انجمن ریاضی ایران

سال ۳۰، شماره پیاپی ۴۷، تابستان ۱۳۹۰

ISSN 1022-6443

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۰، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۰

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۹۰)

شمارهٔ پیاپی: ۴۷

نشانی: تهران ــ صندوق پستی: ۴۱۸ــ۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ــ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیٔ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

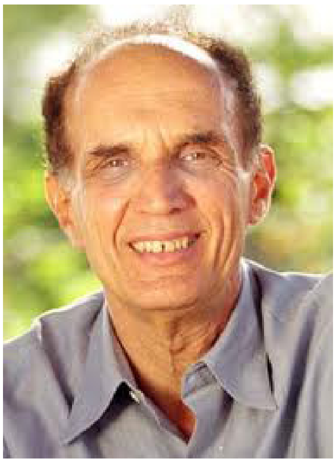
- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ــ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در چهار شماره (بهار، تابستان، پاییز و زمستان) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.
علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب



عکس روی جلد: بردلی افرون (Bradley Efron)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۷ (تابستان ۱۳۹۰) صص. ۱ تا ۱۴

نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

محمد صال مصلحیان

چکیده

نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی بیان می‌کند که برای اعداد حقیقی نامنفی a_1، a_2، ...، a_n،

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

در این مقاله، ضمن ارائهٔ اثبات‌هایی از این نامساوی، چندین کاربرد آن را بیان می‌کنیم. به‌علاوه، میانگین‌های مهم دیگری را معرفی نموده، به توصیف تعمیم‌های ممکن این نامساوی در جبر ماتریس‌ها و جبر عملگرها می‌پردازیم.

۱. مقدمه

گیریم n یک عدد طبیعی باشد. برای هر n عدد حقیقی نامنفی a_1، a_2، ...، a_n، عدد

$$A(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

میانگین حسابی و عدد

$$G(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

میانگین هندسی آن‌ها نامیده می‌شود. نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی (نمحه) بیان می‌کند که

$$G(a_1, \ldots, a_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n)$$

به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

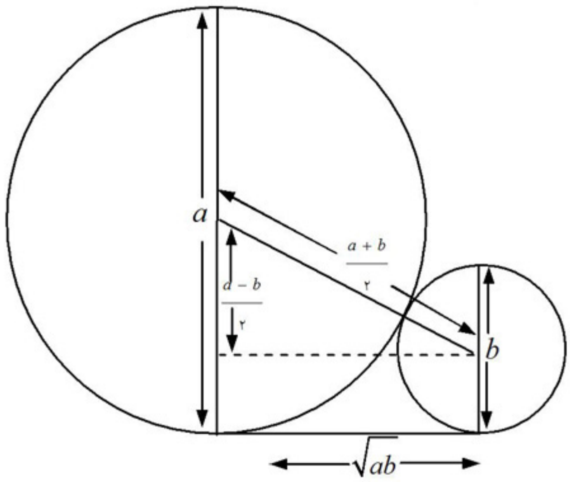
نمحه یکی از مهمترین نامساوی‌ها در ریاضیات و کاربردهای آن است که از آن در اثبات بسیاری از نامساوی‌های دیگر استفاده می‌شود. در حالت $n = 2$ تعبیرهای هندسی ساده‌ای از این

نامساوی وجود دارد. یکی این است که در هر مثلث قائم‌الزاویه که طول قطعات جدا شده از وتر به‌وسیله ارتفاع وارد بر آن، $a_۱$ و $a_۲$ است، طول ارتفاع وارد بر وتر، یعنی $\sqrt{a_۱a_۲}$ نابیشتر از طول میانهٔ وارد بر وتر، یعنی $\frac{a_۱+a_۲}{۲}$ است. بیان هندسی دیگر برای این نامساوی از این قرار است: محیط یک مستطیل با اضلاع به طول $a_۱$ و $a_۲$ برابر است با $۲a_۱ + ۲a_۲$، محیط مربعی با همان مساحت مستطیل برابر است با $۴\sqrt{a_۱a_۲}$. پس نمحه می‌گوید که یک مربع، کوچکترین محیط را در میان همهٔ مستطیل‌های با مساحت یکسان دارد. برای تعمیمی مشابه از این مطلب به جعبه‌های n ـ بعدی، ر.ک. [17].

این مقاله به بخش‌های زیر تقسیم شده است: در بخش دوم، نمحه را با سه روش اثبات کرده‌ایم. در بخش سوم، برخی از کاربردهای نمحه بیان شده است. بخشهای چهارم و پنجم به بررسی نامساوی میانگین وزنی حسابی ـ هندسی و نامساوی میانگین توانی حسابی ـ هندسی اختصاص دارد و در ادامه، انواع دیگری از میانگین‌ها را شرح داده‌ایم. بخش هشتم با عنوان «گذر از اعداد به عملگرها»، پایهٔ توسیع نامساوی‌ها را به فضاهای ماتریسی و جبرهای عملگری فراهم می‌آورد. در دو بخش آخر این مقاله، صورت‌های مختلف نمحه را برای ماتریس‌ها و عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۲. برهان نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

تاکنون اثبات‌های مختلفی از نمحه ارائه شده است. چندین اثبات بدون شرح نیز برای این نامساوی وجود دارد [11].



اثبات کلاسیک زیر که استقرایی است از اگوستین کوشی است [8]. این اثبات را به این دلیل ذکر

می‌کنیم که خلاقانه و آموزنده است: فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد حقیقی نامنفی دلخواه باشند. نامساوی بدیهی $0 \leq (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2$ نشان می‌دهد که $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$. پس نمحه به‌ازای $n = 2$ برقرار است. به‌ازای $n = 2^k$ داریم

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &= \sqrt[2^k]{x_1 x_2 \cdots x_{2^k}} \\
&= \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{x_1 \cdots x_{2^{k-1}}}\ \sqrt[2^{k-1}]{x_{2^{k-1}+1} \cdots x_{2^k}}} \\
&\leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \cdot \frac{x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}}{2^{k-1}}} \\
&\leq \frac{x_1 + \cdots + x_{2^{k-1}}}{2^k} + \frac{x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \\
&= \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \\
&= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.
\end{aligned}$$

اینک فرض کنیم اعداد حقیقی نامنفی x_1، ...، x_n داده شده باشند و k یک عدد طبیعی باشد که $n \leq 2^k$. قرار می‌دهیم $A = A(x_1, \ldots, x_n) = x_{2^k} = \cdots = x_{n+1}$. در این صورت

$$\sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_n \underbrace{A \cdots A}_{2^k - n}} \quad \leq \quad \frac{x_1 + \cdots + x_n + (2^k - n)A}{2^k} = A.$$

و بنابراین $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq A$.

روش دیگری برای اثبات نمحه وجود دارد که در آن از ابزارهای حسابان یاری گرفته شده است [9]. تابع $f(x) = \frac{G}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{G}\right)^x$ روی بازهٔ $[0, 1]$ محدب است. چون $f'(0) = 0$، پس بنا به خواص توابع محدب، $f(0) = G \leq f(1) = A$.

در اثبات دیگری از نمحه از نامساوی $e^x \geq 1 + x$ استفاده می‌شود [18]. با توجه به این‌که

$$e^{\frac{a_i}{A} - 1} \geq \frac{a_i}{A(a_1, \ldots, a_n)} \geq 0, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

داریم

$$\begin{aligned}
1 = e^0 = e^{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A(a_1, \ldots, a_n)} - 1\right)} &= \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{a_i}{A(a_1, \ldots, a_n)} - 1} \\
&\geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a_1, \ldots, a_n)} \\
&= \frac{G(a_1, \ldots, a_n)^n}{A(a_1, \ldots, a_n)^n}.
\end{aligned}$$

۳. کاربردهای نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

نمحه در اثبات بسیاری از نامساوی‌های مربوط به مجموع و حاصلضرب چند عدد به‌کار

می‌رود. در بسیاری از موارد، برهان‌ها کوتاه و زیبا هستند. در این بخش به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم [13، 1، 15].

مسألهٔ ۱. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی k،

$$1.2^2.3^3.\cdots.k^k \geq \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

حل. $\frac{1}{2}(k^2+k)$تا عدد $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع این اعداد برابر k است. با استفاده از نمحه، داریم

$$1.\frac{1}{2^2}.\frac{1}{3^3}.\cdots.\frac{1}{k^k} \leq \left(\frac{k}{\frac{1}{2}(k^2+k)}\right)^{\frac{1}{2}(k^2+k)} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}(k^2+k)}.$$

حال هر یک از طرفین نامساوی را عکس می‌کنیم؛ جهت نامساوی تغییر می‌کند و حکم ثابت می‌شود.

