجو ـ استاد، انتظاراتی که از این رابطه وجود دارد و بایدها و نبایدهای آن است. همچنین مطلع کردن دانشجوی تحصیلات تکمیلی از انتظاراتی که باید داشته باشد و آگاهی از مشکلاتی که ممکن است پیش آید و اگر استاد راهنمای مناسبی نداشته باشد، چه روشی باید در پیش گیرد، از اهداف دیگر این مقاله است.

این متن، ترجمه‌ای است از مقالهٔ

How to Succeed in Graduate School: A Guide for Students and Advisors

نوشتهٔ پروفسور ماری دِزیاردینز از اساتید دانشگاه مریلند ـ بالتیمور[1] در رشته علوم کامپیوتر که یک بار در سال ۱۹۹۴ و بار دیگر در سال ۱۹۹۵ در مجلهٔ

Online ACM Student Magazine

منتشر شده است. اینجانب این مقاله را طی ارتباطی که با دوستان خود در خارج از کشور داشتم، دریافت کردم و بعد از مطالعه، مطالب آن را برای دانشجویان

---

1) Marie desJardins, University of Meryland, Baltimore County,
email: marie@erg.sri.com

دوره‌های تحصیلات تکمیلی ایران و همچنین اساتید راهنما مناسب و مفید دیدم و تصمیم گرفتم آن را با ترجمه و در عین‌حال تطبیق با فرهنگ دانشگاهی موجود در ایران، منتشر نمایم. در این ترجمه، مطالب نوشته شده در داخل دو علامت [...] توضیحاتی است که از طرف مترجم برای گویاتر شدن متن اصلی آورده شده است. همچنین قسمت‌هایی (بیش از چند مورد نیست) از اصل مقاله که با فرهنگ ایرانی مطابقت نداشتند، حذف شده‌اند.

۱. مقدمه

این مقاله از بحث‌هایی که نویسندهٔ مقاله با چند نفر از استادان زن در مورد مشکلات دانشجویان دختر در تحصیلات تکمیلی و نحوهٔ ترغیب آن‌ها برای ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ علوم کامپیوتر داشت، نشأت گرفته است. این مباحثات، در نهایت، به این سؤال منتهی شدند که این اساتید، باید چه تعاملی با دانشجویان دختر برای حمایت و تشویق آن‌ها داشته باشند؟ نویسندهٔ مقاله، داوطلب می‌شود تا تجربیاتی را که در طی دو دورهٔ دکتری خود اندوخته و یا با پست الکترونیکی از افرادی، در مورد نحوهٔ راهنمایی دانشجوی دکتری پرسیده است، جمع‌بندی نماید. افرادی که نویسنده با آن‌ها ارتباط داشت، مشتاقانه مطالبی را در اختیار او قرار دادند و او نیز متعهد می‌شود که در اولین فرصت، آن‌ها را دسته‌بندی و منتشر نماید.

بعد از مطرح کردن این پروژه با برخی افراد، اعم از دانشجویان تحصیلات تکمیلی و اساتید دانشکده، که همه در مورد مطالبی که به آن‌ها ارائه می‌شد علاقه نشان می‌دادند، نویسنده متوجه دو مورد شد: اولاً مطالبی که مطرح می‌شود تنها مشکل دانشجویان دختر نیست و همهٔ دانشجویان تحصیلات تکمیلی به‌نحوی با آن‌ها دست به گریبان هستند. این مشکلات برای اساتیدی نیز که [برای استاد راهنمای خوب بودن] اهمیت قائل می‌شوند، مطرح است. ثانیاً مطالبی را که خود جمع‌آوری و یادداشت کرده بود، بیشتر ارزش یک مقالهٔ جامع را داشت تا چند توصیهٔ ساده برای دانشجویان دختر. این مقاله، بیشتر دانشجویان دورهٔ دکتری و اساتید راهنما در رشتهٔ علوم کامپیوتر را مخاطب قرار داده است، با این حال نویسنده معتقد است که مطالب ارائه شده در آن، برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی سایر رشته‌ها و اساتید راهنمای آنان نیز مفید هستند.

به نظر نویسندهٔ مقاله، دو موضوع عمده که دورهٔ تحصیلات تکمیلی را دشوارتر می‌کنند عبارتند از: ماهیت سازمان نیافتهٔ فرایند دورهٔ دکتری و فقدان اطلاعات کافی در مورد مطالبی که دانشجو باید وقت خود را صرف آن‌ها کند. نویسنده امیدوار است که این مقاله اطلاعاتی را هم برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی و هم برای اساتید راهنما فراهم آورد تا این فرایند برای هر دو طرف، کمتر زجرآور شود. تأکید نویسنده بر این است که تحصیل در دورهٔ دکتری ساده نبوده و پیروی از رهنمودهایی که در این مقاله آمده است، همواره آسان و حتی امکان‌پذیر نیست (و شاید برای برخی اصلاً مفید نیست). توصیهٔ نویسنده این است که «گام‌های کوچک بردارید و در عین‌حال

آرمان‌های بزرگی داشته باشید و تلاش خود را بر رسیدن به اهداف نهایی متمرکز کنید. این اهداف صرفاً گذراندن دورهٔ تحصیلات تکمیلی و اخذ مدرک دکتری نیست. همزمان با حرکت به سمت اهداف تعیین شده، از زندگی لذت ببرید و در حین زندگی، از آن درس بگیرید.»

از اهداف این مقاله، افزایش آگاهی خواننده به رفتار سالم و تعامل سازنده بین استاد و دانشجو و فراهم آوردن راهنمایی‌هایی برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی و دکتری است تا با موفقیت این دوره را طی کنند و برای آن‌هایی که مشتاق یادگیری هستند، منابع و مراجع مفیدی را معرفی می‌کند [خوانندگان علاقه‌مند را به مراجعی که نویسنده در مقالهٔ اصلی معرفی کرده است، ارجاع می‌دهیم و از دوباره‌نویسی آن‌ها در این ترجمه خودداری می‌کنیم].

۲. بایدها و نبایدها قبل از شروع دوره

دردسرهای زیادی را می‌توان با برنامه‌ریزی قبلی از بین برد. ابتدا دلیل ادامهٔ تحصیل را برای خود مشخص کنید. متداول‌ترین دلیل این است که داشتن مدرک دکتری برای پیدا کردن شغل مناسب الزامی است؛ مخصوصاً برای موقعیت‌های شغلی پژوهشی و دانشگاهی. چنین شغل‌هایی فرصت مناسبی برای پرورش ایده‌ها و نظریات بدیع هستند و امکان کسب مهارت بیشتر در حوزهٔ خاصی از علوم را ایجاد می‌کنند. با این حال، به تعویق انداختن موقعیت شغلی موجود به امید پیدا کردن موقعیت‌های شغلی مناسب‌تر، دلیل خوبی برای شروع دورهٔ دکتری نیست. در سال‌های اخیر، پیدا کردن موقعیت شغلی در دانشگاه‌ها [نه تنها دانشگاه‌های داخل بلکه خارج از کشور] کار آسانی نیست. این وضعیت در کشورهای پیشرفته نیز وجود دارد. بسیاری از فارغ‌التحصیلان، در مشاغل غیرتحقیقاتی مشغول به کار شده‌اند و بسیاری دیگر نیز سال‌های زیادی از عمر خود را در دوره‌های پسادکتری[1] تلف کرده‌اند. داشتن مدرک دکتری، تضمینی برای به‌دست آوردن شغل مناسب ایجاد نمی‌کند. علاوه بر این، گذراندن دورهٔ دکتری کاری طاقت‌فرسا است و انگیزه‌های قوی‌تر و تمرکز زیادی می‌طلبد. دقیقاً بدانید که چه هدفی را [برای ادامهٔ تحصیل در دورهٔ دکتری] دنبال می‌کنید.

دانستن این که چه رشته‌ای را می‌خواهید دنبال کنید بسیار مهم است. هرچند ممکن است برخی از دانشجویان پس از شروع دورهٔ دکتری، گرایش تحصیلی و یا موضوع رسالهٔ خود را تغییر دهند؛ ترجیحاً دو گرایش مختلف ولی نزدیک به هم را برای ادامه تحصیل در نظر بگیرید. کتاب‌ها و مجلات علمی اخیر و مجموعهٔ مقالات کنفرانس‌هایی را که در حوزهٔ تحقیق شما هستند، بخوانید. به این ترتیب می‌دانید که چه کسانی، در کجا، چه کارهایی را انجام می‌دهند (ممکن است در شروع کارتان زیاد مطالعه کنید و به این کار عادت داشته باشید). این‌جا اولین صحنه‌ای است که اساتید راهنما ظاهر می‌شوند. اعضای گروه‌های علمی باید آمادگی کافی برای راهنمایی دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد را داشته باشند و آن‌ها را در یافتن گرایش تحصیلی و دانشگاه‌های

1) Postdoctoral

مناسب یاری دهند. در این مرحله، تلاش کنید در پروژه‌ها درگیر شوید. از اساتیدی که درس را ارائه می‌دهند و دانشجویانی که آن‌ها را در حل تمرین یاری می‌دهند بپرسید که آیا به شخصی برای کمک در اجرای پروژه‌های خود نیاز دارند یا نه؟ همچنین می‌توانید پروژهٔ مستقلی را با راهنمایی یکی از اساتید شروع کنید. با اساتید و دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاهی که می‌خواهید در آن‌جا دورهٔ دکتری را شروع کنید تماس بگیرید و به آن‌ها درباره پیش‌زمینهٔ تحصیلی و علاقه‌های خود بگویید و در مورد پروژه‌های تحقیقاتی که روی آن‌ها کار می‌کنند، بپرسید. بهترین راه برای این کار، استفاده از پست الکترونیکی است که معمولاً سریع‌تر و قابل دسترس است. یک استاد راهنمای خوب معمولاً به پاسخ‌گویی به چنین درخواست‌هایی راغب‌تر است (اگرچه ممکن است به علت مشغلهٔ زیاد تنها به پاسخ‌های کوتاه اکتفا کنند یا شما را به یکی از دانشجویان تحصیلات تکمیلی خود ارجاع دهند ــ از شهود خود استفاده کنید تا تفاوت بین داشتن مشغله و از سر باز کردن را دریابید). اگر پاسخی دریافت نکردید می‌توانید به این نتیجه برسید که این شخص قابل دسترس نیست (و حتی ممکن است اگر دورهٔ دکتری خود را با او شروع کنید، در ادامه، با مشکل مواجه شوید). پرسیدن چنین سؤالاتی و نحوهٔ پاسخ‌گویی آن‌ها، شما را در انتخاب‌تان یاری و دامنهٔ انتخاب را محدودتر و مؤثرتر می‌کند.

بهتر است دانشگاهی را برای ادامه تحصیل انتخاب کنید که حداقل دو نفر از اساتید آن دانشگاه در حوزهٔ مورد علاقهٔ شما وجود دارند. به این ترتیب، اگر یکی از آن‌ها مایل به کار کردن با شما نباشند، هنوز انتخاب دیگری دارید. در صورتی که دقیقاً نمی‌دانید چه گرایشی را می‌خواهید دنبال کنید، بررسی وسعت حوزهٔ تحصیلات تکمیلی و تعدد رشته‌های دوره‌های دکتری موجود در آن دانشگاه نیز می‌تواند شما را در این مورد یاری دهد.

صحبت کردن با دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاهی که می‌خواهید در آن‌جا تحصیل کنید می‌تواند برای آشنایی با محیط مذکور مفید باشد. از آن‌ها در مورد رضایت از محیط تحصیل‌شان بپرسید. کدام یک از اساتید راهنما خوب هستند و چه حمایت‌هایی اعم از مالی و روحی وجود دارد. با توجه به این که تعداد دانشجویانی که در دانشگاه‌ها [در امتحانات دوره‌های دکتری] شرکت می‌کنند، بسیار زیاد بوده و ظرفیت پذیرش نیز پایین است، ممکن است دانشجویانی با استعدادهای بسیار بالا نیز مردود شوند. بنابراین لازم است در امتحانات دانشگاه‌های زیادی شرکت کنید تا شانس خود را برای پذیرش افزایش دهید و اگر از تعدادی از آن‌ها مردود شدید خودتان را ملامت نکنید.

با ایجاد ارتباط‌های قوی‌تر با اساتید و مسؤلان ذیربط، می‌توانید شانس ادامهٔ تحصیل در دوره‌های دکتری را افزایش دهید. به این ترتیب، توصیه‌نامه‌های قوی‌تر نیز خواهید داشت. کار کردن روی پروژه‌های تحقیقاتی و داشتن تصویری روشن از حوزه‌ای از علم که می‌خواهید در آن ادامهٔ تحصیل دهید (گرچه می‌توانید نظر خود را بعداً تغییر دهید)، داشتن پیش‌زمینهٔ قوی در رشتهٔ تحصیلی مورد علاقه‌تان و حوزه‌های مرتبط با آن، کسب نمره‌های خوب به‌خصوص در درس‌های تخصصی و همچنین نمرهٔ بالا در درس زبان، بسیار مفید است. همچنین بهتر است قبل از شروع

دوره، به فکر منابع مالی و حمایت‌های مربوطه نیز باشید.

۳. انجام پژوهش

برای بسیاری از دانشجویان تحصیلات تکمیلی که تازه وارد دورهٔ دکتری شده‌اند، ماهیت این دوره بسیار متفاوت از آن چیزی است که قبلاً انجام می‌داده و یا انتظارش را داشتند. گاهی دانستن این‌که قرار است چه چیزی را در طی دوره یاد بگیرید، مشکل است. درست است که باید رساله‌ای را آماده کنید، ولی چگونه باید این کار را آغاز و وقت خود را برای انجام چه کاری صرف کنید؟

در بسیاری از موقعیت‌ها، تحصیلات تکمیلی یک محیط سازمان نیافته است. معمولاً دانشجویان تحصیلات تکمیلی در هر نیمسال هشت واحد درسی می‌گذرانند. برای بسیاری از آن‌ها، سال سوم (بعد از امتحان جامع) دوران اضطراب‌آور و سختی است. در این دوران، ممکن است (اگر از آن دسته افراد خوش‌شانسی که موضوع پایان‌نامه را در شروع تحصیل مشخص کرده‌اند، نباشید) به‌دنبال موضوعی برای پایان‌نامه باشید. بعد از مشخص شدن موضوع، در حالی‌که هیچ پیش‌داوری قبلی در مورد آن ندارید، حداقل دو سال وقت دارید تا پایان‌نامه را کامل کنید.

در بخش‌های بعدی، فرایند روزانه برای انجام تحقیق، بازخورد گرفتن از دیگران، کار کردن روی رساله و نحوهٔ پیدا کردن حمایت‌های مالی بیان می‌شود.

۱.۳. برنامه روزانه

داشتن ایده‌های بکر و به کرسی نشاندن سریع آن‌ها، تنها لازمهٔ پژوهشگر خوب بودن نیست. بسیاری از پژوهشگران زمان زیادی را برای مطالعهٔ مقالات متعدد، بحث با همکاران در مورد ایده‌هایشان، نوشتن و ویرایش مقاله‌ها و حتی خیره شدن به فضای خالی! سپری می‌کنند؛ البته ایده‌های برجسته‌ای نیز دارند. در بخش چهارم، در مورد فرایند و اهمیت وارد شدن در یک شبکهٔ علمی و پژوهشی سخن می‌گوییم که از جنبه‌های مهم موفقیت یک پژوهشگر است.

در این بخش، بر چگونگی پیگیری و استقامت در کار، داشتن درک صحیحی از این‌که در کجا قرار دارید و به کجا می‌روید، آگاهی بر روش‌های با انگیزه‌ماندن و استفادهٔ هوشمندانه از زمان، تأکید می‌کنیم.

نوشتن گزارش روزانه از فعالیت‌های پژوهشی و ایده‌هایتان، بسیار مفید است. ایده‌های کلی را بدون ذکر جزئیات یادداشت کنید. مسأله‌های جالبی را که به فکرتان می‌رسد، در برگی بنویسید و راه‌حل‌های بالقوه برای حل آن‌ها را نیز در کنارشان ذکر کنید. ایده‌های تصادفی و مرجع‌هایی که بعداً بتوانید به آن‌ها رجوع کنید؛ یادداشت‌هایی برای مقالاتی که مطالعه کرده‌اید؛ خلاصه‌ای از مقالات پژوهشی که در آینده می‌خواهید بنویسید و نقل قول‌های جالب، همهٔ این‌ها موضوعاتی هستند که می‌توانید در گزارش روزانه، بنویسید. هر از چندی برگردید و نوشته‌های خود را مرور کنید. ملاحظه خواهید کرد که ممکن است اندیشه‌های کوچک و تصادفی، وقتی در کنار هم قرار بگیرند، به

یک پروژهٔ تحقیقاتی و یا موضوعی برای پایان‌نامه تبدیل شوند.

برای آشنا شدن با موضوعات و حوزه‌های علمی جدید، باید مقاله‌های زیادی مطالعه کنید و با موضوعات جدید همراه باشید. در شروع کار، ممکن است حتی حداقل نصف وقت خود را صرف خواندن مقالات متعدد کنید. این وضعیت کاملاً طبیعی است. حتی ممکن است در میان انبوه مطالبی که مطالعه کرده‌اید، گم شوید. به یاد داشته باشید که مطالعهٔ تمامی چیزهایی که به موضوع خاصی مربوط می‌شوند، در عمل محال است. به‌جای آن‌که دنبال مطالعهٔ تمامی مقالات مربوط به موضوعی باشید، انتخابی مطالعه کنید. برای شروع مطالعه و آشنایی با موضوعی جدید، از استاد راهنما و یا همکلاسی‌های خود بخواهید تا مجله‌های علمی مهم و مجموعهٔ مقاله‌های کنفرانس‌های مفید در این زمینه را به شما معرفی کنند. از آن‌ها در مورد مقاله‌های راه‌گشا و «کلاسیک» که مطالعهٔ آن‌ها برای آشنایی با موضوع پژوهشی الزامی است، بپرسید. با مقالاتی از این نوع شروع کرده و مخصوصاً مقاله‌های چاپ شده در مجله‌های چند سال اخیر و مجموعهٔ مقاله‌های کنفرانس‌هایی را که در سال‌های اخیر برگزار شده‌اند، مطالعه کنید.

قبل از آن‌که رنج مطالعهٔ مقاله‌ای را بر خود هموار کنید، مطمئن شوید ارزش صرف وقت را دارد. ابتدا عنوان مقاله را به‌دقت مرور کنید. سپس نوبت به خلاصهٔ مقاله می‌رسد. در ادامه (اگر هنوز انگیزه‌ای مانده باشد) نگاهی گذرا به مقدمه و جمع‌بندی مقاله می‌تواند مفید باشد. البته اگر استاد راهنما، مفید بودن مقاله را توصیه کند، از اجرای این مراحل چشم‌پوشی کنید و مستقیماً به مطالعهٔ آن بپردازید. قبل از آن‌که به‌دنبال درک کامل جزئیات مقاله باشید، دیدگاهی کلی از آن به‌دست آورید و تلاش کنید نکات اساسی مطرح شده در آن را درک کنید. اگر هنوز احساس می‌کنید که ارزش مطالعهٔ کامل را دارد، دوباره و به‌طور کامل با هدف درک جزئیات، آن را مطالعه کنید. یادداشت‌برداری در حین مطالعه، برای بسیاری از افراد مفید است. حتی اگر بعدها نیازی به مراجعه به مقاله و مطالعهٔ مجدد آن نداشته باشید، باز هم یادداشت‌برداری شما را در تمرکز بر مطلب یاری می‌کند و باعث می‌شود تا خلاصه‌ای از آنچه را مطالعه کرده‌اید، تهیه کنید. اگر بعداً به یادآوری مطالب مطالعه شده نیاز داشته باشید، مطالعهٔ یادداشت‌ها بسیار ساده‌تر از مطالعهٔ مجدد کل مقاله است و یادآوری جزئیات مقاله سریع‌تر خواهد بود.

چند مورد دیگر که باید در ارزیابی مقاله‌ای که مطالعه می‌کنید، انجام دهید به شرح ذیل است:

- مطمئن شوید مطالب مطرح شده در مقاله واقعاً به دردخور هستند (نه این که فقط از دیدگاه نظری درست بوده و روی چند مثال ساده آزمایش شده‌اند).
- مفاهیم و تعریف‌های بیان شده در مقاله را درک کنید. آیا موارد و مطالبی جالب در ورای تعاریف و مفاهیم جدید مطرح شده وجود دارند؟
- انگیزهٔ موجود در ورای مسألهٔ مطرح شده در مقاله، روش‌های مختلف حل مسأله و فرض‌های موجود در آن را عمیقاً درک کنید. آیا فرض‌های مسأله، واقع‌گرایانه هستند؟ آیا امکان حذف

آن‌ها بدون آن‌که خللی بر روش حل وارد آید، وجود دارد؟ وجه‌ها و توسیع‌های دیگری که در ادامهٔ تحقیق ممکن است وجود داشته باشند، کدامند؟ چه چیزی در عمل به‌دست آمده و پیاده‌سازی شده است؟ توجیهات نظری و استدلال‌ها چقدر اعتبار دارند؟ آیا توان بالقوه‌ای برای توسیع مطالب مطرح شده در مقاله وجود دارد؟ این‌ها سؤالاتی هستند که باید در هنگام مطالعهٔ یک مقاله، پاسخ داده شوند.

مقاله‌هایی را که مطالعه کرده‌اید، طبقه‌بندی شده نگه‌دارید، تا در صورت نیاز بعدی، امکان دسترسی سریع به آن‌ها وجود داشته باشد. کتاب‌نامه‌ای (BiBTex یک قالب متداول می‌باشد) برای خود تهیه کنید. بهتر است علاوه بر مطالب متداول، موارد دیگری مانند کلمات کلیدی و مکانی که مقاله را پیدا کرده‌اید (مثلا از کتابخانه تهیه کرده‌اید یا از دوستی گرفته‌اید) و خلاصه‌ای کوتاه از موضوعات مطرح شده در مقاله را مخصوصاً برای مقالات جالب، به کتابنامه اضافه کنید. این کتابنامه برای ارجاع‌های بعدی، اضافه کردن به پایان‌نامه و یا در میان گذاشتن آن با سایر دانشجویان تحصیلات تکمیلی (و شاید برای زمانی که خودتان استاد راهنمای دانشجویی دیگر خواهید بود)، مفید است.

۲.۳. با انگیزه باقی‌ماندن

گاهی، مخصوصاً در سال‌های دوم و سوم، حفظ انگیزه‌های مثبت اولیه بسیار سخت است. بسیاری از دانشجویان تحصیلات تکمیلی احساس عدم امنیت و اضطراب و حتی بی‌حوصله‌گی و سرخوردگی دارند. چنین احساسی کاملاً طبیعی است. سعی کنید گوش شنوایی، مثلاً یکی از هم کلاسی‌ها، مشاور یا دوستی خارج از محیط تحصیل و دانشگاه، برای در میان گذاشتن درد دل‌های خود بیابید. همچنین سعی کنید تا ریشهٔ چنین مشکلاتی را دریابید و برنامه‌ای گام به گام برای برون‌رفت از چنین وضعیتی طراحی کنید. گاهی بهتر است برای آن‌که تمرکز خود را از دست نداده و با انگیزه باقی بمانید، فعالیت‌های برنامه‌ریزی شده‌ای برای خود داشته باشید تا بتوانید زمان را مدیریت کنید و کار مشخصی را به‌طور روزانه انجام دهید. تنظیم قرار ملاقات روزانه با استاد راهنما، شرکت در سمینارها، حتی فعالیت‌های غیردرسی مانند ورزش و موسیقی می‌تواند شما را در با انگیزه‌ماندن یاری کند.

تلقین به خودتان که، «باید» ایدهٔ بکری داشته باشید، «باید» روزی ۴ یا ۸ یا ۱۲ ساعت مطالعه کنید، «باید» در مدت زمان مشخصی دورهٔ دکتری را به اتمام برسانید؛ در بسیاری از افراد کارساز نیست. به‌جای آن‌که برای کارهایی که نمی‌توانید انجام دهید به خود موج منفی القا کنید، دربارهٔ توانایی‌های خود در رسیدن به قله‌های موفقیت واقع‌بین باشید و برای کامل کردن کارهایتان موج مثبت ایجاد کنید.

ممکن است مشخص کردن اهداف روزانه، هفتگی و ماهانه ایدهٔ خوبی باشد و حتی با استفاده از روش «همیار»، بدین معنی که شما و شخص دیگری با هم قرار بگذارید در دوره‌های زمانی مختلف

پیشرفت یکدیگر را در کارها مرور کنید، خیلی مفیدتر شود. سعی کنید شخصی را بیابید و با او کار کنید. انجام کار پژوهشی، اگر کسی را داشته باشید که با او مشورت کنید و بازخورد بگیرید، خیلی راحت‌تر می‌شود.

تقسیم کردن پروژه‌های بزرگتر به قسمت‌های کوچکتر، وقتی مدیریت آن‌ها مشکل به نظر می‌رسد، روش مناسبی برای اجرای آن‌ها است. به‌عنوان مثال، شروع دورهٔ کارشناسی ارشد قبل از دورهٔ دکتری ایدهٔ مناسبی است (در تعدادی از دانشگاه‌ها دانشجویان می‌توانند مستقیماً از دورهٔ کارشناسی به دورهٔ دکتری وارد شوند). در این صورت، شانس آشنایی با موضوعات علمی، بیشتر شده و امکان اجرای پروژه‌های کوچکتر فراهم می‌شود. همچنین قادر خواهید بود با استاد راهنما و دانشجویان تحصیلات تکمیلی روابط کاری برقرار کنید.

«تفرقه بینداز و حکومت کن[1]» روش مناسبی در اجرای موفق برنامه‌های روزانه است. به‌جای نوشتن کل پایان‌نامه، خود را تنها به نوشتن یک فصل یا یک بخش و یا حتی مشخص کردن عناوین آنچه می‌خواهید در این فصل [یا بخش] بگنجانید، محدود کنید. در برنامه‌نویسی، به‌جای شروع کل پروژه، آن را به قسمت‌های کوچکتر تقسیم و پیاده سازی کنید. به‌عنوان مثال، کاری را که می‌توانید در یک ساعت و یا کمتر انجام دهید، مشخص و به این ترتیب، برنامهٔ روزانهٔ خود را واقع‌بینانه‌تر کنید. اجازه ندهید تردیدها سد راهتان در رسیدن به موفقیت‌ها گردند. کارها را روزانه انجام دهید و به‌خاطر داشته باشید که هر موفقیتی شما را یک گام به پیروزی نهایی نزدیک‌تر می‌کند. حتی اگر پیشرفتتان محسوس نباشد، تجربه‌هایی را اندوخته‌اید؛ هرچند این آموزه این باشد که «دیگر وقت خود را برای انجام چنین کاری هدر نده!».

۳.۳. انتخاب پایان‌نامه

«سخت‌ترین قسمت پایان‌نامه، نوشتن آن است». فرایند پیدا کردن موضوع پایان‌نامه، انجام پژوهش [انتشار مقاله ـ در ایران] و نوشتن رساله، متمایز از آن چیزی است که یک دانشجوی دورهٔ دکتری تا به حال دیده است. داشتن استاد راهنمای خوب و شبکهٔ ارتباطی کارا، شما را در جهت‌دهی و انتخاب اهداف یاری می‌کند و بازخوردهای مؤثری هم به‌دست می‌آورید. در غیر این صورت (اگر کمی بدشانس باشید) مجبورید کمی مستقل‌تر باشید و بیشتر به خود اعتماد کنید. در این صورت، خود را از جامعه جدا نکنید و برای برون‌رفت از چنین وضعیتی، به‌دنبال منابع و حمایتی‌هایی از سایر اساتید، دانشجویان تحصیلات تکمیلی، آدرس‌های پستی، دوستان، خانواده و مطالب انتشار یافته، باشید.

۱.۳.۳. پیدا کردن استاد راهنما

داشتن استاد راهنمای خوب، عامل انکارناپذیری در اتمام موفقیت‌آمیز پایان‌نامه است. حتماً ملاک‌های مؤثری در تعیین استاد راهنما در دانشگاهی که برای ادامهٔ تحصیل انتخاب کرده‌اید

---

1) Divide-and-Conquer

در نظر گرفته‌اید. اگر تا به حال این کار را نکرده‌اید، حتماً قبل از شرکت در امتحانات ورودی دانشگاه این کار را انجام دهید. بدون شک یکی از ملاک‌های استاد راهنمای خوب این است که در حوزهٔ تحصیلی مورد علاقهٔ شما پژوهش‌های سطح بالایی انجام داده، مقالات مؤثری منتشر کرده و مورد احترام و توجه دانشمندانی باشد که در این حوزه کار می‌کنند. چنین فردی می‌تواند یکی از انتخاب‌های بالقوه باشد. خلاصهٔ پروژه‌های پژوهشی [که معمولاً گروه‌های علمی دانشگاه‌ها منتشر می‌کنند] را مطالعه کنید. در سخنرانی‌های آنان شرکت و در درس‌هایی که ارائه می‌کنند، حضور پیدا کنید و یا مطالبی را که ارائه می‌دهند، بررسی کنید. با سایر دانشجویان تحصیلات تکمیلی و فارغ‌التحصیلان سال‌های اخیر اساتید صحبت کنید و از آن‌ها در مورد نحوهٔ تعامل با استاد راهنمایشان بپرسید. از موضوع پایان‌نامهٔ آن‌ها (برجستگی و کیفیت آن) و نوع تعاملی که استادان با دانشجویان خود دارند، بپرسید. آیا تعامل استاد با دانشجو زیاد است؟ نحوه برخورد او در انجام کارهای مشترک چگونه است؟ آیا به دانشجو در انجام تحقیق استقلال می‌دهد؟ آیا خود او موضوعاتی را برای دانشجو جهت انجام تحقیقات انفرادی ارائه می‌کند، یا آن‌ها را در انجام پژوهش‌های مستقل یاری کرده و تشویق می‌کند؟

موارد دیگری نیز وجود دارند که باید برای شناسایی یک استاد راهنمای مناسب، بدانید.

- برای فارغ التحصیل کردنِ دانشجویان خود، به‌طور متوسط چقدر وقت صرف می‌کند؟ زمان متوسط فارغ التحصیلی دانشجویانش چند سال است؟
- چه مدتی است که در این گروه حضور دارد؟ از اولین اعضای یک گروه پژوهشی جدید بودن، مزیت‌ها و معایبی دارد. از دیدگاه مثبت، در انتخاب موضوع پایان‌نامه و جهت‌دهی موضوع پژوهش، آزادی بیشتری خواهید داشت. ولی از طرف دیگر، چون دانشجوی ارشدتر از شما وجود ندارد، ممکن است بسیار منزوی شوید. حتی ممکن است استاد راهنما تجربهٔ کافی در هدایت شما نداشته باشد و مجبور شوید استاد راهنمای خود را عوض کنید. تغییر استاد راهنما از فاجعه‌هایی است که برای یک دانشجوی دورهٔ دکتری ممکن است پیش بیاید.

استاد راهنمای خوب، نه تنها به‌عنوان فرد مجرب و دنیادیده عمل می‌کند، بلکه به‌عنوان متخصص، نیازهای شما را نیز برآورده می‌کند. یک شخص مجرب باید بتواند در یافتن پشتیبانی‌های ضروری (مالی، روحی و روانی) یاورتان باشد. شما و کارهایتان را به افراد مهم حوزهٔ کاری‌تان معرفی کرده و شما را در رسیدن به آنچه علاقه دارید (نه آنچه او خود می‌خواهد) ترغیب کند. همیشه در دسترس باشد تا برای اتمام پایان‌نامه، توصیه‌های لازم و راهنمایی‌های مورد نیاز را در اختیارتان قرار دهد. حتی پس از اتمام تحصیلات نیز شما را در یافتن شغل مناسب کمک کند. باید بتواند شما را در رسیدن به اهداف کوتاه‌مدت و درازمدت‌تان یاری دهد.

به‌محض آن‌که استاد راهنمای بالقوه‌ای را مشخص کردید، برای شناخت بیشتر او اقدام کنید. خود را به ایشان معرفی کنید و حوزه‌ای را که به آن علاقه‌مندید با او در میان بگذارید. در صورتی که جلسات علمی تیم پژوهشی آن‌ها به‌طور مستمر برگزار می‌شود، در آن‌ها شرکت کنید. اگر ایده‌ای

برای پژوهش دارید، به‌صورت پروپوزال آماده کرده و به ایشان ارائه دهید و نظرشان را جویا شوید. از آن‌ها بپرسید که آیا به دستیار آموزشی یا پژوهشی نیاز دارند و یا، اگر روی یک موضوع پژوهشی کار می‌کنند، بخواهید شما را به تیم‌شان ملحق کنند. مقالاتی را که منتشر کرده‌اند و گزارش دانشجویانشان را مطالعه کنید. در ساعات اداری به اتاقشان سر بزنید و سؤالاتی بپرسید و نظر آن‌ها را بخواهید. پیشنهاد مطالعهٔ پیش‌نویس مقالاتشان را به آن‌ها بدهید و سعی کنید با موضوع پژوهشی آن‌ها عمیقاً آشنا شوید.

ممکن است نوع ارتباط دانشجویان با اساتید متفاوت باشد. برخی از دانشجویان علاقه‌مند هستند که بیشتر توسط استاد راهنما جهت‌دهی شوند، تماس مداوم با استاد داشته و همواره تحت نظر باشند. برخی دیگر ممکن است در عین نیازمندی به تماس با استاد، خجالتی بوده و نتوانند نیاز خود را بر زبان آورند. موارد دیگری که ممکن است از یک دانشجو به دانشجوی دیگر تغییر کند عبارتند از: نحوهٔ بازخورد گرفتن از استاد (انبوهی از ایده‌های تصادفی در مقابل بازخوردهای جهت‌دار)، فعالیت انفرادی در مقابل کار تیمی، کار روی پروژه‌های پژوهشی مصوب در مقابل تلاش‌های جدید و مستقل، کار کردن در حوزهٔ تخصصی استاد در مقابل انجام پایان‌نامه در موضوعی دیگر.

ممکن است استاد راهنمای شما همواره راهنمایی‌های لازم را ارائه ندهد. در چنین وضعیتی، داشتن راهنماهای دیگر (غیر رسمی) متداول و مفید است. این شخص ممکن است استاد دیگری از گروه یا جای دیگر، دانشجوی دکتری ارشدتر یا از سایر همکاران باشد. اگر استاد راهنمایتان دسترس‌ناپذیر و به موضوع تحقیق شما [پایان‌نامه] بی‌علاقه باشد، موج منفی به شما القا کند و یا اصلاً پیش‌زمینهٔ علمی برای راهنمایی شما نداشته باشد، شاید بهتر باشد موضوع پایان‌نامهٔ خود را عوض کنید. در این صورت، مهم‌ترین موضوع این است که مؤدبانه از استاد بخواهید تکلیف شما را مشخص کرده و آنچه را باید انجام دهید صریحاً بگوید.

۲.۳.۳. انتخاب موضوع پایان‌نامه

انجام پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد [قبل از شروع دورهٔ دکتری] اغلب ایدهٔ مناسبی است (در بعضی کشورها، گذراندن دورهٔ کارشناسی ارشد قبل از دورهٔ دکتری الزامی است). گرچه یافتن موضوع مناسب برای پایان‌نامه اغلب کاری دشوار است، اگر ایده‌ای برای دورهٔ دکتری نداشته باشید، ادامهٔ موضوع رسالهٔ کارشناسی ارشد کاری عاقلانه است. در چنین وضعیتی یا بر تصمیم خود برای ادامهٔ آن موضوع در دورهٔ دکتری مصمم‌تر خواهید شد و یا علاقهٔ خود را به موضوع از دست می‌دهید.