مسألهٔ ۲. فرض کنید $n \geq 2$، a_1، ...، a_n اعداد حقیقی مثبت باشند و $S = a_1 + \cdots + a_n$. در این صورت

$$\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \cdots + \frac{S}{S-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

حل.

$$\begin{aligned}
n.A\left(\frac{S}{S-a_1}, \cdots, \frac{S}{S-a_n}\right) &\geq n.G\left(\frac{S}{S-a_1}, \cdots, \frac{S}{S-a_n}\right) \\
&= n.S.G\left(\frac{1}{S-a_1}, \cdots, \frac{1}{S-a_n}\right) \\
&= \frac{nS}{G(S-a_1, \ldots, S-a_n)} \\
&\geq \frac{nS}{A(S-a_1, \ldots, S-a_n)} \\
&= \frac{n^2 S}{(S-a_1) + \cdots + (S-a_n)} \\
&= \frac{n^2 S}{nS - (a_1 + \cdots + a_n)} \\
&= \frac{n^2 S}{nS - S} \\
&= \frac{n^2}{n-1}.
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۳. نشان دهید به‌ازای هر سه عدد نامنفی a، b و c،

$$\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}-1\leq \frac{2}{3}(a+b+c).$$

حل. این نامساوی مجموع سه نامساوی زیر است:

$$\sqrt[3]{ab}-\frac{1}{3}\leq\frac{a+b}{3},\qquad \sqrt[3]{bc}-\frac{1}{3}\leq\frac{b+c}{3},\qquad \sqrt[3]{ca}-\frac{1}{3}\leq\frac{c+a}{3}.$$

بنابر تقارن، کافی است ثابت کنیم $\sqrt[3]{ab}-\frac{1}{3}\leq\frac{a+b}{3}$. بنابر نمحه، داریم

$$\sqrt[3]{ab}=G(a,b,1)\leq A(a,b,1)=\frac{a+b+1}{3}.$$

مسألهٔ ۴. فرض کنید مجموع اعداد مثبت a_1، ...، a_n برابر یک باشد. ثابت کنید

$$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\dots(1+\frac{1}{a_n})\geq(n+1)^n.$$

حل. بنابر نمحه،

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{a_k} &= (n+1)A\left(1,\frac{1}{na_k},\frac{1}{na_k},\dots,\frac{1}{na_k}\right)\\ &\geq (n+1)G\left(1,\frac{1}{na_k},\frac{1}{na_k},\dots,\frac{1}{na_k}\right),\qquad (k=1,\dots,n)\end{aligned}$$

با ضرب این نامساوی‌ها خواهیم داشت

$$(1+\frac{1}{a_1})\cdots(1+\frac{1}{a_n})\geq(n+1)^n\sqrt[n+1]{\frac{1}{(na_1)^n}\cdots\frac{1}{(na_n)^n}}.$$

اما $G(a_1,\dots,a_n)\leq A(a_1,\dots,a_n)=\frac{1}{n}$ و لذا $(na_1)^n(na_2)^n\cdots(na_n)^n\leq 1$. بنابراین

$$(1+\frac{1}{a_1})\cdots(1+\frac{1}{a_n})\geq(n+1)^n.$$

۵. نامساوی میانگین وزنی حسابی ـ هندسی

نوع دیگری از مفهوم میانگین، میانگین وزنی است. فرض کنید p_1، p_2، ...، p_n اعداد حقیقی نامنفی باشند و $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. در این صورت میانگین‌های وزنی حسابی و هندسی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^w(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i,\qquad G^w(x_1,\dots,x_n)=x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}.$$

به‌کمک نمحه، می‌توان نشان داد که

$$A^w(x_1, \ldots, x_n) \geq G^w(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. اثباتی از نامساوی (۱) به‌کمک قضیهٔ مقدار میانگین در [16] ارائه شده است.

نامساوی (۱) دو کاربرد ساده دارد. یکی از آن‌ها نامساوی یونگ است:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \qquad (x, y \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

این خود، نامساوی‌های هلدر و مینکوفسکی را نتیجه می‌دهد که به‌ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\begin{array}{l} x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{array}\right) \\ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\begin{array}{l} x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

و دیگری نامساوی‌های برنولی است:

$$\begin{aligned} (1 + x)^p &\geq 1 + px, \qquad (p > 1, x > -1) \\ (1 + x)^p &\leq 1 + px, \qquad (0 < p < 1, x > -1). \end{aligned}$$

در اینجا دو کاربرد از نامساوی میانگین وزنی حسابی ـ هندسی ارائه می‌دهیم [15].

مسألهٔ ۵. ثابت کنید اگر a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند و $c \neq 1$، آن‌گاه $a + b < ac^b + \frac{b}{c^a}$.

حل. بنابر نامساوی میانگین وزنی حسابی ـ هندسی با $n = 2$، $p_1 = \frac{a}{a+b}$، $p_2 = \frac{b}{a+b}$، $x_1 = c^b$ و $x_2 = c^{-a}$، داریم

$$\frac{a}{a+b}c^b + \frac{b}{a+b}c^{-a} > (c^b)^{\frac{a}{a+b}}(c^{-a})^{\frac{b}{a+b}} = 1.$$

مسألهٔ ۶. نشان دهید اگر a، b و c سه ضلع یک مثلث باشند، آن‌گاه

$$(1 + \frac{b-c}{a})^a (1 + \frac{c-a}{b})^b (1 + \frac{a-b}{c})^c \leq 1.$$

حل. ابتدا توجه کنید که در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر بزرگ‌تر نیست. بنابراین هر یک از پایه‌های توان‌ها در نامساوی بالا اعداد نامنفی هستند. بنابر نامساوی وزنی حسابی ـ هندسی با $n = 3$ و

$$p_1 = \frac{a}{a+b+c}, \quad p_2 = \frac{b}{a+b+c}, \quad p_3 = \frac{c}{a+b+c}$$

$$x_1 = 1 + \frac{b-c}{a}, \quad x_2 = 1 + \frac{c-a}{b}, \quad x_3 = 1 + \frac{a-b}{c}$$

داریم

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

حال اگر دو طرف نامساوی اخیر را به توان $a+b+c$ برسانیم، نتیجهٔ مورد نظر ثابت می‌شود.

۶. نامساوی میانگین توانی حسابی ـ هندسی

نوع دیگری از میانگین، موسوم به میانگین توانی وجود دارد. فرض کنید a_1، ...، a_n اعداد حقیقی مثبت باشند و $r \neq 0$. در این صورت

$$M_n^r(a_1, \ldots, a_n) := \left(\frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

را یک میانگین توانی می‌خوانند. می‌توان نشان داد که اگر $r, s \in \mathbb{R}$، $r < s$ و $rs \neq 0$، آن‌گاه

$$M_n^r(a_1, \ldots, a_n) \leq M_n^s(a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. اینک کاربردی از نامساوی (۲) به‌دست می‌دهیم.

مسألهٔ ۷. نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی مثبت a، b و c،

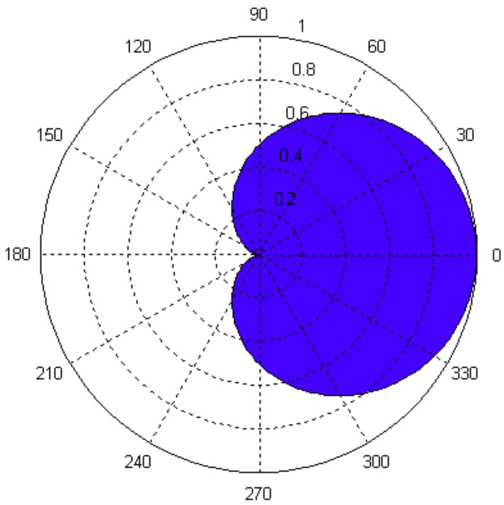
$$8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq 9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab).$$

حل. با توجه به این‌که $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$، داریم

$$\begin{aligned} 9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) &\leq 9\left[\frac{(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)}{9}\right]^3 \\ &= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^3 \\ &\leq \frac{1}{3}(2a^2+2b^2+2c^2)^3 \\ &= \frac{8}{3}(a^2+b^2+c^2)^3 \\ &\leq 8(a^3+b^3+c^3). \end{aligned}$$

یکی از سؤال‌های جالب این است که آیا نمحه در مورد اعداد مختلط نیز درست است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای هر دو عدد مختلط خارج یک دلگون (Cardioid) داریم

$\sqrt{|ab|} \geq \left|\frac{a+b}{۲}\right|$ که در آن $|.|$ قدرمطلق اعداد مختلط را نشان می‌دهد. اما برای بیش از دو عدد، هنوز هیچ صورت مختلطی از نمحه در دست نیست [7].



۷. انواع دیگر میانگین

در آنالیز، میانگین همساز n عدد مثبت $a_۱$، ...، a_n به‌صورت

$$H(a_۱,\dots,a_n) = \frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}$$

تعریف می‌شود. مسألهٔ بعدی نامساوی میانگین هندسی ـ همساز را به‌دست می‌دهد.

مسأله ۸. نشان دهید $H(a_۱,\dots,a_n) \leq G(a_۱,\dots,a_n)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

حل. بنابر نمحه،

$$H(a_۱,\dots,a_n) = \frac{۱}{A(\frac{۱}{a_۱},\dots,\frac{۱}{a_n})} \leq \frac{۱}{G(\frac{۱}{a_۱},\dots,\frac{۱}{a_n})} = G(a_۱,\dots,a_n).$$

به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\frac{۱}{a_۱} = \frac{۱}{a_۲} = \cdots = \frac{۱}{a_n}$، یعنی $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

علاوه بر میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز می‌توان میانگین‌های دیگری نیز تعریف کرد. در این بین، میانگین لگاریتمی دو عدد مثبت a و b که به‌صورت

$$L(a,b) = \begin{cases} \frac{a-b}{\ln a - \ln b} & a \neq b \\ a & a = b \end{cases}$$

تعریف می‌شود، تظریف $G(a,b) \leq L(a,b) \leq A(a,b)$ از نمحه را به‌دست می‌دهد.

یکی از میانگین‌های مهم دیگر میانگین هاینز دو عدد مثبت a و b است که به‌صورت

$$H_\nu(a,b) = \frac{a^{1-\nu}b^\nu + a^\nu b^{1-\nu}}{2}$$

تعریف می‌شود و در آن $0 \leq \nu \leq 1$. به‌وضوح $\nu = 0, \frac{1}{2}$ به‌ترتیب میانگین حسابی و هندسی را به‌دست می‌دهند. می‌توان نشان داد که برای هر $0 \leq \nu \leq 1$ داریم

$$A(a,b) \leq H_\nu(a,b) \leq G(a,b).$$

جهت کسب اطلاعات بیشتر در مورد این میانگین‌ها، ر.ک. [15].

اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، آن‌گاه هر عدد نامنفی $M(a,b)$ که نوعی مفهوم میانگین a و b را بیان می‌کند باید در چندین خاصیت صدق کند:(۱) $M(a,b) \geq 0$؛ (۲) اگر $a \leq b$، آن‌گاه $a \leq M(a,b) \leq b$؛ (۳) $M(a,b) = M(b,a)$؛ (۴) $M(a,b)$ نسبت به a و b پیوسته و صعودی باشد و بالاخره این‌که (۵) برای هر $\lambda \geq 0$، $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$. چنین خواصی را میانگین‌های حسابی و هندسی دارا هستند. یکی از خواص جالب میانگین‌های حسابی و هندسی این است که اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ اعداد مثبتی باشند و همهٔ a_{ij} ها برابر $A(\lambda_i, \lambda_j)$ یا همهٔ آن‌ها برابر با $G(\lambda_i, \lambda_j)$ باشند، آن‌گاه ماتریس $[a_{ij}]$ مثبت خواهد بود. سؤالی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا در حالت کلی $[M(\lambda_i, \lambda_j)]$ نیز ماتریس مثبتی است؟

۸. گذر از اعداد به عملگرها

فرض کنید M_n جبر ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط، $B(H)$ جبر عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت H و $C(X)$ جبر توابع پیوسته روی یک فضای هاسدورف فشردهٔ X باشد. اگر $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایهٔ استاندارد $\mathbb{C}^n$ باشد، آن‌گاه از جبرخطی مقدماتی می‌دانید که هر تبدیل خطی $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ نمایشی به‌صورت ماتریس A_T دارد که ستون jام آن Ae_j است. همچنین به هر ماتریس A می‌توان یک تبدیل خطی $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ نسبت داد که با ضابطهٔ $T_A(X) = AX$ برای هر $X \in \mathbb{C}^n$ بیان می‌شود. به‌علاوه $A_{T_A} = A$ و $T_{A_T} = T$. به این ترتیب، M_n چیزی جز $B(\mathbb{C}^n)$ نیست. بنابراین در بحث فضاهای متناهی ـ بعد، تفاوتی بین ماتریس‌ها و عملگرهای خطی وجود ندارد. بسیاری از خواص اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به جبرهای $C(X)$ قابل انتقال است و در واقع $C(X)$ می‌تواند توسیع جابه‌جایی $\mathbb{C}$ تلقی شود. از طرف دیگر، $\mathbb{C}$ را می‌توان با $M_1(\mathbb{C})$ یکی گرفت و این سؤال را پرسید که آیا خواص $\mathbb{C}$ را می‌توان به $M_n(\mathbb{C})$ یا $B(H)$ توسعه داد. این سؤال جالب در مواردی جواب مثبت دارد که تشابه $B(H)$ و $\mathbb{C}$ را به نمایش می‌گذارد و در مواردی جواب منفی دارد که ناشی از ناجابه‌جایی بودن $B(H)$ است. برای توضیح بیشتر، چند مثال ارائه می‌کنیم (برای دیدن مثال‌های بیشتر، ر. ک. [12]).

۱) به هر عدد مختلط z، عدد $\bar{z}$ موسوم به مزدوج آن نسبت داده می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان به هر عملگر $T \in B(H)$ عملگر $T^* \in B(H)$ را نسبت داد که در خواص مشابه مزدوج یعنی $(TS)^* = S^*T^*$، $(\lambda T + S)^* = \bar{\lambda}T^* + S^*$ و $T^{**} = T$ صدق می‌کند. T^* را الحاقی T می‌نامند. این عملگر توسط رابطهٔ $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ به‌طور منحصر به فرد تعریف می‌شود و در حالتی که H متناهی ــ بعد است، می‌توان دید که اگر $[a_{ij}]$ ماتریس T باشد، آن‌گاه ماتریس T^* چیزی جز $[\overline{a_{ji}}]$ نیست.

۲) نظیر اعداد حقیقی (یعنی اعداد مختلطی که با مزدوجشان برابرند)، می‌توان عملگرهای خودالحاقی را در نظر گرفت، یعنی عملگرهایی مانند T که برای آن‌ها $T = T^*$. اما $\mathbb{R}$ نسبت به عمل ضرب بسته است در حالی‌که حاصلضرب دو عملگر خودالحاقی، در حالت کلی خودالحاقی نیست. مثلاً $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۳) هر عدد مختلط را می‌توان به‌صورت $z = a + ib$ نشان داد که در آن a و b اعداد حقیقی هستند. به‌طور مشابه هر عملگر T را می‌توان به‌صورت $T = T_1 + iT_2$ نشان داد که در آن T_1 و T_2 خودالحاقی هستند (در واقع $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$ و $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$).

۴) می‌توان رابطهٔ $\leq$ در اعداد حقیقی را به عملگرهای خودالحاقی توسعه داد. برای این منظور می‌گوییم $S \leq T$ اگر به‌ازای هر بردار x در فضای هیلبرت H، $\langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$. می‌توان ثابت کرد که برای ماتریس T، $T \geq 0$ (می‌گوییم T مثبت است) هرگاه $T = T^*$ و تمام مقادیر ویژهٔ T مثبت باشند.

۵) نامساوی مثلثی $|z + w| \leq |z| + |w|$ در اعداد مختلط برقرار است در حالی‌که نامساوی مشابه آن $|A + B| \leq |A| + |B|$ در حالت کلی در مورد عملگرها برقرار نیست. البته قضیهٔ مهمی وجود دارد که بیان می‌کند به‌ازای هر دو ماتریس A و B در M_n ماتریس‌های یکانی U و V وجود دارند که $|A + B| \leq U|A|U^* + V|B|V^*$ (ر.ک. [2]). در اینجا منظور از $|A|$ ماتریس مثبتی است که توان دوم آن برابر A^*A است و منظور از ماتریس یکانی ماتریسی مانند U است با خاصیت $U^*U = UU^* = I$ که در آن I ماتریس همانی است.

۶) در مجموعهٔ اعداد حقیقی اگر $0 \leq t \leq s$، آن‌گاه $t^2 \leq s^2$. اما حکم مشابه در مورد عملگرها برقرار نیست. مثلاً $0 \leq T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = S$، اما $T^2 \not\leq S^2$.

۷) در مجموعهٔ اعداد حقیقی اگر $-s \leq t \leq s$، آن‌گاه $|t| \leq s$، اما رابطهٔ مشابه برای عملگرها درست نیست. برای مثال $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۸) هر عدد مختلط نمایش قطبی به‌صورت $z = e^{i\theta}|z|$ دارد. به‌طور مشابه برای هر ماتریس نرمال (ماتریسی مانند A که در شرط $AA^* = A^*A$ صدق کند) ماتریس یکانی U وجود دارد که $T = U|T|$. برای عملگرهای روی فضاهای هیلبرت با بعد نامتناهی این حکم همچنان برقرار است با این تفاوت که U طولپایی جزئی است، یعنی $UU^*U = U$.

۹. نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای ماتریس‌ها

نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ برای دو عدد نامنفی a و b را می‌توان به‌صورت $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ یا $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ نیز نوشت. اگر A و B دو ماتریس مثبت باشند و $AB = BA$، آن‌گاه خواهیم داشت

$$AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2} \text{ و } AB \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 .$$

اما اگر A و B با یکدیگر جابه‌جا نشوند، در حالت کلی AB خودالحاقی نخواهد بود و مشکلات جدی پیش خواهد آمد. مشکل بعدی این است که رفتار توابع $f(t) = t^2$ و $g(t) = \sqrt{t}$ از نظر یکنوایی متفاوت است و بنابراین تعمیم‌های نامساوی فوق به جبر ماتریس‌های $n \times n$ متفاوت خواهد بود. می‌توان چندین صورت ممکن برای نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی تصور کرد [6]. یادآوری می‌نماییم که منظور از $s_j(A)$ مقادیر منفرد A یعنی مقادیر ویژهٔ $|A|$ است که (احتمالاً با تکرار) به‌ترتیب نزولی مرتب شده‌اند. انتظار داریم که هر صورت عملگری از نمحه، حالت عددی را به‌ازای ماتریس‌های قطری $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ در برگیرد.

الف) $|AB| \leq \frac{A^2+B^2}{2}$. این صورت کلی درست نیست، زیرا اگر بگیریم $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}(A^2 + B^2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $|AB| = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ب) $(1 \leq j \leq n) \quad s_j(AB) \leq s_j(\frac{A^2+B^2}{2})$. این نامساوی برای ماتریس‌های $n \times n$ درست است و در واقع اولین صورت ماتریسی نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی تلقی می‌شود [4]. از این نامساوی نتیجه می‌شود $|||AB||| \leq \frac{1}{2}|||A^2 + B^2|||$ که در آن $|||\cdot|||$ یک نرم پایای یکانی است، یعنی نرمی است صادق در شرط $|||UAV||| = |||A|||$ که در آن U و V یکانی هستند. تعمیمی از نامساوی اخیر به‌صورت $|||AXB||| \leq \frac{1}{2}|||A^2X + XB^2|||$ قابل بیان است [3].

پ) $(1 \leq j \leq n) \quad s_j(AB + BA) \leq s_j(A^2 + B^2)$. این نامساوی در حالت کلی درست نیست. کافی است $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ اختیار شوند که در آن a یک مقدار مناسب است.

ت) $|||AB||| \leq \frac{1}{4}|||(A+B)^2|||$. این رابطه برای ماتریس‌های مثبت A و B درست است [5].

ث) $|||\,|AB|^{\frac{1}{2}}\,||| \leq \frac{1}{2}|||A + B|||$. این نامساوی برای Q ـ نرم‌ها درست است [5]. یک Q ـ نرم $|||\cdot|||$، نرمی است که برای آن یک نرم پایای یکانی $|||\cdot|||_Q$ وجود دارد که برای هر ماتریس A، $|||A|||_Q^2 = |||A^*A|||$. ر.ک. [10].

ج) $s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \le \frac{1}{2}s_j(A+B) \quad (1 \le j \le n)$. این نامساوی فقط برای $n=2$ ثابت شده است [2].

چ) $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}(A^2+B^2)$. این نامساوی در حالت کلی برقرار نیست، زیرا کافی است ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ اختیار شوند.

همچنین ممکن است انتظار داشته باشیم $0 \le \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A+B)^2 & A-B \\ BA & \frac{1}{2}(A+B)^2 \end{bmatrix}$ صورتی برای نمحه باشد که متأسفانه نیست. کافی است قرار دهیم $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ تا مثال نقض به‌دست آید.

۱۰. نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای عملگرها

اگر A و B دو عملگر روی فضای هیلبرت H باشند، یک میانگین $M(A,B)$ از A و B باید خواص ذکر شده در بخش ۷ را داشته باشد. مناسب‌ترین تعریف میانگین حسابی $\frac{1}{2}(A+B)$ است. همچنین $(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2})^{-1}$ نیز تعریف مناسبی برای میانگین همساز است. حاصلضرب دو عملگر مثبت A و B، مثبت است اگر و فقط اگر $AB=BA$. در این حالت $(AB)^{\frac{1}{2}}$ مفهوم مناسبی از میانگین هندسی A و B را به‌دست می‌دهد. اما اگر A و B با یکدیگر جابه‌جا نشوند چه می‌توان گفت؟ برای دو عملگر مثبت A و B، میانگین هندسی $A\#B$ باید به گونه‌ای تعریف شود تا در دو رابطهٔ طبیعی

$$AB=BA \Rightarrow A\#B=\sqrt{AB}$$

و

$$(X^*AX)\#(X^*BX)=X^*(A\#B)X$$

که در آن X وارون‌پذیر است صدق کند. بنابراین با فرض وارون‌پذیری A، باید داشته باشیم

$$A\#B=A^{1/2}(I\#A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}.$$

تعریف $A\#B=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$ همهٔ خواصی را که ما از میانگین هندسی انتظار داریم داراست. می‌توان نشان داد که $A\#B$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $XA^{-1}X=B$ است که صورت عملگری معادلهٔ عددی $x^2=ab$ است. اگر A وارون‌پذیر نباشد، $A\#B$ به‌صورت $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\big((A+\varepsilon I)\#B\big)$ تعریف می‌گردد [6].

حال فرض کنید A و B دو عملگر مثبت و A وارون‌پذیر باشد. نامساوی $\sqrt{t} \leq \frac{۱+t}{۲}$ برای هر $t \geq ۰$ و کاربرد حساب تابعی برای عملگر مثبت $A^{-\frac{۱}{۲}}BA^{-\frac{۱}{۲}}$، نتیجه می‌دهد که

$$(A^{-\frac{۱}{۲}}BA^{-\frac{۱}{۲}}) \leq \frac{I + A^{-\frac{۱}{۲}}BA^{-\frac{۱}{۲}}}{۲}$$

اگر طرفین را در $A^{\frac{۱}{۲}}$ ضرب نماییم، خواهیم داشت

$$A\#B = A^{\frac{۱}{۲}}(A^{-\frac{۱}{۲}}BA^{-\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}A^{\frac{۱}{۲}} \leq A^{\frac{۱}{۲}}\frac{I + A^{-\frac{۱}{۲}}BA^{-\frac{۱}{۲}}}{۲}A^{\frac{۱}{۲}} = \frac{A+B}{۲}.$$

رابطهٔ $A\#B \leq \frac{A+B}{۲}$ بهترین صورت از نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی برای عملگرها است (برای ملاحظهٔ نتایجی از این دست، ر.ک. [14] و مراجع موجود در آن).

منابع برای مطالعهٔ بیشتر

[۱] ک. پ. کاوکین، نامساوی‌ها، مترجم پ. شهریاری، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۵۰.

[۲] غ. مصاحب، آنالیز ریاضی، جلد اول، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۳.

[۳] م. س. کلامکین، المپیادهای ریاضی بین المللی، مترجم م.ق. وحیدی‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.

[۴] م. س. کلامکین، مسأله‌های المپیادهای ریاضی در امریکا، مترجمین س. اکبری، ل. رنجبر و ع. محمودیان، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.

Wikipedia: http://en/wikipedia.org/wiki/Inequality of arithmetic and geometric means

MathWorld: http://mathworld.wolfram.com/Arithmetic-GeometricMean.html

مراجع

[1] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu and M. Lascu, *Old and new inequalities*, Zalau, Editura Gil, 2004.

[2] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton Univ. Press, 2007.

[3] R. Bhatia and C. Davis, "More matrix forms of the arithmetic-geometric mean inequality", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **14**(1993), 132–136.

[4] R. Bhatia and F. Kittaneh, "On the singular values of a product of operators", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **11**(1990), 272–277.

[5] R. Bhatia and F. Kittaneh, "Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities", *Linear Alg. Appl.*, **308**(2000), 203–211.

[6] R. Bhatia and F. Kittaneh, "The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited", *Linear Alg. Appl.*, **428**(2008), 2177–2191.

[7] J. Borwein, *A complex arithmetic-geometric mean inequality*, Problem 030-003, 2003.

[8] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, premiere partie, Analyse algebrique, Paris 1821, p. 457ff.

[9] D. E. Daykin and C. J. Eliezer, "Elementary proofs of Basic inequalities", *Amer. Math. Monthly*, **76**(1969), 543–546.

[10] S. S. Dragomir, M. S. Moslehian and J. Sandor, "Q-norm inequalities for sequences of Hilbert space operators", *J. Math. Ineq.*, **3**(2009), 1–14.

[11] R. H. Eddy, "The arithmetic-geometric mean inequality", *College Math. J.*, **16**(1985), 208.

[12] S. H. Hochwald, "Linear algebra by analogy", *Amer. Math. Monthly*, **98**(1991), 918–926.

[14] P. K. Hung, *Secrets in Inequalities*, Vol. 1, Zalau, Editura Gil, 2007.

[13] M. S. Moslehian, "Operator extensions of Hua's inequality", *Linear Alg. Appl.*, **430**(2009), 1131–1139.

[15] C. Niculescu and L. E. Persson, *Convex Functions and Their Apllications*, Springer, 2006.

[16] N. Schaumberger, "A general form of the arithmetic-geometric mean inequality via the mean value theorem", *College Math. J.*, **19**(1988), 172–173.

[17] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz master class, An introducton to the art of mathematical inequalities*, MAA Problem Book Series. Math. Assoc. Amer, Washington DC, Cambridge Univ. Press, 2004.

[18] J. E. Wetzel, "On the functional inequality $f(x+y) \geq f(x)f(y)$", *Amer. Math. Monthly*, **74**(1967), 1065–1068.

محمد صال مصلحیان moslehian@ferdowsi.um.ac.ir

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۷ (تابستان ۱۳۹۰) صص. ۱۵ تا ۱۷

برهان‌هایی ساده برای قضیهٔ اساسی جبر به‌کمک آنالیز مختلط و حسابان پیشرفته*

آنتون شپ

مترجم: حمیدرضا وهابی

حقیقتاً عنوان مقالهٔ ری ردهیفر [۲] واکنشی طبیعی است به مقاله‌ای دیگر دربارهٔ قضیهٔ اساسی جبر. تاکنون دست‌کم ۲۸ مقاله دربارهٔ این قضیه در مانتلی چاپ شده است. با وجود این، ما در این نوشته دو برهان برای قضیهٔ اساسی جبر آورده‌ایم که به نظر نمی‌رسد قبلاً دیده شده باشد و فکر می‌کنیم که ارزش خواندن را دارد. در اولین برهان، از قضیهٔ انتگرال کشی استفاده می‌شود که به نظر مؤلف، به‌سادگیِ برهان مشهور آن در آنالیز مختلط بر پایهٔ قضیهٔ لیوویل است (برای دیدن این برهان و سه برهان دیگر با استفاده از آنالیز مختلط، به [۳] نگاه کنید). در مسألهٔ ۵ صفحهٔ ۱۲۶ از [۱] برهانی از قضیهٔ اساسی جبر با استفاده از انتگرال مسیری مختلط ارائه می‌شود که مشابه اولین برهان ما است. اما جزئیات کاملاً یکسان نیستند. دومین برهان، تنها از انتگرال حاصل از پارامتری سازیِ انتگرالِ مسیریِ برهان اول و نتایجی از حسابان پیشرفته استفاده می‌کند. این برهان، مشابه برهان [۴] است که در آنجا ایده‌های یکسانی برای اثبات ناتهی بودن طیف عضوی از یک جبر باناخ مختلط به‌کار گرفته شده است. البته در آنجا برای اثبات قضیهٔ اساسی جبر، ماتریس متناظر با یک چندجمله‌ای به‌کار رفته است.

---

*) Schep, Anton, R., “A simple complex analysis and an advanced calculus proof of the fundamental theorem of algebra”, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), 67–68.

قضیه (قضیهٔ اساسی جبر). هر چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq 1$ با ضرایب مختلط در $\mathbb{C}$ ریشه دارد.

برهان. فرض کنید $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq 1$ باشد به‌طوری که برای هر $z \in \mathbb{C}$، $p(z) \neq 0$.

برهان اول. بنابر قضیهٔ انتگرال کُشی،

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{zp(z)} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{p(0)} \neq 0$$

که در آن، مسیر انتگرال‌گیری دایره‌ای در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. از طرف دیگر

$$\left| \oint_{|z|=r} \frac{dz}{zp(z)} \right| \leq 2\pi r . \max_{|z|=r} \frac{1}{zp(z)} = \frac{2\pi}{\min\limits_{|z|=r} |p(z)|} \to 0$$

وقتی که $r \to \infty$ (چون $|p(z)| \geq |z|^n(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z^n|})$) که این یک تناقض است.

برهان دوم. تابع $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $g(r, \theta) = \dfrac{1}{p(re^{i\theta})}$ تعریف کنید. در این صورت، تابع g روی $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ پیوسته و روی $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته است که در معادلهٔ

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \mathrm{i}r . \frac{\partial g}{\partial r}$$

صدق می‌کنند. اکنون تابع $F : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $F(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta$ تعریف کنید. در این صورت، بنابر قاعدهٔ لایب‌نیتس برای مشتق‌گیری از تابع زیر علامت انتگرال، برای هر $r > 0$ داریم

$$\mathrm{i}rF'(r) = \mathrm{i}r \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta = g(r, 2\pi) - g(r, 0) = 0$$

در نتیجه برای هر $r > 0$، $F'(r) = 0$. لذا تابع F روی $[0, \infty)$ ثابت $= F(0) = F(r)$ $\frac{2\pi}{p(0)} \neq 0$ است. از طرف دیگر، چون $|p(z)| \to \infty$ به‌طور یکنواخت وقتی که $|z| \to \infty$، پس $g(r, \theta) \to 0$ به‌طور یکنواخت نسبت به θ، وقتی که $r \to \infty$. بنابراین $F(r) \to 0$ وقتی که $r \to \infty$ و این تناقض است.