بهترین منبع برای پیدا کردن ایده‌های جدید در دورهٔ کارشناسی ارشد (برای پروژه‌های درسی و حتی موضوع پایان‌نامه)، دقت در قسمت «کارهای آینده[1]» در مقالاتی است که مطالعه کرده و به موضوع آن‌ها علاقه‌مند شده‌اید. سعی کنید مطالب بیان شده را توسیع دهید و الگوریتم‌های ارائه شده در مقاله را در حوزه‌های دیگر پیاده‌سازی کنید [این مطلب بیشتر در رشته‌های کاربردی

1) future works

موضوعیت دارد].

به بیان کلی، موضوع خوب برای پایان‌نامه، باید مورد علاقهٔ شما، استاد راهنمایتان و شبکهٔ پژوهشی [در وسعت جهانی] باشد. با توجه به جنبه‌های مختلفی که تحصیل در دورهٔ دکتری دارد، توازنی را که پیدا می‌کنید، تا حدی به نحوهٔ ارتباط شما با استاد راهنمایتان وابسته است. برخی از اساتید، طرح‌های پژوهشی تعریف شدهٔ درازمدتی دارند و علاقه‌مند هستند که دانشجویان دکتریشان نیز مستقیماً در این راستا کار کنند. تعدادی دیگر، ممکن است پروژه‌های در حال اجرای کوتاه‌مدت داشته باشند. برخی دیگر نیز ممکن است هر دانشجویی را به موضوعی هدایت کرده و به حوزهٔ وسیعی از موضوعات علاقه‌مند باشند. از اساتیدی که از ارائهٔ موضوعی برای تحقیق به دانشجویان خودداری می‌کنند، برحذر باشید. احتمالاً در چنین وضعیتی حمایت علمی نیز نخواهید شد و چه بسا اگر دانشجوی جدیدی با ایدهٔ تر و تمیزتری مراجعه کند، استاد راهنما به شما و کارتان کاملاً بی‌تفاوت شود.

علاقه‌مند بودن و با انگیزه‌ماندن در موضوعی، تنها به دلیل آن‌که مورد علاقهٔ استاد راهنمایتان است، بسیار مشکل است. اگر استاد راهنمایتان به هر دلیلی، قبل از آن‌که پایان‌نامه‌تان را به اتمام رسانیده باشید، تغییر ذائقه دهد، ادامهٔ کار بسیار دشوارتر می‌شود. همین وضعیت برای حالتی که موضوعی را تنها به دلیل بازارپسندی[1] انتخاب کرده‌اید، نیز وجود دارد. اگر خودتان نیز به موضوع انتخاب شده علاقه‌مند نباشید که کار بسیار دشوارتر خواهد شد. مشکل‌ترین قسمت کار این است که دیگران را قانع کنید که واقعاً کار و موضوع تحقیق‌تان جالب است. علاوه بر این، بازار خیلی سریع‌تر از آن‌که دانشجویی بتواند پایان‌نامهٔ خود را به پایان برساند، تغییر ذائقه می‌دهد.

برای انجام پژوهش بکر، آگاهی از آخرین کارهایی که در حوزهٔ تحقیق شما انجام می‌گیرد، ضروری است. بسیاری از دانشجویان بیش از یک سال از وقت خود را صرف مطالعهٔ نتایج منتشر شدهٔ تحقیقات اخیر می‌کنند تا از آخرین مسأله‌های حل نشده در آن حوزه، آگاهی داشته باشند. مطمئن باشید مطالعهٔ تمامی مطالبی که ممکن است به‌نحوی به حوزهٔ پژوهش شما مربوط باشند، ناممکن است و مقالات جدید همواره در حال انتشار هستند.

از مطالبی که مستقیما به موضوع تحقیق شما مربوط می‌شوند مطلع باشید. اگر مقاله‌ای را دیدید که مستقیماً آنچه را شما روی آن کار می‌کنید بیان می‌کند، نگران نشوید. این موضوعی متداول است که دانشجویان دکتری مطالبی را در ارتباط با کاری که انجام می‌دهند، ببینند و فکر کنند که کار خراب شده‌است. اگر چنین موقعیتی برای شما اتفاق افتاد، مقالهٔ مذکور را چندین بار به‌دقت بخوانید تا آن را عمقیاً درک کنید. مقاله را به استاد راهنمای خود یا فرد دیگری که با موضوع پایان‌نامهٔ شما آشنایی دارد و به نظر او اهمیت قائل می‌شوید، نشان دهید. خودتان را در کنفرانسی و یا با پست الکترونیکی به او [نویسندهٔ مقاله] معرفی کرده و در مورد کارتان بگویید. با شروع ارتباط با آن‌ها،

1) Marketablity

اغلب متوجه می‌شوید که کار آن‌ها دقیقاً مانند کار شما نیست و هنوز جنبه‌های حل نشده‌ای از مسأله [برای شما] باقی مانده است. حتی ممکن است با آن نویسنده، کار مشترک در آن موضوع انجام دهید. یک محقق خوب معمولاً از فرصت به‌وجود آمده در همکاری با اشخاص علاقه‌مند به موضوع کاری خود، استقبال می‌کند.

برای به پایان رساندن سریع پایان‌نامه، بهتر است موضوعی را انتخاب کنید که کاملاً دقیق و خوش ـ تعریف باشد. ایراد این روش این است که ممکن است کار شما آن‌قدر تخصصی باشد که مورد علاقهٔ شما و یا جامعهٔ پژوهشی قرار نگیرد. اگر خیلی ریسک‌پذیر هستید، موضوعی را انتخاب کنید که شاخه‌ای جدید از آن منشعب می‌شود. خطری که در این‌جا وجود دارد این است که ممکن است نتوانید مسأله را به‌طور دقیق تعریف و روشی را که برای حل مسأله در نظر گرفته‌اید، درست ارزیابی کنید. اگر موضوع پایان‌نامهٔ شما از این نوع باشد، داشتن استاد راهنما یا مشاور خوب که شما را در تمرکز روی مسأله یاری دهد، بسیار مهم و کارساز است.

در بدترین شرایط، اگر موضوع پایان‌نامهٔ شما آن‌قدر غیرعادی است که به هیچ چیزی مربوط نیست، ممکن است در قانع کردن دیگران به این‌که این مسأله ارزش کار کردن دارد، با مشکل مواجه شوید. البته یک تحقیق خلاقانهٔ واقعی، هیجان‌انگیز بوده و باعث شناساندن شما به جامعهٔ علمی خواهد شد و یا برعکس، ممکن است کاملاً منزوی شوید. بنابراین، مطمئن باشید که دیگران واقعاً به موضوع پایان‌نامهٔ شما «علاقه‌مند» هستند، واگرنه برای فروش متاع خود مشتری پیدا نمی‌کنید و احتمالاً برای انتشار نتایج و پیدا کردن شغل مناسب نیز با مشکل مواجه خواهید شد. همچنین، پیدا کردن «همیار»ی که به همان مسأله علاقه‌مند باشد و بتواند با بیان نظراتش به شما بازخورد دهد، مشکل خواهد شد.

در هر صورت، یک موضوع خوب باید مطالب مهم را مخاطب قرار دهد. باید تلاش کنید تا مسأله‌ای واقعی را حل کنید، نه این‌که دنبال بازیچه (و یا حتی بدتر، هیچ و پوچ) باشید. باید پشتوانهٔ نظری خوبی داشته باشید و مثال‌های مناسبی را حل کنید و یا ترجیحاً هر دو. همچنین موضوع پایان‌نامه باید با تحقیقات موجود مرتبط باشد. البته نه این‌که فقط حالتی ساده و خاص یا توسیعی بدیهی از یک مسالهٔ حل شده باشد. ممکن است پیدا کردن مسأله‌ای واقعی خیلی دشوار باشد. یک روش مناسب برای تعیین اندازهٔ واقعی و صحیح مسأله، مطالعهٔ پایان‌نامه‌های دیگران است. بهتر است «سازمان تلسکوپی[1]» داشته باشید؛ یعنی یک مسألهٔ مرکزی حل‌پذیر و قابل قبول را در نظر بگیرید و آن را، با تعمیم‌های مستمر، کامل‌تر کنید. در چنین وضعیتی، حتی اگر پایان‌نامه به نتیجهٔ قابل ملاحظه‌ای منجر نشود، حداقل نتایج مناسب و قابل قبولی به‌دست آورده‌اید. بهترین روش برای تمرکز روی موضوع پایان‌نامه، نوشتن یک جمله دربارهٔ «مسأله» و توصیف آن در یک پاراگراف است. همین کار را برای روشی که برای «حل» مسأله در نظر دارید نیز انجام دهید و خلاصه‌ای از

1) Telescopic Organization

رساله‌ای که می‌تواند این مسأله را حل کند (یعنی چه فصل‌هایی را باید در آن گنجاند و اگر خیلی آرمان‌خواه هستید، بخش‌های آن را نیز مشخص کنید)، تنظیم کنید.

پیدا کردن یک مسألهٔ کوچک و در نظر گرفتن آن به‌عنوان حداقل انتظارات، نتیجهٔ مشابهی در پی دارد. البته به‌شرط آن‌که در تلهٔ حل مسأله‌های کوچک و بی‌ربط که به هدف نهایی پژوهش منجر نمی‌شوند، گرفتار نشوید.

تکمیل پایان‌نامه فقط چند سال از زندگی شما را تشکیل می‌دهد و اگر همه چیز به‌خوبی پیش رود، کار شما ۳۰ ـ ۴۰ سال دیگر نیز ادامه خواهد داشت. بنابراین خودتان را با پژوهشگران تراز اول مقایسه نکنید و از واگذاری حل قسمتی از مسأله به بعد از اتمام دورهٔ دکتری، نگران نشوید. از طرف دیگر، اگر کارهای زیادی را به آینده موکول کنید، در مقایسه با کارهای دیگران، پایان‌نامهٔ شما چندان جالب نخواهد بود. دانشجویان تحصیلات تکمیلی اغلب موضوعات آرمان خواهانه‌ای انتخاب می‌کنند (البته قرار است که استاد راهنمایتان شما را در مشخص کردن موضوعی با ابعاد واقع‌بینانه یاری دهد). تصور نکنید که کارهایی را که دیگران انجام داده‌اند خیلی خوب است. سعی کنید ورای ادعاهای دهان پرکن را نیز ببینید (یک استاد راهنمای خوب باید بتواند شما را نیز در این کار، کمک کند).

در برخی دانشگاه‌ها، نوشتن پروپوزال پایان‌نامه الزامی است. حتی اگر چنین قانونی در دانشگاه شما وجود نداشته باشد، انجام این کار گام آغازین خوبی است و شما را ملزم می‌کند تا مسأله‌تان را تعریف و روش‌های احتمالی حل مسأله را مشخص کنید. همچنین ملاک‌های ارزیابی را مشخص کنید و شما را در بازخورد مفید گرفتن از استاد راهنما و همکارانتان کمک می‌کند. ممکن است نوشتن پروپوزال خوب برای پایان‌نامه، چندین ماه طول بکشد و طول این مدت به میزان مطالعهٔ انجام شده در فرایند انتخاب موضوع پایان‌نامه و پیش‌زمینهٔ شما وابسته است.

پروپوزال باید مبنایی مناسب برای پایان‌نامه باشد. ابتدا روی مسأله متمرکز شوید و بحث قانع کننده‌ای در چرایی حل آن مسأله انجام دهید و سپس روش خودتان را برای حل مسأله، بیان کنید. باید پژوهش‌های مرتبط را بیان و راجع به آن‌ها نیز بحث کنید. آیا این مسأله قبلاً بررسی شده است یا نه و نقاط ضعف نتایج منتشر شده در این مورد چیست. روش شما در مقایسه با روش دیگران چه تفاوت‌ها و چه مزیتی‌هایی دارد.

روش خودتان را برای حل مسأله، با جزئیات کامل بیان و طرحی برای حل قسمت حل نشدهٔ آن ارائه کنید. یک پروپوزال باید خلاصه‌ای از پایان‌نامه را شامل شود. در واقع به جز زمانی که موضوع نهایی پایان‌نامه بسیار متفاوت از موضوع انتخاب شده در ابتدای کار باشد، می‌توانید قسمت‌هایی از پروپوزال را در تدوین پایان‌نامه نیز استفاده کنید.

در برخی دانشگاه‌ها امتحان شفاهی نیز وجود دارد که در آن باید پروپوزال خود را ارائه کنید و به سؤالات احتمالی پاسخ دهید. مطمئن باشید که اعضای کمیته به حد کافی با موضوع پایان‌نامهٔ شما

آشنا هستند. نسخه‌هایی از پروپوزال خود را به آن‌ها بدهید و در مورد آن صحبت کنید. در حین امتحان، اگر پاسخ سؤالی را ندانید نگران نشوید. خیلی ساده بگویید: «مطمئن نیستم!» و تمامی تلاش خود را برای تحلیل مسأله، انجام داده و راه‌حل‌های احتمالی را ارائه دهید. کمیتهٔ امتحانی می‌خواهد مهارت‌های تحلیل‌گرانهٔ شما را ببیند و به دنبال جواب‌های شسته و رفته و از پیش آماده برای سؤالات خود نیستند. قبلاً یک سخنرانی آزمایشی برای دانشجویان و اعضای دانشکده داشته باشید (در این مورد استاد راهنمایتان به شما کمک خواهد کرد و ترتیب چنین جلساتی را خواهد داد). به یاد داشته باشید دانش شما روی موضوع بیشتر از اعضای کمیته است و شما «آن‌ها» را برای ایجاد تغییر [در دیدگاه‌هایشان] آموزش می‌دهید.

۳.۳.۳. نوشتن رساله

اغلب دانشجویان تحصیلات تکمیلی فکر می‌کنند که تکمیل پایان‌نامه در دو مرحلهٔ مجزا انجام می‌گیرد: «انجام تحقیق» و «نوشتن رساله». شاید برای برخی دانشجویان چنین باشد، ولی قطعاً برای همه چنین نیست. این مراحل با همدیگر تلاقی دارند و در تعامل با یکدیگر هستند. اغلب، فرمول‌بندی مناسب یک ایده برای آزمودن درستی آن، بدون نوشتن جزئیات، مشکل است. نتایج حاصل از آزمون یک ایده، ایجاب می‌کند تا تغییراتی در آن ایجاد کنید و ایجاد تغییر به این مفهوم است که باید قسمت‌هایی از پایان‌نامه را دوباره بنویسید. فرایند رشد و آزمودن ایده‌هاتان، پایان‌ناپذیر است (همیشه چیزی وجود دارد که انجام نداده‌اید) و بنابراین برای اغلب دانشجویان، روزی که تحقیق تمام می‌شود دقیقاً همان روزی است که وارد مرحلهٔ «نوشتن پایان‌نامه» می‌شوند.

روش «تفرقه بینداز و حکومت کن»، همچنان که در انجام تحقیق مؤثر است، در نوشتن رساله نیز کاربرد دارد. مشکلی که اغلب دانشجویان تحصیلات تکمیلی با آن مواجه هستند این است که تنها هدف آن‌ها «اتمام رساله» است. اساسی‌ترین کار این است که آماده‌سازی رساله را، هم در مرحلهٔ تحقیق و هم در مرحلهٔ نوشتن، به مراحل قابل مدیریت تفکیک کنید. مشخص کردن کاری که می‌توانید در طول یک هفته یا یک روز و یا حتی یک ساعت انجام دهید، بسیار واقع‌بینانه‌تر است. کارهایی را که [در نوشتن رساله] باید انجام دهید، بر اساس سختی کار و مدت زمانی که طول می‌کشد، دسته‌بندی کنید. در روزی که پرانرژی و با علاقه هستید، عزم خود را برای حل قسمت‌های مشکل‌تر کار جزم کنید و روزهایی را که بی‌انگیزه و کم‌حوصله هستید، به کارهای سبک‌تر اختصاص دهید و آن‌ها را تدریجاً از فهرست خود خارج کنید. همچنین نوشتن تدریجی قسمت‌هایی از رساله و ویرایش آن در زمان‌های بعدی می‌تواند مفید باشد. نوشتن تمامی رساله در یک روز و اتمام آن! الزامی و امکان‌پذیر نیست. ابتدا عنوان مواردی را که می‌خواهید در رسالهٔ خود بیاورید، یادداشت کنید و آن‌ها را در پیشگفتار رساله قرار دهید (ممکن است این قسمت را در حین انجام تحقیق و نوشتن بخش‌های دیگر رساله، تغییر دهید). ابتدا پیش‌نویسی از بخش‌های پایان‌نامه را تهیه کنید، مخصوصاً آن بخش‌هایی که به درستی آن‌ها اطمینان دارید.

خود را به این مقید نکنید که در اولین بار نوشتن، کامل و بی‌عیب و نقص بنویسید. اگر نمی‌توانید پاراگرافی را به‌طور کامل بنویسید تنها به نوشتن جملاتی کوتاه (توضیحی برای خودتان یا مطالبی به‌طور خلاصه و یا حتی یک توصیف کلی از آنچه در ذهن دارید) اکتفا کنید و از آن رد شوید. بعداً به قسمت‌های سخت رساله برگردید و آن‌ها را ویرایش کنید. این کار از الزامات پیشرفت پایدار در نوشتن پایان‌نامه است.

هنگام نوشتن رساله و یا یک مقالهٔ علمی، به یاد داشته باشید که اغلب مخاطبان با مطالب شما بیگانه هستند و شما بیشتر از آن‌ها بر موضوع تسلط دارید. انگیزه‌ها، اهداف و روش‌شناسی خود را به‌وضوح بیان کنید. با بیان اندیشه‌های خود در سطوح مختلف و ارائهٔ مثال‌های روشنگر، در عین آن که تلاش می‌کنید تا مطالب بیان شده کسل کننده نباشند، اطلاعات کافی در اختیار مخاطب قرار می‌دهید.

داشتن یک «همراه نوشتاری[1]» بسیار مفید است. بهتر است همراه نوشتاری را از بین دوستانتان که در حال تدوین رساله هستند، انتخاب کنید. ولی موضوع مهم‌تر این است که «همراه نوشتاری» پیش‌نویس‌های ناخوانا و نامرتب شما را مطالعه کند و به ارائهٔ بازخورد تمایل داشته باشد. به‌طور منظم با آن‌ها صحبت و مراحل پیشرفت خود را ترسیم کنید و از آن‌ها حمایت معنوی بگیرید. «همراه نوشتاری» را ترجیحاً از بین کسانی انتخاب کنید که با موضوع تحقیق شما آشنا هستند و بخواهند نوشته‌های شما را مرور کنند.

۴.۳. بازخورد گرفتن

برای موفقیت در پژوهش، یاد بگیرید که با انتقادها برخورد سازنده داشته باشید و حتی از آن‌ها استقبال کنید. یاد بگیرید که به انتقادهای معتبر و سازنده گوش دهید و به انتقادهای مخرب و نادرست (بعد از استخراج مرواریدهای پنهان آن‌ها) بی‌توجه باشید.

برای بازخورد گرفتن، باید ایده‌های خود را بیان کنید. موضوعی را که روی آن کار می‌کنید، حتی اگر در حد و اندازهٔ مقاله‌ای برای یک کنفرانس و یا مجله نباشد، مکتوب کنید و به دیگران نشان دهید. حتی پیش‌نویس مقالات را نیز به‌دقت و به‌وضوح بنویسید و به این ترتیب، شانس خود را برای گرفتن بازخوردهای مناسب و مفید از دیگران افزایش دهید و از این‌که دیگران نوشته‌های شما را مطالعه می‌کنند، خوشحال باشید.

هرگاه فرصت پیش آمد، در سمینارهای دوره‌ای که در دانشگاهتان برگزار می‌شود و کنفرانس‌های سایر دانشگاه‌ها سخنرانی کنید. استاد راهنمایتان باید شما را در پیدا کردن میزگردهای مناسب برای معرفی کار و نظراتتان کمک کند. در بسیاری از رشته‌ها، کارگاه‌های آموزشی و پژوهشی غیررسمی وجود دارند که برای ارائهٔ نظرات ناپخته و خام مناسب هستند.

1) writing buddy

در کنفرانس‌ها شرکت کنید و از تحقیقات خود سخن بگویید. اگر با اشخاص جدیدی برخورد کردید و از کارتان پرسیدند، فرصت را غنیمت بشمارید. تنها به گفتن این که «موضوع پایان‌نامهٔ من در مورد ..... است» اکتفا نکنید. تا جایی که تمایل داشته باشند، از جزئیات پایان‌نامه با آن‌ها صحبت کنید. خلاصه‌های ۳۰ ثانیه‌ای، دو دقیقه‌ای، پنج دقیقه‌ای و ده دقیقه‌ای از پایان‌نامه، برای مواقع ضروری آماده کنید (البته این بدان معنی نیست که مطالب آماده شده‌ای را جمله به جمله از حفظ بگویید. هیچ‌کس به شنیدن مطالب کلیشه‌ای علاقه‌مند نیست). بیان مطالب به دیگران، کمک می‌کند تا نکاتی از تحقیق را که با نتایج دیگران متفاوت است و نوآوری‌هایی در بر دارند، بشناسید و دریابید که نتایج تحقیق شما در کجای حوزهٔ کاری قرار گرفته است و به چه نتایج احتمالی منجر می‌شود؛ تفهیم کدام قسمت از کارتان دشوارتر است و برای توجیه دیگران، تفکر بیشتر روی کدام قسمت، الزامی است.

دلایل زیادی بر مفید بودن ارائهٔ بازخورد به دانشجویان دیگر و همکاران وجود دارد. اولاً باعث می‌شود تا توانایی‌تان را در نقادی افزایش دهید، شما را در درک کار دیگران متبحر می‌کند و در ارزیابی کار خودتان نیز مفید است. ثانیاً شما را در ایجاد شبکه‌ای از دوستان یاری می‌دهد که می‌توانند همکاران بالقوهٔ سال‌های آتی شما باشند. نهایتاً اگر بازخورد مفیدی به آن‌ها بدهید، آن‌ها نیز تمایل بیشتری در ارائهٔ بازخورد به شما خواهند داشت.

اگر نظرات خود را به‌ترتیب نزولی از تجرد مرتب کنید، هم برای خودتان و هم برای کسی که مقاله‌تان را مرور می‌کند، مفید خواهد بود. ابتدا نظرات جهت‌بخش سطح بالا، سپس نحوهٔ ارائهٔ مطالبی که از سطح متوسط برخوردار است و در پایان، موارد نه‌چندان مهم و غلط‌های املایی و انشایی را بیان کنید. تلاش کنید تا نظراتتان سازنده باشد (مثلا بگویید: بهتر است X را قبل از Y تعریف کنید) و از بیان نظرات غیرسازنده (مثلا: جملهٔ X بی‌معنی است) پرهیز کنید.

دو بار مطالعه کردن یک مقاله بهتر است. بار اول برای درک و فهم کلی مقاله و بار دوم برای نوشتن نظرات. نظرات سطح بالا نشان می‌دهند که مقاله تا چه اندازه شما را تحت تأثیر قرار داده است. پیشنهاد برای سازماندهی و ارائهٔ مطالب، روش‌های جایگزینی که می‌توان اتخاذ کرد، توسیع‌های بالقوهٔ موجود و مرجع‌های مربوط، مفیدترین و سخت‌ترین بازخوردی هستند که ارائه می‌شوند. پیشنهادات سطح پایین بیشتر برای مقاله‌هایی که برای انتشار در مجلات تهیه شده‌اند مفیدتر است و برای مقاله‌های منتشر نشده مانند پروپوزال و شکل اولیهٔ طرح پژوهشی کاملا نامناسب هستند.

۵.۳. حمایت‌های مالی

بسیاری از دانشجویان (مخصوصاً دانشجویانی که در رشته‌های علوم طبیعی تحصیل می‌کنند) منابع مالی کافی برای پرداخت هزینهٔ تحصیل خود [در بسیاری از کشورها، برای تحصیل در دورهٔ تحصیلات تکمیلی باید هزینهٔ ثبت نام پرداخت شود] و مقداری نیز برای مخارج زندگی در اختیار

دارند[1]. اگرچه تا به حال کسی از کمک هزینهٔ تحصیل دورهٔ تحصیلات تکمیلی ثروتمند نشده است، ولی قطعاً دانشجویی نیز از گرسنگی نمرده است. منابع مالی معمولاً شامل بورس‌ها (از طرف وزارت یا دانشگاه‌ها، مؤسسات و سازمان‌های دولتی و صنعت، حمایت از طریق طرح‌های پژوهشی و کمک آموزشی) می‌باشد.

از همان اوایل تحصیل به‌دنبال کمک‌های مالی باشید. در بسیاری از دانشگاه‌ها طرح‌هایی برای حمایت مالی از دانشجویان سال اول در قالب کمک پژوهشی[2] و کمک آموزشی[3] وجود دارد. ولی در سال‌های بعدی باید خودتان دست به‌کار شوید. معمولاً مهلت فرستادن درخواست‌ها در دانشگاه‌های مختلف متفاوت است و اگر فرصتی را از دست بدهید شاید برای جبران آن وقتی وجود نداشته باشد و مجبور شوید تا سال بعد منتظر بمانید. بعد از آن‌که درخواست خود را ارائه کردید، معمولاً شش ماه یا بیشتر برای دریافت پاسخ، زمان لازم است و چند ماه دیگر نیز (در صورت موافقت) تا پول به دستتان برسد.

از اعضای دانشکده، مخصوصاً استاد راهنمای خودتان (کسی که باید یاور شما در یافتن کمک‌های مالی بوده و یا از پژوهانهٔ[4] خودش شما را حمایت کند)، مدیران و سایر دانشجویان تحصیلات تکمیلی در مورد بورس‌های موجود بپرسید. به معاونت‌های پژوهش و یا آموزش یا سایر مراکزی که چنین مسؤلیتی را بر عهده دارند مراجعه نموده و اطلاعات لازم را کسب کنید. در برخی موارد برای دانشجویان دختر و اقلیت‌ها مزایایی وجود دارد که می‌توانید از آن‌ها نیز استفاده کنید. بسیاری از دانشگاه‌ها امکاناتی برای گروه‌های تحصیلی خاص و یا شاید برای دانشجویان تمامی رشته‌ها دارند. از این موقعیت‌ها به حد کافی استفاده کنید.

اگر هنوز به‌طور فعال در کار پژوهشی درگیر نشده‌اید، آغاز یک فعالیت کمک ــ پژوهشی می‌تواند روش مفیدی برای درگیر شدن در پروژه‌های تحقیقاتی باشد. کار کردن روی پروژه‌های تحقیقاتی موجود مانند پشتیبانی و یا توسعهٔ نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، تهیه گزارش و انجام آزمایشات کمک می‌کند تا مفهوم واقعی کار پژوهشی را احساس کنید و شاید موضوعی برای پایان‌نامهٔ خود نیز بیابید. دنبال کارهای موجود بگردید و با اساتیدی که کار آن‌ها مورد علاقهٔ شماست، صحبت کنید.

شاید لازم باشد برای پژوهانه و یا فلوشیپ [گرچه این مبحث در ایران موضوعیت ندارد!] فرم درخواست تنظیم کنید. در این صورت، هرچه موضوع پایان‌نامهٔ شما قوی‌تر باشد به همان اندازه، شانس بیشتری خواهید داشت. ممکن است مجبور شوید تا پروپوزال خود را به‌شکل مطلوب و مورد علاقهٔ مؤسسه‌ای که پژوهانه می‌دهد، تنظیم کنید. در این صورت در عین آن‌که خواستهٔ خود را

---

۱) شاید مطالب بیان شده در این بخش برای دانشجویان تحصیلات تکمیلی که در داخل کشور تحصیل می‌کنند، کمتر مطرح است ولی برای رعایت امانت ترجمه شده‌است.

2) Research Assistant 3) Teaching Assistant 4) Grant

بر اساس نیازهای طرف مقابل تعدیل می‌کنید، اصل صداقت و انصاف را نیز رعایت کنید. مطالب پروپوزال را در سطحی بنویسید که برای عموم قابل درک باشد، زیرا آن‌هایی که پروپوزال شما را بررسی می‌کنند الزاما متخصص در رشتهٔ شما نیستند. روی اهدافتان متمرکز شوید و اهمیت پروژه‌ای را که روی آن کار می‌کنید، بیان کنید. در مورد روش خود برای حل مسأله به اندازهٔ کافی صحبت کنید و مطمئن شوید روشی که در نظر گرفته شده، رضایت‌بخش و قانع کننده است. قواعد نوشتن و محدودیت صفحات را نیز رعایت کنید؛ در غیر این صورت ممکن است اصلاً درخواست شما بررسی نشود.

۴. وارد شدن در شبکه‌های علمی

از وظایف مهم یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی، عضویت ثابت در یک مجمع پژوهشی است. استاد راهنمایتان می‌تواند این کار را با تأمین مالی شرکت در کنفرانس‌ها و تشویق و ترغیب شما به انتشار نتایج پژوهش و همکاری در انتشار مقالات مشترک، معرفی شما به همکارانش و کمک در ارتقاء کیفیت کارتان انجام دهد. شما نیز می‌توانید با شرکت کردن در کنفرانس‌ها و کارگاه‌ها، انتشار مقالات، شرکت در جلسات سخنرانی و تماس با سایرین، توانایی خودتان را به اعضای شبکه‌های علمی نشان دهید.

۱.۴. شرکت در کنفرانس‌ها

شرکت در کنفرانس‌ها و کارگاه‌ها، چه با مقاله و چه بدون مقاله، ارزشمند است. در ادامه، چند دلیل برای این کار بیان می‌کنیم.

- با سایرین ملاقات می‌کنید و شانس به چالش کشاندن ایده‌هایتان و شنیدن نظرات آن‌ها را خواهید داشت.
- درک خوبی از وضعیت فعلی پژوهش‌هایی که در حوزهٔ کاری شما انجام می‌گیرد، به‌دست می‌آورید و نحوهٔ نوشتن مقاله برای کنفرانس‌ها و ارایهٔ مقاله (گاه با مثال نقض [ادب از که آموختی از بی ادبان]) را یاد می‌گیرید.
- شاید به این جمع‌بندی برسید که کار شما باارزش‌تر از آن است که تصور می‌کردید.

اگر در کنفرانسی، سخنرانی نیز داشته باشید، شانس بیشتری برای مطرح شدن خواهید داشت و فرصت تحت تأثیر قرار دادن سایر پژوهشگران را به‌دست می‌آورید. در ادامه، چند نکته را برای گیراتر شدن سخنرانی شما در کنفرانس‌ها، بیان می‌کنیم.

- یک سخنرانی آزمایشی و تمرینی، مخصوصاً اگر اضطراب بر شما غالب می‌شود، داشته باشید. مطمئن شوید کسانی را که می‌توانند برای شما بازخورد مفید و سازنده ارائه دهند برای شرکت در جلسه سخنرانی، دعوت کرده‌اید.

• مطمئن شوید که سخنرانی شما در مدت زمان اختصاص‌یافته [معمولاً بین ۱۵—۲۰ دقیقه] قابل ارائه است. چیزی نمی‌تواند بدتر از این باشد که یک سخنران با عجله به چند برگ آخر اسلایدها رفته و یا از بسیاری از صفحات صرف‌نظر کند و مستقیماً به نتیجه‌گیری از بحث بپردازد. بهترین کار این است که روی هر اسلاید به‌طور متوسط ۲—۳ دقیقه وقت صرف کنید.

• بهتر است به‌جای فرو رفتن در باتلاق بیان جزئیات، تجردی کار کنید، ولی مطمئن شوید که جزئیات کافی برای قانع کردن شنونده ارائه می‌کنید. سخنرانی و مقالهٔ شما باید جزئیات گم شده‌ای نداشته باشد تا سایرین بتوانند درک عمیق‌تری از مطالب به‌دست آورند. مخاطبین خود را بشناسید. برای آن‌هایی که دانش عمومی دارند، بیشتر روی پیش‌زمینه صحبت کنید و در مقابل، برای مخاطبین حرفه‌ای بر جزئیات تکنیکی مسأله تأکید بیشتری داشته باشید.

• از مثال‌ها و شکل‌ها برای وضوح بیشتر ایده‌هایتان بهره بگیرید.

• از شهود خود یاد بگیرید: سعی کنید از سخنرانی‌هایی که کیفیت آن‌ها را پسندیده‌اید، تقلید کنید و از کارهایی که برخی سخنران‌ها انجام داده و باعث ناراحتی دیگران می‌شوند، پرهیز کنید.

• هرگاه فرصتی پیش آید، در موقعیت‌های غیر رسمی، در مورد ایده‌هایتان با دیگران صحبت کنید. در این صورت، سخنرانی شما طبیعی‌تر شده و این فرصت را خواهید داشت که در مورد سؤالات احتمالی که ممکن است بعد از سخنرانی شما پیش آید، حدس‌هایی بزنید و پاسخ‌های مناسبی آماده کنید.

• مطمئن شوید اسلایدهای شما خوانا و ساده نوشته شده‌اند. هیچ‌گاه در اسلاید خود از جملاتی که ریز نوشته شده‌اند استفاده نکنید تا مجبور نشوید بگویید: «می‌دانم نمی‌توانید این‌ها را بخوانید؛ ولی ...».

• کاملا راحت باشید. از روی متن نوشته نخوانید و یا اسلایدها را جمله‌به‌جمله روخوانی نکنید. آرام، با اطمینان صحبت کرده و مطمئن باشید «شما» تنها کسی هستید که در مورد کارتان بیشتر از بقیه می‌دانید.

۲.۴. انتشار مقاله

انتشار ایده‌هایتان به چند دلیل مهم است. منبعی سرشار از بازخورد از خوانندگان مقاله‌تان دریافت می‌کنید و شما را به‌عنوان یکی از اعضای شبکهٔ پژوهشی تثبیت می‌کند. برای پیدا کردن شغل مناسب، بسیار مفید است و شما را ملزم می‌کند تا ایده‌هایتان را پالایش کرده و در قالب تحقیقات جاری و به‌روز قرار دهید.

مقالات خوب دو خاصیت کلیدی دارند: «محتوای عالی و بکر و ایده‌های مهم که بسیار خوب پرورش داده شده و در مثال‌هایی آزموده شده‌اند» و «نثر خوب و روان». مجله‌ای که می‌خواهید

مقاله را به آن بفرستید به محتوای مقاله توجه می‌کند. ایده‌های اولیه و در حال توسعه بیشتر برای کارگاه‌ها و گردهمایی‌ها مناسب است. ایده‌های خوب پرورش‌یافته که در مثال‌های زیادی نیز آزموده شده‌اند، برای مجلات تناسب بیشتری دارند. برای پیدا کردن محل مناسب، مجموعهٔ مقالات کنفرانس‌های سال قبل و یا شماره‌های اخیر مجلات را بخوانید و یا پیش‌نویش مقاله را به استاد خود و یا سایر همکاران نشان دهید و از آن‌ها راهنمایی بخواهید.

ارائهٔ بدِ یک ایدهٔ بسیار خوب، ممکن است منجر به عدم پذیرش مقاله در کنفرانس و یا چاپ در مجله شود. مطمئن شوید که نکتهٔ اصلی موجود در مقاله را می‌شناسید و آن را به‌وضوح و مکرراً بیان کنید. همین وضعیت برای ایده‌های تکنیکی نیز وجود دارد. اجازه ندهید که خواننده به دنبال کشف نکات مهم مقالهٔ شما باشد؛ آن‌ها را خودتان صریحاً بیان کنید. در غیر این صورت، ممکن است خواننده (اگر زحمت خواندن کامل مقاله را به خود بدهد) به بیراهه رود. اهمیت مسأله‌ای را که مورد نظر شما است، به‌روشنی بیان کنید و این‌که سایر پژوهشگران دربارهٔ این مسأله و یا مسأله‌های مشابه آن، چه نظری دارند و دلیل متفاوت بودن و یا بهتر بودن روش خودتان را به‌وضوح بیان کنید.

مقاله را خطاب به آن‌هایی بنویسید که انتظار دارید مقالهٔ شما را بخوانند. همین وضعیت را برای سخنرانی‌هایی که در کنفرانس‌ها خواهید داشت نیز رعایت کنید. برای مخاطبین عمومی پیش‌زمینهٔ بیشتری ارائه دهید و برای مخاطبین متخصص، جزئیات تکنیکی را بیان کنید. اگر امکان‌پذیر باشد، مخصوصاً زمانی که مقاله شما پر از فرمول‌های ریاضی و الگوریتم‌های پیچیده است، مثال‌های روشن‌کننده بیاورید.

گنجاندن تمامی مطالب پایان‌نامه در یک مقاله، الزامی نیست. مطالب موجود در پایان‌نامه را به قسمت‌های کوچکتر تفکیک کنید و یا در قالب یک یا دو مقالهٔ طولانی‌تر برای مجلات بنویسید.

ممکن است در حین پالایش ایده‌هایتان، به این نتیجه برسید که آن‌ها را در قالب جدیدتری منتشر کنید. در این صورت مطمئن شوید که مطالب جدیدی به آن اضافه کرده‌اید و صرفاً آرایش مجدد مطالب قبلی نیست. برخی از مقالات به‌صورت کوتاه تهیه می‌شوند و برای کارگاه‌ها مناسب‌تر هستند و در مرحلهٔ بعدی، اگر مقداری کامل‌تر کنید، برای ارائه در کنفرانس‌ها مناسب‌تر خواهند شد. چنین مقالاتی، با افزودن جزئیات تکنیکی، نتایج تجربی و شکل رسمی دادن به برهان‌ها، به مقاله‌ای برای چاپ در مجلات تبدیل می‌شوند. معمولاً می‌توان یک مقاله را برای کارگاه‌های مختلف (با تفاوت‌های جزئی) فرستاد، ولی مقالاتی را که به کنفرانس‌ها و یا مجلات علمی می‌فرستید باید کار بکر و منتشر نشده باشند.

[این موضوع حیاتی است که] قبل از آن‌که مقاله‌ای را به مجله‌ای بفرستید، آن را به شخص دیگری (حتی اگر فقط برای پیدا کردن اشتباهات تایپی و خطاهای دستوری و تغییر چینش مطالب مقاله باشد) بدهید تا بخواند. یک مرور کنندهٔ خوب می‌تواند بازخورد مفیدی از نحوهٔ چینش مطالب مقاله و حتی محتوای آن ارائه کند (بخش ۴.۳ را نگاه کنید). هر قدر داوری یک مقاله سنگین‌تر باشد مسؤلیت شما در آماده کردن آن مشکل‌تر خواهد بود.

برای فرستادن مقاله به کارگاه علمی، شاید تنها مرور مقاله توسط استاد راهنمایتان (اگر بتوانید ایشان را برای انجام این کار متقاعد کنید) کافی باشد. برای کنفرانس‌هایی که مقالات آن داوری می‌شوند، بهتر است از یکی دو نفر از دانشجویان تحصیلات تکمیلی بخواهید تا آن را بخوانند. برای مجلات علمی، شاید مجبور شوید پژوهشگرانی را که در حوزهٔ کاری شما تحقیق می‌کنند (ترجیحاً از موسسات دیگر، برای آن‌که خودتان را در حوزهٔ گسترده‌تری معرفی کنید) پیدا کرده و بخواهید نظراتشان را ارائه کنند. این مرحله دقیقاً همان جایی است که ارتباط با دیگران به کمک شما می‌آید (بخش ۳.۴ را نگاه کنید).

اگر لازم است که یک مقاله چندین بار مرور شود، مرور مجدد آن را به همان شخص قبلی (حتی اگر آن شخص استاد راهنمای شما باشد) نسپارید و مطالعهٔ پیش‌نویس‌های جدید را از اشخاص دیگر بخواهید. تنها زمانی ویرایش جدید را به شخص قبلی و یا استاد راهنمای خود بدهید که تغییرات اساسی در آن ایجاد کرده‌اید و آن شخص به مطالعهٔ مجدد آن علاقه‌مند است.

در صورت رد شدن مقاله، دلسرد نشده و به فعالیت خود ادامه دهید . انتقادها و نظرات داوران را با جان و دل بپذیرید و مقاله را، با در نظر داشتن نظرات آنان، بازنویسی کنید. بازخوردهایی که از داوری مجلات دریافت می‌کنید بسیار مفیدتر از داوری‌هایی است که کارگاه‌ها و کنفرانس‌ها انجام می‌دهند. معمولاً مقالاتی که برای مجلات می‌فرستید، حتی اگر پذیرش شده باشند، برای بازبینی عودت داده می‌شوند. در حالی که در داوری مقالات برای کنفرانس‌ها، تنها پذیرش یا عدم پذیرش آن اعلام می‌گردد. بعد از یک بار خواندن نظرات داوران، آن را کنار بگذارید. بعداً دوباره به آن رجوع کنید و با دقت در جزئیات، بخوانید و ببینید آیا انتقادهای آن‌ها بجا است یا نه و چگونه می‌توانید به آن‌ها پاسخ دهید.

گاهی ممکن است نظرات داوران، به‌دلیل تفسیر نادرستی که از مقالهٔ شما دارند و یا شاید از تنبلی آنان، بی‌مورد باشد. در این صورت اجازه ندهید که نظرات آن‌ها شما را تحت تأثیر قرار دهد. فقط مقاله را بازنویسی کرده و آن قسمتی را که موجب سوء برداشت شده است، واضح‌تر بیان کنید.

رد شدن یک مقاله تنها به‌دلیل سوء برداشت داوران بسیار ناراحت کننده است، ولی حداقل این مزیت را دارد که می‌توانید این نارسایی [که منجر به سوء تفاهم شده است] را برطرف کنید. از طرف دیگر، ممکن است ایراداتی که به مقاله گرفته شده است، بسیار اساسی و بنیادی باشد و لازم باشد که دوباره روی ایده‌های خود فکر کرده، آزمایشات بیشتری انجام دهید و تحلیل مجددی داشته باشید. گاهی ممکن است رد مقاله دلایل دیگری داشته باشد. یکی از داوران، موضوع مقاله یا استاد راهنما، یا نحوهٔ نگارش شما و یا حتی به دلایل شخصی، خود شما را دوست ندارد. این دلایل کافی است تا مقاله را به مجله یا کنفرانس دیگری بفرستید.

۳.۴. ایجاد ارتباط با دیگران

نحوهٔ ایجاد ارتباط با دیگران، یکی از مهم‌ترین مواردی است که باید یاد بگیرید. لازمهٔ وارد

شدن در یک شبکهٔ علمی، شرکت در کنفرانس‌ها و سخنرانی‌های ارائه شده توسط سایر پژوهشگران و شناساندن خودتان است. ایجاد ارتباط، مهارتی است که باید یاد بگیرید و نباید انتظار داشته باشید که بلافاصله در این کار متخصص شوید. ارتباط با دیگران، مهارتی است که می‌توانید (و باید) یاد بگیرید تا در نهایت، عضو مؤثری در شبکهٔ علمی خودتان باشید.

تنها رفتن به یک کنفرانس و در گوشه‌ای ایستادن، مخصوصاً اگر فردی نیستید که خود را در چشم دیگران جا دهید، کافی نیست. تلاش آگاهانه‌ای را برای ملاقات با سایر پژوهشگران و ایجاد ارتباط با آن‌ها داشته باشید. ارائهٔ مقاله در کنفرانس‌ها روش مناسبی است، زیرا معمولاً افراد در مورد مطالب ارائه شده، با شما تبادل نظر می‌کنند. معرفی خود به افرادی که سخنرانی آن‌ها برای شما جالب است، پرسیدن سؤالات متناسب و یا توصیف پژوهش مرتبط شما، روش مناسبی برای باز کردن باب گفتگو با دیگران است. گاهی ملاقات با دانشجویان تحصیلات تکمیلی راحت‌تر از ملاقات با پژوهشگران ارشد است. شاید این روش مناسب‌تر باشد، آن‌ها معمولاً می‌توانند شما را با پژوهشگران ارشد این رشته، مرتبط کنند.

در هر فرصتی، از علاقه‌های پژوهشی خود صحبت کنید (ولی حواستان باشد که برای گوش کردن هم وقت باقی بماند: از این طریق بهتر یاد می‌گیرید و دیگران احساس خواهند کرد که ارتباط با شما دوجانبه است). خلاصه‌ای از پایان‌نامهٔ خود را همراه بازه‌های زمانی مختلف برای بیان آن، به همراه داشته باشید تا در پاسخ به سؤال «شما روی چه چیزی کار می‌کنید؟» غافلگیر نشده و پاسخ زیرکانه و صریح داشته باشید. اگر کسی به کار شما علاقه نشان دهد، او را تعقیب کنید. به او ایمیل بفرستید، در مورد ایده‌های جدید خود با ایشان صحبت کنید و در صورت نیاز، سؤالاتی بپرسید. پیش‌نویس‌هایی از مقاله‌های خود را بفرستید و از آن‌ها نیز پیش‌نویس مقالاتشان را بخواهید و نظرات‌تان را بگویید (اگر چنین کاری را انجام دهید قطعاً شما را فراموش نمی‌کنند). کارت ویزیتی که روی آن‌ها آدرس پست الکترونیکی خود را نوشته‌اید در کنفرانس‌ها به همراه داشته باشید و به آن‌ها بدهید. این کار باعث می‌شود همواره شما را به‌خاطر داشته باشند. ارتباطی را که با ایمیل ایجاد کرده‌اید، حفظ کنید و این کار را در هر کنفرانس و کارگاهی که شرکت می‌کنید، انجام دهید. از آشنایی‌های اولیه برای ملاقات با افراد جدید استفاده کنید. به این ترتیب، شبکهٔ ارتباطی شما به‌سرعت گسترش می‌یابد.

گاهی این ارتباطات به انجام کارهای مشترک، منجر می‌شود. با غنیمت شمردن چنین فرصت‌هایی، افراد بیشتری را ملاقات کنید و با روش‌های جدید تحقیق و یا زیرموضوعی از حوزهٔ پژوهشی‌تان آشنا شوید. احساس مسؤلیتی که در انجام کارهای مشترک دارید، شما را ملزم می‌کند تا در پژوهش خود، باانگیزه بمانید.

سایر فعالیت‌های حرفه‌ای نیز می‌توانند شما را وارد یک شبکهٔ پژوهشی کنند. داوطلب عضویت در کمیته‌های اجرایی کنفرانس‌ها شدن، فرستادن شرح‌حال علمی به تیم سردبیری یک کتاب، پیشنهاد ارائهٔ سمینار در سایر دانشگاه‌ها، نوشتن مقاله برای کنفرانس‌ها و کارگاه‌ها و فرستادن آن‌ها به

اشخاصی که ملاقات کرده‌اید و یا سازماندهی کارگاه‌ها در زیرحوزهٔ پژوهشی خود در کنفرانس‌ها، از آن جمله است. انجام تحقیق در ایام تابستان در مدارس تابستانی[1] یا در آزمایشگاه‌های تحقیقاتی و یا حتی در دانشگاه‌ها روش خوبی برای درک «دنیای واقعی پژوهش» است. همکاران بیشتری ملاقات می‌کنید و با دیدگاه‌های متفاوتی در مسائل پژوهشی حوزهٔ کاری خود، آشنا می‌شوید.

سرپرستی دانشجویان تحصیلات تکمیلی سال‌های پایین و دانشجویان دورهٔ کارشناسی، سرمایه‌گذاری خوبی برای درازمدت است. در عین‌حال، خدمات ارزشمندی به آن‌ها ارائه و احساس مفید بودن می‌کنید.

زمانی که احساس می‌کنید در دانشگاه خودتان منزوی شده‌اید، داشتن همکارانی در سایر مؤسسات که بتوانند توصیه‌های لازم را بیان کنند و بازخوردهای مفید روی پیش‌نویس مقالاتتان ارائه نمایند و پیشنهاداتی برای ادامهٔ کار پژوهشی داشته باشند، بسیار ارزشمند است.

۵. توصیه‌هایی برای اساتید راهنما

یکی از رمزهای خوبیِ یک استاد راهنما، تعامل انفرادی با تک تک دانشجویان است (نه فقط به‌عنوان فرد کمک ـ پژوهشی یا همکار در مواقع نیاز یا همکار در تهیه و آماده‌سازی مقاله). مسؤلیت شما بسیار فراتر از این موارد است.

با تمامی دانشجویان خود کار کنید؛ نه فقط با آن‌هایی که فکر می‌کنید در کار کردن با آن‌ها راحت‌تر هستید و یا کسی که موضوع پایان‌نامه‌اش باب‌طبع شماست. دانشجویانتان را شخصاً و به‌طور حرفه‌ای بشناسید و آن‌ها را در شناسایی نقاط قوت و ضعف‌شان یاری دهید تا نقاط قوت خود را تقویت و بر نقاط ضعفشان غلبه کنند. ارزش واقعی کارشان را بگویید و به این اکتفا نکنید که آن‌ها می‌دانند چه کاری را انجام می‌دهند و نظر شما را دربارهٔ خودشان و کارشان می‌دانند.

این مقاله و موضوعات مشابه را به‌دقت بخوانید تا بدانید دانشجویانتان ممکن است چه نوع مشکلاتی داشته باشند و یا اهمیت چه موردی را درک نکرده باشند. سعی کنید از نظرات آن‌ها میزان تجربه‌شان را دریابید. این موضوع، به دلیل پس‌زمینه‌های مختلف و تنوع استعدادها و اهداف، از دانشجویی به دانشجوی دیگر متفاوت است. وظایف استاد راهنما شامل موارد زیر است.

- راهنمایی تحقیقات دانشجویان: در انتخاب موضوع پایان‌نامه، نوشتن پروپوزال، انجام تحقیق و ارزیابی نقادانهٔ نتایج به‌دست آمده و در نهایت در نوشتن رساله، آن‌ها را یاری دهید.
- وارد کردن آن‌ها در شبکه‌های پژوهشی بزرگتر: آن‌ها را به همکارانتان معرفی کنید. در انجام پروژه‌هایشان همکاری کنید و کمک کافی برای شرکت در کنفرانس‌ها فراهم نمایید. آن‌ها را به انتشار مقالات تشویق کرده و برای اخذ جایزه‌های علمی مختلف نامزد کنید.
- فراهم کردن حمایت‌های مالی: آن‌ها را در یافتن دوره‌های پسادکترا، موقعیت‌های شغلی در

1) Summer internship

دانشگاه‌ها و یا بخش صنعت و نحوهٔ انجام درخواست و تکمیل فرم‌های مربوطه یاری کنید. درخواست‌های آن‌ها را با توصیه‌نامه‌های قوی حمایت کرده و آن‌ها را در برقرای ارتباط یاری دهید.

گرچه کار اساسی یک استاد راهنما، راهنمایی دانشجو است، ولی به عهده گرفتن سایر نقش‌ها برای موفقیت آن‌ها در درازمدت حیاتی است. در بخش ۱.۴ توصیه‌هایی برای دانشجویان در نحوهٔ برقراری ارتباط و ایجاد شبکهٔ علمی بیان شد. می‌توانید دانشجویان را در این فرایند، با حمایت مالی جهت شرکت در کنفرانس‌ها و انتشار مقالات، معرفی آن‌ها و صحبت با همکارانتان در مورد موضوع تحقیق آن‌ها، یاری کنید.

۱.۵. تعامل با دانشجویان

تعامل صحیح با دانشجویان، مخصوصاً برای اساتید تازه‌کار، بسیار مشکل است. دانشجویان مختلف عکس‌العمل‌های مختلفی در قبال رفتارهای گوناگون دارند و البته اساتید نیز سلیقه‌های متفاوتی دارند. برخی از موازنه‌هایی که باید در تعامل بین استاد و دانشجو رعایت شوند، به شرح ذیل است:

- نحوهٔ جهت‌دهی و هدایت: برخی از دانشجویان علاقه دارند که به خودشان واگذار شده و با روش خود ـ راهنمایی کار کنند. در مقابل، به عده‌ای دیگر باید در درک تک تک مطالب کمک کرد و جرعه جرعه نوشاندن موضوع و جزئیات تحقیق برای آن‌ها الزامی است.
- تعامل شخصی و حمایت روحی: آیا دانشجویان توصیه‌هایی در مورد خانواده و آرزوهای شغلی خود می‌خواهند؟ آیا می‌خواهید و توانایی یاری در این خصوص را دارید؟ و یا می‌توانید شخصی را که در این خصوص مفید است، به او معرفی کنید؟
- حجم و نوع انتقادها: رهنمودهای عمومی در مقابل پیشنهادهای مشخص برای بهبود و پیشرفت کار.
- تکرار تعامل: تعامل روزانه در قبال هر نیم‌سال یک بار.

مشخص کردن زمان ملاقات منظم و بحث در مورد انتظارات (خودتان و دانشجویانتان) دربارهٔ چیزی که می‌توانید و باید در حین این ملاقات‌ها انجام گیرد، بسیار مفید خواهد بود. تشویق کنید تا ارتباط خود را با دیگر اعضای دانشکده، دانشجویان و سایر همکاران توسعه دهند. به این ترتیب دیدگاه‌های مختلف را اخذ کرده و بازخوردی را که شما نمی‌توانید به او بدهید، از آنان می‌گیرند.

کارهای زیر را می‌توانید برای بهبود فضای تعامل با دانشجویان انجام دهید.

- در طی ناهار یا وعدهٔ چای و قهوه، با هم ملاقات کنید تا فضای صمیمانه‌تر و خالی از اضطراب به‌وجود آورید.
- رابطه‌ای باز و صادقانه ایجاد کنید و به دانشجویان و همکاران خود احترام بگذارید.

• اگر فکر می‌کنید که زمان‌های ملاقات بیشتر و یا کمتری را نیاز دارند، موضوع را به آن‌ها گوشزد کنید.

اساتید راهنما باید به نیازهای کوتاه‌مدت و درازمدت دانشجویانشان آگاهی داشته باشند. با توجه به اهداف دانشجو در سال‌های آتی، راه‌هایی را که شما دو نفر، به‌عنوان یک تیم، می‌توانید برای رسیدن به اهدافتان برگزینید، مشخص کند. توصیه‌های لازم برای گذراندن موفقیت‌آمیز امتحانات، آماده کردن پروپوزال و نوشتن رساله را بیان و او را برای شغل پژوهشی در آینده آماده کنید.

هنگام ملاقات با دانشجویان به آنان توجه کنید و کمک کنید تا علاقه‌ها و اهداف‌شان را مشخص و بیان کنند. آن‌ها را ملزم نکنید به آنچه که شما آن را هدف خوبی تشخیص می‌دهید، برسند. در حین صحبت با آن‌ها، موارد لازم را یادداشت کنید و در صورت نیاز، بعداً مرور کنید. پاسخ‌های ثمربخش ارائه کنید و به گفتن کلمات خنثی مانند «بله حتماً!» اکتفا نکرده و از بیان جملات مأیوس کننده‌ای مانند «چرا در روی زمین فقط شما می‌خواهید این کار را انجام دهید!» پرهیز کنید. توجه داشته باشید که دانشجویان شما هنوز در حال آموزش هستند.

اگر بدانید مسأله‌ای که به آن علاقه‌مند هستند قبلاً توسط شخص دیگری حل شده است، مطمئن شوید مرجع قابل دسترسی در اختیار آن‌ها قرار می‌دهید و همچنین با آن‌ها بحث کنید که چه قسمتی از کار پژوهش ارزشمند است و هنوز جای کار دارد و یا آیا به‌واسطهٔ کار آن محقق، حوزهٔ جدیدی گشوده شده است. این موضوع را در نشست بعدی با دانشجو به بحث بگذارید.

وقتی مقاله یا پروپوزال دانشجوی خود را مطالعه می‌کنید، نظرات خود را روی مقاله بنویسید و به تذکرات شفاهی (که چندان مفید نیستند) اکتفا نکنید. بازخورد خود را بلافاصله بگویید، در غیر این صورت اثر کمتری خواهد داشت. برای آگاهی از نحوهٔ دادن بازخورد به دانشجو، بخش ۳.۴ را مطالعه کنید. منتظر نباشید تا مطالبی را برای مطالعه به شما ارائه کنند و اصرار کنید تا پیش‌نویس‌هایی از مقاله یا پروپوزال را تهیه و به شما عرضه کنند. کمک کنید تا نظرات خام خود را در قالب مقاله‌های قابل انتشار قرار دهند. صریحاً، مخصوصاً زمانی که دانشجو، سردرگم و بی‌انگیزه به‌نظر می‌رسد و یا پیشرفت کمتری دارد، کارهایی را که باید دقیقاً در مرحلهٔ بعدی انجام دهد، مشخص کنید.

ممکن است رابطهٔ علمی بین دانشجو و استاد، به‌دلیل آن‌که استاد اهداف خیلی بالاتر یا خیلی سطحی را برای دانشجو مشخص کرده است، و یا زمانی که استاد از دانشجو برای رسیدن به اهداف خودش سوء استفاده می‌کند (مانند ارتقاء مرتبهٔ علمی یا افزایش تعداد مقالات و یا انجام پژوهش‌های او و نه در جهت اهداف دانشجو)، قطع گردد. خوشبختانه در بسیاری موارد، اهداف دانشجویان و اساتید راهنما در تناقض با یکدیگر نیستند.

دانشجویان را تشویق کنید تا موضوعی را انتخاب کنند که مورد علاقهٔ هر دوی شما و در حوزهٔ دانش و تخصص شما باشد. مطمئن شوید پیش‌زمینهٔ کافی برای درک مطالب را دارند و روشی که برای حل مسأله در نظر گرفته‌اند، مناسب و واقع‌بینانه است. آدرس‌های درست برای دسترسی به

منابع فراهم کنید و در یافتن آن‌ها به ایشان کمک کنید (پیدا کردن منابع مفید از مشکلات مهمی است که دانشجویان با آن مواجه هستند). مطمئن شوید از کارهای موازی و تحقیقات افراد دیگر در این زمینه مطلع هستند و برنامه‌ای ترتیب دهید تا از آزمایشگاه‌های آن‌ها دیدار و در سمینارها و کنفرانس‌های آنان شرکت کنند.

۲.۵. جنبه‌های اجتماعی مسؤلیت استاد راهنما

ارتباط با دانشجویان، جنبه‌های مختلفی دارد. با برخی از آن‌ها باید کاملا حرفه‌ای رفتار کرد و با برخی دیگر می‌توان صمیمانه‌تر و دوستانه‌تر بود. به‌عنوان استاد راهنما، وظیفهٔ شماست که مطمئن شوید دانشجویان از رفتار شما سوء استفاده نخواهند کرد. مواظب باشید که رفتار صمیمانه، شما را در موضع تهمت قرار ندهد. چنان‌که قبلاً نیز گفته شد، از دانشجویان تحصیلات تکمیلی به‌عنوان ابزاری برای ارتقای علمی و بالا بردن آمار مقالات خود استفاده نکنید، گرچه طبیعت کار با دانشجویان دکتری به این امر منجر می‌شود، ولی نباید این کار به‌عنوان هدف نهایی در نظر گرفته شود.

با توجه به این‌که در موضع قدرت در برخورد با دانشجویان خود قرار دارید، مطمئن شوید هر دوی شما خطوط قرمز را به‌خوبی می‌شناسید. به‌عنوان مثال اگر استاد راهنمای خوبی باشید، درخواست کمک در حمل و نقل اثاثیهٔ منزل می‌تواند کار ساده‌ای باشد، زیرا [آن‌ها] خود را به‌نحوی مدیون شما (در توصیه‌ها و حمایت‌ها) می‌دانند. با این حال اگر با تهدیدات صریح و یا ضمنی او را مجبور کنید شما را در کارهای شخصی‌تان یاری دهد، به نحوی از اصول و قواعد حرفه‌ای خارج شده‌اید. علاوه بر این، دانشجویان شما به‌نوعی همکاران شما نیز تلقی می‌شوند و باید با آن‌ها برخورد مناسب داشته باشید. بهترین سؤالی که می‌توانید قبل از درخواست کاری از دانشجو، از خود بپرسید این است که آیا می‌توانید همین درخواست را بدون رودربایستی از مدیر گروه یا رئیس دانشکده‌تان نیز داشته باشید. اگر پاسخ منفی است، شاید دارید از موقعیت خود به‌عنوان استاد راهنما سوء استفاده می‌کنید و باید به‌طور جدی مواظب رفتار و انگیزه‌هایتان باشید.

٦. کار آری، تفریح نه؟

ایجاد تعادل بین کار، تفریح و سایر فعالیت‌ها ساده نیست. افراد مختلف توصیه‌های متفاوتی دارند. برخی می‌گویند باید حداقل ۸۰ الی ۹۰ درصد از ساعات بیداری را وقف پایان‌نامه کرد. برخی دیگر (نویسندهٔ این مقاله نیز چنین نظری دارد) معتقدند که این کار واقع‌بینانه نبوده و برای سلامتی نیز مضر است. انجام سایر فعالیت‌ها برای حفظ سلامتی روحی و روانی الزامی است.

اگر با خانواده‌تان زندگی می‌کنید (و یا متأهل هستید) باید در اولویت‌بندی‌ها دقت بیشتری به خرج دهید. دوره دکتری ارزش آن را ندارد که روابط شخصی را به مخاطره اندازد. اطمینان حاصل کنید که وقت کافی برای افراد مهم در زندگی در نظر گرفته‌اید.

یکی از نکات کلیدی در ایجاد تعادل، طراحی برنامه کاری است. ممکن است تشخیص شما این

باشد که فقط در طی روز روی پایان‌نامه کار کرده و ساعات پایانی روز را برای تفریح صرف کنید. برخی دیگر، بعد از ظهرها را برای ایجاد روابط اجتماعی و ورزش در نظر می‌گیرند و مطالعه را برای ساعات پایانی شب نگه می‌دارند. برخی نیز روزهای آخر هفته را برای خود (نه پایان‌نامه) اختصاص می‌دهند و به این ترتیب، هفتهٔ کاری شادابی را آغاز می‌کنند.

بسیاری از دانشجویان در پایان سال دوم و ابتدای سال سوم، همزمان با اتمام دروس و گذران امتحان جامع، زمانی که سعی دارند روی موضوع پایان‌نامه متمرکز شوند، احساس دلسردی و افسردگی می‌کنند. گاهی این مدت بسیار طولانی می‌شود. فعالیت‌های لذت‌بخش و مفیدی که بتواند ذهن شما را از پایان‌نامه دور کند، انجام دهید. شرکت در کلاس‌های مختلف مانند آموزش زبان خارجی، خواندن کتاب‌های تاریخی و امثال آن، مفید هستند.

در آخرین گام برای اتمام رساله، گرچه اغلب زمان کمتری برای انجام فعالیت‌های اجتماعی در اختیار خواهید داشت، ممکن است دوستانتان شما را مجاب کنند که خود را مقصر بدانید. قبلاً به آن‌ها بگویید که ممکن است بسیاری از قرارها و برنامه‌های خود را (نه به دلایل شخصی بلکه برای تمرکز بر پایان‌نامه) لغو کنید.

۷. توصیه‌هایی برای دانشجویان دختر

این مقاله در ابتدا برای بیان مشکلاتی که معمولاً دانشجویان دختر با آن‌ها مواجه هستند طراحی شده بود و گرچه دانشجویان دختر مشکلات خاص خودشان را نیز دارند، در عمل به مطالبی که مخاطب آن‌ها تمامی دانشجویان تحصیلات تکمیلی هستند، تبدیل شد.

در اغلب موارد، مردان و زنان به‌طور یکسان با مشکلات رو در رو هستند ولی عکس‌العمل آن‌ها در برابر مشکلات متفاوت است. برای دانشجویان دختر مسائل دیگری مانند انزوا از جمع و خودکم‌بینی و برای افراد متأهل که مسؤلیت خانواده را بر عهده دارند، فشار نامتعادل نیز مطرح است. فقدان شبکهٔ حمایتی، تجربهٔ ناکافی، داشتن استاد راهنمای غیر حامی نیز می‌توانند مشکلات بیشتری برای دانشجویان دختر به‌وجود آورند. امیدواریم این مقاله تا حدودی دختران و اساتید راهنما را برای ایجاد محیط مناسب و شایستهٔ آنان یاری نماید.

۸. تذکرات نهایی

علیرغم آن‌که دورهٔ تحصیلات تکمیلی با مشکلات فراوانی همراه است، ولی مزایای برجسته‌ای نیز دارد. مهارت‌های حرفه‌ای زیادی مانند انجام تحقیق و مدل‌سازی مسأله‌ها و ارزیابی انتقادی روش‌های مختلف حل یک مسأله، ارائهٔ مطالب به‌طور کتبی و شفاهی و تعامل با سایر پژوهشگران، یاد می‌گیرید. ولی مخصوصاً دورهٔ دکتری، که وظیفهٔ اصلی شما در این دوران انجام پژوهش و نوشتن رساله [و انتشار مقالات] است، اعتماد به‌نفس در برخورد با مشکلات و متخصص شدن در

رشته‌ای را ایجاب می‌کند. یکی از همکاران دورهٔ دکتری من این مطالب را با جملات زیباتری بیان کرده‌است:

> ... دورهٔ دکتری تنها این مزیت را ندارد که «من» می‌توانم مطالب و مقاله‌های تکنیکی بنویسم و با اعتماد به‌نفس با سایر پژوهشگران صحبت کنم. بلکه، حالا می‌دانم چگونه در رشته‌ای متخصص شوم. گرچه برای متخصصین سایر رشته‌ها احترام قایل هستم، معتقدم که توان من کمتر از آن‌ها نیست و در مواردی شاید بهتر نیز باشم. همچنین بر این باور هستم که اگر به اندازهٔ کافی مطالعه کنم، می‌توانم در حوزه‌های دیگر علوم نیز مقاله منتشر کنم. احساس می‌کنم که **قدرتمند شده‌ام** و هرگز با داشتن یک شغل مرتبط با برنامه‌نویسی رایانه‌ای و یا حتی تحصیل در دورهٔ کارشناسی ارشد، به این موفقیت نمی‌رسیدم.

صد البته، منافع غیرقابل شمارشی برای پایان دورهٔ دکتری و نوشتن رساله وجود دارد. [بعد از اتمام دورهٔ دکتری] گرچه ممکن است روزهای آخر هفته احساس بی‌ارزشی و بیعاری کنید (دیگر کارهایی که در روزهای تعطیل و آخر هفته انجام می‌دادید، انجام نخواهید داد)، ولی اوقات احساس غرور و شادمانی خواهید داشت و این احساس، تقویت می‌شود.

۹. چگونه استاد راهنمای یک پایان‌نامه مفتضح باشیم!

این مطالب توسط Nigal Ward یکی از اعضای جوان گروه تهیه شده است و امیدوار است که دیگران از اشتباهات او درس بگیرند.

- موضوع پایان‌نامهٔ دانشجویان را از بین عناوین پروژهٔ تحقیقاتی خود یا از مواردی که در دورهٔ کارشناسی ارشد مطالعه می‌کردید، انتخاب کنید.
- وقتی کسی مقاله‌ای تحقیقاتی پیش شما می‌آورد، دربارهٔ نویسنده و یا استاد راهنمای او و یا همکارانش داستان‌سرایی کنید.
- وقتی می‌خواهید آزمایشگاه تحقیقاتی راه‌اندازی کنید، اولین اولویت کاهش هزینه‌ها و آخرین اولویت ایجاد مکان خوب برای دانشجوهایتان باشد و هیچ اولویتی برای تشویق تعامل بین دانشجویان قائل نشوید.
- مقالهٔ دانشجویانتان را حداکثر یک بار بخوانید.
- وقتی با ایده‌هایی، غیر از آنچه خود دارید، مواجه می‌شوید، آن‌ها را تحقیر کنید. مثلاً بگویید «می‌توانیم در مورد این موضوع تا ابد صحبت کنیم، ولی فکر می‌کنم ما نیز روی همان موضوع کار می‌کنیم. می‌توان گفت که آن‌ها ایده‌های ما را با جملاتی دیگر ارائه کرده‌اند. پس بیایید روی موضوع خودمان کار کنیم».

- هیچوقت از آزمایشگاه [اتاق دانشجویان تحصیلات تکمیلی] دیدن نکنید. از پیشرفت کار دانشجویانتان تنها از طریق آنچه می‌گویند، مطلع شوید.
- اهداف پژوهشی‌تان را در جملات مبهم، مانند «X پویا»، «مسألهٔ Y که در حال رشد است»، «مسالهٔ Z» و جملاتی مشابه آن بیان کنید.
- اجازه دهید که دانشجویان بدون هدف، با رایانه کار کنند و این کار را به‌عنوان تحقیق جا بزنند [خودفریبی کنند]، بدون آن‌که اساساً برنامه‌ای نوشته باشند.
- مطالب خود را با صدای پایین و لحن گنگ بیان کنید.
- دانشجویان سال‌های بالاتر را موظف کنید تا دانشجویان سال‌های پایین‌تر را راهنمایی کنند.
- دانشجویان را برای تصمیم‌گیری موضوعات کم اهمیت درگیر کنید. به‌عنوان مثال با این‌که هنوز یک ساعت از وقت سمینار باقی مانده است، روی این موضوع تصمیم‌گیری کنید که کدام یک از دانشجویان هدایت بحث کدام یک از بخش‌هایی را که برای مطالعهٔ آن‌ها در نظر گرفته بودید، عهده‌دار شود.
- دانشجویان را در تفکرات و اندیشه‌های بدیهی خودتان سهیم کنید. حتی سعی کنید آن‌ها را به‌عنوان موضوع سمینار در نظر بگیرید. مثلا بگویید امروز صبح هنگام دوش گرفتن متوجه شدم که «فلان مطلب» موضوع بسیار مهمی است. بیایید آن را از دیدگاه «دیگری» مطالعه کنیم.
- از تعامل و بحث با دانشجویانتان پرهیز کنید. مخصوصاً چیز زیادی از آن‌ها نخواهید و خیلی سریع راضی شوید!
- وقتی دانشجویی اعتراف کند که نمی‌داند چه چیزی یک تحقیق حسابی محسوب می‌شود، او را مسخره کنید.
- در مورد درس‌هایی که دانشجویانتان انتخاب می‌کنند، علاقه‌ای نشان ندهید.
- از کنفرانس‌هایی که شرکت می‌کنید مطالبی را انتخاب و به‌صورت سمینار مطرح کنید، بدون آن‌که منبع اصلی مطالب را مشخص کنید.
- طراحی سمینارهای پژوهشی را خیلی دیر (مثلاً دو ساعت قبل از شروع) انجام دهید.
- از ملاقات انفرادی با دانشجویان خودداری کنید. توصیه‌های لازم را در مجامع عمومی مثلاً سمینارها ارائه دهید.
- هیچ‌گاه در ساعات پایانی روز (عصرها) و روزهای آخر هفته از آزمایشگاه‌ها سرکشی نکنید.
- در سمینارهای تخصصی غیرآماده حاضر شوید و [باور داشته باشید که] آن‌قدر زیرک هستید که دانشجویان را سرکار بگذارید و خودتان را آگاه به موضوع جا بزنید.