مراجع

[1] N. Levinson and R.M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1970.

[2] R. M. Redheffer, "What! Another note just on the fundamental theorem of algebra?",*Amer. Math. Monthly*, **71**(1964), 180-185.

[3] R. Remmert, *Theory of Complex Functions* (trans. R. B. Burckel), Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] D. Singh, "The spectrum in a Banach algebra", *Amer. Math. Monthly*, **113**(2006), 756-758.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر
hrvahabi@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۱۹ تا ۳۵

نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون و هنستاک ـ کورزویل روی خط حقیقی

سعید مقصودی

چکیده

نظریهٔ انتگرال‌گیری ریمان در عین سادگی و زیبایی، کاستی‌هایی نیز دارد. نظریهٔ انتگرال لبگ پیشرفت قابل توجهی نسبت به نظریهٔ ریمان به حساب می‌آید و بسیاری از کاستی‌های آن را رفع می‌کند. در عین حال، همچنان برخی از همان کاستی‌ها را دارد. مثلاً شرط انتگرال‌پذیری همچنان در قضیهٔ اساسی حسابان باید اضافه گردد. در جهت رفع این مشکل و به‌دست آوردن نظریه‌ای به قدرت نظریهٔ لبگ با پرداخت هزینه‌ای کمتر، ریاضیدانان بسیاری، نظریه‌های جانشینی پیشنهاد کرده‌اند. در این مقاله به برخی از مهمترین این نظریه‌ها اشاره می‌کنیم.

۱. مقدمه

نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ، علی‌رغم سادگی و قدرت نسبی آن‌ها، کاستی‌هایی نیز دارند؛ برای مثال [۱۱] را ببینید. به‌منظور رفع کاستی‌های نظریهٔ لبگ و به‌ویژه به‌دست آوردن نظریهٔ انتگرالی که در آن قضیهٔ اساسی حسابان در کلی‌ترین صورتش برقرار باشد، ریاضیدانان بعد از لبگ نظریه‌های مختلفی ارائه کرده‌اند. اولین نظریه از این نوع، متعلق به ریاضیدان فرانسوی آرنود دانژوا[1] است که آن را در سال ۱۹۱۲ معرفی کرد. بعد از آن، اسکار پرون[2]، ریاضیدان آلمانی، در سال ۱۹۱۴ نظریهٔ ساده‌تری نسبت به نظریهٔ دانژوا ارائه کرد. اما از همه ساده‌تر و زیباتر، نظریه‌ای است که یاروسلاو کورزویل[3] ریاضیدان اهل چک، در سال ۱۹۵۸ و تقریباً همزمان و مستقل از او

1) Arnaud Denjoy (1884-1974)   2) Oskar Perron (1880-1975)   3) Jarslov Kurzweil (1926-)

رالف هنستاک[1] انگلیسی، در سال ۱۹۶۴ ارائه کردند. نکتهٔ جالب این است که علی‌رغم رویکردهای متفاوتی که این ریاضیدانان درپیش گرفتند، نظریه‌های آن‌ها هم ارز از آب درآمد. در سال ۱۹۷۳، ادوارد جی. مک‌شین[2]، ریاضیدان آمریکایی، شیوه‌ای همانند ریمان برای رسیدن به انتگرال لبگ به‌کار گرفت. نتیجهٔ آن، کوتاه شدن راه رسیدن به نظریه‌ای به قدرت نظریهٔ لبگ بدون نیاز به پروراندن نظریهٔ اندازه روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ بود. برای شرحی از این نظریه‌ها و دیگر مطالب وابسته، مرجع خواندنی [۱۹] را ببینید. همچنین برای اثبات بسیاری از قضایا که در اینجا بدون اثبات آورده‌ایم، به [۵] مراجعه کنید. اکنون با حفظ ترتیب تاریخی ارائهٔ نظریه‌های انتگرال‌گیری مذکور، با نظریهٔ دانژوا شروع می‌کنیم.

۲. انتگرال دانژوا

لبگ در رسالهٔ دکتری خود قادر به گسترش قضیهٔ اساسی حسابان به مشتق‌های دینی نبود. وی در سال ۱۹۰۴ با معرفی آنچه زنجیره‌ای از بازه‌ها نامید، نه تنها اثبات ساده‌ای برای حالت‌های قبلی آورد، بلکه قضیه را برای مشتق‌های دینی متناهی نیز اثبات کرد. اما برای حالتی که مشتق‌های دینی متناهی یا انتگرال‌پذیر نباشند، فقط راهی برای تعمیم نظریهٔ انتگرال خود پیشنهاد کرد و در عین‌حال با مثال‌هایی نشان داد این تعمیم، حالت‌های معمول را در بر نمی‌گیرد. در سال ۱۹۰۵ هانس هان[3] تابعی مثال می‌زند که توسط مشتقش مشخص نمی‌شود و در نتیجه به‌وسیله انتگرال‌گیری از مشتق تابع، قابل بازیابی نیست. مقالهٔ هان باعث شد لبگ مسأله را برای دسته‌ای خاص از توابع مطرح کند. ولی کوشش‌هایش برای یافتن جواب، بی‌نتیجه ماند. بنابراین، مسأله در چارچوب نظریهٔ لبگ جواب ندارد.

دانژوا اولین گام‌ها را در جهت حل این مسأله برمی‌دارد. وی روش‌های لبگ را برای بازیابی تابع از مشتقش به‌کار می‌گیرد. دانژوا زمانی که هنوز در اکول نرمال دانشجو بود، در کلاس‌های درس بئر[4] دربارهٔ توابع ناپیوسته حاضر می‌شد و با روش‌های اعداد ترامتناهی[5] بئر به‌خوبی آشنا بود. با ترکیب مشاهدات لبگ و تکنیک‌های بئر، تعریف انتگرال را به توابع متناهی ـ مقدار که انتگرال‌پذیر لبگ نیستند، تعمیم داد و قضیهٔ حسابان را برای آن اثبات کرد. این نتایج را در سال ۱۹۱۲ در [۲] و [۳] منتشر کرد. وی تحلیل مبسوط‌تری را از انتگرال خود در [۴] ارائه کرد و فرایند محاسبه انتگرالش را جمع‌گیری[6] نامید. این فرایند بسیار پیچیده است و در آن استفادهٔ زیادی از اعداد ترامتناهی می‌شود. چند ماه بعد از کار دانژوا، ریاضیدان روسی ن. لوزین[7] انتگرال دانژوا را با تعریف معادل مفهوم پیوستگی مطلق تعمیم‌یافته ارتباط داد و اولین تعریف توصیفی از انتگرال دانژوا را ارائه داد که به‌دلیل سادگی، امروزه به‌جای تعریف اصلی دانژوا استفاده می‌شود. برای شرح مختصری از تعریف اولیهٔ دانژوا، مرجع [۱۸] را ببینید.

---

1) Ralph Henstock (1925-2007) 2) Edward J. McShane(1904-1989) 3) Hans Hahn
4) R. Baire 5) transfinite numbers 6) totalization 7) N. Lusin

تعریف ۱.۲. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را بر مجموعهٔ $E \subseteq [a,b]$

۱) پیوستهٔ مطلق[1] گوییم اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری که $\sum_{i=۱}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$ که در آن $\{[c_i, d_i] : ۱ \leq i \leq n\}$ مجموعهٔ متناهی و دلخواه از بازه‌هایی با درون مجزا است طوری که نقاط انتهایی آن‌ها در E قرار دارد و $\sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i) < \delta$.

۲) پیوستهٔ مطلق تحدیدی[2] گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\sum_{i=۱}^{n} \omega(f, [c_i, d_i]) < \varepsilon$ برای هر مجموعهٔ متناهی $\{[c_i, d_i] : ۱ \leq i \leq n\}$ از بازه‌هایی که درون مجزا دارند و نقاط انتهایی آن‌ها در E قرار دارد و $\sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i) < \delta$. یادآوری می‌کنیم که $\omega(f, [c,d])$ نوسان تابع روی بازهٔ $[c,d]$ است:

$$\omega(f, [c,d]) = \sup\{|f(y) - f(x)| : c \leq x \leq y \leq d\}.$$

۳) پیوستهٔ مطلق تعمیم‌یافته[3] نامیم هرگاه تحدید f به E پیوسته باشد و E را بتوان به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌هایی نوشت که f روی آن‌ها پیوسته مطلق است. تابع f را پیوسته مطلق تعمیم‌یافتهٔ تحدیدی روی E گوییم هرگاه E را بتوان به‌صورت اجتماع شمارا از مجموعه‌هایی نوشت که f روی آن‌ها پیوستهٔ مطلق تحدیدی است.

تعریف آشنای مجموعهٔ پوچ[4] را که اغلب در صورت‌بندی قضیه‌ها استفاده می‌شود، یادآوری می‌کنیم. $N \subset \mathbb{R}$ پوچ است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ خانوادهٔ شمارا $\{I_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از بازه‌های باز یافت شود به‌طوری که

$$N \subseteq \bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$

که در آن $\ell(I)$ طول بازهٔ I را نشان می‌دهد. همچنین گوییم خاصیت P تقریباً همه‌جا روی مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است هرگاه مجموعهٔ نقاطی از A که خاصیت P را ندارند، مجموعه‌ای پوچ باشد.

یادآوری می‌کنیم که تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر تابع پیوستهٔ مطلق F یافت شود که $F' = f$ تقریباً همه‌جا؛ برای اثبات [۱۱] را ببینید. انتگرال دانژوا به‌نوعی تعمیم همین خاصیت مشخص‌کنندهٔ انتگرال لبگ است. اکنون آماده‌ایم تعریف انتگرال دانژوا را مطابق رویکرد لوزین بیان کنیم.

---

1) absolutely continuous 2) restricted absolutely continuous 3) generalized absolutely continuous 4) null set

تعریف ۲.۲. [**لوزین، ۱۹۱۲**] تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر دانژوا است هرگاه تابع پیوسته مطلق تعمیم‌یافتهٔ تحدیدی $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ یافت شود به‌طوری که $F' = f$ تقریباً همه‌جا روی $[a,b]$.