- هیچگاه خودتان برنامه‌نویسی نکنید. چون بالأخره یک‌بار آن را انجام خواهید داد. [باور داشته باشید که] مردِ ایده‌های گوناگون و بکر هستید.
- کاری کنید دانشجویانتان متوجه شوند که شما کاری را که مهلت آن در حال سپری شدن است، با عجله انجام می‌دهید.
- از صحبت کردن انتقادی روی استراتژی تحقیقاتی خودداری کنید. به‌عنوان مثال بگویید: «این کار را انجام می‌دهیم، زیرا من استاد راهنمای تو هستم و تو دانشجوی من. این دلیل برای انجام این کار کافی و قانع کننده است.»
- از دانشجویانتان انتظار زیادی نداشته باشید و [چه بهتر اگر] متوجه این موضوع شوند.
- موضوع تحقیق یکسانی را برای دانشجویانتان مشخص کنید. کافی است عنوان آن‌ها تفاوت جزئی با یکدیگر داشته باشند. اگر موضوع پایان‌نامهٔ خود شما باشد که چه بهتر.
- اجازه دهید دانشجویان موضوع طرح پژوهانهٔ شما را ببینند و هنر دوگانه فکر کردن [1] و «کار کردن روی دو موضوع که متضاد هستند» را یاد بگیرند.
- مرزهای بین رشته‌ای به‌وجود آورید. به‌عنوان مثال بگویید «موضوعی که در مورد آن صحبت می‌کنید به‌نحوی در حوزهٔ متخصصین نرم‌افزار است و آن را به خودشان واگذار می‌کنیم.» یا « نگران این موضوع نباش؛ این قسمت کار مربوط به مهندسین نرم افزار است.»
- هرگز به دانشجویانتان پیشنهاد نکنید که با اساتید و محققین دیگر تماس بگیرند.
- اجازه دهید که دانشجویانتان به مجلات علمی درجهٔ سه و پایین‌تر مقاله بفرستند.
- دانشجویی که کارش نتیجه مطلوب را در پی ندارد، تحقیر کنید.
- دانشجویانتان را تشویق کنید تا روی موضوعات عوام‌پسند کار کنند.
- دیدگاه‌های خود را با صدای بلند و مکرر بیان کنید به‌طوری که دانشجویان بتوانند عین جملات را یادداشت کنند و در رسالهٔ خود بیاورند.

مترجم: علیرضا غفاری حدیقه
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
hadigheha@azaruniv.edu

1) doublethink

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۳۱ تا ۳۵

برهانی مقدماتی برای فرمول گرِگوری ـ مِنگولی ـ مِرکاتور*

گرو فریسک، جان کریستف ورشتد

مترجم: سید محمد طباطبایی

در این نوشتار، برهانی مقدماتی و جدید برای «فرمول برجستهٔ

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۴}{۱}^{-1}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\; \frac{۱}{۴} + \cdots = \log ۲ \qquad (۱)$$

که در زمرهٔ رابطه‌هایی است که کشف آن تأثیری عمیق بر اوّلین پیشگامان حساب دیفرانسیل و انتگرال گذاشت» (ریچارد کورانت [۲])، ارائه می‌دهیم. این فرمول دست‌کم به کارهای پیترو منگولی (۱۶۲۶—۱۶۸۶) [۶]، جیمز گرگوری (۱۶۳۸—۱۶۷۵) [۳] و نیکولاس مرکاتور (۱۶۲۰—۱۶۸۷) [۷] برمی‌گردد و ارتباطی به دور از انتظار بین دیدگاه عهد باستان مبتنی بر عددهای طبیعی فیثاغورثی خوش‌ترتیب از یک سو، و فرهنگ ریاضی قرن هفدهم از سوی دیگر، برقرار می‌کند که به‌همراه مفهوم‌هایی متعالی همچون لگاریتم، بی‌نهایت کوچک‌ها و عدد e[1]، ریاضیات را به‌مثابهٔ ابزاری برای جستجو در جهان ماده می‌داند.

خوانندهٔ این متن، احتمالاً طرف چپِ رابطهٔ (۱) را در اوایل فصل مربوط به دنباله‌ها و سری‌ها در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال یا آنالیز دورهٔ کارشناسی، به‌عنوان مثالی کلاسیک از یک سری که همگرا است ولی همگرای مطلق نیست، دیده است. معمولاً برای اثبات همگرایی این سری، به محک لایب‌نیتز استناد می‌شود که بر طبق آن، سری متناوبی که قدرمطلق جمله‌های آن نزولی

*) Friesecke, G., and Wehrstedt, J. C., “An elementary proof of Gregory-Mengoli-Mercator formula”, *The Mathematical Intelligencer*, **28** (2006), No 3, 4–5.

۱) که به‌طور تجربی از زمان مسألهٔ معروف تربیع برای هذلولی، به‌عنوان مبنایی که معادلهٔ اوّلِ (۴) ذیل را اعتبار می‌بخشد، شناخته شده بود.

همگرا به صفر باشد، همگرا است. ولی مقدار این سری چیست؟ در کتاب‌های درسی اعلام می‌شود که بعداً با استفاده از حساب دیفرانسیل یا حساب انتگرال، نشان داده خواهد شد که این حد برابر با $\log 2$ است. اما این سخنی دلسرد کننده است، زیرا برای نمایش هر دو طرف رابطهٔ (۱) هیچ نیازی به حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست. از این‌رو، این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان این برابری را به‌طور مستقیم اثبات کرد؟ پاسخ این است که می‌توان. برهانی که در این مقاله ارائه می‌شود، تنها به تعریف لگاریتم طبیعی به‌عنوان لگاریتم با مبنای e، یعنی وارون تابع نمایی با پایهٔ e:

$$e^{\log x} = x \tag{۲}$$

و فرمول مشهور اویلر:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \tag{۳}$$

(یکی از چند تعریف استاندارد e) که از محاسبات مربوط به ربح مرکب حاصل شده، نیازمند است.

برخلاف اقتباس‌های معمول، ما به هیچ‌یک از ابزارهای حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز نداریم. یکی از روش‌های مرسومِ اثبات رابطهٔ (۱) با نمایش سری توانی تابع لگاریتم که از انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از سری هندسی به‌دست می‌آید، شروع می‌شود:

$$\log(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{۴}$$

و در ادامه، با به‌کارگیری قضیهٔ آبل[1] [۱] معلوم می‌شود که تساوی طرف‌های چپ و راست به‌ازای $x = 1$ که سری هندسی در آن همگرا نیست، برقرار است. با استفاده از قضیهٔ تیلور (مثلاً [۸] را نگاه کنید) هم می‌توان این سری را به‌دست آورد و با تحلیل دقیق باقیماندهٔ آن، روشن می‌شود که تساوی به‌ازای $x = 1$ نیز معتبر است.

از ر. بورکل[2] نیز سپاسگزاریم که روشی دیگر را بر پایهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال خاطرنشان کرد: در این روش، ابتدا نشان داده می‌شود دنبالهٔ $D_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n - \int_1^N 1/t\, dt$ که یک مجموع ریمان و یک انتگرال را با هم مقایسه می‌کند، همگرا است (حد این دنباله به ثابت اویلر موسوم است). با استفاده از این همگرایی، معادلهٔ اوّلِ (۴) و تساویِ (٦) ذیل، داریم $\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n+1}/n - \log(2N) + \log(N) = D_{2N} - D_N \to 0$ که با در نظر گرفتن قاعدهٔ $\log(2N) - \log(N) = \log 2$، (۱) ثابت می‌شود ([۵] را نگاه کنید).

---

۱) قضیهٔ آبل حاکی از این است که اگر سری c_n $\sum_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد و تابع $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ برای $-1 < x < 1$ تعریف شود، آن‌گاه $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ـ م.

2) R. Burckel

اکنون برهان خود را برای قضیهٔ ذیل ارائه می‌دهیم.

قضیه: سری همساز متناوب $\cdots + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱$ به $\log ۲$ همگرا است.

برهان: ۱. مقدمات. باید نشان دهیم که مجموع‌های جزئی $S_N := \sum_{n=۱}^{N} (-۱)^{n+۱}/n$ به $\log ۲$ همگرا هستند. وجود این حد، مثلاً از محک لایب‌نیتز که در بالا در مورد آن صحبت شد، به‌دست می‌آید. این حد را با S نشان می‌دهیم. بنابر تعریف لگاریتم طبیعی، (۲) و پیوستگی تابع نمایی $x \mapsto e^x$ [1]، کافی است نشان دهیم

$$\lim_{N\to\infty} e^{S_N} = ۲. \qquad (۵)$$

۲. ساده کردن مجموع‌های جزئی. خاطرنشان می‌کنیم که سری همساز متناوب از ۱ تا $۲N$، با سری همساز نامتناوب از $N+۱$ تا $۲N$ برابر است:

$$\sum_{n=۱}^{۲N} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = \sum_{n=N+۱}^{۲N} \frac{۱}{n}. \qquad (٦)$$

به‌خاطر این‌که طرف چپ، مجموعی از کسرهای فرد مثبت و کسرهای زوج منفی است و از این‌رو برابر با مجموع همهٔ کسرها منهای دو برابر مجموع کسرهای زوج است:

$$\sum_{n=۱}^{۲N} ۱/n - ۲\sum_{n=۱}^{N} ۱/۲n.$$

۳. استفاده از قانون نماها. در (۵)، تنها کافی است مجموع‌های جزئی از ۱ تا عددهای صحیح زوج $۲N$ را در نظر بگیریم، زیرا $S_{۲N+۱} - S_{۲N} = \frac{۱}{۲N+۱}$ به صفر همگرا است. بنابر (٦) و قانون نماها، $e^{a+b} = e^a e^b$، طرف چپِ (۵) برابر می‌شود با

$$e^{S_{۲N}} = \prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{\frac{۱}{n}}. \qquad (۷)$$

۴. استفاده از تقریبی متفاوت برای هر عامل. اکنون ایدهٔ کلیدیِ ما، استفاده از تقریبی متفاوت برای هر یک از عامل‌های فوق است به‌قسمی که همواره نمای $\frac{۱}{n}$ حذف شود. اگر N بزرگ باشد، به‌ازای هر $n \in \{N+۱, \ldots, ۲N\}$، $e \approx \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ و از این‌رو به‌طور شهودی

$$\prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{۱/n} \approx \prod_{n=N+۱}^{۲N} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{\frac{n}{n}} = \frac{N+۲}{N+۱} \cdot \frac{N+۳}{N+۲} \cdots \frac{۲N+۱}{۲N}.$$

ولی صورت هر عامل، مخرج عامل دیگر را حذف می‌کند، لذا طرف راست برابر است با $\frac{۲N+۱}{N+۱}$ که وقتی N زیاد می‌شود، به ۲ میل می‌کند.

---

۱) یا با این دلیل مقدماتی‌تر که تابع نمایی صعودی است و به‌ازای N زوج، $S_N < S < S_{N+۱}$ که از آنجا به‌دست می‌آوریم $e^{S_N} \le e^S \le e^{S_{N+۱}}$.

برای اثبات دقیق این مطلب از این واقعیت مشهور (رجوع کنید به [۴، بخش ۱۰.۱]) استفاده می‌کنیم که دنباله‌های $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ و $E_n := \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ که بنابر (۳) هر دو به e همگرا هستند، به‌ترتیب، صعودی و نزولی‌اند. اثبات صعودی بودن دنبالهٔ اوّل از این قرار است:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$
$$\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

زیرا بنابر نامساوی برنولی به‌ازای هر $x > -1$ و هر عدد طبیعی n، $(1+x)^n \geq 1 + nx$. برای نشان دادن نزولی بودنِ دنبالهٔ دوّم، با بحثی مشابه، $\frac{E_n}{E_{n+1}}$ را در نظر بگیرید. در نتیجه می‌توانیم طرف راست (۷) را از بالا و پایین با

$$\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n}} \leq \prod_{n=N+1}^{2N} e^{1/n} \leq \prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n}}$$

تخمین بزنیم. پیش‌تر، حاصل‌ضرب طرف چپ را به‌دست آوردیم و حاصل‌ضرب طرف راست برابر است با $\frac{N+1}{N} \cdot \frac{N+2}{N+1} \cdots \frac{2N}{2N-1} = 2$. لذا این نامساوی به‌شکل

$$2 - \frac{1}{N+1} \leq \prod_{n=N+1}^{2N} e^{1/n} \leq 2$$

خلاصه می‌شود. اگر N به بی‌نهایت میل کند، جملهٔ سمت چپ و در نتیجه جملهٔ وسط، به ۲ میل می‌کند. این، قضیه را اثبات می‌کند.

همان‌طور که خواننده ممکن است حدس زده باشد، انگیزهٔ بخش‌بخش کردن این برهان، ناشی از توضیحاتی است که در مقدمه ارائه شد. ما به این ترتیب خواسته‌ایم هنگام آموزش نظریهٔ همگرایی دنباله‌ها و سری‌ها به دانشجویان ترم اول کارشناسی ریاضی، رابطهٔ (۱) را نیز با آنان در میان بگذاریم. چون بخش اصلی این برهان بر اساس انجام اعمال جمع و ضرب متناهی است، برهان به اندازه‌ای مقدماتی است که می‌تواند بدون توسل به نظریهٔ حد، مورد تصدیق قرار گیرد.

در واقع، این آخرین مطلبی است که در آن وضعیتی بسیار نزدیک به زمینهٔ کشف فرمولِ (۱) به‌وسیلهٔ اولین پیشگامان حساب دیفرانسیل و انتگرال بازسازی می‌شود: محاسبه‌های زیربنایی متناهی همچون به‌دست آوردن آنچه امروزه در مسأله‌های تربیع، جمع‌های ریمان نامیده می‌شود، با تکیه بر مفهوم‌های محکم ریاضیات صورت گرفت و «گذر به حد» به‌طور شهودی انجام شد.

مراجع

[1] Abel, Niels Henrik, "Recherches sur la serie $۱ + \frac{m}{۱} x + \frac{m(m+۱)}{۱\cdot۲} x^۲ + \frac{m(m+۱)(m+۲)}{۱\cdot۲\cdot۳} x^۳ + \cdots$", *Crelles Journal*, **1**(1827), 311-339. Reprinted in L. Sylow and S. Lie (eds), *Oeuvres completes de N. H. Abel*, Tome 1, 219-250, Grondell and Son, 1881.

[2] Courant, R., *Vorlesungen uber Differential und Integralrechnung*, Erster Band, Springer, 1955.

[3] Gregory, J., *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura, in Propria Sua Proportionis Specie*, Inventa and Demonstrata, Padua, 1667.

[4] Hildebrandt, S., *Analysis 1*, Springer, 2002.

[5] Koecher, M., *Klassiche elementare Analysis*, Birkhauser, 1987.

[6] Mengoli, P., *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, Bologna, 1650.

[7] Mercator, N., *Logarithmotechnia*, 1668.

[8] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1964.

مترجم: سید محمد طباطبایی
دانشگاه قم، گروه ریاضی
sm-tabatabaei@qom.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۳۷ تا ۵۴

نامساوی برون ـ مینکوفسکی در گذر زمان

محمد رضا میری، غلامرضا محتشمی برزادران و حسین حسینی گیو

چکیده

اگر V_n نشان‌دهندهٔ اندازهٔ n ـ بعدی لبگ باشد، آن‌گاه نامساوی برون مینکوفسکی بیان می‌کند که برای هر دو جسم محدب K و L در $\mathbb{R}^n$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n}+\lambda V_n(L)^{1/n}.$$

هدف این مقاله، معرفی اجمالی نامساوی مزبور از طریق بحثی تاریخی است. برای نیل به این مقصود، به مرور برخی نامساوی‌های تحلیلی وابسته، توسیع‌ها و گونه‌های دیگر این نامساوی خواهیم پرداخت. ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی که مهم‌ترین توسیع نامساوی بالاست، پایان بخش مطالب این مقاله خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: اجسام محدب، نامساوی برون ـ مینکوفسکی، نامساوی توان آنتروپی.

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 52A40، 26D15.

۱. مقدمه

بیش از یک قرن پیش، اندکی پس از ارائهٔ نخستین اثبات کامل از نامساوی برابرمحیطی کلاسیک، مینکوفسکی[1] نشان داد که برای هر عدد حقیقی $0 \leq \lambda \leq 1$،

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n}+\lambda V_n(L)^{1/n}. \qquad (1)$$

در این‌جا K و L اجسام محدب (مجموعه‌های فشرده و محدب با درون ناتهی) در $\mathbb{R}^n$، V_n نشان‌دهندهٔ اندازه‌ی n ـ بعدی لبگ و علامت + در سمت چپ (۱) بیانگر جمع برداری مجموعه‌ها

1) Minkowski

و در سمت راست آن، به مفهوم جمع اعداد حقیقی است. این نامساوی که پیش‌تر در سال ۱۸۸۷ توسط برون[1] [۶] به اثبات رسیده بود، امروزه به نامساوی برون ــ مینکوفسکی[2] مشهور است. همان‌گونه که در بخش سوم خواهیم دید، شکل‌های دیگری از این نامساوی، حتی در فضاهای اقلیدسی، مطرح‌اند و لذا برای جلوگیری از سردرگمی، (۱) را نامساوی برون ــ مینکوفسکی برای اجسام محدب می‌نامیم. نامساوی (۱) دارای دو شکل هم‌ارز به‌صورت

$$V_n(K+L)^{1/n} \geq V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}$$

و

$$V_n(sK+tL)^{1/n} \geq sV_n(K)^{1/n} + tV_n(L)^{1/n}$$

است که اثبات هم‌ارز بودن آن‌ها کار دشواری نیست. توجه کنید که در دومین شکل هم‌ارز (۱)، s و t ثابت‌های عددی مثبت و دلخواه هستند.

۲. مفاهیم مقدماتی

در این بخش به معرفی اجمالی مفاهیمی می‌پردازیم که در سایر بخش‌های متن حاضر به‌کار خواهند رفت. نمادهای V_n و V_n^* به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ اندازهٔ n ــ بعدی لبگ بر $\mathbb{R}^n$ واندازهٔ داخلی لبگ بر $\mathbb{R}^n$ هستند. یادآور می‌شویم که برای هر $A \subset \mathbb{R}^n$، $V_n^*(A)$ سوپرمم اندازهٔ لبگ زیرمجموعه‌های فشردهٔ A است. همچنین، $L_{\mathbb{R}^n}$ نشان دهندهٔ σ ــ جبر زیرمجموعه‌های لبگ ــ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^n$ است. ابتدا دو تعریف دربارهٔ توابع بر فضای $\mathbb{R}^n$ بیان می‌کنیم. فرض کنید f و g توابع اندازه‌پذیر بر $\mathbb{R}^n$ هستند. پیچش f و g، تابع

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

است که برای x هایی تعریف می‌شود که به‌ازای آن‌ها انتگرال فوق موجود است. توجه کنید که در این‌جا dy نشان‌دهندهٔ انتگرال‌گیری نسبت به اندازهٔ n ــ بعدی لبگ است. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را تک مُدی[3] می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $0 \leq c \leq 1$ داشته باشیم $f(cx) \geq f(x)$.

مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای آن آزمایش می‌نامیم. بردار تصادفی X تابعی اندازه‌پذیر از فضای نمونه‌ای آزمایش است به $\mathbb{R}^n$. به‌وضوح به هر بردار تصادفی X با مقادیر در $\mathbb{R}^n$، n متغیر تصادفی X_1، ...، X_n نظیر می‌شود که مؤلفه‌های آن نامیده می‌شوند و می‌نویسیم $X = (X_1, \ldots, X_n)$. بردارهای تصادفی $X = (X_1, \ldots, X_m)$ و $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ را مستقل نامیم اگر برای هر $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ داشته باشیم

---

1) Brunn 2) The Brunn-Minkowski Inequality 3) Unimodal

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = F_1(x_1, \ldots, x_m) F_2(y_1, \ldots, y_n)$$

که در آن F، F_1 و F_2 به‌ترتیب توابع توزیع توأم بردارهای تصادفی $(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$، $(X_1, \ldots, X_m)$ و $(Y_1, \ldots, Y_n)$ هستند. تابع چگالی احتمال یک بردار تصادفی به‌صورت تابع چگالی احتمال توأم مؤلفه‌های آن تعریف می‌شود.

اکنون بازمی‌گردیم به زیرمجموعه‌های فضای $\mathbb{R}^n$. زیرمجموعهٔ فشرده و محدب K از $\mathbb{R}^n$ را که دارای درون ناتهی است یک جسم محدب می‌نامیم. همچنین مساحت سطح جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ بنابه تعریف، عبارت است از

$$S(K) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{V_n(K + \epsilon B^n) - V_n(K)}{\epsilon}$$

که در آن B^n گوی بستهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$ است. دو جسم محدب K و L رامتجانس گوییم اگر عدد حقیقی $\alpha > 0$ و بردار $a \in \mathbb{R}^n$ موجود باشند به‌طوری که $K = \alpha L + a$. همچنین، فاصلهٔ هاسدورف[1] دو زیرمجموعهٔ فشرده و ناتهی K و L از $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_0(K, L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B^n, L \subseteq K + \lambda B^n\}$$

مفهوم مهم دیگر، حجم آمیخته[2] است. بنا به قضیه‌ای منسوب به مینکوفسکی، [۲۱، قضیهٔ ۵.۱.۶]، اگر K_1، ... ،K_m اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ بوده و λ_1، ... ،λ_m اعداد حقیقی نامنفی باشند، آن‌گاه $V_n(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب متغیرهای λ_1، ... ،λ_m است. ضریب $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ منسوب به $\lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}$ را یک حجم آمیخته می‌نامیم. یکی از مهم‌ترین خواص احجام آمیخته، خطی بودن آن‌ها نسبت به تمامی مؤلفه‌هاست. اگر K و L دو جسم محدب باشند، آن‌گاه برای $i = 1, \ldots, n$ تعریف می‌کنیم:

$$V_i(K, L) = V(K, \ldots, K, L, \ldots, L)$$

که در سمت راست آن K، $n - i$ بار و L، i بار ظاهر شده‌اند. $V_i(K, L)$ را i ـ امین حجم آمیخته متناظر با اجسام محدب K و L می‌نامیم.

در بخش‌هایی از این مقاله به مفهوم فضای گاوس[3] اشاره می‌شود. اندازهٔ استاندارد گاوس بر $L_{\mathbb{R}^n}$، یعنی قلمروی تعریف V_n، به‌صورت

$$\gamma_n(A) = (2\pi)^{-n/2} \int_A e^{-\|x\|^2/2} dx$$

تعریف می‌شود. در این‌جا $\|x\|$ نرم اقلیدسی بردار $x \in \mathbb{R}^n$ است. مجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ همراه با متر اقلیدسی و اندازهٔ استاندارد گاوس را فضای گاوس می‌نامیم.

1) Hausdorff Distance 2) Mixed Volume 3) Gauss Space

دو تعریف آخر این بخش به معرفی مفاهیمی از نظریهٔ اطلاع اختصاص دارند. اگرچه در حال حاضر نمی‌توان دلیل متقاعد کننده‌ای برای مطرح نمودن این مفاهیم ارائه نمود، تلاش خواهیم کرد تا خلاء حاصل را در بخش ۷ پر نماییم. فرض کنیم X یک بردار تصادفی در $\mathbb{R}^n$ با چگالی احتمال f باشد. در این‌صورت آنتروپی X، $h(X)$، به‌صورت

$$h(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx$$

تعریف می‌شود. با استفاده از این تعریف می‌توان توان آنتروپی X را با

$$N(X) = \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{2}{n} h(X)}$$

تعریف نمود.

۳. نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی

نامساوی ارائه شده در این بخش، موسوم به نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی[1] را می‌توان مهم‌ترین توسیعِ نامساوی (۱) به‌شمار آورد. بیان و اثبات این نامساوی که در سال ۱۹۳۵ و توسط لوسترنیک[2] [۱۸] انجام پذیرفت، سبب ایجاد تحولی بزرگ در زمینهٔ فعالیت‌های تحقیقاتی پیرامون نامساوی برون ـ مینکوفسکی گردید. برای رسیدن به درک کاملی از چگونگی شکل‌گیری این تحول، لازم است به معرفی نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی بپردازیم.

۱.۳. نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$

در بخش اول دیدیم که مجموعه‌های مورد بحث در نامساوی (۱)، زیرمجموعه‌های خاصی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، یعنی اجسام محدب بودند. فشردگی این مجموعه‌ها به‌وضوح کران‌داری و اندازه‌پذیر بودن آن‌ها را نسبت به V_n ایجاب خواهد کرد. لذا این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان (۱) را برای زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر و کران‌دار $\mathbb{R}^n$ به اثبات رساند. ارائهٔ پاسخ مثبت به این سؤال در قالب نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی توسط لوسترنیک و با اثبات قضیهٔ زیر صورت پذیرفت.

قضیه ۱. (نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید $0 \leq \lambda \leq 1$ عدد حقیقی دلخواه بوده و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیرِ $\mathbb{R}^n$ باشند به‌طوری که $(1-\lambda)X + \lambda Y$ نیز اندازه‌پذیر است. در این صورت داریم

$$V_n((1-\lambda)X + \lambda Y)^{1/n} \geq (1-\lambda) V_n(X)^{1/n} + \lambda V_n(Y)^{1/n}. \qquad (2)$$

1) The General Brunn-Minkowski Inequality   2) Lusternik

علاوه بر لوسترنیک، ریاضیدانان دیگری همچون هویر[1] و اُمان[2] [۱۰] و هنشتوک[3] و مک‌بیت[4] [۱٦] نیز به اثبات قضیهٔ ۱ همت گمارده‌اند. برای مشاهدهٔ طرحی از برهان هویر و اُمان به قضیهٔ ۴.۱ از [۱۱] مراجعه کنید. روش به‌کار رفته در [۱٦] برای اثبات قضیهٔ ۱، بر پایهٔ استقراء روی n استوار است. لازم به ذکر است که همانند آنچه در مورد نامساوی برون ـ مینکوفسکی (۱) بیان شد، نامساوی عام (۲) نیز دارای دو شکل هم‌ارز به‌صورت

$$V_n(X+Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n} \qquad (2')$$

و

$$V_n(sX+tY)^{1/n} \geq sV_n(X)^{1/n} + tV_n(Y)^{1/n}$$

است که در آخرین نامساوی، s و t اعداد حقیقی مثبت و دلخواه هستند.

۲.۳. مسألهٔ اندازه‌پذیری ترکیب محدب

قضیهٔ ۱ حاوی نکتهٔ مهمی است که شاید توجه خوانندگان را به خود جلب کرده باشد. در واقع، همان‌طور که از صورت قضیه برمی‌آید، ترکیب محدب هر دو زیرمجموعهٔ لبگ ــ اندازه‌پذیرِ $\mathbb{R}^n$ لزوماً لبگ اندازه‌پذیر نیست. این حقیقت را سرپینسکی[5] از طریق مثال نقضی که در سال ۱۹۲۰ منتشر ساخت، آشکار نمود [۲۳]. تاکنون راه‌های متفاوتی برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده‌اند. یک راه ساده برای حذف شرط اندازه‌پذیری $(1-\lambda)X+\lambda Y$، در نظر گرفتن اندازه‌ی داخلی لبگ به‌جای اندازهٔ لبگ در سمت چپ نامساوی (۲) است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش دوم، به نامساوی

$$V_n^*((1-\lambda)X+\lambda Y)^{1/n} \geq (1-\lambda)V_n(X)^{1/n} + \lambda V_n(Y)^{1/n}$$

می‌رسیم که برای مشاهدهٔ اثبات آن می‌توانید به [۱٦] قضیهٔ ۱ مراجعه کنید. روش دیگر، جایگزین نمودن جمع برداری با نوع دیگری از جمع موسوم به‌جمع اساسی است. برای این منظور، کافی است به‌یاد آوریم که جمع برداری مجموعه‌های X و Y را می‌توان به‌صورت

$$X+Y=\{z : X\cap(z-Y)\neq\emptyset\}$$

نوشت. در این صورت با اعمال یک تغییر مختصر، به تعریف مورد نظر خواهیم رسید. در واقع، جمع اساسی مجموعه‌های X و Y را به‌صورت

$$X+_e Y=\{z : V_n(X\cap(z-Y))>0\}$$

تعریف می‌کنیم.

---

1) Hadwiger 2) Ohmann 3) Henstock 4) Macbeath 5) Sierpinski

اکنون شکل اساسی نامساوی برون ــ مینکوفسکی بیان می‌کند که اگر $1 > \lambda > 0$ و X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار و اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^n$ باشند، آن‌گاه

$$V_n(X +_e Y)^{1/n} \geq V_n(X)^{1/n} + V_n(Y)^{1/n}.$$

اثباتی از این نامساوی را می‌توانید در ضمیمهٔ [۵] بیابید.

۴. ارتباط با نامساوی‌های دیگر

در مقدمهٔ بخش سوم بیان کردیم که ارائه و اثبات نامساوی عام (۲) موجب ایجاد تحولی شگرف در مسیر فعالیت‌های تحقیقاتی مرتبط با نامساوی برون ــ مینکوفسکی شد. در این بخش قصد داریم تا ضمن معرفی اجمالی برخی نامساوی‌های تحلیلی مرتبط با نامساوی‌های (۱) و (۲) در $\mathbb{R}^n$، به توصیف تحول مزبور بپردازیم. این مهم توسط نمودار صفحهٔ بعد صورت می‌پذیرد. توجه کنید که در این نمودار علامت پیکان میان دو نامساوی نشان دهندهٔ آن است که نامساوی واقع در انتهای پیکان را می‌توان از نامساوی واقع در ابتدای آن نتیجه گرفت.

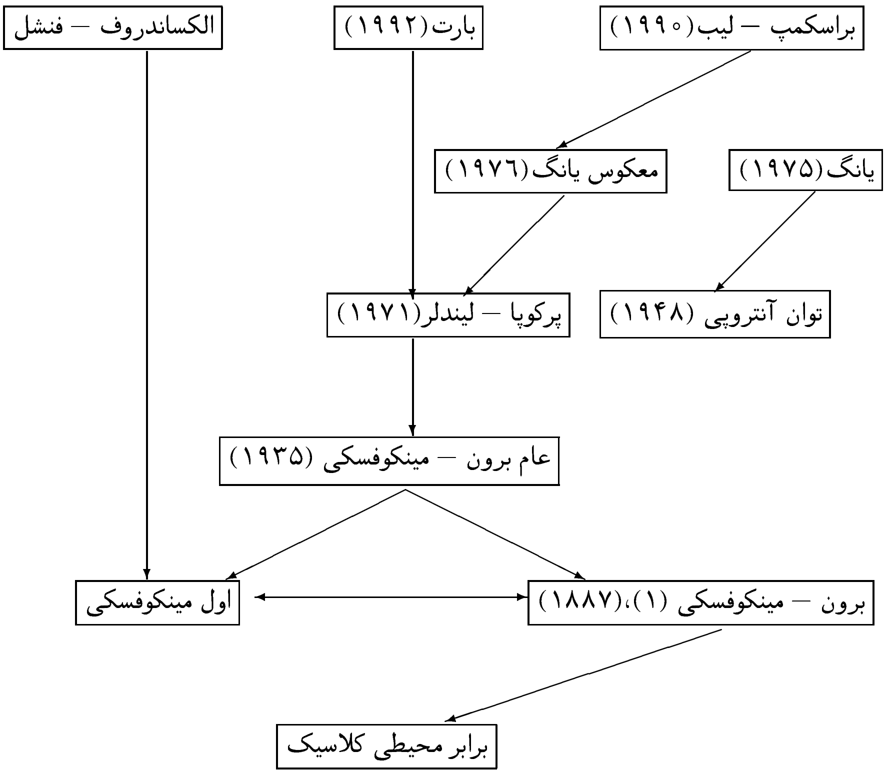
۱.۴. حرکت به سوی آنالیز

در بخش اول با نامساوی برون ــ مینکوفسکی برای اجسام محدب آشنا شدیم و دیدیم که انگیزهٔ طرح این نامساوی در بحث‌های هندسی پیرامون نامساوی برابرمحیطی کلاسیک نهفته بود. در واقع، اشتیاق به یافتن اثبات ساده‌ای از نامساوی برابرمحیطی مهم‌ترین دلیل برای اندیشیدن به موضوعاتی بود که منجر به طرح نامساوی برون ــ مینکوفسکی گردید. با این توضیح و توجه به تحدب مجموعه‌های مورد بحث در (۱)، شگفت‌آور نخواهد بود اگر بیان کنیم که نامساوی برون ــ مینکوفسکی تا مدت‌ها متعلق به هندسه پنداشته می‌شده است. اما دیری نپایید که لوسترنیک وضعیت را تغییر داد. او با بیان و اثبات قضیهٔ ۱ سبب شد تا بحث به حیطه‌ی آنالیز راه یابد و امکان استفاده از ابزارهای قدرتمند آنالیز ریاضی جهت پیشروی در این مسیر تحقیقاتی فراهم گردد. این امر همچنین موجبات یافتن کاربردهای گوناگون و توسیع‌های مهم دیگری همچون نامساوی پرکوپا ــ لیندلر[1] را فراهم آورد.

۲.۴. نامساوی‌های مرتبط با (۱) و (۲) در $\mathbb{R}^n$

اکنون به معرفی اجمالی نامساوی‌هایی می‌پردازیم که در ارتباط تنگاتنگ با نامساوی‌های برون ــ مینکوفسکی (۱) و (۲) هستند.

1) The Prekopa-Leindler Inequality



نمودار نشان‌دهندهٔ ارتباط نامساوی‌های مورد بحث

الف) نامساوی برابرمحیطی

نامساوی برابر محیطی[1] کلاسیک را می‌توان به‌عنوان پاسخی برای مسألهٔ برابرمحیطی در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. مسألهٔ مذکور یک مسألهٔ بهینه‌سازی است، زیرا مطلوب آن کمینه نمودن مساحت سطح در میان تمام حوزه‌های با حجم برابر و یا معادلاً بیشینه نمودن حجم در میان تمام حوزه‌هایی است که دارای مساحت سطح $(n-۱)$ ـ بعدی) ثابتی می‌باشند. قضیهٔ زیر پاسخ این مسأله را در قالب نامساوی برابرمحیطی کلاسیک بیان می‌کند.

1) The Isoperimetric Inequality

قضیه ۲. (نامساوی برابر محیطی کلاسیک در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید K یک حوزهٔ دلخواه در $\mathbb{R}^n$ با مساحت سطح A باشد. دراین‌صورت نامساوی

$$A^n \geq n^n \omega_n V_n^{n-1}(K) \tag{۳}$$

برقرار است که درآن ω_n حجم (اندازهٔ لبگ) گوی بستهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$ است. تساوی در (۳) برقرار است اگر و تنها اگر K یک گوی باشد.

اثبات این نامساوی با استفاده از نامساوی برون ــ مینکوفسکی (۱) به‌سادگی و در چند سطر امکان‌پذیر است. برای مشاهدهٔ جزئیات برهان، می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.

ب) نامساوی اول مینکوفسکی

در این‌جا به معرفی نامساوی مهم دیگری منسوب به مینکوفسکی، موسوم به نامساوی اول مینکوفسکی[1]، می‌پردازیم که با (۱) هم‌ارز است.

قضیه ۳. (نامساوی اول مینکوفسکی در $\mathbb{R}^n$) فرض کنیم K و L دو جسم محدب در $\mathbb{R}^n$ با اولین حجم آمیختهٔ $V_1(K,L)$ باشند. در این‌صورت نامساوی

$$V_1(K,L) \geq V_n(K)^{(n-1)/n} V_n(L)^{1/n} \tag{۴}$$

برقرار است. تساوی در (۴) رخ می‌دهد اگر و تنها اگر K و L متجانس باشند.

اثبات قضیهٔ فوق با در دست داشتن نامساوی برون ــ مینکوفسکی (۱) بسیار ساده است ([۱۱] صفحات ۳۶۴ و ۳۶۵). از طرف دیگر، اثبات این‌که (۴)، (۱) را نتیجه می‌دهد نیز با استفاده از خطی بودن احجام آمیخته امکان‌پذیر است که برای مشاهدهٔ جزئیات برهان می‌توانید به [۱۳] صفحهٔ ۳۷۰ مراجعه کنید.

نامساوی اول مینکوفسکی از چندین جهت حائز اهمیت است. نخستین وجه اهمیت آن، کاربرد در حل مسألهٔ شفارد است. این مسأله را می‌توان بدین شرح بیان نمود: فرض کنیم K و L اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ هستند که یک انتقال‌یافته از هریک از آن‌ها نسبت به مبدأ متقارن است. اگر حجم تصویر متعامد K بر هر ابرصفحه، کوچکتر از حجم تصویر متعامد L بر همان ابرصفحه باشد، آیا حجم K نیز از حجم L کوچکتر است؟ پاسخ این سؤال در حالت کلی منفی است ([۱۳] فصل چهار و [۱۹] صفحهٔ ۲۵۵ را ببینید). کاربرد دوم این نامساوی، دراثبات گونه‌ای از نامساوی برابرمحیطی موسوم به نامساوی برابرمحیطی برای اجسام محدب است. این نامساوی بیان می‌کند که برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ داریم

1) Minkowski's First Inequality

$$\left(\frac{V_n(K)}{V_n(B^n)}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{S(K)}{S(B^n)}\right)^{1/(n-1)}.$$

برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر دربارهٔ این کاربرد، به [۱۱] مراجعه کنید.

پ) نامساوی پرکوپا ـ لیندلر

اثبات هنشتوک و مک‌بیت ([۱٦]) از قضیهٔ ۱ انگیزه‌ای برای کشف یک نامساوی قوی‌تر توسط پرکوپا[1] و لیندلر[2] گردید. این نامساوی که امروزه به نامساوی پرکوپا ـ لیندلر مشهور است در قضیهٔ زیر بیان می‌گردد.

قضیه ۴. **(نامساوی پرکوپا ـ لیندلر در $\mathbb{R}^n$)** فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و f، g و h توابع انتگرال‌پذیر نامنفی بر $\mathbb{R}^n$ واجد شرط

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ باشند. در این‌صورت داریم

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy\right)^{\lambda}. \qquad (۵)$$

شرایط کاملاً پیچیده‌ای برای برقراری تساوی در(۵) در حالت $n = 1$ ارائه شده‌اند که برای مشاهدهٔ آن‌ها می‌توانید به [۹] و [۲۴] مراجعه کنید. با وجود این، شرایط برقراری تساوی در حالت کلی همچنان غیرمشخص است.

اثبات قضیهٔ فوق به‌سادگی و با استفاده از استقراء بر n امکان‌پذیر است ([۱۲] قضیهٔ ۴.۲). اکنون برای آن‌که شکل هم‌ارز نامساوی عام (۲) را از نامساوی پرکوپا ـ لیندلر به‌دست آوریم، کافی است در (۵) قرار دهیم $f = \chi_X$، $g = \chi_Y$ و $h = \chi_{(1-\lambda)X+\lambda Y}$.

ت) نامساوی توان آنتروپی

نامساوی توان آنتروپی[3] یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین نامساوی‌ها در حیطهٔ نظریهٔ اطلاع است. در سال ۱۹۴۸، شانن[4] [۲۲] این نامساوی را بیان و اثبات نمود تا کرانی پایینی برای ظرفیت یک کانال به‌دست آورد.

قضیه ۵. **(نامساوی توان آنتروپی)** فرض کنیم X و Y دو بردار تصادفی مستقل در $\mathbb{R}^n$ با چگالی‌های احتمال در $L^p(\mathbb{R}^n)$ برای یک $p > 1$ باشند. در این صورت داریم

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y). \qquad (٦)$$

برای مشاهدهٔ دو اثبات ساده و جدید از قضیهٔ فوق، [۱۵] و [۲۵] را ببینید.

---

1) Prekopa 2) Leindler 3) The Entropy Power Inequality 4) Shannon

نکتهٔ جالب توجه در مورد نامساوی توان آنتروپی، ارتباط غیرمستقیم آن با نامساوی برون ــ مینکوفسکی است. در این‌جا عبارت «ارتباط غیرمستقیم» را می‌توانیم به‌شرح زیر تعبیر کنیم. هر کدام از نامساوی‌های بیان شده در این بخش، به نحوی در ارتباط مستقیم با نامساوی برون ــ مینکوفسکی هستند. به‌عنوان مثال نامساوی اول مینکوفسکی (۴) با (۱) هم‌ارز است و نامساوی پرکوپا ــ لیندلر (۵)، نامساوی عام (۲) را نتیجه می‌دهد. همچنین گزاره‌هایی مشابه (و البته نه کاملاً یکسان با) آنچه بیان شد در مورد ارتباط مابقی نامساوی‌های این بخش و نامساوی‌های برون ــ مینکوفسکی (۱) و (۲) صدق می‌کنند. لیکن وضع نامساوی توان آنتروپی مطلقاً متفاوت با دیگر نامساوی‌هاست. در واقع نمی‌توان با داشتن هر کدام از نامساوی‌های توان آنتروپی و برون ــ مینکوفسکی، دیگری را نتیجه گرفت. همچنین هیچ‌کدام از این دو نامساوی یک نامساوی مستقیماً مرتبط با دیگری را نتیجه نمی‌دهند. پس این سؤال مطرح می‌شود که دلیل معرفی نامساوی توان آنتروپی در این‌جا چیست؟ به‌عنوان یک پاسخ جامع، مانع ولی مبهم می‌توان شباهت‌های متعدد میان این دو نامساوی را دلیل موجهی دانست. در حقیقت همین شباهت‌ها هستند که می‌توان آن‌ها را تحت عنوان ارتباط «غیرمستقیم» تلقی نمود و سعی خواهیم کرد تا ابهام موجود در مورد این شباهت‌ها را به‌تدریج برطرف نمائیم. یک مورد از وجوه تشابه دو نامساوی را پس از معرفی نامساوی یانگ و عکس آن در زیربخش بعد بیان خواهیم کرد و بیان مورد دیگر را به بخش ۷ موکول می‌کنیم.

ث) نامساوی یانگ و عکس آن

فرض کنیم اعداد حقیقی $p, q, r \geq ۱$ در شرط

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱ + \frac{۱}{r} \tag{۷}$$

صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. اگر $f * g$ پیچش توابع f و g باشد، آن‌گاه نامساوی کلاسیک یانگ[۱] بیان می‌کند که

$$\| f * g \|_r \leq \| f \|_p \| g \|_q \; . \tag{۸}$$

قضیهٔ زیر به معرفی دو نامساوی اختصاص دارد: (۹) توسیعی از (۸) است که به‌طور مستقل توسط بکنر[۲] [۲] و براسکمپ[۳] و لیب[۴] [۴] به اثبات رسیده است و (۱۰) شکل وارون (۹) است که توسط براسکمپ و لیب [۴] اثبات شده است.

قضیه ٦. (نامساوی یانگ و عکس آن در $\mathbb{R}^n$) فرض کنیم $p, q, r > ۰$ در شرط (۷) صدق کنند و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ توابعی نامنفی باشند. در این‌صورت

1) The Classical Young Inequality 2) Beckner 3) Brascamp 4) Lieb

الف. اگر $p, q, r \geq ۱$، نامساوی یانگ

$$\| f * g \|_r \leq C^n \| f \|_p \| g \|_q \qquad (۹)$$

و

ب. اگر $p, q, r \leq ۱$، عکس نامساوی یانگ

$$\| f * g \|_r \geq C^n \| f \|_p \| g \|_q \qquad (۱۰)$$

برقرارند. در این‌جا $C = \frac{C_p C_q}{C_r}$ که در آن برای s و s' صادق در شرط $\frac{۱}{s'} + \frac{۱}{s} = ۱$ داریم $C_s^۲ = \frac{|s|^{۱/s}}{|s'|^{۱/s'}}$.

آنچه نامساوی یانگ و عکس آن را با نامساوی برون ــ مینکوفسکی مرتبط می‌سازد، نتیجه شدن صورتی معادل از نامساوی پرکوپا ــ لیندلر، موسوم به شکل اساسی نامساوی پرکوپا ــ لیندلر ([۱۲] قضیه ۹.۱)، از حالت حدی $r \to ۰$ در عکس نامساوی یانگ است. اثباتی از این حقیقت را می‌توانید در [۱۲] قضیهٔ ۱۴.۲ بیابید. با توجه به آنچه در مورد ارتباط نامساوی‌های پرکوپا ــ لیندلر و برون ــ مینکوفسکی می‌دانیم، نتیجهٔ بحث فوق این است که حالت حدی $r \to ۰$ در عکس نامساوی یانگ، نامساوی عام (۲) را نتیجه می‌دهد. نکتهٔ دیگری که خود به‌عنوان یکی از شباهت‌های نامساوی عام (۲) و توان آنتروپی (۶) مطرح می‌گردد آن است که حالت حدی $r \to ۱$ از نامساوی یانگ، (۶) را ایجاب می‌کند([۱۲] لم ۱۸.۲ و نتیجهٔ ۱۸.۳).

ج) نامساوی‌های براسکمپ ــ لیب و بارت[۱]

نامساوی‌های ارائه شده در این بخش، قوی‌ترین توسیع‌های شناخته شده در ارتباط با نامساوی یانگ و عکس آن هستند.

قضیه ۷. (نامساوی‌های براسکمپ ــ لیب و بارت در $\mathbb{R}^n$) برای هر $i = ۱, \ldots, m$ فرض کنید $c_i > ۰$ و $n_i \in \mathbb{N}$ چنان باشند که $\sum_i c_i n_i = n$. همچنین فرض کنید $f_i \in L^۱(\mathbb{R}^{n_i})$ ها توابعی نامنفی و برای $i = ۱, \ldots, m$، $B_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ ها توابعی خطی و پوشا باشند. در این‌صورت اگر $D = \inf\{\frac{\det(\sum_{i=۱}^m c_i B_i^* A_i B_i)}{\prod_{i=۱}^m \det(A_i)^{c_i}}$: A_i یک ماتریس $n_i \times n_i$ معین مثبت است$\}$، آن‌گاه نامساوی‌های

الف. براسکمپ ــ لیب

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=۱}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \leq D^{-۱/۲} \prod_{i=۱}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) dx \right)^{c_i} \qquad (۱۱)$$

و

---

1) Barthe

ب. بارت

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^n}} \sup\left\{\prod_{i=1}^{m} f_i(z_i)^{c_i} \,:\, x=\sum_i c_i B_i^* z_i,\ z_i\in\mathbb{R}^{n_i}\right\} dx \geq D^{1/2}\prod_{i=1}^{m}\left(\int_{R^{n_i}} f_i(x)dx\right)^{c_i} \tag{۱۲}$$

برقرارند. می‌توان نشان داد که (۱۱) نامساوی یانگ را نتیجه می‌دهد و (۱۲) نامساوی پرکوپا ــ لیندلر را ایجاب می‌کند. برای مشاهدهٔ جزئیات می‌توانید به [۱۱] بخش ۱۵ مراجعه کنید.

چ) نامساوی الکساندروف ــ فنشل[1]

در زیربخش **نامساوی اول مینکوفسکی** بیان کردیم که نامساوی‌های برون ــ مینکوفسکی (۱) و اول مینکوفسکی (۴) هم‌ارزند. در این‌جا به معرفی توسیعی از نامساوی اول مینکوفسکی می‌پردازیم که با توجه به آنچه بیان شد، توسیعی از (۱) نیز به‌شمار می‌آید.

قضیه ۸ (نامساوی الکساندروف ــ فنشل در $\mathbb{R}^n$) فرض کنید K_1، ...، K_n اجسام محدبی در $\mathbb{R}^n$ باشند و $1 \leq i \leq n$ عددی ثابت باشد. در این صورت داریم

$$V(K_1,\dots,K_n)^i \geq \prod_{j=1}^{i} V(K_j,i;K_{i+1},\dots,K_n). \tag{۱۳}$$

نامساوی (۱۳) قوی‌ترین توسیع نامساوی برون ــ مینکوفسکی (۱)، البته برای اجسام محدب است. متأسفانه هیچ اثبات ساده‌ای برای قضیهٔ فوق موجود نیست. برای مشاهدهٔ اثباتی از آن می‌توانید [۲۱] قضیه ۶.۳.۱ را ببینید. این اثبات که مبتنی بر روش مورد استفاده توسط الکساندروف است، ابتدا به اثبات نامساوی برای گونهٔ خاصی از چندوجهی‌های محدب پرداخته و سپس از تقریب استفاده می‌نماید. شرایط برقراری تساوی تا به امروز مجهول باقی مانده‌اند. برای مشاهدهٔ توضیحات تاریخی بیشتر می‌توانید به [۷] صفحهٔ ۱۴۳ مراجعه کنید. اگر در (۱۳) قرار دهیم $i=n$، $K_1=L$ و $K_2=\dots=K_n=K$، به نامساوی اول مینکوفسکی می‌رسیم.

۵. مسائل پایایی

همان‌طور که برون و مینکوفسکی نشان دادند، تساوی در نامساوی برون ــ مینکوفسکی (۱) رخ می‌دهد اگر و تنها اگر K و L اجسام محدب متجانسی باشند، یعنی برای $\alpha > 0$ و $a \in \mathbb{R}^n$ یی داشته باشیم $K = \alpha L + a$. حال فرض کنید که برای $0 < \lambda < 1$ و یک $\epsilon > 0$ داشته باشیم

$$V_n((1-\lambda)K+\lambda L)^{1/n} \leq (1-\lambda)V_n(K)^{1/n} + \lambda V_n(L)^{1/n} + \epsilon$$

یعنی تساوی میان دو کمیت واقع در دو طرف نامساوی (۱) با تقریب $\epsilon > 0$ برقرار باشد،

1) The Aleksandrov-Fenchel Inequality

در این صورت مایلیم بدانیم که آیا می‌توان حداکثر فاصلهٔ K و L نسبت به متر هاسدورف را برحسب n، λ و ϵ به‌دست آورد؟
مسائلی از این قبیل را معمولاً مسائل پایایی و تخمین‌های روشنی را که به چنین سؤالاتی پاسخ مثبت می‌دهند، اغلب نتایج پایایی می‌نامند.

قضیهٔ زیر، منسوب به گرومر[1] (قضیهٔ ۳ از [۱۴])، به مسألهٔ پایایی فوق پاسخ می‌دهد.

قضیه ۹. فرض کنید K_0 و K_1 دو جسم محدب در $\mathbb{R}^n$ بوده و $\epsilon \geq 0$ و $0 < \lambda < 1$ اعدادی ثابت باشند. برای $i = 0, 1$ فرض کنید $d(K_i)$ قطر K_i باشد و قرار دهید $v_i = V_n(K_i)^{1/n}$. همچنین فرض کنید D عددی حقیقی صادق در شرط $d(K_i) \leq v_i D$ باشد. قرار دهید $M = \max\{v_1, v_2\}$ و $m = \min\{v_1, v_2\}$. اگر

$$V_n((1-\lambda)K_0 + \lambda L)^{1/n} \leq (1-\lambda)V_n(K_0)^{1/n} + \lambda V_n(K_1)^{1/n} + \epsilon$$

آن‌گاه

$$h_0(K_0, K_1) \leq \gamma_n \left(\frac{M}{m}\frac{1}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} + 2\right) m^{-1/(n+1)} D\epsilon^{1/(n+1)}. \qquad (۱۴)$$

که در آن $\gamma_n = \left(1 + \frac{1}{3}2^{-13}\right) 3^{(n-1)/n} 2^{(n+2)/(n+1)} n < 6.00025n$.
به‌روشنی، نامساوی (۱۴) همان نتیجهٔ پایایی مورد نظر است.

۶. توسیع‌ها و نامساوی‌هایی از نوع برون ـ مینکوفسکی

در این بخش به مرور یکی از توسیع‌ها و بیان دیگری از نامساوی‌های برون ـ مینکوفسکی (۱) و (۲) در فضاهای گاوس می‌پردازیم. در سال ۱۹۵۷ نوث[2]، [۱۷]، به برهانی جدید از نامساوی (۱) دست یافت و با گسترش مفاهیم به‌کار رفته در اثبات خود موفق به استنتاج نتیجهٔ کلی‌تر زیر گردید. برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ فرض کنیم $F(K, x)$، $x \in K$، تابعی حقیقی مقدار، نامنفی و پیوسته نسبت به K و x باشد. همچنین فرض کنیم عدد حقیقی $m \geq 0$ موجود است به‌طوری که

$$F(\lambda K + a, \lambda x + a) = \lambda^m F(K, x) \qquad (۱۵)$$

برای هر $\lambda > 0$ و $a \in \mathbb{R}^n$. علاوه بر این،

$$\log F((1-\lambda)K + \lambda L, (1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)\log F(K, x) + \lambda \log F(L, y) \qquad (۱٦)$$

که در آن $x \in K$، $y \in L$ و $0 \leq \lambda \leq 1$. در این صورت اگر برای هر جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم

$$G(K) = \int_K F(K, x)dx$$

1) Groemer 2) Knothe

آن‌گاه خواهیم داشت

$$G(K+L)^{\frac{1}{n+m}} \geq G(K)^{\frac{1}{n+m}} + G(L)^{\frac{1}{n+m}} \qquad (۱۷)$$

در این‌جا K و L اجسام محدب دلخواهی در $\mathbb{R}^n$ هستند. اکنون بررسی می‌کنیم که (۱۷) چگونه از (۱) نتیجه می‌شود. به‌وضوح تابع $F(K,x) = 1$، $x \in K$ در (۱۶) صدق کرده و شرط (۱۵) را به‌ازای $m = 0$ برمی‌آورد. همچنین متناظر با این تابع، برای هر جسم محدب K خواهیم داشت

$$G(K) = \int_K F(K,x)dx = \int_K dx = V_n(K)$$

لذا (۱) از (۱۷) نتیجه می‌شود. برای مشاهده توضیحات بیشتر در مورد توسیع نوث و اثبات آن، به [۱۷] مراجعه کنید.

در ادامه، به معرفی اجمالی یک نامساوی از نوع برون ـ مینکوفسکی می‌پردازیم.

قضیه ۱۰. (نامساوی برون ـ مینکوفسکی در فضای گاوس) فرض کنید $0 \leq \lambda \leq 1$ عددی ثابت و K و L دو زیرمجموعهٔ کران‌دار و اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^n$ باشند به‌طوری که $(1-\lambda)K + \lambda L$ نیز اندازه‌پذیر است. در این‌صورت نامساوی

$$\gamma_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \gamma_n(K)^{(1-\lambda)}\gamma_n(L)^{\lambda} \qquad (۱۸)$$

برقرار است.

توجه کنید که (۱۸) به لحاظ ظاهری شباهتی تام با شکل اول نامساوی عام ([۱۲]، قضیه ۵.۱) دارد و همین امر وجه تسمیهٔ آن است. اثبات قضیهٔ فوق با استفاده از نامساوی پرکوپا ـ لیندلر (۵) انجام می‌شود که برای مشاهدهٔ جزئیات آن می‌توانید به [۴] رجوع کنید.

۷. کاربردهایی از نامساوی عام ($'۲$)

همان‌طور که تا این‌جا دیده‌ایم، نامساوی برون ـ مینکوفسکی دارای صورت‌های هم‌ارز، توسیع‌ها و گونه‌های متعددی است. لیکن هر کدام از این نامساوی‌ها دارای کاربردهای مختلفی می‌باشند. از این‌رو، حجم عظیم کاربردهای نامساوی‌های مورد بحث در این مختصر نمی‌گنجد و ناچاراً به ذکر دو مورد از کاربردهای نامساوی عام ($'۲$) بسنده می‌کنیم. توجه کنید که با توجه به معادل بودن نامساوی‌های عام (۲) و ($'۲$)، آنچه به‌عنوان کاربردی از ($'۲$) بیان می‌گردد، کاربردی از (۲) نیز خواهد بود.

۱.۷. کاربرد در نظریهٔ اطلاع

در سال ۱۹۸۴، کاستا[1] و کاور[2] [۸] ضمن اشاره به مورد دیگری از وجوه تشابه نامساوی‌های

1) Costa 2) Cover

عام ($'$۲) و توان آنتروپی (٦)، به استفاده از آن برای تعریف مفهوم جدید مساحت سطح برای متغیرهای تصادفی چندمتغیره و به‌قدر کافی خوش‌رفتار پرداختند. در واقع هنر کاستا و کاور در استفاده از شباهت‌های نامساوی عام برون ـ مینکوفسکی و نامساوی توان آنتروپی به منظور حصول نتایجی مرتبط با مفهوم آنتروپی از نتایج شناخته شدهٔ هندسی مرتبط با نامساوی عام بود. آن‌ها، در نخستین قدم، نشان دادند که اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل بوده و X' و Y' متغیرهای تصادفی نرمال و مستقل باشند به‌طوری که $h(X') = h(X)$ و $h(Y') = h(Y)$، آن‌گاه نامساوی

$$h(X+Y) \geq h(X'+Y') \tag{۱۹}$$

با نامساوی توان آنتروپی (٦) معادل است. این دو، در قدم بعد و با فرایندی مشابه، به یک نامساوی هم‌ارز با نامساوی عام ($'$۲) دست یافتند که از لحاظ ظاهری مشابه (۱۹) بود. این نامساوی بیان می‌کند که اگر A و B زیرمجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^n$ واجد شرط اندازه‌پذیری $A+B$ باشند و گوی‌های باز A' و B' را چنان اختیار کنیم که $V_n(A') = V_n(A)$ و $V_n(B') = V_n(B)$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$V_n(A+B) \geq V_n(A'+B'). \tag{۲۰}$$

کار مهم بعدی مؤلفین مزبور تحقیق درستی نامساوی برابرمحیطی کلاسیک برای حوزه‌های فشرده و محدب در $\mathbb{R}^n$ و ایده گرفتن از شباهت حاصل میان نامساوی‌های ($'$۲) و (٦) (در رسیدن به نامساوی‌های کاملاً مشابه (۱۹) و (۲۰)) جهت تعریف مساحت سطح متغیر تصادفی چندمتغیرهٔ X با چگالی به‌طور مناسب هموار $p(t)$ به‌صورت

$$S(X) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{e^{2h(X+Z_\epsilon)} - e^{2h(X)}}{\epsilon}$$

بود که در آن Z_ϵ بردار تصادفی گاوسی با ماتریس کوواریانس ϵI و مستقل از X است. کاستا و کاور سرانجام با استفاده از صورت معادل نامساوی توان آنتروپی (۱۹) به مشابه نامساوی برابرمحیطی کلاسیک برای آنتروپی رسیدند:

$$\frac{1}{n}E\frac{\|\nabla p\|^2}{p^2} \geq 2\pi e e^{-\frac{2}{n}h(X)}.$$

۲.۷. کاربرد در آمار و نظریهٔ احتمال

در سال ۱۹۵۵، اندرسون[1] [۱]، نامساوی برون ـ مینکوفسکی را در تحقیق خود پیرامون توابع تک‌مدی چندمتغیره به‌کار برد. وی نتیجهٔ اصلی خود را در قالب قضیهٔ زیر بیان نمود.

قضیه ۱۱. (اندرسون) فرض کنیم K جسمی محدب در $\mathbb{R}^n$ و متقارن نسبت به مبدأ باشد. همچنین فرض کنیم f تابعی نامنفی، متقارن و تک‌مدی باشد که بر $\mathbb{R}^n$ انتگرال‌پذیر است. در این‌صورت

1) Anderson

برای هر $0 \leq c \leq 1$ و $y \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$\int_K f(x+cy)dx \geq \int_K f(x+y)dx.$$

با استفاده از قضیهٔ اندرسون می‌توان نتیجه گرفت که اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال بر $\mathbb{R}^n$ بوده و Y متغیری تصادفی و مستقل از X باشد، آن‌گاه

$$P\{X \in K\} \geq P\{X+Y \in K\}$$

که در آن K جسمی محدب در $\mathbb{R}^n$ و متقارن نسبت به مبدأ است. اثبات قضیهٔ اندرسون به‌طور کامل وابسته است به $1/n$ ــ مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ (یعنی مقعر بودن تابع $g_{K,L}$ به‌توان $1/n$) بر $\mathbb{R}^n$ که متناظر با اجسام محدب K و L به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{K,L}(x) = V_n(K \cap (L+x)).$$

نامساوی عام برون ــ مینکوفسکی را می‌توان برای اثبات $1/n$ ــ مقعر بودن $g_{K,L}$ بر تکیه‌گاهش به‌کار برد. برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر در مورد اثبات قضیهٔ فوق و کاربرد نامساوی عام در آن، به [۱] مراجعه کنید.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری نهایی

اگرچه پیشینهٔ تاریخی مباحث مرتبط با نامساوی برون ــ مینکوفسکی به اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم برمی‌گردد، این مبحث همچنان در زمرهٔ شاخه‌های تحقیقاتی فعال ریاضیات نوین قرار دارد. بدون شک مهم‌ترین دلیل این پویایی اتصال نامساوی برون ــ مینکوفسکی، صورت‌های معادل و گونه‌های مختلف آن به مقاصد کاربردی است. البته برای اهل ریاضیات که هیچ ادعایی را بدون اقامهٔ برهان نمی‌پذیرند، تحقیق فعال بودن این قلمروی تحقیقاتی بسیار آسان بوده و با جستجویی ساده در اینترنت می‌توان به آخرین مقالات مربوطه دست یافت. به‌عنوان نمونه‌ای از چنین مقالاتی می‌توان [۳] را نام برد.

مراجع

[1] Anderson, T. W., "The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 170-176.

[2] Beckner, W., "Inequalities in Fourier analysis", *Ann. of Math.*, **102**(1975), 159-182.

[3] Borell, C., “Inequalities of the Brunn-Minkowski type for Gassian measures”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **140**(2008), 195-205.

[4] Brascamp H. J., and Lieb, E. H., “Some inequalities for Gaussian measures and the long-range order of one-dimensional plasma”, *Functional Integration and its Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1975, pp. 1-14.

[5] Brascamp H. J., and Lieb E. H., “On extensions of Brunn-Minkowski and Prekopa-Liendler theorems, including inequalities for long concave functions, and with an application to the diffusion equation ”, *J. Functional Anal.*, **22**(1976), 366-389.

[6] Brunn, H.,*Uber ovale und eiflachen dissertation*, Munchen, 1887.

[7] Burago Y. D., and Zalgaler V. A., *Geometric inequalities*, Springer, New York, 1988.

[8] Costa M. H. M., and Cover T. M., “On the similarity of the entropy power inequality and the Brunn-Minkowski inequality”, *IEEE Trans. Information Theory*, **30**(1984), 837-839.

[9] Dancs S., and Uhrin, B., “On the conditions of equality in an integral inequality”, *Pub. Math.*, **29**(1982), 117-132.

[10] Hadwiger, H., and Ohmann, D., “Brunn-Minkowskischer satz und isoperimetrie”, *Math. Zeit.*, **66**(1956), 1-8.

[11] Gardner R. J., “The Brunn-Minkowski inequality”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39**(2002), 355-405.

[12] Gardner R. J., “The Brunn-Minkowski inequality: A survey with proofs”, available at http://www.ac.wwu.edu/ gardner. .

[13] Gardner R. J., *Geometric Tomography* , Cambridge University Press, New York, 1995.

[14] Groemer, H., “On the Brunn-Minkowski theorem ”, *Geom. Dedicata*, **27**(1988), 357-371.

[15] Guo, D., and Shamai S., and Verdu S., *Proof of entropy power inequalities via MMSE*, ISIT 2006, Seattle, USA, July 9-14 (2006).

[16] Henstock, R., and Macbeath, M., "On the measure of sum-sets, I: The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik ", *Proc. London Math. Soc.*, **3**(1953), 182-194.

[17] Knothe, H., "Contributions to the theory of convex bodies", *Michigan Math. J.*, **4**(1957), 39-52.

[18] Lusternik, L. A., "Die Brunn-Minkowskische ungleichung fur beliebige messbare mengen", *C. R. Acad. Sci*, URSS **8** (1935), 55-58.

[19] Lutwak, E., "Intersection bodies and dual mixed volume", *Adv. Math.*, **71**(1988), 232-261.

[20] Osserman, R., "The isoperimetric inequality", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**(1978), 1182-1238.

[21] Schneider, R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[22] Shannon, C. E., "A Mathematical theory of communication", *Bell System Tech. J.*, **27**(1948), 623-656.

[23] Sierpinski, W., "Sur la question de la mesurabilite de la base de M. Hamel", *Fund. Math.*, **1**(1920), 105-111.

[24] Uhrin, B., "Extensions and sharpenings of Brunn-Minkowski and Bonnesen inequalities", Intuitive Geometry, Siofok, 1985, ed. by K. Boroczky and G. Fejes Toth, *Coll. Math Soc.*, 1987, 551-571.

[25] Verdu. S., and Guo, D., "A simple proof of the entropy power inequality", *IEEE Trans. Information Theory*, **52** (2006), 2165-2166.

محمدرضا میری mmiri@birjand.ac.ir
حسین حسینی گیو hossein.giv@gmail.com
دانشگاه بیرجند، گروه ریاضی
غلامرضا محتشمی برزادران gmb1334@yahoo.com
دانشگاه فردوسی مشهد، گروه آمار

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۵۵ تا ۷۰

اعداد کاتالان

بهناز کوچک شوشتری

چکیده

در بررسی مسائل شمارشی، با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت سر و کار داریم. از جملهٔ این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد دیده می‌شوند، دنبالهٔ اعداد کاتالان است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد، بررسی و اثبات شود و همچنین مثال‌های مختلفی از کاربردهای آن ارائه شده است.

مقدمه

هر کسی که به نوعی با ریاضیات سر و کار دارد، احتمالاً با دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح مثبت برخورد داشته است. بعضی از آن‌ها مانند ...,۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵ ساده به نظر می‌آیند و بعضی مانند اعداد فیبوناتچی ...,۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸ را بایستی در طول زمان شناخت. از جملهٔ این دنباله‌ها که در زمینه‌های متعدد در بررسی مسائل شمارشی دیده می‌شوند، دنبالهٔ اعداد کاتالان[1] است. چند عضو اول این دنباله عبارت است از

۱, ۲, ۵, ۱۴, ۴۲, ۱۳۲, ۴۲۹, ۱۴۳۰, ۴۸۶۲, ۱۶۷۹۶, ۵۸۷۸۶, ۲۰۸۰۱۲, ۷۴۲۹۰۰,
۶۷۴۴۴۰, ۹۶۹۴۸۴۵, ۳۵۳۵۷۶۷۰, ۱۲۹۶۴۴۷۹۰, ۴۷۷۶۳۸۷۰۰, ۱۷۶۷۲۶۳۱۹۰,
۵۶۴۱۲۰۴۲۰, ۲۴۴۶۶۲۶۷۰۲۰, ۹۱۴۸۲۵۶۳۶۴۰, ۳۴۳۰۵۹۶۱۳۶۵۰, ...

دنبالهٔ اعداد کاتالان اولین بار در قرن ۱۸، به‌وسیلهٔ لئونارد اویلر مطرح شد. او مسأله زیر را حل کرد: *به چند طریق می‌توان یک چندضلعی را به‌وسیلهٔ قطرهایش به مثلث‌ها تقسیم نمود به‌طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند؟* در سال ۱۸۳۸، کاتالان مسألهٔ زیر را حل کرد:

1) Catalan Numbers

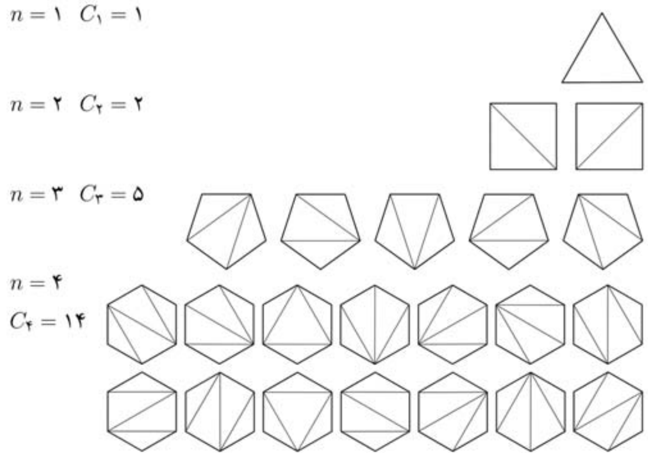
به چند طریق می‌توان یک سری از $(n+۱)$ حرف را با استفاده از n جفت پرانتز دسته‌بندی کرد به‌طوری که یا دو حرف، یا یک حرف و یک عبارت پرانتزی و یا دو عبارت پرانتزی، بدون تغییر ترتیب حروف، در کنار هم باشند؟

جواب مسألهٔ اویلر برای هر $n+۲$ ضلعی و جواب مسألهٔ کاتالان برای هر n، n ـ امین عدد کاتالان، C_n است. در این نوشته کوشش می‌شود ویژگی‌های این دنباله از اعداد بررسی و اثبات شود. همچنین مثال‌های متعددی از کاربردهای آن ارائه خواهد شد. در بخش اول، مسائل مختلف و تناظر یک به یک بین آن‌ها معرفی می‌شوند. در بخش دوم، با شرح نحوهٔ شمارش بعضی از مسائل، رابطهٔ بازگشتی برای تولید دنباله را معرفی کرده و تابع مولد این دنباله را به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم، به معرفی و اثبات فرمول‌های دیگری که اعداد کاتالان را تولید می‌کنند، می‌پردازیم.

۱. مسأله و تناظرهای یک به یک

۱.۱. مسألهٔ مثلث‌بندی کردن یک چندضلعی

اگر تعداد راه‌هایی را که می‌توان یک $n+۲$ ضلعی منتظم را مثلث‌بندی کرد به‌طوری که قطرها همدیگر را قطع نکنند، بشماریم، اعداد کاتالان به‌دست می‌آیند. در شکل ۱.۱ این کار به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ دیده می‌شود.



شکل ۱.۱

همان‌طور که دیده می‌شود، به‌ترتیب ۱، ۲، ۵ و ۱۴ طریق برای انجام این کار وجود دارد. برای $n=۰$، دوضلعی را می‌توان دقیقاً به یک طریق مثلث‌بندی کرد و بنابراین $C_۰ = ۱$ است.

۲.۱. دسته‌بندی $(n+۱)$ حرف با n جفت پرانتز

فرض کنیم $(n+۱)$ حرف با یک ترتیب ثابت کنار هم قرار گرفته باشند. می‌خواهیم با n جفت پرانتز آن‌ها را دسته‌بندی کنیم به‌طوری که درون هر جفت پرانتز دو عامل وجود داشته باشد. این عوامل می‌توانند دو حرف مجاور هم، یک حرف و یک جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شده و یا دو جفت پرانتز از حروف دسته‌بندی شدهٔ مجاور هم باشند. در شکل ۲.۱ به‌ازای $n=۰,۱,۲,۳,۴$، دسته‌بندی‌ها دیده می‌شوند.