انتگرال دانژوا خواص معمول انتگرال ریمان و لبگ مانند خطی بودن و مثبت بودن را داراست. دو قضیهٔ زیر که انگیزهٔ اصلی دانژوا برای معرفی انتگرال جدید بوده است، تقریباً بدون زحمت زیاد قابل اثبات‌اند.

قضیه ۳.۲. **(قضیهٔ اساسی حسابان، صورت اول)** فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر باشد. در این صورت f' انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a)$$

برای هر $x \in [a,b]$.

قضیهٔ بالا در نظریهٔ انتگرال لبگ نیز برقرار است، اما باید دقت کرد شرط انتگرال‌پذیری f' در آنجا جزء مفروضات قضیه است و نه حکم قضیه.

قضیهٔ ۴.۲. **(قضیهٔ اساسی حسابان، صورت دوم)** فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر دانژوا باشد. قرار دهید $F(x) = \int_a^x f$. در این صورت تابع F روی $[a,b]$ پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیر است و داریم $F' = f$ تقریباً همه‌جا.

مثال زیر نشان می‌دهد که دامنهٔ توابع انتگرال‌پذیر دانژوا وسیع‌تر از توابع انتگرال‌پذیر لبگ است.

مثال ۵.۲. تابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

در نظر بگیرید. f انتگرال‌پذیر لبگ نیست در حالی‌که طبق قضیهٔ ۳.۲، انتگرال‌پذیر دانژوا است. در واقع f مشتق تابع زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر می‌توانید مثلاً به [۱۱] مراجعه کنید.

۳. انتگرال پرون

در سال ۱۹۱۴، ا. پرون گسترش دیگری از انتگرال لبگ ارائه کرد که در آن مشتق هر تابع دلخواه، انتگرال‌پذیر است [۱۷]. کار وی مستقل از دانژوای فرانسوی بود و رویکردی کاملاً متفاوت نیز داشت. پرون خاصیتی از انتگرال لبگ را برای تعمیم برمی‌گزیند که اکنون آن را شرح می‌دهیم.

برای این کار، نیاز به چند تعریف داریم. در ادامه، مجموعهٔ اعداد حقیقی گسترش‌یافته را با $\mathbb{R}^*$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ یک تابع باشد.

۱ــ مشتق بالایی f در نقطهٔ x عبارت است از

$$\overline{D}\,f(x)=\limsup_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

و مشتق پایینی f در نقطهٔ x عبارت است از

$$\underline{D}\,f(x)=\liminf_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

۲ــ $U:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ را یک تابع مافوق[1] برای f روی $[a,b]$ می‌نامند هرگاه $\underline{D}\,U(x)>-\infty$ و $\underline{D}\,U(x)\geq f(x)$ برای هر $x\in[a,b]$.

۳ــ $V:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ را یک تابع مادون [2] برای f روی $[a,b]$ می‌نامند هرگاه $\overline{D}\,V(x)<\infty$ و $\overline{D}\,V(x)\leq f(x)$ برای هر $x\in[a,b]$.

برای راحتی، عبارت $U(b)-U(a)$ را با U_a^b نشان می‌دهیم. به همین ترتیب، برای $V(b)-V(a)$ عمل می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان دید اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، تابع $f-f(a)$ یک تابع مافوق و در عین‌حال مادون برای f روی $[a,b]$ است.

قضیهٔ زیر، انتگرال لبگ را برحسب مفاهیم تعریف شده در بالا مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۳. تابع اندازه‌پذیر $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ انتگرال‌پذیر لبگ است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon>0$ توابع پیوستهٔ مطلق به‌ترتیب، مافوق و مادون U و V برای f روی $[a,b]$ یافت شود که $U_a^b-V_a^b<\varepsilon$.

می‌توان نشان داد اگر U و V به‌ترتیب، توابع مافوق و مادون برای f روی $[a,b]$ باشند، آن‌گاه تابع $U-V$ روی $[a,b]$ صعودی است. پس $V_a^b\leq U_a^b$ و $0\leq U_c^d-V_c^d\leq U_a^b-V_a^b$ برای هر $c,d\in[a,b]$. به‌ویژه

$$\sup\{V_a^b:\ \text{یک تابع مادون برای } f \text{ است } V\}\leq\inf\{U_a^b:\ \text{یک تابع مافوق برای } f \text{ است } U\}$$

و دو طرف نامساوی، متناهی هستند.

تعریف انتگرل پرون به‌قرار زیر است.

---

1) major 2) minor

تعریف ۳.۳. [**پرون، ۱۹۱۴**] تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ انتگرال‌پذیر پرون است هرگاه حداقل یک تابع مافوق و یک تابع مادون روی $[a,b]$ داشته باشد و

$$\inf\{U_a^b:\ \text{یک تابع مافوق برای } f \text{ است } U\}=\sup\{V_a^b:\ \text{یک تابع مادون برای } f \text{ است } V\}$$

مقدار مشترک فوق، انتگرال پرون تابع f روی $[a,b]$ نامیده و با $\int_a^b f$ نمایش داده می‌شود.

انتگرال پرون نیز تمامی خواص معمول انتگرال، مانند خطی بودن و مثبت بودن را داراست؛ مرجع [۵] را ببینید.

۴. انتگرال هنستاک ـ کورزویل

در خلال دهۀ ۱۹۵۰، ی. کورزویل در حین مطالعاتش دربارۀ معادلات دیفرانسیل [۱۲]، نوعی انتگرال، شبیه انتگرال ریمان را ارائه کرد. این نوع انتگرال دارای این خاصیت جالب است که به‌وسیله آن، هر تابع پیوسته از مشتق آن قابل بازیابی است. کمی بعد از کورزویل و البته مستقل از او، ر. هنستاک نیز تعمیم مشابهی از انتگرال ریمان به‌دست می‌آورد. وی در کتابی که در همین زمینه منتشر کرد [۱۰]، می‌نویسد: «از سال ۱۹۵۸، به‌منظور ساده‌کردن نظریۀ انتگرال‌های عامل ـ همگرا[۱]، رویکردهای وارد[۲]، جفری[۳] و میلر[۴] را ترکیب کردم و نتیجۀ آن، مفهوم N ـ انتگرال شد. نظریه‌های مطرح شده در [۷] و [۹] روشن کرد که یک انتگرال توصیفی، یعنی انتگرال N ـ تغییراتی قابل تعریف است. صورت ساده‌ای از این نظریه که در آن همگرایی عامل‌ها حذف شده است انتگرال تغییراتی معرفی شده در [۶] است. گام بعدی که ما را به گونه‌ای از انتگرال ریمانی برمی‌گرداند، انتگرال کامل ریمانی تعریف شده در [۸] است. این گونه انتگرال، انتگرال‌های ریمان، ریمان ـ اشتیلیس، پولارد ـ گچل، بورکیل، لبگ، دانژوا، پرون و انتگرال‌های وارد و انتگرال‌های رادون[۵] برای توابع پیوسته را شامل می‌شود.»

در تعریف انتگرال ریمان، رفتار تابع در انتخاب افراز خیلی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. ملاک خوب بودن افراز با کوچکتر بودن اندازۀ افراز از عدد معینی، مشخص می‌شود و توجهی به انتخاب نقطۀ بینی نیز نمی‌شود. افراز، مستقل از رفتار تابع انتخاب می‌شود. اما در این تعریف جدید، آزادی بیشتری به انتخاب افراز داده می‌شود. در واقع، هنستاک و کورزویل صورت کمی پیچیده‌تر از تعریف ریمان را استفاده می‌کنند. این تعریف همان سادگی و زیبایی انتگرال ریمان را داراست و در عین‌حال بسیار قدرتمندتر از نظریۀ لبگ است.

قبل از معرفی انتگرال هنستاک ـ کورزویل، نیاز به برخی تعاریف داریم که اکنون آن‌ها را بیان می‌کنیم. در تعریف زیر که همان تعریف معمول در انتگرال ریمان است، به نقطۀ بینی بیشتر اهمیت داده شده است.

1) factor-convergent 2) Ward 3) Jeffery 4) Miller 5) J. Radon

تعریف ۱.۴. بازهٔ بسته و کراندار $I = [a,b]$ را در نظر بگیرید. یک افراز برای I عبارت است از مجموعهٔ متناهی $\mathcal{P} = \{I_i : i = ۱, ۲, \dots, n\}$ از زیربازه‌های بسته و کراندار I_i با درون مجزا به‌طوری که $I = \bigcup_{i=۱}^{n} I_i$. چنانچه برای هر زیربازهٔ I_i یک نقطهٔ $t_i \in I_i$ نسبت داده شود، نقطهٔ t_i را یک نشان[1] برای I_i می‌نامیم و در این حالت، افراز $\mathcal{P}$ را یک افراز نشان‌دار[2] می‌گوییم و می‌نویسیم

$$\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i) : ۱ \leq i \leq n\}$$

و یا به‌طور ساده‌تر $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$. اگر $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ یک افراز نشان‌دار باشد، منظور از مجموع ریمانی تابع $f : I \to \mathbb{R}$ نظیر $\dot{\mathcal{P}}$ عبارت است از

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\ell(I_i),$$

که در آن $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i را نشان می‌دهد.

تعریف زیر تمایز اساسی بین رویکرد ریمان و هنستاک ــ کورزویل را در نگاه به افرازها نمایان می‌کند.

تعریف ۲.۴. فرض کنید $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

۱ــ تابع $\delta : I \to \mathbb{R}$ را یک پیمانه[3] روی I می‌نامیم هرگاه $\delta(t) > ۰$ برای هر $t \in I$.

۲ــ فرض کنید $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ یک افراز نشان‌دار باشد. اگر δ یک پیمانه روی I باشد، گوییم افراز $\dot{\mathcal{P}}$، δ ــ ظریف[4] است هرگاه برای هر i داشته باشیم

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)].$$

گاهی اوقات به جای δ ــ ظریف، می‌گوییم $\dot{\mathcal{P}}$ مقید به[5] δ است و می‌نویسیم $\dot{\mathcal{P}} << \delta$.

مثال ۳.۴. اگر $\delta > ۰$ عدد ثابتی باشد، می‌توان $\delta : I \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $\delta(t) = \delta$ برای هر $t \in I$ تعریف کرد. چنین پیمانه‌ای را پیمانهٔ ثابت می‌نامند. یک افراز نشان‌دار، δ ــ ظریف است هرگاه $I_i \subseteq [t_i - \delta, t_i + \delta]$. از این‌رو خواهیم داشت $\ell(I_i) \leq ۲\delta$ برای هر i.

قضیه‌ای منسوب به پیر کوزن[6] نشان می‌دهد که برای هر بازهٔ فشرده و هر تابع پیمانه روی آن، همواره یک افراز δ ــ ظریف موجود است. اکنون انتگرال به مفهوم هنستاک ــ کورزویل را معرفی می‌کنیم. شباهت‌ها و تفاوت‌های این تعریف با تعریف انتگرال ریمان کاملاً مشهود است.

تعریف ۴.۴ [کورزویل، ۱۹۵۸ ــ هنستاک، ۱۹۶۰] تابع $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ را انتگرال‌پذیر هنستاک ــ کورزویل نامند، هرگاه عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $\varepsilon > ۰$، پیمانه δ_ε روی I موجود باشد چنان‌که برای هر افراز نشان دار δ_ε ــ ظریف $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}$ داشته باشیم

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon.$$

---

1) tag 2) tagged partition 3) gauge 4) fine 5) subordinate 6) P. Cousin

مقدار انتگرال را با $\int_I f$ یا $\int_I f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم. گاهی اوقات انتگرال‌پذیری به مفهوم هنستاک ــ کورزویل را انتگرال ریمان تعمیم‌یافته می‌نامند. چنانچه $E \subseteq I$، گوییم f روی E انتگرال‌پذیر است هرگاه $f\chi_E$ انتگرال‌پذیر باشد. مجموعهٔ توابع انتگرال‌پذیر ریمان تعمیم‌یافته روی I را با $\mathcal{R}^*(I)$ نشان می‌دهیم.

در مثال زیر، انتگرال‌پذیری یک تابع آشنا را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۴. تابع دیریکله $D : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست ولی دارای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته، برابر صفر است. برای اثبات، فرض کنید $\{r_i\}_{i=۱}^{\infty}$ شمارشی از اعداد گویا در بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد. تابع $\delta : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$\delta(x) = \begin{cases} ۱, & x \notin \mathbb{Q} \\ ۲^{-i}c, & x = r_i \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $c > ۰$ عدد ثابتی است. حال می‌توان ثابت کرد که تعریف انتگرال ریمان تعمیم‌یافته برای $A = ۰$ برقرار است، پس $\int_۰^۱ D(x)\,dx = ۰$.

اگر تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد، با انتخاب پیمانهٔ ثابت می‌توان به‌راحتی انتگرال‌پذیری هنستاک ــ کورزویل آن را نشان داد. بنابراین اگر تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد، انتگرال‌پذیر هنستاک ــ کورزویل نیز هست و مقدار این دو انتگرال با یکدیگر برابر است. خواص پایه‌ای انتگرال، برای انتگرال هنستاک ــ کورزویل نیز برقرار است؛ مرجع خواندنی [۱] را ببینید. انتگرال ریمان تعمیم‌یافته نیز همانند انتگرال‌های دانژوا و پرون انتگرال مطلق نیست. به عبارت دیگر، اگر تابعی انتگرال پذیر باشد، لزوماً قدرمطلق آن انتگرال‌پذیر نیست. این مطلب را مثال زیر نشان می‌دهد.

مثال ۶.۴. فرض کنید $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۰, & x = ۱ \\ \frac{(-۱)^{k+۱}۲^k}{k}, & x \in [c_{k-۱}, c_k), \end{cases}$$

که در آن $c_k = ۱ - ۱/۲^k$ برای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$. می‌توان نشان داد که $\int_۰^۱ f = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k+۱}}{k}$. در حالی‌که $\int_۰^۱ |f|$ موجود نیست.

کاستی دیگری که انتگرال ریمان تعمیم‌یافته و همچنین انتگرال‌های دانژوا و پرون دارند این است که نسبت به عمل ضرب بسته نیستند به این معنی که ضرب دو تابع انتگرال‌پذیر لزوماً انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۷.۴. f را همان تابع مثال ۶.۴ در نظر بگیرید و تابع $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ (-1)^{k+1}, & x \in [c_{k-1}, c_k) \end{cases}$$

توابع f و g هر دو انتگرال‌پذیرند در حالی که $fg = |f|$ انتگرال‌پذیر نیست.

سادگی و زیبایی تعریف انتگرال تعمیم‌یافتهٔ ریمان چشمگیر است. دو موضوع هست که قدرت یک نظریهٔ انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد: قضایای اساسی حسابان و دیگری قضایای عبور حد از انتگرال. برای بررسی این موضوع، ابتدا چند تعریف می‌آوریم.

تعریف ۸.۴. فرض کنید $I = [a, b]$ و $f, F : I \to \mathbb{R}$.

۱ــ F یک تابع اولیه یا پادمشتق f روی I است هرگاه F' موجود باشد و $F'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$.

۲ــ F یک c ــ اولیهٔ f است هرگاه F روی I پیوسته باشد و به‌جز روی یک مجموعهٔ شمارا، F' همه‌جا موجود و برابر f باشد.

۳ــ F یک a ــ اولیهٔ f است هرگاه F روی I پیوسته باشد و به‌جز روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر، F' همه‌جا موجود و برابر f باشد.

۴ــ قرار دهید $F(x) = \int_a^x f$، گوییم $F : I \to \mathbb{R}$ یک انتگرال نامعین f روی I است.

قضیه ۹.۴. **(قضیهٔ اساسی حسابان، صورت اول)** اگر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دارای یک c ــ اولیهٔ F روی $[a, b]$ باشد، آن‌گاه $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ و

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

مثال زیر کاربردهایی از قضیهٔ فوق را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰.۴. الف) فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$، $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $f(0) = 0$. در این صورت $F(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2}$ یک c ــ اولیهٔ تابع f است، در نتیجه

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = F(1) - F(0) = -1/2.$$

ب) فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ و $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$ برای $0 < x \leq 1$ و $f(0) = 0$. تابع f' نه‌تنها انتگرال‌پذیر ریمان نیست بلکه دارای انتگرال لبگ نیز نمی‌باشد. اما طبق قضیهٔ بالا، f'

دارای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته است و داریم $\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = -1$. برای جزئیات بیشتر می‌توانید مثلاً به [۱۱] مراجعه کنید.

مثال بالا پیشرفت قابل توجهی را نه‌تنها نسبت به انتگرال ریمان بلکه نسبت به انتگرال لبگ نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۴. (قضیهٔ اساسی حسابان، صورت دوم) اگر $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$، آن‌گاه انتگرال نامعین f روی I پیوسته و تقریباً همه‌جا مشتق پذیر است و داریم $F'(x) = f(x)$.

سؤال طبیعی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا در دو قضیهٔ بالا نمی‌توان نتایج را به‌صورت قوی‌تری بیان کرد؟ مثلاً در قضیهٔ ۹.۴، c ــ اولیه را با a ــ اولیه و در قضیهٔ ۱۱.۴، تقریباً همه‌جایی را با مجموعه‌ای شمارا عوض کرد؟ جواب هر دو سؤال منفی است.

مثال ۱۲.۴. فرض کنید F_1، F_2، ... مجموعه‌هایی باشند که در ساخت مجموعهٔ کانتور معرفی می‌شوند. به عبارت دیگر، F_n اجتماع 2^n بازه به‌صورت $[k/3^n, (k+1)/3^n]$ است. ابتدا تابع $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ را با $f_1(0) = 0$، $f_1(1) = 1$ و $f_1(x) = 1/2$ برای $x \in F \setminus F_1$ و در دیگر نقاط به‌صورت تکه‌ای خطی تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب، $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ با $f_n(0) = 0$، $f_n(1) = 1$ و روی بازه‌هایی که از $[0,1]$ حذف می‌شوند تا F_n ساخته شود، به‌ترتیب برابر مقادیر $1/2^n$، $2/2^n$، ...، $(2^n - 1)/2^n$ تعریف می‌شود. در نقاط دیگر به‌صورت تکه‌ای خطی تعریف می‌شود. حال تابع کانتور ــ لبگ را برابر $\lim_{n\to\infty} f_n$ تعریف می‌کنیم. تابع کانتور ــ لبگ، پیوسته و صعودی است و برای هر $x \in [0,1] \setminus F$ داریم $f'(x) = 0$. چون F مجموعه‌ای پوچ است، پس f یک a ــ اولیه برای تابع ثابت صفر است. در عین‌حال داریم

$$\int_0^1 f' = 0 \neq f(1) - f(0) = 1.$$

به‌علاوه اگر قرار دهیم $\varphi = \chi_F$، آن‌گاه چون F مجموعه‌ای پوچ است، φ انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_0^1 \varphi = 0$. در نتیجه $\Phi(x) = \int_0^x \varphi = 0$ برای هر $x \in [0,1]$. از اینجا نتیجه می‌گیریم $\Phi'(x) = 0$ برای هر x. اما از طرفی داریم $\varphi(x) = 1$ برای هر $x \in F$. پس $\Phi'(x) \neq \varphi(x)$ روی یک مجموعهٔ ناشمارا. به این ترتیب جواب سؤال دوم نیز منفی است.

قضایای همگرایی معمول در نظریهٔ انتگرال‌گیری لبگ عیناً برای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته برقرارند. دو نمونه از مشهورترین و پرکاربردترینِ این قضیه‌ها را ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۴.(همگرایی تسلطی) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و حد دنبالهٔ $(f_n(x))$ برای تقریباً هر x موجود باشد. قرار دهید

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & \text{در صورت وجود} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید توابع انتگرال‌پذیر f و g موجود باشند به‌طوری که $g(x) \le f_n(x) \le h(x)$ برای هر n و $x \in [a,b]$. آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

قضیه ۱۴.۴. (همگرایی کراندار) فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و حد دنبالهٔ $(f_n(x))$ برای تقریباً هر x موجود باشد. قرار دهید

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & \text{در صورت وجود} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر عدد M موجود باشد که $|f_n(x)| \le M$ برای هر n و $x \in [a,b]$، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

قضیهٔ زیر که نوعی شرط لازم و کافی برای عبور حد از انتگرال ارائه می‌کند، منسوب به گوردن[1] است.

قضیه ۱۵.۴. [گوردن، ۱۹۹۰] فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ و f حد نقطه‌ای آن باشد. در این صورت

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$، تابع پیمانهٔ δ_ε روی $[a,b]$ یافت شود به‌طوری که برای هر افراز δ_ε ـ ظریف $\mathcal{P}$ عدد طبیعی k_0 موجود باشد به‌قسمی که برای هر $k \ge k_0$،

$$\left| S(f,\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_k \right| \le \varepsilon.$$

یکی دیگر از مزایای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته این است که نیاز به بررسی جداگانهٔ انتگرال‌های ناسره (کُشی ـ ریمان) نیست. در واقع قضیهٔ زیر که هایکه[2] در ۱۹۲۱ برای انتگرال پرون ثابت کرد، نشان می‌دهد چیزی به اسم انتگرال ناسره برای انتگرال ریمان تعمیم‌یافته وجود ندارد.

1) R. A. Gordon 2) H. Heike

قضیه ۱۶.۴. [**هایکه، ۱۹۲۱**] تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $c\in(a,b)$، تحدید f به $[a,c]$ انتگرال‌پذیر باشد و

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f=A$$

در این حالت $A=\int_a^b f$.

مثال ۱۷.۴. تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ که با $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$ روی $(0,1]$ و $f(0)=0$ تعریف می‌شود، انتگرال‌پذیر نیست. در واقع داریم $f(x)=(\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{x})'$ برای هر $x\in[c,1]$ که $0<c<1$. بنابراین

$$\int_c^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}dx=\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos\pi/4).$$

چون طرف راست هنگامی که $c\to 0^+$، موجود نیست، پس $\int_0^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}dx$ نیز موجود نیست.

هم نظریهٔ ریمان و هم نظریهٔ لبگ برای پرداختن به انتگرال توابع تعریف شده روی بازه‌های بی‌کران نیاز به تعریف مجدد و نوعی فرایند حدی دارند. اما انتگرال ریمان تعمیم‌یافته این نقص را ندارد. در واقع می‌توان تعریفی ارائه کرد که هم برای بازه‌های فشرده و هم بازه‌های بی‌کران قابل استفاده باشد. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد. تعریف زیر متداول‌ترین آن‌هاست.

در مجموعهٔ اعداد حقیقی گسترش‌یافته، قرارداد می‌کنیم $0\times\infty=\infty\times 0=0$. فرض کنید $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد. یک افراز نشان‌دار از $[a,\infty]$ در $\mathbb{R}^*$ عبارت است از

$$\dot{\mathcal{P}}=\{([x_0,x_1),t_1),\cdots,([x_{n-1},x_n),t_n),([x_n,x_{n+1}),t_{n+1})\}$$

که $x_0=a$ و $x_{n+1}=\infty$. تعریف می‌کنیم $f(\infty)=0$. یک پیمانه روی $[a,\infty]$ عبارت است از تابع اکیداً مثبت δ روی $[a,\infty]$. گوییم افراز $\dot{\mathcal{P}}$، δ ـ ظریف است اگر زیربازه‌های کراندار $\dot{\mathcal{P}}$ در شرط

$$[x_{i-1},x_i]\subset[t_{i-1}-\delta(t_{i-1}),t_i+\delta(t_i)]$$

برای هر $i=1,\ldots,n$ صدق کنند و برای بازهٔ نامتناهی $[x_n,\infty]$ داشته باشیم

$$[x_n,\infty]\subset[\frac{1}{\delta(\infty)},\infty].$$

توجه کنید که δ ـ ظریف بودن $\dot{\mathcal{P}}$ ایجاب می‌کند $t_{n+1}=\infty$. بنابراین در مجموع ریمانی

$$S(f,\dot{\mathcal{P}})=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

همهٔ جملات متناهی هستند. اکنون می‌توان تعریف زیر را ارائه کرد.

تعریف ۱۸.۴. فرض کنید $I = [a, \infty)$ و $f : I \to \mathbb{R}$. گوییم f انتگرال‌پذیر ریمان تعمیم‌یافته روی $[a, \infty)$ است هرگاه عدد حقیقی A یافت شود که برای هر $\varepsilon > 0$ پیمانهٔ δ_ε روی $[a, \infty]$ موجود باشد به‌طوری که اگر $\dot{\mathcal{P}}$ یک افراز δ_ε ـ ظریف باشد، آن‌گاه

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon.$$

در این حالت می‌نویسیم $\int_I f = \int_a^\infty f = A$.

با تغییرات مناسبی می‌توان انتگرال را روی بازهٔ $(-\infty, a]$ و به‌طور کلی روی $(-\infty, \infty)$ تعریف کرد. توجه کنید تعریف بالا با تعریفی که قبلاً روی فاصلهٔ فشرده بیان کردیم، سازگار است: کافی است f را خارج از فاصلهٔ فشرده برابر صفر تعریف کنیم. با این گسترش، برخی از قضایای گفته شده برای فاصله‌های فشرده نیاز به بازبینی مجدد دارند. مثلاً قضیهٔ همگرایی یکنواخت دیگر برقرار نیست.

مثال ۱۹.۴. فرض کنید $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ و $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}$، تابع f_k روی بازهٔ $[0, \infty)$ انتگرال‌پذیر است و دنبالهٔ تابعی (f_k) همگرای یکنواخت به تابع ثابت صفر است. در عین‌حال داریم $\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k = 1$ ولی $\int_0^\infty \lim_{k\to\infty} f_k = 0$.

سادگی و قدرت نظریهٔ انتگرال هنستاک ــ کورزویل شایستگی آن را دارد که در دوره‌های کارشناسی به‌جای انتگرال ریمان تدریس شود. مراجع [۱]، [۱۱]، [۱۳]، [۱۶] و [۲۰] می‌توانند منابع مناسبی برای این کار باشند.

۵. هم‌ارزی سه نظریه

واقعیت تعجب‌برانگیز این است که سه نظریهٔ انتگرال دانژوا، پرون و هنستاک ــ کورزویل علی‌رغم رویکردهای کاملاً متفاوت، بایکدیگر هم‌ارزند. هم‌ارز بودن انتگرال هنستاک ــ کورزویل و انتگرال پرون که در واقع به‌راحتی از تعریف به‌دست می‌آید، بلافاصله بعد از معرفی انتگرال هنستاک ــ کورزویل معلوم شد.

در سال ۱۹۲۱، هایکه نیز ثابت کرد هر تابع انتگرال‌پذیر دانژوا، انتگرال‌پذیر پرون نیز هست. عکس این مطلب را مستقلاً پی. اس. الکساندروف[1] در ۱۹۲۴ و اچ. لومان[2] در ۱۹۲۵ نشان دادند. بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم.

1) P. S. Aleksandrof 2) H. Looman

قضیه ۵.۱. فرض کنید $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع باشد. گزاره های زیر هم‌ارزند.

۱ ــ f انتگرال‌پذیر دانژوا است.

۲ ــ f انتگرال‌پذیر پرون است.

۳ ــ f انتگرال‌پذیر هنستاک ــ کورزویل است.

سه نظریهٔ انتگرال مورد بحث، نقطهٔ آغاز متفاوتی را برای تعریف برمی‌گزینند، اما هر سه به قصد بسط و تعمیم قضیه‌های اساسی حسابان و قضیه‌های عبور حد از انتگرال ارائه شده‌اند. این سه نظریه، خانوادهٔ توابع انتگرال‌پذیر را نسبت به انتگرال لبگ گسترده‌تر می‌کنند. هر سه، راه میان‌بری برای رسیدن به نظریه‌ای با قدرتی حداقل در حد نظریهٔ لبگ با پرداخت بهای کمتر را جستجو کرده‌اند. در این بین، نظریهٔ هنستاک ــ کورزویل به‌نظر موفق‌تر است هم به لحاظ سادگی و هم به لحاظ طبیعی بودنِ تعریف آن.

۶. انتگرال مک‌شین

در سال ۱۹۷۳، ادوارد جی. مک‌شین نشان داد که انتگرال لبگ را می‌توان برحسب مجموع‌های ریمانی نیز به‌دست آورد. در واقع با آزاد گذاشتن انتخاب نقاط بینی، دامنهٔ توابع انتگرال‌پذیر از ردهٔ توابع انتگرال‌پذیر به مفهوم هنستاک ــ کورزویل محدودتر می‌شود و آنچه به‌دست می‌آید، انتگرال لبگ است. این روش از این حیث که حداقل روی $\mathbb{R}^n$ نیازی به پروراندن مفهوم اندازه نیست، قابل‌توجه است. وی این رویکرد را در چند مقاله و کتاب که به همین موضوع اختصاص دارد، به‌طور کامل پرورانده است؛ برای مثال [۱۵] و [۱۶] را ببینید.

فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}^*$ بازهٔ بسته (احتمالا بی‌کران) و $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در صورت لزوم، f را خارج از I برابر صفر تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $f(-\infty) = f(\infty) = 0$ تا به $\mathbb{R}^*$ گسترش یابد.

تعریف ۱.۶. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}^*$ بازه‌ای بسته باشد. یک افراز نشان‌دار آزاد[1] از I عبارت است از مجموعهٔ متناهی از زوج‌های مرتب

$$\mathcal{P} = \{(I_i, t_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

به‌طوری که I_iها زیربازه‌های بسته از I هستند، $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$ و درون I_iها از یکدیگر مجزاست و $t_i \in I_i$. نقطهٔ t_i را یک نشان وابسته به I_i می‌نامیم.

منظور از مجموع ریمانی تابع $f : I \to \mathbb{R}$ وابسته به افراز نشان‌دار $\dot{\mathcal{P}}$ عبارت است از

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

1) free tagged partition

تعریف ۲.۶. فرض کنید $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i) : i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ یک افراز نشان‌دار آزاد از بازهٔ بستهٔ $I \subseteq \