$n=۰$ $C_۰=۱$ (a)

$n=۱$ $C_۱=۱$ (ab)

$n=۲$ $C_۲=۲$ ((ab)c), (a(bc))

$n=۳$ $C_۳=۵$ (((ab)c)d), ((ab)(cd)), ((a(bc))d), (a((bc)d)), (a(b(cd)))

$n=۴$ $C_۴=۱۴$ ((((ab)c)d)e), (((a(bc))d)e), (((ab)(cd)e)), (((ab)c)(de)),
((a((bc)d))e), ((a(b(cd)))e), ((a(bc))(de)), ((ab)((cd)e)),
((ab)(c(de))), (a(((bc)d)e)), (a((b(cd))e)), (a((bc)(de))),
(a(b((cd)e))), (a(b(c(de))))

شکل ۲.۱

۳.۱. درخت‌های دودویی

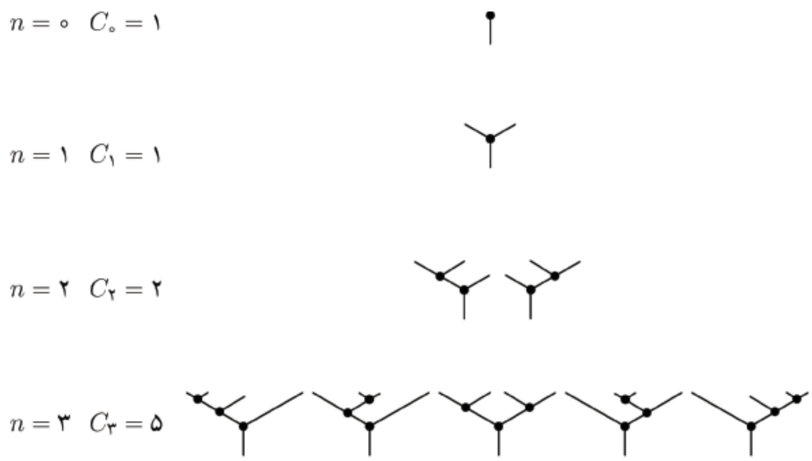
یک درخت دودویی ریشه‌دار با n گرهٔ داخلی، یک مجموعه از نقاط (گره‌ها) و پاره‌خط‌های مرتبط بین آن‌ها است که یک گره به‌عنوان ریشه در نظر گرفته می‌شود و $(n-۱)$ گرهٔ دیگر، آن‌هایی هستند که به دو گرهٔ بالاتر از خودشان وصل می‌شوند. اعداد کاتالان این درخت‌ها را می‌شمارند. در شکل ۳.۱ به‌ازای $n=۰,۱,۲,۳$، این درخت‌ها دیده می‌شوند.

۴.۱. مسیرهای کاتالان

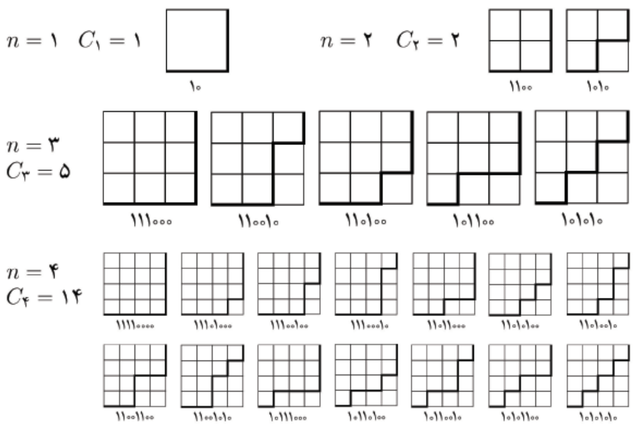
فرض کنیم یک شبکهٔ $n\times n$ داشته باشیم و بخواهیم از گوشهٔ سمت چپ پایین به گوشهٔ سمت راست بالا برویم به‌طوری که مسیر حرکت زیر خط واصل این دو گوشه (قطر اصلی) قرار گرفته باشد و فقط در هر مرحله از حرکت، مجاز به حرکت به راست و بالا باشیم. تعداد این مسیرها با اعداد کاتالان شمرده می‌شوند و n ــ **مسیر کاتالان**[1] نامیده می‌شوند (مانند حرکت مهرهٔ رخ در شطرنج).

1) Catalan n-path

در شکل ۴.۱ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ این مسیرها دیده می‌شوند.



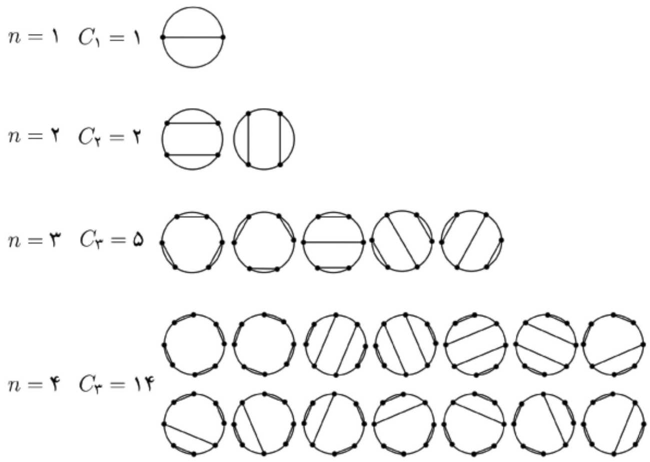
شکل ۳.۱



شکل ۴.۱

۵.۱. دست دادن افراد دور یک میزگرد

اگر $۲n$ نفر دور یک میزگرد نشسته باشند، به چند طریق تمامی آن‌ها می‌توانند دوبه‌دو دست همدیگر را بگیرند به‌طوری که هیچ دو بازویی از هم نگذرند. شکل ۵.۱ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$، حالت‌های مختلف را نشان می‌دهد.



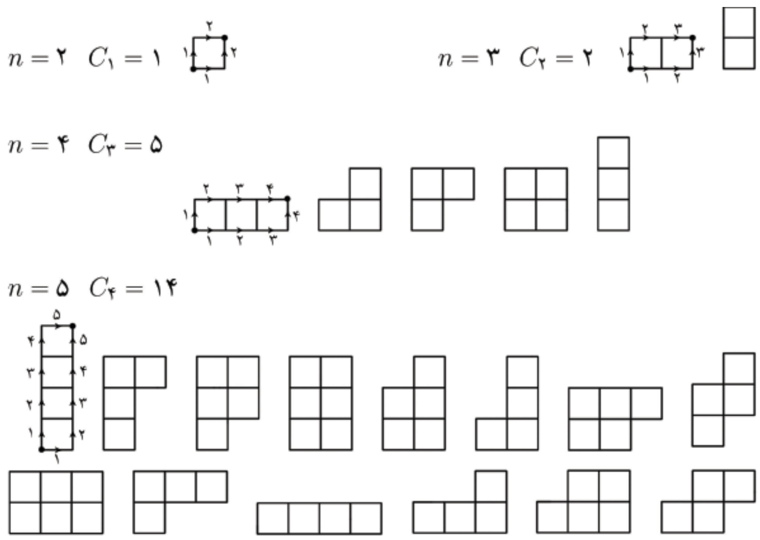
شکل ۵.۱

٦.۱. مسیرهای جفت

یک جفت مسیر[1] با طول n، یک جفت از مسیرها است که از مبدأ شروع می‌شوند و هر کدام شامل n مرحلهٔ تکی است و بعد از n مرحله همدیگر را قطع می‌کنند. حرکت روی این دو مسیر فقط به راست و بالا می‌باشد. این مسیرهای جفت، هم‌چنین پولیومینوهای موازی[2] نامیده می‌شوند، چون ناحیهٔ محصور به این دو مسیر، یک مجموعه از مربع‌هایی است که به‌وسیلهٔ اضلاعشان با هم ارتباط دارند. در هر یک از آن‌ها، ارتفاع ستون‌های متوالی از مربع‌ها از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ یعنی از پایین، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست و از بالا، ستون سمت چپ همیشه پایین‌تر یا مساوی ستون سمت راست است.

محیط هر یک از این مسیرهای جفت به‌ازای $n \geq ۲$ برابر $۲n$ و تعداد آن‌ها $C_{n-۱}$ است؛ یعنی به‌ازای هر n، محیط ثابت است ولی تعداد مربع‌ها ثابت نیست. شکل ٦.۱ مسیرهای جفت را به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, ۵$ نشان می‌دهد. مساحت کل این $C_{n-۱}$ مسیر جفت، برابر $۴^{n-۲}$ است.

1) path pair 2) Parallello-Polyomino



شکل ۶.۱

۷.۱. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و عبارت‌های پرانتزی

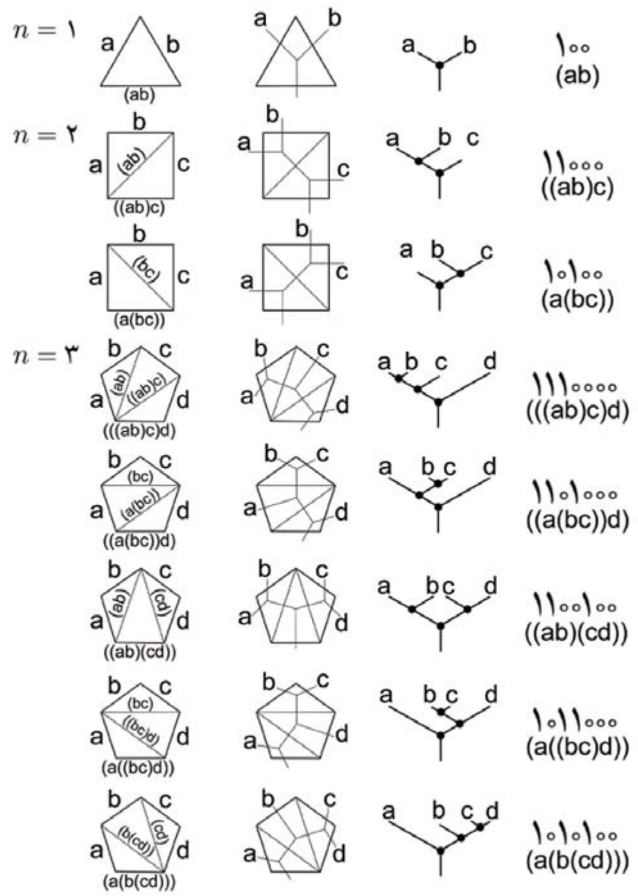
اضلاع چندضلعی را (به غیر از قاعده) به‌صورت گردشی در یک جهت با حروف نام‌گذاری می‌کنیم. هر قطر که با دو ضلع مجاور یک مثلث تشکیل دهد، با استفاده از نام اضلاع در یک جفت پرانتز نام‌گذاری می‌شود. هر قطر بعدی با استفاده از نام دو ضلع مجاور در همان مثلث که این قطر یک ضلع آن است، در یک جفت پرانتز، نام‌گذاری می‌شود. در نهایت ضلعی که به‌عنوان قاعده بود نام‌گذاری می‌شود (شکل ۷.۱).

۸.۱. تناظر یک به یک بین درخت‌های دودویی و عبارت‌های پرانتزی

اگر گره‌های انتهایی درخت‌های دودویی را به‌ترتیب از چپ به راست با حروف نام‌گذاری کنیم، با عبارت‌های پرانتزی یک تناظر یک به یک تشکیل می‌دهند (شکل ۷.۱).

۹.۱. تناظر یک به یک بین عبارت‌های پرانتزی و اعداد دودویی

در عبارت‌های پرانتزی به‌ازای هر پرانتزی که باز می‌شود عدد ۱ و به‌ازای هر حرف، عدد صفر (۰) را قرار می‌دهیم. پرانتزهای سمت راست «(» نادیده گرفته می‌شود (شکل ۷.۱).



شکل ۷.۱

۱۰.۱. تناظر یک به یک بین اعداد دودویی و مسیرهای کاتالان

اگر در مسیرهای کاتالان با n مرحلهٔ تکی، هر مرحله از حرکت به راست را با عدد ۱ و هر مرحله از حرکت به بالا را با صفر (۰) نشان دهیم، متناظر با هر مسیر، یک عدد دودویی داریم. این اعداد دودویی همان اعداد دودویی در ۹.۱ هستند که رقم آخر آن‌ها نادیده گرفته شده است. در شکل ۴.۱ عدد دودویی مربوط به هر مسیر زیر آن نوشته شده است.

۱۱.۱. تناظر یک به یک بین چندضلعی‌های مثلث‌بندی شده و درخت‌های دودویی

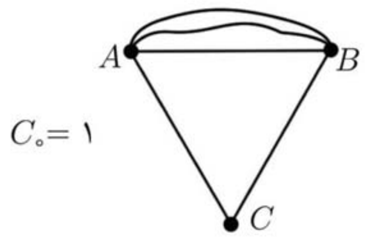
همان‌طور که در شکل ۷.۱ دیده می‌شود، به‌ازای هر چندضلعی یک درخت دودویی وجود دارد

و هر یک از مثلث‌ها با قسمتی از آن درخت، شامل یک گره که دو لبه از آن خارج شده، متناظر است (شکل ۷.۱).

۲. رابطهٔ بازگشتی و تابع مولد

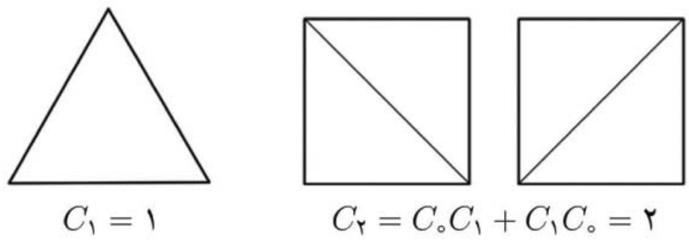
۱.۲. نحوهٔ شمارش در مسألهٔ اویلر و به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی

برای به‌دست آوردن یک رابطهٔ بازگشتی در مسائل شمارشی مطرح شده، نحوهٔ شمارش را در مسألهٔ مثلث‌بندی کردن چندضلعی با $n+۲$ ضلع شرح می‌دهیم. به‌ازای $n=۰$، می‌توان دوضلعی را مثلثی در نظر گرفت که یک ضلع ندارد. مانند شکل ۱.۲ که AC و CB دو ضلع مورد نظر هستند.



شکل ۱.۲

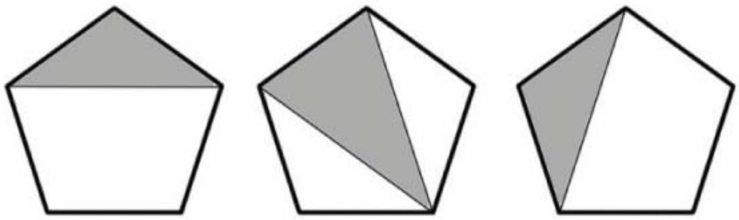
واضح است که فقط به یک طریق می‌توان A را به B وصل کرد به‌طوری که ABC یک مثلث شود، یعنی $C_۰ = ۱$. به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ به‌راحتی می‌توان دریافت که $C_۱ = ۱$ و $C_۲ = ۲$ است (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲

به‌ازای $n=۳$، در شکل ۳.۲ یک ضلع پنج‌ضلعی را در نظر می‌گیریم. در پنج‌ضلعی سه مثلث وجود دارد که این ضلع خاص، یک ضلع این سه مثلث است. بنابراین سه حالت می‌توان در نظر گرفت. در هر حالت، آن مثلث که انتخاب شود، یک چندضلعی (احتمالاً تهی) در سمت راست و یک چندضلعی در سمت چپ مثلث اصلی است که بایستی خودشان نیز مثلث‌بندی شوند. در

پنج‌ضلعی سمت چپ، یک چهارضلعی در سمت چپ و یک تهی در سمت راست (یک چندضلعی با دو ضلع) دیده می‌شود. با مثلث‌بندی کردن دو طرف، کار مثلث‌بندی کردن، کامل می‌شود. در این حالت به $C_۲$ روش در سمت چپ و $C_۰$ روش در سمت راست و بنابراین به $C_۲C_۰$ روش مثلث‌بندی می‌شود. برای پنج‌ضلعی وسط، دو سه‌ضلعی در دو طرف مثلث اصلی است که هر کدام به $C_۱$ روش مثلث‌بندی می‌شوند، پس در این حالت به $C_۱C_۱$ روش کار انجام می‌شود. برای پنج‌ضلعی سمت راست، یک تهی در سمت چپ و یک چهارضلعی در سمت راست مثلث اصلی وجود دارد که



شکل ۳.۲

سمت چپ به $C_۰$ روش و سمت راست به $C_۲$ روش مثلثی می‌شوند. بنابراین در این حالت به $C_۰C_۲$ روش کار مثلثی کردن پنج‌ضلعی انجام می‌شود. بنابراین برای تمامی سه حالت موجود در شکل ۳.۲، داریم

$$C_۳ = C_۰C_۲ + C_۱C_۱ + C_۲C_۰$$

در حالت کلی، برای یک $n + ۲$ ضلعی، وقتی یک ضلع خاص انتخاب شود، به n حالت می‌توان مثلث انتخاب کرد که این ضلع خاص، یک ضلع آن باشد. در هر یک از این حالت‌ها ممکن است یک تهی در سمت چپ و یک $n - ۱$ ضلعی در سمت راست، یعنی $C_۰C_{n-۱}$ روش، یک سه‌ضلعی در سمت چپ و یک $n - ۲$ ضلعی در سمت راست، یعنی $C_۱C_{n-۲}$ روش و... و یک $n - ۱$ ضلعی در سمت چپ و یک تهی در سمت راست، یعنی $C_{n-۱}C_۰$ روش به‌وجود آید. بنابراین تعداد کل روش‌های مثلث‌بندی کردن یک $n + ۲$ ضلعی از رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n = C_۰C_{n-۱} + C_۱C_{n-۲} + C_۲C_{n-۳} + \ldots + C_{n-۲}C_۱ + C_{n-۱}C_۰ \tag{۱.۲}$$

که n ـ امین عدد کاتالان است.

۲.۲. تابع مولد

می‌خواهیم با استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۱.۲) و روش معروف به تابع مولد، یک فرمول صریح برای اعداد کاتالان، C_n، به‌دست آوریم. تابع $C(x)$ را به‌عنوان تابع مولد برای تمامی اعداد کاتالان

C_0، C_1، C_2، ... به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \tag{۲.۲}$$

طرفین رابطهٔ (۲.۲) را به توان ۲ می‌رسانیم و در x ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x[C(x)]^2 &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right) \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

بنابراین از (۳.۲) معادلهٔ درجه دوم به‌صورت

$$x[C(x)]^2 - C(x) + 1 = 0 \tag{۴.۲}$$

به‌دست می‌اید. با حل این معادله، فرمول صریح تابع مولد $C(x)$ به‌دست می‌آید:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{۵.۲}$$

توجه کنید که در (۵.۲)، $C(x)$ با علامت منفی را در نظر می‌گیریم. چون می‌دانیم

$$C(0) = C_0 = 1 \tag{۶.۲}$$

بنابراین اگر علامت مثبت را انتخاب کنیم، وقتی $x \to 0$، داریم $C(x) \to \infty$. پس

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{۷.۲}$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای، داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad &+ \quad \frac{1}{2}(-4x) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-4x)^2 \\ &+ \quad \frac{1}{3!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-4x)^3 \\ &+ \quad \frac{1}{4!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-4x)^4 \\ &+ \quad \ldots \\ &+ \quad \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(\frac{1}{2}-n+1)(-4x)^n \\ &+ \quad \ldots \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

اگر از نماد $[x^n]F(x)$ برای نشان دادن ضریب x^n در بسط $F(x)$ استفاده کنیم، آن‌گاه

$$\begin{aligned}[x^n]\sqrt{1-4x} &= \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n}(-1)^n 2^{2n}\\ &= \frac{(-1)2^n[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)]}{n!} \qquad (9.2)\end{aligned}$$

اگر صورت و مخرج کسر (۹.۲) را در $(2n-1)!n!$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)[2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)][1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]}{n!n!(2n-1)}$$

بنابراین

$$[x^n]\sqrt{1-4x} = \frac{(-1)(2n)!}{n!n!(2n-1)} = \frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n} \qquad (10.2)$$

اینک این مقدار را در معادلهٔ $C(x)$ در (۷.۲) قرار می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned}C(x) &= \frac{1}{2x}\left[1-\sqrt{1-4x}\right] = \frac{1}{2x}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right]\\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}x^n \qquad (11.2)\end{aligned}$$

از مقایسهٔ (۱۱.۲) با (۲.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}[x^n]C(x) = C_n &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!}\\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

بنابراین n ـ امین عدد کاتالان از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n\geq 0.$$

۳. فرمول‌های دیگر برای تولید اعداد کاتالان

۱.۳. فرمول اویلر

اویلر در حل مسأله مثلث‌بندی یک N ضلعی فرمول غیربازگشتی

$$P = \frac{۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴N - ۱۰)}{(N - ۱)!} \qquad (N > ۲) \qquad (۱.۳)$$

N	۳	۴	۵	۶	...
P	۱	۲	۵	۱۴	...

را ارائه داد. همان‌طور که دیده می‌شود، این فرمول به‌ازای $N > ۲$، اعداد کاتالان

$$C_n = \frac{۱}{n + ۱}\binom{۲n}{n}, \qquad n \geq ۱ \qquad (۲.۳)$$

را می‌دهد. بنابراین اعداد به‌دست آمده از (۱.۳) همان اعدادی هستند که از آخرین دستور بند قبل، به‌ازای $n = N - ۲$ به‌دست می‌آیند. برای این‌که ثابت کنیم فرمول (۱.۳) تمامی اعداد کاتالان را ارائه می‌دهد، بایستی نشان دهیم

$$P = \frac{۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴N - ۱۰)}{(N - ۱)!} = \frac{۱}{N - ۱}\binom{۲N - ۴}{N - ۲} (= C_{N-۲}) \qquad (۳.۳)$$

برای اثبات (۳.۳)، نشان می‌دهیم سمت چپ با راست برابر است. چون

$$\begin{aligned} P &= \frac{۲(۲ \times ۳)(۲ \times ۵)(۲ \times ۷)\ldots(۲(۲N - ۵))}{(N - ۱)!} \\ &= \frac{۲^{N-۲}(۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵))}{(N - ۱)!} \end{aligned}$$

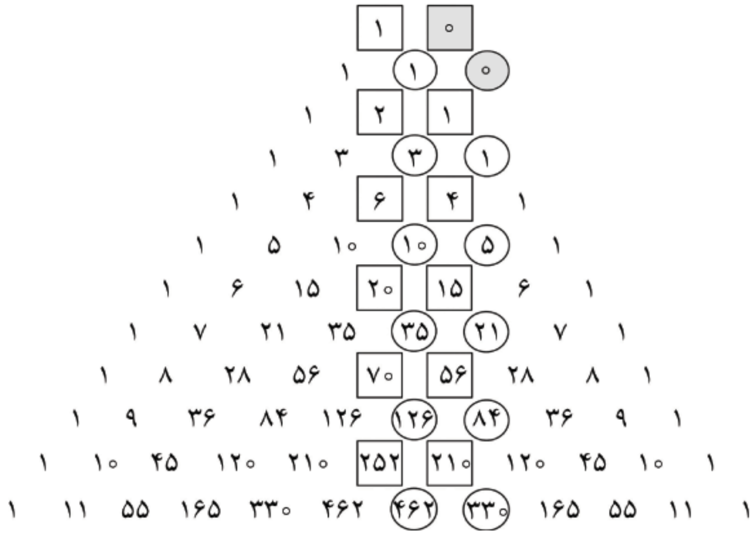
پس با ضرب صورت و مخرج کسر در $(N - ۲)!$ داریم

$$\begin{aligned} P &= \frac{۲^{N-۲}(N - ۲)!(۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵))}{(N - ۲)!(N - ۱)!} \\ &= \frac{[۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \cdots (۲N - ۴)][۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdot \cdots \cdot (۲N - ۵)]}{(N - ۲)!(N - ۱)!} \\ &= \frac{(۲N - ۴)!}{(N - ۲)!(N - ۱)!} = \frac{۱}{N - ۱}\frac{(۲N - ۴)!}{(N - ۲)!(N - ۲)!} \\ &= \frac{۱}{N - ۱}\binom{۲N - ۴}{N - ۲} = C_{N-۲} \end{aligned}$$

و اثبات تمام است.

این فرمول مقدار $C_۰$ (یعنی وقتی $N = ۲$) را به‌دست نمی‌دهد. با وجود این، همان‌طور که در (۱.۲) دیدیم با یک تعبیر هندسی خواهیم داشت $C_۰ = ۱$.

۲.۳. مثلث پاسکال و اعداد کاتالان



شکل ۱.۳

اگر در مثلث پاسکال به ترتیب از بالا به پایین سطرها را با $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ شماره گذاری کنیم، خواهیم دید که

$C_n =$ عدد مجاور در سطر $۲n$ ـ ام $-$ عدد موجود در ستون مرکزی و در سطر $۲n$ ـ ام

اعداد مورد نظر در مربع‌ها مشخص شده اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{array}{ll} n = ۰ & ۱ - ۰ = ۱ = C_۰ \\ n = ۱ & ۲ - ۱ = ۱ = C_۱ \\ n = ۲ & ۶ - ۴ = ۲ = C_۲ \\ n = ۳ & ۲۰ - ۱۵ = ۵ = C_۳ \\ \vdots & \end{array} \qquad (۴.۳)$$

فرمول (۴.۳) را می‌توان به‌صورت $C_n = \binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱}$ نیز نوشت.

اثبات (۴.۳):

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}\\
&= \frac{(2n)!\times(n+1)}{n!n!\times(n+1)}-\frac{(2n)!\times n}{(n+1)!(n-1)!\times n}\\
&= \frac{(n+1)(2n)!}{n!(n+1)!}-\frac{n(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n
\end{aligned}$$

با دقت بیشتر در مثلث پاسکال می‌توان دید که به‌ازای $n \geq 1$ داریم

$C_n =$ عدد مجاور در سطر $2n-1$ ـ ام $-$ عدد مجاور در ستون سمت راست ستون مرکزی و در سطر $2n-1$ ـ ام

اعداد مورد نظر در دایره‌ها مشخص شده‌اند. این اعداد با فرمول زیر تولید می شوند:

$$\begin{array}{ll}
n=1 & 1-0=1=C_1\\
n=2 & 3-1=2=C_2\\
n=3 & 10-5=5=C_3\\
n=4 & 35-21=14=C_4\\
\vdots &
\end{array}\tag{5.3}$$

فرمول (۵.۳) را می‌توان به‌صورت $\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n+1}=C_n$ نیز نوشت.

اثبات (۵.۳):

$$\begin{aligned}
\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{n+1} &= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}-\frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}\\
&= \frac{(2n-1)!\times(n+1)}{n!(n-1)!\times(n+1)}-\frac{(2n-1)!\times(n-1)}{(n+1)!(n-2)!\times(n-1)}\\
&= \frac{(n+1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}-\frac{(n-1)(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}\\
&= \frac{2(2n-1)!\times n}{(n-1)!(n+1)!\times n}\\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n
\end{aligned}$$

۳.۳. معرفی و اثبات یک رابطهٔ بازگشتی برای اعداد کاتالان

اعداد کاتالان از رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}, \qquad C_0 = 1 \qquad n \geq 1$$

برای اثبات از فرمول (۴.۳) استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{(2n+2)!}{n!(n+2)!} \\
&= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} - \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} = \frac{2(2n+1)!}{n!(n+2)!} \\
&= \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+2)n!(n+1)!} = \frac{2(2n+1)}{n+2}\left[\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\right] \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+2}\left[\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right] = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n
\end{aligned}$$

۴.۳. یک ویژگی جالب از اعداد کاتالان

در دنبالهٔ اعداد کاتالان به‌ازای $n \geq 2$، هر دو عدد متوالی دارای تعداد ارقام مساوی هستند، یعنی C_2 و C_3 یک‌رقمی، C_4 و C_5، دو رقمی، C_6 و C_7 سه‌رقمی، C_8 و C_9 چهار رقمی، ... و C_n و C_{n+1}، $\frac{n}{2}$ رقمی هستند. نظم تعداد ارقام در هر دو عدد متوالی، اعداد طبیعی می‌باشد.

تشکر و قدردانی: در پایان از راهنمایی‌های بی‌دریغ همکار گرامیم دکتر منصور معتمدی سپاسگزارم.

مراجع

[1] David Callan, A Combinatorial Interpretation of a Catalan Numbers Identity, Department of statistics university of Wisconsin- Madison, *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No. 4. (Oct. , 1999), PP. 295-298.

[2] Tom Davis, Catalan Numbers, tomrdavis@earthlink.net, http://www.geometer.org/mathcircle. November 26, 2006.

[3] Martin Gardner, Mathematical Games, Catalan Numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places. *Scientific American 234*, No. 6 (June 1976), PP. 120-125.

[4] Wen-Jin Woan, Lou Shapiro, and D.G.Rogers, The Catalan Numbers, The Lebesgue Integral and $۴^{n-۲}$. *American Mathematical Monthly* 101 (December 1997), PP. 926-931.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan Numbers

[6] http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal-Catalan.html

[7] http://www.saintanns.k12.ny.us/depart/math/seth

بهناز کوچک شوشتری
دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی
shooshtari_b@scu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۷۱ تا ۹۴

بررسی دینامیکی سلول عصبی

محمدرضا رزوان، سمیه یاسمن

چکیده

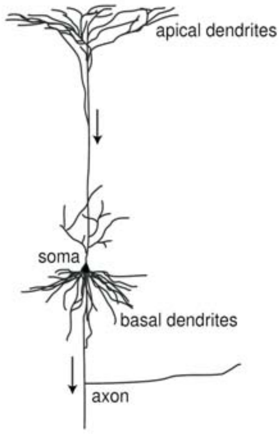
مطالعهٔ نورون به‌عنوان یکی از مهم‌ترین انواع سلول‌های بدن هر موجود زنده همواره مورد توجه دانشمندان بوده است. در بین همهٔ رویکردهایی که در این راستا وجود دارد، برخی از ریاضیدانان، نورون را به‌عنوان یک سیستم دینامیکی غیرخطی در نظر می‌گیرند و با استفاده از ابزار سیستم‌های دینامیکی مثل انشعاب، فرآیندهای تصادفی و ...، تلاش می‌کنند رفتارهای متفاوت مشاهده شده از نورون در آزمایشگاه را توجیه کنند. یکی از مقبول‌ترین الگوهای نورونی، الگوی Hodgkin-Huxley است. در این مقاله ابتدا این الگو را معرفی می‌کنیم، سپس تعریف ریاضی دقیقی از تحریک‌پذیری ارائه می‌دهیم. در ادامه، با ساده‌تر کردن الگو و تبدیل آن به بعدهای دو و سه و با استفاده از این تعریف ریاضی و نظریهٔ انشعاب، انواع جهش‌های پتانسیلی مشاهده شده در نورون را توجیه می‌کنیم. در پایان نیز، یکی از رفتارهای پیچیده‌تر نورون یعنی شکفتن و یکی از مفاهیم موجود در سیستم عصبی یعنی آستانه را با استفاده از مفهوم تحریک‌پذیری تحلیل و بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: سلول عصبی؛ انشعاب؛ تحریک‌پذیری؛ شکفتن.

۱. مقدمه

با یک نگاه کلی به ارگانیسم بدن یک موجود زنده، متوجه می‌شویم که گرچه تعداد نورون‌ها در مقایسه با سایر سلول‌ها بسیار کم است، اما آن‌ها مهم‌ترین و تأثیرگذارترین نوع سلول‌ها هستند. به همین دلیل، مطالعهٔ نورون همواره مورد توجه دانشمندان بوده است. وظیفهٔ اصلی نورون‌ها دریافت، هدایت و انتقال پیام‌ها (سیگنال‌ها) است. با وجود تفاوت نورون‌ها از لحاظ شکل و اندازه، از لحاظ

ساختاری شبیه هم هستند. یک نورون معمولی از سه قسمت تشکیل شده است: ۱ — بدنهٔ سلولی که شامل هسته و برخی از عناصر داخل سلول است. ۲ — شاخه‌های دندریت که به‌شکل شاخه شاخه (درختی) از بدنهٔ سلولی خارج شده‌اند. آن‌ها سیگنال‌های رسیده از سایر نورون‌ها را دریافت می‌کنند. ۳ — آکسون که سیگنال‌های خروجی را از بدنهٔ سلولی می‌گیرد و به نورون‌های دیگر منتقل می‌کند.



شکل ۱: اجزای نورون

در محیط خارج و داخل سلول، به‌طور عمده یون‌های K^+، Na^+، Cl^- و Ca^{2+} و ملکول‌های با بار منفی A^- وجود دارند. اما میزان تجمع آن‌ها در داخل و خارج سلول متفاوت است، به‌عنوان مثال، در داخل سلول، تجمع یون‌های K^+ و ملکول A^- بیشتر از خارج و در خارج سلول، تجمع یون‌های Na^+ و Ca^{2+} و Cl^- بیشتر از داخل است. غشاء سلول، از دو لایهٔ چربی تشکیل شده و در بین آن‌ها نیز تعدادی ملکول پروتئین، جاگذاری شده است. این ملکول‌ها، منافذی را در غشاء شکل می‌دهند و از طریق همین منافذ، یون‌ها می‌توانند بین خارج و داخل سلول، رفت و آمد کنند. به این منافذ،کانال‌های یونی [1] گفته می‌شود [5]. معمولاً هر کدام از این کانال‌ها، نوع خاصی از یون‌ها را از خود عبور می‌دهند. بعضی از این کانال‌ها، همیشه باز هستند و یون‌ها بین آن‌ها جریان دارند. به چنین جریانی،جریان تراوشی [2] گفته می‌شود. اما در حالت کلی کانال‌ها معمولاً بسته هستند و باز شدن آن‌ها بستگی به عواملی مثل پتانسیل غشاء، میزان یون‌های کلسیم داخل سلول و ...، دارد. کانال مخصوص عبور یک نوع یون را در نظر بگیرید. پتانسیلی را که در آن جریان گذرا از کانال صفر است، پتانسیل تعادل یون یاپتانسیل نرنست [3] می‌نامند. در حالت کلی، جریانی که در هر لحظه از کانال یونی خارج می‌شود، مضربی است از تفاوت پتانسیل تعادل یون(E_{ion}) و پتانسیل غشاء(V). به عبارت دیگر $I_{ion} = g_{ion}(V - E_{ion})$ که در آن g_{ion}، رسانایی [4] کانال برای آن یون می‌باشد.

1) Ion Channels 2) Leak Current 3) Nernst 4) Conductance

اگر g_{ion} همیشه ثابت باشد، جریان I راجریان اهمی [۱] یا تراوشی می‌نامند. اما در حالت کلی g_{ion} متغیر است و ممکن است به عواملی مثل پتانسیل غشاء بستگی داشته باشد. متغیر بودن g_{ion}، نقش مهمی در تولید پتانسیل عمل ایفا می‌کند. برای توصیف نحوهٔ عملکرد کانال‌های یونی، معمولاً دو نوع دریچهٔ فعال‌سازی [۲] وغیرفعال‌سازی [۳] برای آن‌ها در نظر می‌گیرند و این دریچه‌ها هستند که باز و بسته بودن کانال را کنترل می‌کنند [1]. به عبارت دیگر با افزایش پتانسیل غشاء، دریچه‌های فعال‌سازی به‌تدریج باز و دریچه‌های غیرفعال‌سازی به‌تدریج بسته می‌شوند. اگر کانالی دریچهٔ غیرفعال‌سازی نداشته باشد،جریان پایا [۴] و در غیر این صورت، جریان ناپایا (گذرا) [۵] تولید می‌کند. دریچه‌ها به عوامل مختلفی حساس هستند مثل پتانسیل غشاء و میزان تجمع یون‌های کلسیم در داخل سلول ([11] و [12]).

در شیوه‌ای که برای الگوسازی دینامیک کانال‌های حساس به ولتاژ، توسط Hodgkin و Huxley پیشنهاد شد، به هر یک از انواع این دریچه‌ها متغیری که مقدار آن متعلق به بازهٔ $[۰, ۱]$ است، نسبت می‌دهند. احتمال باز بودن یک دریچهٔ فعال‌سازی، با حرف m (اگر کانال‌های K^+ و Cl^- مد نظر باشند، با n) و احتمال باز بودن یک دریچهٔ غیرفعال‌سازی، با حرف h نشان داده می‌شود. بنابراین $۰ \leq m, n, h \leq ۱$. فرض کنیم یک کانال، a دریچهٔ فعال‌سازی و b دریچهٔ غیرفعال‌سازی داشته باشد. اگر جمعیتی از این کانال‌ها داشته باشیم، سهم کانال‌های باز در این جمعیت برابر است با $p = m^a h^b$. حال، جمعیتی از کانال‌ها را در نظر بگیرید. جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، از رابطهٔ $I = \bar{g}p(V - E)$ به‌دست می‌آید که در آن، $\bar{g}$ بیشترین مقدار رسانایی کانال‌ها، E پتانسیل معکوس [۶] (پتانسیلی که در آن حالت، جهت جریان یونی معکوس می‌شود) و p میانگین سهم کانال‌هایی است که باز هستند.

Hodgkin و Huxley، با مطالعهٔ آکسون نورون نوعی ماهی مرکب، دریافتند که به‌طور عمده، سه نوع جریان یونی در این نورون وجود دارد: ۱– جریان پایای یون‌های K^+. ۲– جریان گذرای یون‌های Na^+. ۳– جریان اهمی یا تراوشی، که به‌طور عمده از یون‌های Cl^- تشکیل شده است. بر این اساس، Hodgkin و Huxley در سال ۱۹۵۲ الگویی برای فعالیت نورون ارائه دادند [6]. الگوی Hodgkin-Huxley یک معادلهٔ دیفرانسیلی معمولی چهار متغیره است و متغیرهای موجود در آن، شامل ولتاژ غشاء و متغیرهای دریچه‌ای کانال‌های سدیم و پتاسیم است. در این الگو، فرض شده است که کانال سدیم سه دریچهٔ فعال‌سازی و یک دریچه‌ی غیرفعال‌سازی و کانال پتاسیم چهار دریچهٔ فعال‌سازی دارد. این الگو به‌صورت زیر است:

---

1) Ohmic Current 2) Activation Gate 3) Inactivation Gate
4) Persistent Current 5) Transient Current 6) Inverse Potential

$$c\dot{V} = I - \bar{g}_K n^4 (V - E_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - E_{Na}) - g_L (V - E_L),$$
$$\dot{m} = (m_\infty(V) - m)/\tau_m(V),$$
$$\dot{h} = (h_\infty(V) - h)/\tau_h(V),$$
$$\dot{n} = (n_\infty(V) - n)/\tau_n(V).$$

که در آن $m_\infty(V)$ و $h_\infty(V)$ و $n_\infty(V)$، مقدار نهایی m، h و n به‌ازای هر مقدار V است و $\tau_m(V)$، $\tau_h(V)$ و $\tau_n(V)$ زمان رسیدن این متغیرها به این مقدار می‌باشد. نقطه در بالای نمادها، نشان‌دهندهٔ مشتق زمانی آن متغیر است.

سیگنال‌هایی که توسط دندریت‌ها دریافت می‌شوند، پتانسیل گلوگاه آکسونی [1] را تغییر می‌دهند. بعضی از کانال‌های مخصوص عبور سدیم در این قسمت، به تغییرات ولتاژ حساس هستند. اگر پتانسیل غشاء، از یک مقدار خاص فراتر رود، این دسته از کانال‌های Na^+ باز می‌شوند. به‌دلیل این‌که میزان تجمع یون‌های Na^+ در خارج سلول، بیشتر از داخل آن است، این یون‌ها به داخل سلول سرازیر می‌شوند و همین مسأله باعث می‌شود پتانسیل غشاء به‌سرعت افزایش یابد و نورون،پتانسیل عمل [2] تولید کند. اما بزرگی پتانسیل عمل، با مقدار تغییر پتانسیل ایجاد شده توسط محرک، قابل مقایسه نیست و بزرگتر از آن است. در همین حال، به‌دلیل افزایش پتانسیل غشاء، کانال‌های مخصوص عبور پتاسیم نیز با سرعت کمتری شروع به باز شدن می‌کنند. بعد از مدتی، دریچه‌های غیرفعال‌سازی کانال‌های سدیم باعث بسته شدن آن‌ها می‌شوند. ولی جریان پتاسیم، همچنان ادامه پیدا می‌کند و باعث می‌شود پتانسیل غشاء، بیشتر از این بالا نرود و کاهش پیدا کند و حتی ممکن است پتانسیل غشاء از پتانسیل حالت استراحت و خاموشی نورون نیز پایین‌تر رود [3]. این کاهش پتانسیل تا جایی ادامه پیدا می‌کند که کانال‌های پتاسیم مجدداً بسته شود. پتانسیل عمل تولید شده با همین فرآیند در طول آکسون منتشر می‌شود. یک‌دورهٔ بازآرایی [4] نیز در فرآیند تولید پتانسیل عمل وجود دارد تا وضعیت نورون را به وضعیت اولیه برگرداند، یعنی پتانسیل غشاء به پتانسیل استراحت بازگردد. در طول این دوره که معمولاً حدود دو میلی ثانیه طول می‌کشد، جریان تراوشی وجود دارد. همچنین عمل پمپاژ نیز مخصوص این دوره است. در طول عمل پمپاژ، یون‌های سدیم و پتاسیم به‌ترتیب به خارج و داخل سلول پمپ می‌شوند. در این دوره، نورون هیچ پتانسیل عمل دیگری تولید نمی‌کند. در این رابطه، این سؤالات مطرح است: اصولاً چرا نورون چنین خاصیتی دارد؟ چرا در بعضی موارد، جهش‌های پتانسیلی متناوب برای نورون اتفاق می‌افتد؟ در این حالت، چرا گاهی شکل و نوع این جهش‌ها متفاوت است؟

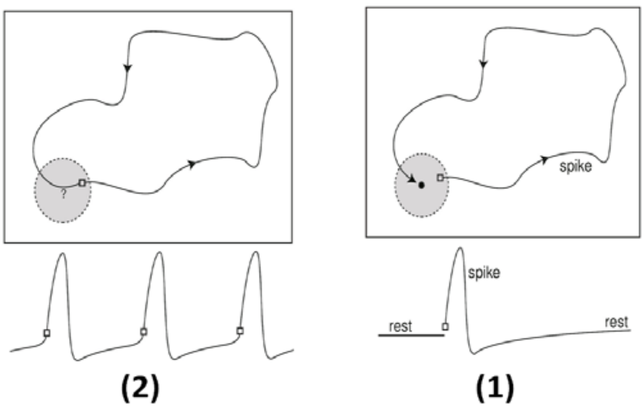
۲. تحریک‌پذیری

در آزمایش‌ها می‌بینیم که نورون در پاسخ به بعضی محرک‌های خاص، از حالت خاموشی خارج شده و پتانسیل عمل تولید می‌کند، یعنی پتانسیل غشاء، یک تغییر ناگهانی بسیار زیاد را در مقایسه با

1) Axon Hillock 2) Action Potential 3) Hyperpolarization 4) Refractory Period

محرک اولیه، تجربه می‌کند. چنین پدیده‌ای‌تحریک‌پذیری نورون نامیده می‌شود. یک توجیه متداول این است که شاید، چنین پدیده‌ای و تفاوت‌های مشاهده شده در آن، به‌دلیل جریان‌های یونی متفاوتی است که در هر الگو می‌بینیم. اگر این مطلب درست است، چرا الگوهایی وجود دارند که با وجود جریان‌های یونی متفاوت، رفتار کاملاً مشابه دارند و در مقابل، الگوهایی هستند که با جریان‌های یونی کاملاً مشابه، رفتاری کاملاً متفاوت بروز می‌دهند؟[8] توجیه متداول دیگر از تحریک‌پذیری این است که هر نورون یک آستانه دارد. اگر پس از ورود محرک، هنوز پتانسیل غشاء کمتر از مقدار آستانه باشد، نورون تأثیر قابل توجهی روی آن نمی‌گذارد و مجدداً به وضعیت استراحت باز می‌گردد. اما اگر تغییر پتانسیل ایجاد شده به‌وسیلهٔ محرک، بیشتر از آستانه باشد، این تغییر پتانسیل، توسط خود نورون تقویت و تشدید می‌شود و در نهایت یک جهش پتانسیلی برای نورون اتفاق می‌افتد که بزرگی آن قابل مقایسه با تغییر پتانسیل ایجاد شده توسط محرک نیست. اما چنین تعریفی، جامع نیست، زیرا الگوهای نورونی وجود دارند که نه تنها آستانهٔ مشخصی ندارند، بلکه پس از ورود محرک، پتانسیل غشاء فقط شروع به نوسان‌هایی با دامنهٔ کوچک می‌کند. در هر کدام از توجیه‌های فوق برخی موارد استثناء وجود دارد که نمی‌توان از این توجیه‌ها برای توصیف آن‌ها استفاده کرد. بنابراین به‌دنبال یک تعریف ریاضی هستیم تا بتوان همهٔ اتفاقات مشاهده شده در نورون را با آن تعبیر کرد.

فرض کنیم $x_{\circ}$ نقطهٔ تعادل پایدار یک سیستم دینامیکی باشد. این سیستم را تحریک‌پذیر گوئیم اگر نقطه‌ای در یک همسایگی کوچک $x_{\circ}$ یافت شود که مدار جواب با شروع از این نقطه، از همسایگی خارج شود و پس از طی یک مسیر طولانی دوباره به نقطهٔ $x_{\circ}$ بازگردد (شکل ۲.(۱)).



شکل ۲: (۱) تحریک‌پذیری، (۲) برای نقطهٔ تعادل متناظر با خاموشی نورون چه اتفاقی می‌افتد که در اثر آن نورون شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌کند؟

اما این تعریف نیز ابهام‌هایی دارد. در این تعریف، هیچ فرضی بر روی میدان برداری گذاشته

نمی‌شود و تغییرات میدان برداری نیز در این تعریف، مد نظر نیست. سؤالی که پاسخ به آن بسیار اساسی است، این است که با ورود محرک، چه اتفاقی برای سیستم می‌افتد که منجر به چنین رفتارهایی می‌شود؟ برای مثال، وقتی نورون در پاسخ به یک محرک شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌کند، ما نمی‌دانیم چه اتفاقی برای $x_\circ$ افتاده است. آیا به‌طور کلی از بین رفته است و یا فقط پایداری‌اش را از دست داده است؟(شکل ۲.(۲)) همچنین ویژگی‌های این جهش‌های پتانسیلی نیز متفاوت است و با این تعریف نمی‌توان ملاکی برای تمایز آن‌ها معرفی کرد. بنابراین تلاش می‌کنیم تا تعریف ریاضی دقیق‌تری از تحریک‌پذیری ارائه کنیم.

فرض کنید $\Phi^t(x)$ شار متناظر با سیستم $\dot{x} = f(x)$ باشد ($f \in C^1(E)$ و E زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^n$ است). دنبالهٔ $\{x = x_\circ, x_1, \ldots, x_n = x'; t_\circ, \ldots, t_n\}$ را یک ϵـ زنجیر از x به x' می‌نامیم هرگاه $|x_{i+1} - \Phi^{t_i}(x_i)| < \epsilon$ و $t_i \geq 1$ برای $i = \circ, \ldots, n-1$.

سیستم $\dot{x} = f(x)$ را که در آن $f \in C^1(E)$ (E زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^n$ است) و $x_\circ \in E$ در نظر بگیرید. در [9] ثابت شده است که اگر یک ϵـ زنجیر از $x_\circ$ به $x_\circ$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $\delta > \circ$ و تابع g موجود است به‌قسمی که $||f - g||_1 < \delta$ و سیستم $\dot{x} = g(x)$ یک مدار تناوبی گذرنده از $x_\circ$ دارد. از این مطلب برای دست یافتن به تعبیر ریاضی تحریک‌پذیری استفاده خواهیم کرد.

به یک نورون یک پالس آنی از جریان وارد می‌کنیم. اگر تغییر پتانسیل ایجاد شده توسط محرک به‌وسیلهٔ نورون تقویت شود، پتانسیل افزایش می‌یابد و در نتیجه یک پتانسیل عمل تولید می‌شود. پس از مدتی، پتانسیل کاهش می‌یابد و به مقدار V_{rest} باز می‌گردد. فرض کنید $x_\circ$ نقطهٔ متناظر با خاموشی نورون باشد. در نتیجه با ورود یک محرک خاص، توانسته‌ایم یک ϵـ زنجیر از $x_\circ$ به $x_\circ$ ایجاد کنیم. طبق گزارهٔ فوق، این سیستم نزدیک سیستمی است که یک مدار تناوبی گذرا از $x_\circ$ دارد. بنابراین، می‌توان سیستم توصیف کنندهٔ دینامیک نورون را به گونه‌ای (مثلاً با تغییر پارامترهای سیستم) تبدیل به سیستمی کرد که در آن یک مدار تناوبی وجود دارد. بنابراین سیستم، نزدیک یک انشعاب است به‌طوری که سیستم حاصل از انشعاب، یک مدار تناوبی پایدار دارد. اکنون می‌توانیم تعریف ریاضی دقیقی از تحریک‌پذیری ارائه کنیم:

تحریک‌پذیری نورون به این معناست که سیستم توصیف کنندهٔ دینامیک نورون نزدیک یک انشعاب باشد به‌طوری که در اثر آن انشعاب، سیستم جذب یک مدار تناوبی پایدار شود.

با این تعریف، ما توانسته‌ایم آنچه را که در یک نورون اتفاق می‌افتد به‌صورت ریاضی بیان کنیم. اما باید توجه داشته باشیم که لزوماً هر رفتاری که از الگوی ریاضی نورون به‌عنوان یک سیستم دینامیکی می‌بینیم، در نورون قابل تعبیر نمی‌باشد و نمی‌توان معادلی برای آن یافت.

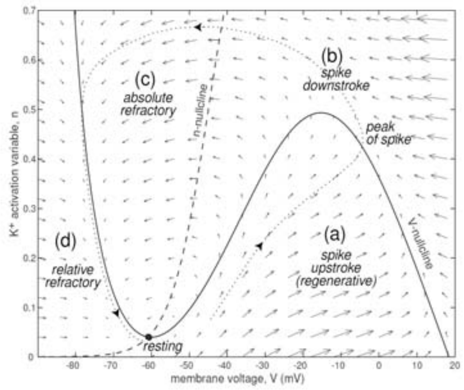
برای بررسی الگوی Hodgkin-Huxley، معمولاً بُعد الگو را به دو و سه کاهش می‌هند. برای بررسی و تحلیل دقیق‌تر رفتار نورون و خصوصیات متمایز جهش‌های پتانسیلی نیز می‌توان آن‌ها را با استفاده از نوع انشعابی که سیستم توصیف کنندهٔ دینامیک نورون نزدیک آن است، بررسی کرد.

از آن‌جا که انشعاب‌های با نقص بُعد[1] یک، انشعاب‌های عمومی‌تری هستند، ما توجه‌مان را به این گونه انشعاب‌ها معطوف می‌کنیم. از طرفی، انشعاب‌هایی را باید مورد بررسی قرار دهیم که در اثر آن‌ها یا یک مدار تناوبی پایدار ظاهر شود و یا این‌که سیستم جذب یک مدار تناوبی پایدار شود. از میان انشعاب‌های با نقص بُعد یک در صفحه، فقط چهار نوع انشعاب با این خصوصیت وجود دارند: زین ــ گره[2]، زین ــ گره روی دور ناوردا[3]، اَبَربحرانی آندرونوف ــ هوپف[4] و زیربحرانی آندرونوف ــ هوپف[5]. در ادامه، با ارائهٔ مثال‌هایی از بُعد پایین‌ترِ الگوی Hodgkin-Huxley، یعنی الگوی $I_{Na,P} + I_K$، رفتار سیستم را در حالتی که نزدیک به هر یک از این انشعاب‌ها است، بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم در الگوی Hodgkin-Huxley، کانال‌های سدیم دریچهٔ غیرفعال‌سازی ندارند و کانال‌های پتاسیم تنها یک دریچهٔ فعال‌سازی دارند. همچنین فرض کنیم متغیر فعال‌سازی m، تغییراتی بسیار سریع‌تر از متغیر n داشته باشد و $m(V) \approx m_\infty(V)$. با این فرض‌ها، مدل به‌صورت زیر در می‌آید:

$$c\dot{V} = I - I_L - g_{Na} m_\infty(V)(V - E_{Na}) - g_K n(V - E_K),$$
$$\dot{n} = (n_\infty(V) - n)/(\tau(V)).$$

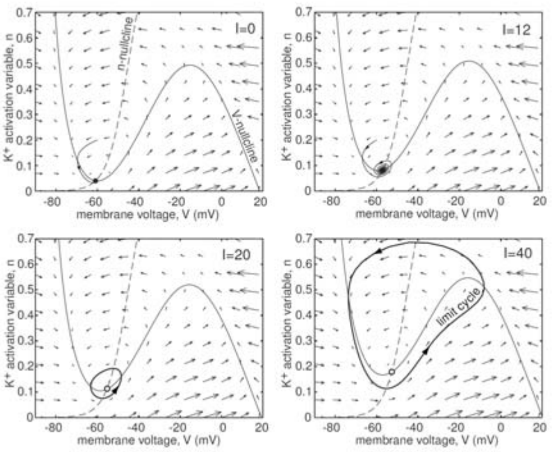
حالت اول: فرض کنیم جریان K^+، آستانهٔ پایینی داشته باشد، یعنی با یک تغییر کوچک در پتانسیل، جریان K^+ فعال می‌شود. در این حالت، شکل دو منحنی پوچی[6] سیستم فوق، به‌صورت شکل ۳ است.



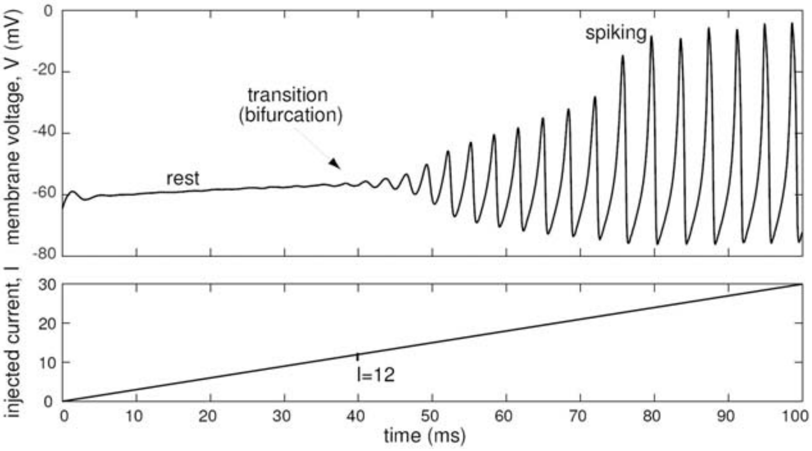
شکل ۳: مدل $I_{Na,P} + I_K$ با پارامترهای $g_K = ۱۰$، $g_{Na} = ۲۰$، $g_L = ۸$، $E_{Na} = ۶۰mV$، $E_K = -۹۰mV$، $E_L = -۷۸mV$ و $I = ۰, c = ۱$. همچنین برای $m_\infty(V)$، $k = ۱۵$ و $V_{\frac{۱}{۲}} = -۲۰$ و برای $n_\infty(V)$، $\tau(V) = ۱$، $k = ۵$ و $V_{\frac{۱}{۲}} = -۴۵$

1) Codimension 2) Saddle-node 3) Saddle-node on Invarient Circle 4) Supercritical Andronov-Hopf 5) Subcritical A-H 6) Nullcline

این سیستم، فقط یک نقطهٔ بحرانی پایدار دارد که متناظر با V_{rest} است. جهت میدان برداری مشخص می‌کند که در کدام نواحی، نورون قابلیت جهش پتانسیلی دارد. به‌عنوان مثال، اگر با ورود یک محرک وضعیت سیستم در ناحیهٔ (a) قرار گیرد، یک پتانسیل عمل برای نورون اتفاق می‌افتد. یکی از مدارهای متناظر با جهش پتانسیلی در شکل ۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که جهش‌های پتانسیلی، لزوماً بزرگی ثابتی ندارند و این سیستم می‌تواند جهش‌های پتانسیلی در اندازه‌های مختلف داشته باشد. برای Iهای کوچک، تنها نقطهٔ بحرانی سیستم، پایدار و از نوع کانون است. اما وقتی مقدار I از $I = ۱۲$ می‌گذرد، این نقطه، به‌آرامی پایداری‌اش را از دست می‌دهد و یک مدار حدی جاذب کوچک متولد می‌شود. به عبارت دیگر، سیستم در $I = ۱۲$ انشعاب ابربحرانی را تجربه می‌کند. پس از وقوع انشعاب، چون وضعیت سیستم در دامنهٔ جذب مدار تناوبی است، سیستم از حالت خاموشی خارج و جذب مدار تناوبی می‌شود و شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌کند. با افزایش I، بزرگی این مدار حدی، به‌مرور بیشتر می‌شود. در نتیجه، در ابتدا، بزرگی این جهش‌ها کم است ولی با بزرگتر شدن مدار تناوبی، بزرگی این جهش‌های پتاسیلی نیز افزایش می‌یابد. اتفاقی که برای سیستم می‌افتد، در شکل ۴ نشان داده شده است و نتیجه‌ای که در آزمایش‌ها دیده می‌شود، به‌صورت شکل ۵ است.

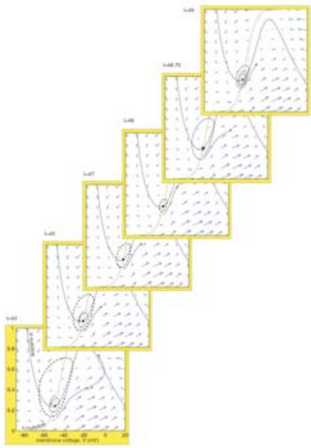


شکل ۴: در مدل $I_{Na,P} + I_K$ هنگامی که جریان K^+ آستانهٔ پایین دارد، در $I = ۱۲$ انشعاب ابربحرانی اتفاق می‌افتد.



شکل ۵: نتیجهٔ آزمایش در حالتی که جریان K^+ آستانهٔ پایین دارد و سیستم انشعاب ابربحرانی را تجربه می‌کند.

حالت دوم: در الگوی $I_{Na,P} + I_K$ پارامترها را طوری انتخاب می‌کنیم که هم سیستم دارای دو وضعیت پایدار[1] باشد و هم یک مدار حدی ناپایدار (دافع) حول نقطهٔ جاذب وجود داشته باشد.

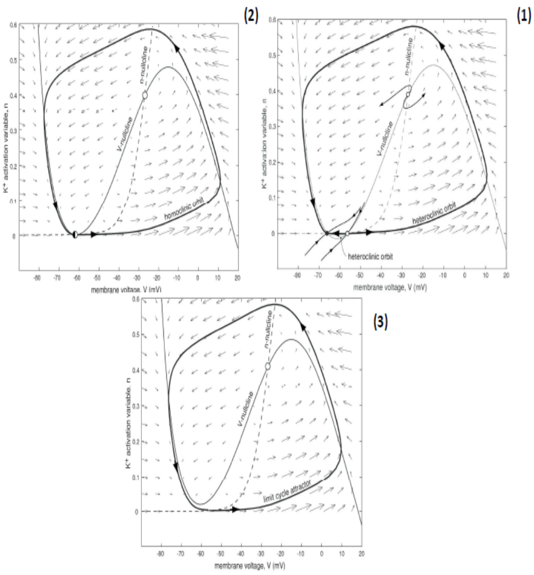


شکل ٦: انشعاب زیربحرانی در الگوی $I_{Na,P} + I_K$. با افزایش I، مدار تناوبی ناپایدار در نقطهٔ تعادل جمع می‌شود و آن را ناپایدار می‌کند. پارامترها مشابه شکل ۴ است، به‌جز $g_{Na} = g_K = ۴$ و $g_L = ۱$ و برای تابع فعال‌سازی Na^+ ($m(V)$)، $V_{\frac{1}{2}} = -۳۰$ و $K = ۷$.

1) Bistable

با افزایش I این مدار ناپایدار، کوچک و کوچکتر می‌شود تا جایی که در $I=$ ۴۸/۷۵ به‌طور کامل در نقطهٔ بحرانی جمع می‌شود و آن را ناپایدار می‌کند [8]. در واقع، در اینجا انشعاب زیربحرانی اتفاق می‌افتد و به این ترتیب، تعداد وضعیت‌های پایدار سیستم از دو تا به یکی[1] تبدیل می‌شود و تنها وضعیت پایدار آن، همان مدار حدی پایدار است. بنابراین همهٔ مدارهای جواب به سمت این مدار جذب می‌شوند. البته با توجه به جهت میدان برداری در اطراف نقطهٔ بحرانی، بزرگی جهش‌های پتانسیلی در ابتدا کم است و به‌تدریج افزایش می‌یابد و بعد از مدتی، برابر با بزرگی این مدار پایدار، خواهد شد.

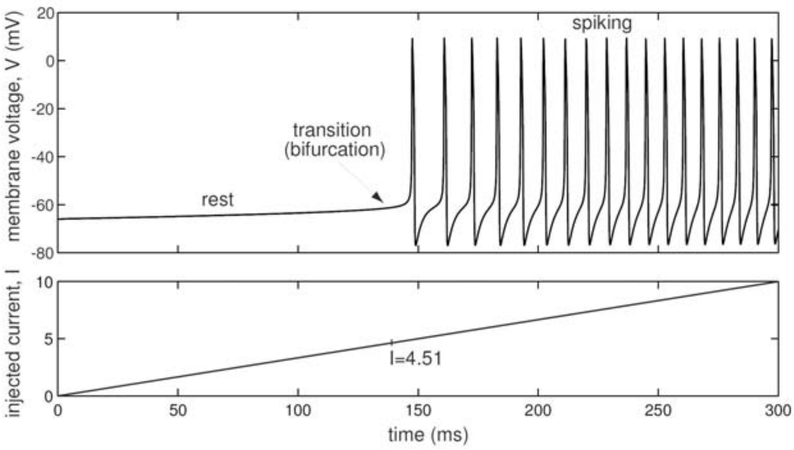
حالت سوم: حال فرض کنید در الگوی $I_{Na,P}+I_K$، جریان K^+ آستانهٔ بالا دارد، یعنی در اثر تغییر خیلی کوچک در پتانسیل غشاء، مقدار متغیر فعال‌سازی n تقریباً ثابت می‌ماند. فرض کنید به سیستم جریان پیوستهٔ I را که به‌آرامی افزایش می‌یابد، وارد می‌کنیم. برای مقادیر کوچک و بسیار نزدیک به صفر I، منحنی‌های پوچی V و n سه محل تقاطع دارند که یکی از آن‌ها پایدار و متناظر با حالت استراحت است و دو تای دیگر زینی و دافع هستند (شکل ۷.(۱)).



شکل ۷: (۱) رفتار الگوی $I_{Na,P}+I_K$ در حالتی که I_K آستانهٔ بالا دارد و جریان ورودی I کوچک است. پارامترها مشابه شکل ۴ هستند به‌جز $E_L=-۸۰mV$ و برای $n_\infty(V)$، $V_{\frac{1}{2}}=-۲۵$. (۲) رفتار مدل برای $I=۴/۵$. (۳) هنگامی که جریان ورودی از $I=۴/۵۱$ می‌گذرد، انشعاب SNIC در سیستم اتفاق می‌افتد و یک مدار تناوبی ظاهر می‌شود.

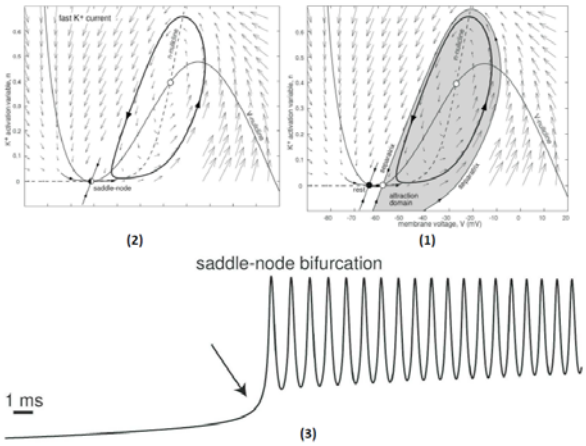
1) Monostable

هرقدر I افزایش یابد، شکل $n_\infty(V)$ تغییر نمی‌کند، اما منحنی پوچی V به اندازهٔ I به سمت بالا تغییر مکان می‌دهد. در نتیجه، دو نقطهٔ زینی و جاذب (دو نقطه بحرانی سمت چپ) به هم نزدیک‌تر می‌شوند، تا جایی که برای $I = ۴/۵۱$ تبدیل به یک نقطهٔ زین ـ گره می‌شوند که از یک سمت جاذب و از سمت دیگر دافع است و در نتیجه مدار هتروکلینیک شکل ۷.(۱) تبدیل به مدار هموکلینیک شکل ۷.(۲) خواهد شد. این مدار هموکلینیک را می‌توان به‌عنوان یک مدار حدی تناوبی با دورهٔ تناوب بینهایت در نظر گرفت و در واقع، این مدار متناظر با یک جهش پتانسیلی است. اما برای $I > ۴/۵۱$، نقطهٔ زین ـ گره به‌طور کامل از بین می‌رود و مدار هموکلینیک، تبدیل به یک مدار حدی تناوبی می‌شود و سیستم در $I = ۴/۵۱$ انشعاب SNIC را تجربه می‌کند [8] (شکل ۷.(۳)). به این ترتیب نورون از خاموشی درمی‌آید و شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌کند. با توجه به جهت میدان برداری، بزرگی و دورهٔ تناوب این جهش‌ها ثابت و برابر با بزرگی و دورهٔ تناوب مدار حدی تناوبی است.



شکل ۸: رفتار مشاهده شده از الگوی $I_{Na,P} + I_K$ به‌ازای مقادیر مختلف I. پارامترها همانند شکل ۷ هستند.

حالت چهارم: فرض کنید الگوی $I_{Na,P} + I_K$ جریان سریع و با آستانهٔ بالای K^+ داشته باشد، یعنی ثابت زمانی جریان K^+ بسیار کوچک باشد. فرض کنیم $\tau(V) = ۰/۱۵۲$. در این حالت، رفتار جواب‌های این الگو به‌صورت شکل ۹.(۱) است.



شکل ۹: (۱) رفتار الگوی $I_{Na,P} + I_K$ در حالتی که جریان K^+ سریع و با آستانهٔ بالا باشد. $\tau(V) =$ ۰/۱۵۲ و $I =$ ۳. (۲) با افزایش I انشعاب زین ـ گره در سیستم اتفاق می‌افتد. (۳) وقتی در سیستم انشعاب زین ـ گره اتفاق می‌افتد، فرکانس و بزرگی جهش‌ها تقریباً ثابت است.

با افزایش I، دو نقطهٔ بحرانی سمت چپ به هم نزدیک‌تر می‌شوند و برای مقداری از I تبدیل به یک نقطهٔ زین ـ گره می‌شود. رفتار جواب‌ها در این مقدار I به‌صورت شکل ۹.(۲) است. بعد از گذشتن I از این مقدار، نقطهٔ تعادل نیز از بین می‌رود و سیستم فقط یک مدار حدی تناوبی جاذب خواهد داشت. بنابراین سیستم از وضعیت خاموشی خارج می‌شود و شروع به جهش‌های پتانسیلی می‌کند [8]. البته، به‌دلیل این‌که میدان برداری، حتی مدتی بعد از از بین رفتن نقطهٔ بحرانی، کوچک و نزدیک به صفر است، اولین جهش پتانسیلی با کمی تأخیر اتفاق می‌افتد ولی بزرگی این جهش‌ها و فرکانس آن‌ها تقریباً ثابت است (شکل ۹.(۳)).

تفاوت در سرعت تغییرات n، در ابتدا تأثیری روی رفتار سیستم نمی‌گذارد، زیرا آستانهٔ جریان K^+ بالاست. در نتیجه یک محرک ورودی مناسب، باعث فعال شدن جریان Na^+ و در نتیجه افزایش پتانسیل غشاء می‌شود و در نهایت، پتانسیل عمل تولید می‌شود. اگر تغییرات n سریع باشد، جریان K^+ به‌سرعت فعال و باعث کاهش پتانسیل غشاء می‌شود. اما این جریان، به همان سرعتی که فعال می‌شود، با کاهش پتانسیل، به همان سرعت نیز غیرفعال خواهد شد. این ویژگی، باعث می‌شود قبل از این‌که نورون به V_{rest} بازگردد، جریان K^+ قطع شده و جریان جزئی I_{Na^+} ($۰ < m < ۱$) مجدداً پتانسیل غشاء را بالا ببرد و منجر به تولید یک پتانسیل عمل دیگر شود.

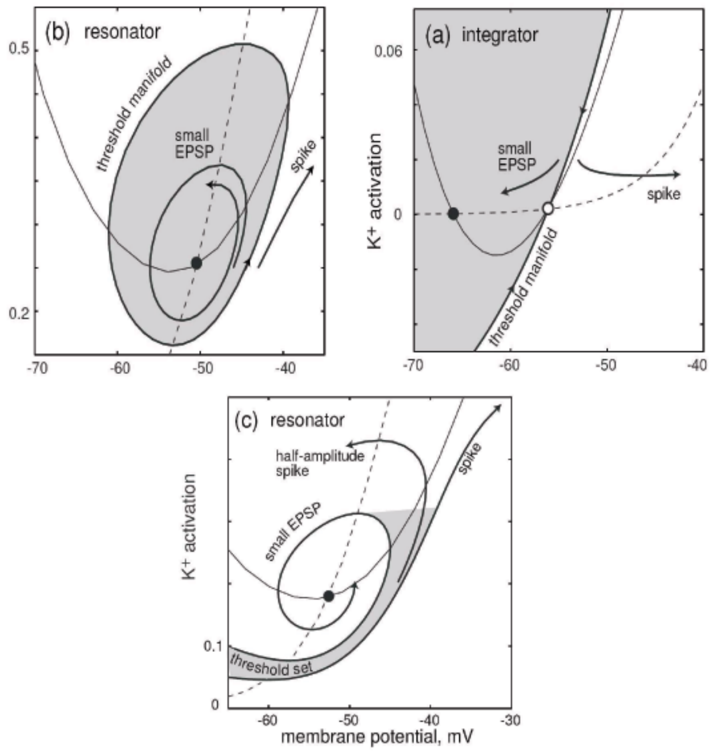
۳. آستانه

اگر پالس‌هایی به سیستم وارد کنیم به‌طوری که در اثر آن، پتانسیل غشاء از یک مقدار ثابت (مثلاً V^*) بزرگتر شود، یک جهش پتانسیلی بزرگ که به آن پتانسیل عمل اطلاق می‌شود برای نورون اتفاق می‌افتد، اما اگر پس از ورود محرک همچنان پتانسیل کمتر از V^* باشد، این تغییر پتانسیل توسط نورون تقویت نمی‌شود و سیستم احتمالاً یک جهش پتانسیلی بسیار کوچک را تجربه می‌کند و مجدداً پتانسیل غشاء به V_{rest} بازمی‌گردد. به V^*، آستانه[1] گفته می‌شود.

برای پیدا کردن مقدار آستانه، V^*، به نورون پالس‌هایی از جریان و با بزرگی‌های مختلف وارد می‌کنیم و بزرگی جهش پتانسیلی اتفاق افتاده را اندازه می‌گیریم. مقدار آستانه برابر است با حداکثر پتانسیلی که اگر پتانسیل غشاء از آن بیشتر نشود جهش‌های پتانسیلی کوچک (و نه پتانسیل عمل) تولید می‌شود. اما منظور از پتانسیل عمل در این تعریف چیست؟ به عبارت دیگر، بزرگی یک جهش پتانسیلی باید چه مقدار باشد تا به آن پتانسیل عمل گفته شود؟ البته این تعریف اشکال‌های دیگری نیز دارد. مثلاً اگر هر جهش پتانسیلی که حداقل $۲۰mv$ از V_{rest} بیشتر است را پتانسیل عمل بنامیم، هنوز هم یافتن مقدار آستانه با این تعریف کار سختی است. واقعیت این است که مقدار آستانه در هر لحظه بستگی به رفتار قبلی نورون دارد. مثلاً اگر نورون به‌تازگی پتانسیل عمل تولید کرده باشد و در دورهٔ بازآرایی باشد، حتی پالس‌های جریان بسیار بزرگ هم نمی‌توانند نورون را وادار به جهش پتانسیلی کنند. در مقابل، ممکن است پس از تولید پتانسیل عمل توسط نورون، پتانسیل غشاء حتی از V_{rest} نیز پایین‌تر رفته باشد و این مسأله می‌تواند منجر به تولید یک پتانسیل عمل دیگر شود بدون این‌که پالس دیگری از جریان به آن وارد شود. حتی گاهی اوقات اگر با یک پالس جریان آنی، پتانسیل غشاء را از V_{rest} نیز پایین‌تر بیاوریم، نورون یک پتانسیل عمل تولید می‌کند. می‌بینیم که در هر یک از این حالات، این تعریفِ آستانه هیچ کاربردی ندارد. بنابراین این تعریف، چندان به‌دردخور نیست.

اولین بار، فیتزهیو[2] در سال ۱۹۵۵ [4]، با استفاده از آنالیز هندسی الگوهای نورونی مشخص کرد که آستانه اگر وجود داشته باشد، یک نقطه نیست بلکه یک خمینه است. در اینجا سعی می‌کنیم با استفاده از الگوی $I_{Na,P} + I_K$، تعریف وی را از آستانه شرح دهیم. فرض کنیم در این الگو، پارامترها به گونه‌ای انتخاب شده باشند که سیستم بتواند انشعاب زین ــ گره یا SNIC را تجربه کند [8] (شکل ۱۰.(a)).

1) Threshold 2) FitzHugh



شکل ۱۰: خمینهٔ آستانه در الگوی $I_{Na,p} + I_K$. (a) پارامترها مشابه شکل ۷ هستند. (b) پارامترها مشابه شکل ۷ هستند و $I = ۴۵$. (c) مجموعهٔ آستانه در حالتی که پارامترها مشابه شکل ۳ است و $I = ۱۰$.

در این حالت، سیستم حتماً یک نقطهٔ زینی دارد و خمینهٔ پایدار این نقطه که از دو مدار تشکیل شده است، همان خمینهٔ آستانه است. اگر به این سیستم پالسی از جریان وارد کنیم به‌طوری که وضعیت اولیهٔ آن همچنان در ناحیهٔ هاشورخورده باقی بماند، یک جهش پتانسیلی کوچک برای سیستم اتفاق می‌افتد و سیستم دوباره به وضعیت استراحت و خاموشی‌اش بازمی‌گردد. اما اگر پس از ورود محرک (پالس)، وضعیت اولیهٔ سیستم در ناحیهٔ سفید قرار گیرد، آن‌گاه با توجه به میدان برداری در این حالت، سیستم یک پتانسیل عمل تولید می‌کند. البته هرقدر این محرک بزرگتر و قوی‌تر باشد، بزرگی پتانسیل عمل تغییر نمی‌کند فقط دورهٔ تناوب این جهش پتانسیلی کمتر می‌شود.

حال اگر در اثر ورود محرک، وضعیت اولیهٔ سیستم روی خمینهٔ پایدار نقطهٔ زینی قرار گیرد، آن‌گاه دست‌کم از دیدگاه نظری، سیستم به سمت نقطهٔ زینی جذب می‌شود. اما در عمل، به‌دلیل وجود نوفه و ناپایداری نقطهٔ زینی، وضعیت سیستم یا در ناحیهٔ هاشورخورده قرار می‌گیرد و به V_{rest}

میل می‌کند که در این حالت فقط دورهٔ تناوب جهش پتانسیلی طولانی‌تر می‌شود و یا این‌که در ناحیهٔ سفید قرار می‌گیرد که منجر به تولید یک پتانسیل عمل با دورهٔ تناوب زیاد می‌شود.

حال در الگوی $I_{Na,P}+I_K$، پارامترها را طوری انتخاب کنید که امکان وقوع انشعاب زیربحرانی برای سیستم وجود داشته باشد. در این صورت سیستم یک نقطهٔ جاذب (کانون) متناظر با V_{rest} و یک مدار حدی تناوبی جاذب متناظر با جهش‌های پتانسیلی دارد. یک مدار حدی تناوبی ناپایدار نیز این نقطهٔ جاذب را احاطه کرده است و خودش درون مدار حدی جاذب قرار دارد [8] (شکل ۱۰.(b)). در این حالت، خمینهٔ آستانه، همین مدار حدی ناپایدار است. اگر پس از ورود محرک، هنوز وضعیت سیستم درون این مدار تناوبی ناپایدار باشد، با توجه به این‌که نقطهٔ جاذب، کانون است، سیستم شروع به جهش‌های پتانسیلی می‌کند. رفته رفته بزرگی این جهش‌ها کم می‌شود و در نهایت به صفر می‌رسد. اما اگر محرک، وضعیت اولیهٔ سیستم را خارج از این مدار ناپایدار قرار دهد، این بار مدار جواب، جذب مدار حدی پایدار می‌شود و در نتیجه جهش‌های پتانسیلی برای سیستم اتفاق می‌افتد که بزرگی آن‌ها، نهایتاً به یک مقدار ثابت که همان بزرگی مدار پایدار است، میل می‌کند.

اما در حالتی که سیستم می‌تواند انشعاب ابربحرانی را تجربه کند، فقط یک نقطهٔ جاذب (کانون) برای سیستم وجود دارد [8] (شکل ۱۰.(c)). الگوهایی که نزدیک به انشعاب ابربحرانی هستند، آستانهٔ خوش‌تعریف ندارند. به‌عنوان مثال در الگوی $I_{Na,P}+I_K$ که نزدیک به این نوع انشعاب است، اگر پتانسیل غشاء را به‌طور جزئی بالا ببریم، با جهش‌های پتانسیلی میرا سیستم دوباره به وضعیت استراحت، V_{rest}، بازمی‌گردد. اگر به‌وسیلهٔ یک محرک بسیار قوی، پتانسیل غشاء را از V_{rest} دور کنیم، سیستم پتانسیل عمل تولید می‌کند. مجموعهٔ نقاطی که مدار جوابِ شروع‌شده از آن‌ها، متناظر با یک جهش پتانسیلی از اندازهٔ متوسط (اندازه‌ای بین جهش‌های پتانسیلی میرا و پتانسیل عمل) باشد،مجموعهٔ آستانه نامیده می‌شود [4]. منطقهٔ هاشور خورده در شکل ۱۰.(c)، مجموعهٔ آستانه است.

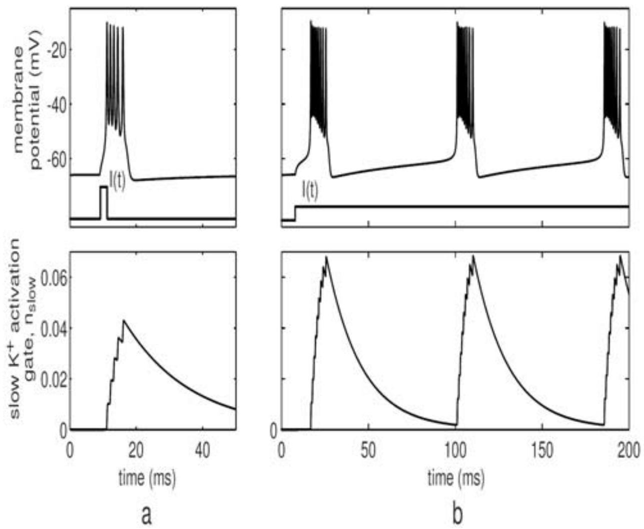
۴. شکفتن

گفتیم که از دیدگاه سیستم‌های دینامیکی، یک نورون می‌تواند پتانسیل عمل تولید کند اگر سیستم توصیف کنندهٔ دینامیک آن، نزدیک یک دسته انشعاب باشد. همچنین این که در پاسخ به بعضی محرک‌ها، نورون از حالت خاموشی درمی‌آید و شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌کند، به این دلیل است که یک انشعاب روی نقطهٔ متناظر با خاموشی نورون، اتفاق افتاده و در اثر آن یا این نقطه ناپایدار شده و یا به‌کلی از بین رفته و در نهایت سیستم جذب یک مدار حدی جاذب شده است. پدیدهٔ دیگری نیز از جهش‌های پتانسیلی در نورون‌ها دیده می‌شود که در آن، نورون از حالت خاموشی درمی‌آید و چند جهش پتانسیلی برای آن اتفاق می‌افتد و دوباره خاموش می‌شود. به این پدیده، شکفتن[1] می‌گویند.

1) Bursting

بنابراین شکفتن شامل تعداد متناهی (حداقل دوتا) جهش پتانسیلی و یک دورهٔ خاموشی است. همچنین در بعضی از آزمایش‌ها این پدیده به‌طور متناوب تکرار می‌شود. به‌طور کلی در مورد شکفتن باید دو اتفاق را توجیه کنیم: ۱ — این‌که چرا نورون از خاموشی درآمده و جهش پتانسیلی برای آن اتفاق می‌افتد. ۲— این‌که چرا جهش‌ها متوقف می‌شوند و نورون مجدداً خاموش می‌شود. درآمدن نورون از خاموشی و شروع به جهش‌های پتانسیلی متناوب، معادل با وقوع یک انشعاب است که در اثر آن، سیستم جذب مدار تناوبی می‌شود. اما دانستن پاسخ پرسش دوم در ساختن مدل شکفتن نقش مهم‌تری ایفا می‌کند. زیرا اساساً آنچه در شکفتن عجیب به‌نظر می‌رسد، توقف جهش‌های پتانسیلی است.

در حالتی که پس از ورود یک جریان آنی، پدیدهٔ شکفتن اتفاق می‌افتد، حداقل یکی از این دو تغییر وضعیت را در سیستم‌های دو بعدی و با آنچه تا به حال گفتیم، نمی‌توان توجیه کرد. برای مثال، الگوی $I_{Na,P}+I_K$ را در حالتی که K^+، آستانهٔ بالا دارد، در نظر بگیرید و پارامترها را طوری انتخاب کنید که سیستم دو وضعیت پایدار داشته باشد (شکل ۹.(۱)). اگر یک پالس آنی به سیستم وارد کنیم به‌طوری که وضعیت سیستم در دامنهٔ جذب مدار حدی قرار گیرد، سیستم از حالت خاموشی درمی‌آید و جهش‌های پتانسیلی متناوب برای آن اتفاق می‌افتد. اگر هیچ عامل دیگری وارد سیستم نشود، این جهش‌ها هیچ‌گاه متوقف نخواهد شد. برای این‌که بتوانیم در این الگو، شکفتن ایجاد کنیم، باید توسط عاملی وضعیت سیستم را مجدداً در دامنهٔ جذب نقطهٔ جاذب قرار دهیم و به این وسیله، نورون را خاموش کنیم. البته این عامل باید به‌کندی فعال شود به‌طوری که در ابتدا خللی در تولید جهش‌های پتانسیلی ایجاد نکند و بعد از چند جهش، به‌طور کامل فعال شود و جهش‌های پتانسیلی را متوقف کند. به همین دلیل، جریان $I_{K(M)}$ را به الگو اضافه می‌کنیم. این جریان، جریان یونی K^+ است که بسیار کندتر از دو جریان دیگر الگو، تغییر می‌کند و آستانهٔ بالایی دارد. وقتی نورون خاموش است، این جریان فعال نیست. در طول مدت افزایش پتانسیل در هر یک از این جهش‌ها، جریان $I_{K(M)}$ به‌آهستگی فعال می‌شود. پس از اولین جهش، این جریان آنقدر فعال نشده است که بتواند جلوی افزایش مجدد پتانسیل توسط I_{Na} را بگیرد. اما بعد از چند جهش پتانسیلی، این جریان به‌طور کامل فعال می‌شود و مانع افزایش مجدد پتانسیل غشاء و یک جهش پتانسیلی دیگر می‌شود و در نتیجه، نورون دوباره خاموش می‌شود [8].



شکل ۱۱: پدیدهٔ شکفتن در الگوی $I_{Na,p} + I_K + I_{K(M)}$. این الگو، از الگوی $I_{Na,p} + I_K$ با پارامترهای شکل ۱۲ و یک جریان K^+ سریع ($g_K = ۹$ و $\tau(V) = ۰/۱۵۲$) و یک جریان K^+ آرام و کند با $g_{slow} = ۵$، $V_{\frac{۱}{۲}} = -۲۰mv$، $k = ۵mv$ و $\tau_{slow}(V) = ۲۰ms$ تشکیل شده است. (a) پدیدهٔ شکفتن هنگامی که $I = ۰$. (b) پدیدهٔ تناوبی شکفتن هنگامی که $I = ۵$.

از دیدگاه عصب‌شناسی، شکفتن حاصل تعامل بین دو نوع جریان است: جریان‌های نسبتاً سریعی که جهش‌های پتانسیلی تولید می‌کنند و جریان‌های بسیار کندی که بعد از چند جهش پتانسیلی به‌طور کامل فعال یا غیرفعال می‌شوند و جهش‌ها را متوقف می‌کنند. در مثالی که بیان شد، I_{Na} و I_K جهش‌های پتانسیلی را تولید می‌کنند و $I_{K(M)}$ جریان کندی است که به‌آهستگی فعال می‌شود و جهش‌ها را متوقف می‌کند. بنابراین در سیستم‌هایی که قابلیت شکفتن دارند، دو فرآیند با واحدهای زمانی متفاوت وجود دارد. یکی از این فرآیندها سریع است و منجر به جهش‌های پتانسیلی متناوب می‌شود و دیگری بسیار کند است و این جهش‌ها را متوقف می‌کند. بنابراین می‌توان هر سیستم با این قابلیت را به‌صورت زیر الگوسازی کرد:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ \dot{u} = \mu g(x,u) \end{cases} \qquad (۸)$$

که در آن معادلهٔ اول (زیرسیستم سریع)، فرآیند سریع و معادلهٔ دوم (زیرسیستم کند)، فرآیند کند را توصیف می‌کنند. همچنین $x \in \mathbb{R}^m$، متغیرهای فرآیند سریع را نشان می‌دهد و می‌تواند شامل V،

متغیر فعال‌سازی و غیرفعال‌سازیِ جریان‌های سریع و ...، باشد. $u \in \mathbb{R}^k$ نیز متغیرهای کندتر را نشان می‌دهد که در واقع x را کنترل می‌کنند. همچنین مقدار پارامتر μ، نسبت واحدهای زمانی این دو فرآیند به همدیگر را نشان می‌دهد. μ باید آنقدر کوچک باشد که تداخلی در نوسان‌های پتانسیلی (دست‌کم در ابتدای کار) ایجاد نکند. معمولاً فرض می‌شود $\mu < ۰/۱$. برای سیستم‌های سریع ـ کند[1] در بُعدهای بالا، نشان‌دادن مدار جواب سیستم و بررسی سیستم به‌صورت مستقیم کار مشکلی است. بنابراین ما در این‌جا از روشی که رینزل[2] برای اولین بار برای بررسی شکفتن مورد استفاده قرار داده است [10]، استفاده می‌کنیم.

نحوهٔ تحلیل شکفتن در طول بحث، به این صورت است: ابتدا قرار می‌دهیم $\mu = ۰$. چون تغییرات u در این حالت صفر است، مقدار u ثابت می‌ماند $(u = c)$ و می‌توان آن را به‌عنوان پارامتر برای زیر سیستم سریع، $\dot{x} = f(x,u)$ در نظر گرفت. از طرفی، بر اساس مقدار u، سیستم $\dot{x} = f(x, u = c)$ می‌تواند در حالت استراحت یا جهش‌های پتانسیلی متناوب باشد. در هر شکفتن، با تغییر مقدار u وضعیت سیستم $\dot{x} = f(x, u = c)$ بین دو وضعیت خاموشی و جهش‌های پتانسیلی متناوب تغییر می‌کند. بنابراین برای $\mu \neq ۰$، بررسی می‌کنیم که چگونه تغییرات u، وضعیت سیستم را بین دو حالت خاموشی و نوسان‌های پتانسیلی جابه‌جا می‌کند.

حقیقت این است که اگر رفتار سیستم را برای $\mu \neq ۰$ بررسی کنیم و یک مدار جواب آن را تعیین کنیم، سپس با صفحه‌های $u = c$ (c ثابت است) مدار جواب راقطع دهیم، آنچه در هر صفحه می‌بینیم با رفتار سیستم $\dot{x} = f(x,c)$ متفاوت است، زیرا در هر لحظه مقدار u در حال تغییر است: برای مثال در شکل ۱۲، مدار جواب سیستم $I_{Na,P} + I_K + I_{K(M)}$ را با صفحات $n_{slow} = const.$ قطع داده‌ایم اما آنچه به‌دست آمده با آنچه در شکل ۱۳ می‌بینیم متفاوت است (در این شکل رفتار سیستم $I_{Na,P} + I_K$ به ازای مقادیر $n_{slow} = const.$ نشان داده شده است). اما برخی از ویژگی‌های شکفتن، مثل دورهٔ تناوب و بسامد و بزرگی جهش‌های پتانسیلی و نوع انشعاب‌هایی را که بر روی زیرسیستم سریع اتفاق می‌افتد و منجر به تغییر وضعیت نورون در طول شکفتن می‌شود، به‌راحتی با بررسی $\dot{x} = f(x, u = c)$ به‌ازای مقادیر مختلف c می‌توان تعیین کرد.

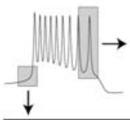
در پدیدهٔ شکفتن، رفتار زیرسیستم سریع، $\dot{x} = f(x,u)$، در دو مرحله کاملاً تغییر می‌کند. بنابراین در این دو مرحله، انشعاب رخ می‌دهد: ۱− تغییر وضعیت نورون از حالت خاموشی به حالت جهش‌های پتانسیلی متناوب که متناظر با این است که انشعاب، در نقطهٔ تعادل جاذب متناظر با حالت خاموشی، رخ داده است و سیستم جذب یک مدار تناوبی پایدار شده است. ۲− تغییر وضعیت نورون از نوسان‌های پتانسیلی به حالت خاموشی که متناظر با وقوع انشعاب روی مدار حدی تناوبی است و در اثر آن، سیستم جذب یک نقطهٔ بحرانی پایدار می‌شود[3]. بنابراین با تغییرات متغیر کند u،

1) Fast-Slow System 2) Rinzel

۳) البته گاهی اوقات، حالت خاموشی متناظر با یک مدار حدی جاذب است [7] ولی ما در این بحث، آن‌ها را مطرح نمی‌کنیم.

زیرسیستم سریع، $\dot{x} = f(x, u)$، هم انشعاب روی مدار حدی و هم انشعاب روی نقطهٔ بحرانی را تجربه می‌کند. این دو نوع انشعاب، نقش مهمی در توصیف ویژگی‌های شکفتن دارد و در واقع بر اساس نوع انشعاب‌ها می‌توان انواع شکفتن را طبقه‌بندی کرد. آیژیکویچ[۱] بر این اساس، طبقه‌بندی کاملی را برای انواع شکفتن انجام داده است و ۱۲۰ نوع توپولوژیکیِ متفاوت از پدیدهٔ شکفتن ارائه کرده است [7].

می‌دانیم که فقط چهار انشعاب با نقص بُعد یک وجود دارد که روی یک نقطه در صفحه اتفاق می‌افتند و سیستم در اثر آن، جذب یک مدار حدی تناوبی جاذب می‌شود. همچنین چهار انشعاب با نقص بُعد یک وجود دارد که روی یک مدار تناوبی در صفحه اتفاق می‌افتند و آن را از بین می‌برند. اگر سیستم‌هایی را در نظر بگیریم که در آن $x \in \mathbb{R}^2$ (متغیر سریع) و تنها در مورد انشعاب‌های با نقص بُعد یک صحبت کنیم، آن‌گاه ۱۶ نوع شکفتن با خصوصیات احتمالاً متفاوت می‌تواند وجود داشته باشد. جدول زیر، این ۱۶ نوع انشعاب را نشان می‌دهد.



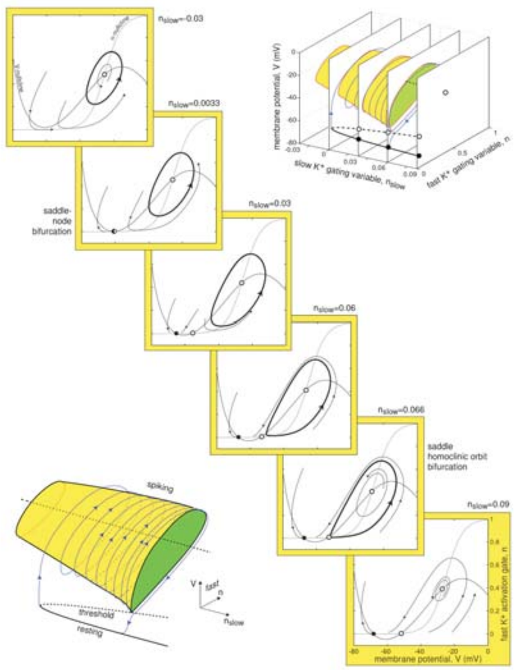
bifurcations of equilibria \ bifurcations of limit cycles	saddle-node on invariant **circle**	saddle **homoclinic** orbit	supercritical Andronov-**Hopf**	**fold** limit **cycle**
saddle-node **(fold)**	fold/ circle	fold/ homoclinic	fold/ Hopf	fold/ fold cycle
saddle-node on invariant **circle**	circle/ circle	circle/ homoclinic	circle/ Hopf	circle/ fold cycle
supercritical Andronov-**Hopf**	Hopf/ circle	Hopf/ homoclinic	Hopf/ Hopf	Hopf/ fold cycle
subcritical Andronov-**Hopf**	subHopf/ circle	subHopf/ homoclinic	subHopf/ Hopf	subHopf/ fold cycle

جدول ۱: تقسیم‌بندی پدیدهٔ شکفتن از نوع سریع ـ کند در صفحه. این تقسیم‌بندی بر اساس نوع انشعاب اتفاق افتاده روی نقطهٔ جاذب سیستم سریع در ابتدا و نوع انشعاب اتفاق افتاده روی یک مدار حدی جاذب در انتهای پدیدهٔ شکفتن، صورت گرفته است.

برای مثال در شکفتن از نوع "Fold/Homoclinic"، نقطهٔ تعادل متناظر با حالت خاموشی نورون،

1) Izhikevich

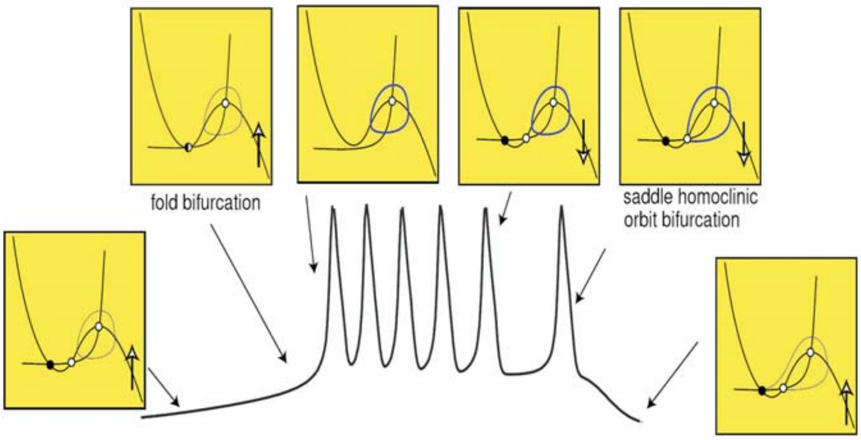
به‌وسیلهٔ انشعاب زین ـ گره از بین می‌رود و مدار حدی تناوبی نیز به‌وسیلهٔ انشعاب مدار هموکلینیک ناپدید می‌شود. این نوع از شکفتن برای اولین بار در سلول‌های بتا در پانکراس مشاهده شده است و در آن متغیر کند، میزان تجمع یون‌های کلسیم در داخل سلول است [8]. برای بررسی بیشتر، الگوی $I_{Na,P}+I_K+I_{K(M)}$ را در نظر بگیرید. در این‌جا متغیر n_{slow}، متناظر با متغیر u سیستم (۱) است. قرار دهید $\mu = ۰$ ($\tau_{slow}=+\infty$). در این صورت سیستم $\dot{x}=f(x,n_{slow})$ دو بعدی است و n_{slow} نیز در آن ثابت است و می‌توان آن را به‌عنوان پارامتر در نظر گرفت. شکل ۱۲ رفتار سیستم را به‌ازای مقادیر مختلف n_{slow} نشان می‌دهد.



شکل ۱۲: مدار متناظر باشکفتن در الگوی $I_{Na,p}+I_K+I_{K(M)}$ در فضای سه بعدی (شکل پایین). در هر یک از اسلایدهای دو بعدی، داریم $n_{slow}=const$.

همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، با گذشتن از مقدار $n = ۰/۰۶۶$، انشعاب مدار هموکلینیک در سیستم رخ می‌دهد و مدار تناوبی از بین می‌رود و سیستم جذب نقطهٔ تعادل جاذب شده و خاموش می‌شود. همچنین در $n = ۰/۰۰۳۳$ انشعاب زین ـ گره روی نقطهٔ متناظر با حالت خاموشی نورون اتفاق می‌افتد و در نتیجه، این نقطه کاملاً از بین می‌رود و سیستم جذب مدار تناوبی می‌شود. اکنون قرار دهید $\mu > ۰$ ($\tau_{slow}(V) = ۲۰ms$). فرض کنید سیستم در حالت خاموشی باشد که متناظر با یک نقطهٔ جاذب است. در این حالت n_{slow} به‌کندی کاهش می‌یابد و سبب می‌شود که منحنی

پوچی V به‌آرامی به سمت بالا تغییر مکان دهد، اما هنوز نقطهٔ جاذب وجود دارد و بنابراین نورون خاموش است. بعد از مدتی، جریان $K(M)$ آنقدر کوچک می‌شود که دیگر نمی‌تواند پتانسیل غشاء را در V_{rest} نگه‌دارد. این اتفاق در $n_{slow} = ۰/۰۰۳۳$ برای سیستم می‌افتد و دو نقطهٔ جاذب و زینی تبدیل به یک نقطه می‌شوند و انشعاب زین ــ گره رخ می‌دهد و این نقطه به‌کلی از بین می‌رود. چون دیگر نقطهٔ جاذب وجود ندارد، سیستم جذب مدار حدی تناوبی می‌شود. به این ترتیب، سیستم از حالت خاموشی درمی‌آید و جهش‌های پتانسیلی متناوب برای آن اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر در طول این جهش‌ها، دوباره n_{slow} به‌آرامی افزایش می‌یابد و منحنی پوچی V به‌آرامی به سمت پایین جابه‌جا می‌شود تا جایی که در $n_{slow} = ۰/۰٦٦$، انشعاب مدار هموکلینیک روی این مدار تناوبی اتفاق می‌افتد و این مدار به‌کلی از بین می‌رود و در نتیجه، سیستم جذب نقطهٔ جاذب متناظر با حالت خاموشی می‌شود.

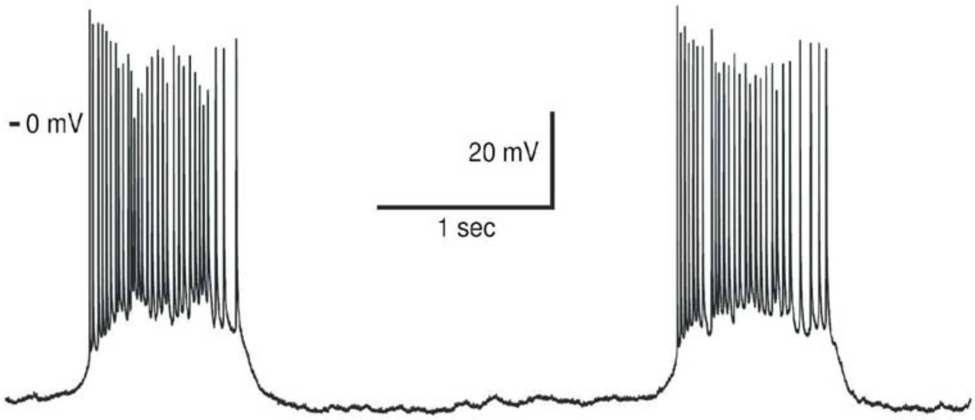


شکل ۱۳: شکفتن از نوع "Fold/Homoclinic". نقطهٔ متناظر با وضعیت استراحت به‌وسیلهٔ انشعاب زین ــ گره از بین می‌رود و مدار حدی متناظر با جهش‌های پتانسیلی متناوب نیز از طریق انشعاب مدار هموکلینیک از بین می‌رود.

در این حالت سیستم می‌تواند مجدداً شکفتن را تجربه کند. توجه کنید که چون سیستم $I_{Na,P} + I_K$ دو وضعیت پایدار دارد و نزدیک انشعاب زین ــ گره است، با تغییرات یک متغیر یعنی n_{slow} (هرچند این تغییرات کوچک است)، می‌تواند از یک وضعیت درآید و جذب وضعیت پایدار دیگر شود.

در این نوع شکفتن، پتانسیل ابتدا با دورهٔ تناوب ثابت، شروع به نوسان می‌کند و کم کم به‌دلیل این‌که مدار تناوبی نزدیک به یک نقطهٔ زینی می‌شود، دورهٔ تناوب زیاد می‌شود تا جایی که در لحظهٔ

وقوع انشعاب، دورهٔ تناوب مدار هموکلینیک بینهایت می‌شود و این نوسان‌ها نیز متوقف می‌شوند.



شکل ۱۴: شکفتن از نوع "Fold/Homoclinic" در سلول‌های عصبی موش صحرایی.

با تقسیم‌بندی پدیدهٔ شکفتن بر اساس نوع انشعاب‌های اتفاق افتاده در آن، می‌توان بسیاری از ویژگی‌های متمایزکنندهٔ آن را مثل تغییر در دورهٔ تناوب و بزرگی جهش‌ها در طول شکفتن شناخت. همچنین می‌توان فهمید که نورون چه می‌تواند بکند و چه نمی‌تواند بکند. مثلاً این‌که نورون می‌تواند جهش‌های پتانسیلی به‌دلخواه کوچک داشته باشد و یا این که نورون می‌تواند به پالس‌های مهاری واکنش دهد، به نوع انشعابی که سیستم توصیف کنندهٔ نورون نزدیک آن است، وابسته است. اما در این نوع تقسیم‌بندی با مشکلاتی نیز مواجه هستیم. از جمله: ۱ــ تقسیم‌بندی که ارائه کردیم برای الگوهای ریاضی بود و نه نورون‌های واقعی. بنابراین در برخورد با نورون‌ها، ابتدا باید الگوی دینامیکی آن‌ها را مشخص کنیم و سپس نوع شکفتن را در آن تعیین کنیم. ۲ــ تعمیم این تقسیم‌بندی برای همهٔ نورون‌ها امکان‌پذیر نیست، زیرا همهٔ نورون‌ها را نمی‌توان به‌صورت سیستم سریع ـ کند که در آن $\mu < ۰/۱$ الگوسازی کرد. به‌عنوان مثال، شکفتن در سلول‌های عصبی نوعی ماهی، به‌صورت یک سیستم سریع ـ کند الگوسازی می‌شود که در آن $\mu < ۰/۱$ [3]. البته اگر بتوان نورون را به‌صورت سیستم سریع ـ کند با $\mu < ۰/۱$ الگوسازی کرد، آن‌گاه با قرار دادن $\mu = ۰$، به‌راحتی می‌توان در زیرسیستم سریع $\dot{x} = f(x, u)$ (که u در آن به‌عنوان یک پارامتر عمل می‌کند)، نوع انشعاب‌ها را به‌وسیلهٔ محیط‌های شبیه‌سازی[1] مشخص کرد.

حال فرض کنید یک نورون دینامیک سریع ـ کند با $\mu < ۰/۱$ داشته باشد، اما الگوی آن مشخص نباشد. در این‌جا دیگر نمی‌توان از این محیط‌های شبیه‌سازی برای تعیین نوع انشعاب استفاده کرد،

1) ([2])GENESIS,(Ermentrout,2002) XPPAUT, (Carnevale N.T and Hines M. L.(2006))NEURON

زیرا ضابطه‌ای برای زیرسیستم سریع وجود ندارد. اما راه‌های دیگری برای تقریب‌زدن و تعیین نوع انشعاب وجود دارد. مثلاً توجه به ویژگی‌هایی مثل وجود یا عدم جهش‌های پتانسیلی با بزرگی به‌دلخواه کوچک، تغییر در بسامد و دورهٔ تناوب جهش‌ها، تغییر در بزرگی جهش‌ها و ...، می‌تواند انتخاب ما را برای تعیین نوع شکفتن محدودتر کند.

فرضیه‌های زیادی در مورد اهمیت شکفتن وجود دارد. به‌عنوان مثال جهش پتانسیلی می‌تواند در اثر نوفه اتفاق بیافتد ولی در پدیدهٔ شکفتن چنین چیزی امکان ندارد. از طرفی، خواصی که جهش‌های پتانسیلی در پدیدهٔ شکفتن دارد (از قبیل دورهٔ تناوب جهش‌ها و بزرگی جهش‌ها) دربرگیرندهٔ اطلاعات خاصی است که به‌وسیلهٔ یک جهش پتانسیلی نمی‌توان آن‌ها را منتقل کرد. در نورون‌های واقعی نیز استفاده از شکفتن برای انتقال اطلاعات خاص، مشاهده شده است ([8]). گرچه مطالب زیادی در مورد اهمیت این پدیده بیان شده است، اما همین که نورون‌ها از این شیوه نیز برای انتقال پیام‌ها استفاده می‌کنند، نشان از کاربردی بودن و اهمیت آن دارد.

قدردانی. نویسندگان دانش خود را در زمینهٔ سیستم عصبی مرهون راهنمایی‌های ارزندهٔ آقای عبدالحسین عباسیان می‌دانند و از ایشان کمال تشکر را دارند.

مراجع

[1] Armstrong C. M., and Hille B., "Voltage-gated ion channels and electrical excitability", *Neuron*, **20** (1998), 371-380.

[2] Bower J. M., and Beeman D., *The Book of GENESIS*, Springer-Verlag, New York, 1995

[3] Doiron B., Laing C., Longtin A., and Maler L., "Ghostbursting: A novel neuronal burst mechanism", *Journal of Computational Neuroscience*, **12** (2002), 5-25.

[4] FitzHugh R., "Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **7** (1955), 252-278.

[5] Hille B., *Ion Channels of Excitable Membranes*, (2nd ed.) Sunderland, Mass: Sinauer, 2001.

[6] Hodgkin A. L., and Huxley A. F., "A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation in nerve", *Journal of Physiology*, **117** (1952), 500-544.

[7] Izhikevich E. M., "Neural excitability, spiking, and bursting", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10** (2000a), 1171-1266.

[8] Izhikevich E. M., *Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT Press, 2007.

[9] Pugh, C., and Robinson, C., "The $C \supset ۱$ Closing Lemma, Including Hamiltonians", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **3** (1983), 261-313.

[10] Rinzel J. "A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems", In: E. Teramoto, M. Yamaguti, eds. *Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis, and Neurosciences*, vol. 71 of Lecture Notes in Biomathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[11] Yuan A., Dourado M., Butler A., Walton N., Wei A., and Salkoff L., "SLO-2, a K^+ channel with an unusual Cl dependence", *Nature Neuroscience*, **3** (2000), 771-779.

[12] Yuan A., Santi C. M., Wei A., Wang Z. W., Pollak K., Nonet M., Kaczmarek L., Crowder C. M., and Salkoff L., The sodium-activated potassium channel is encoded by a member of the SLO gene family", *Neuron*, **37** (2003), 765-773.

محمدرضا رزوان، razvan@sharif.ir
سمیه یاسمن، somaye.yasaman@gmail.com
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی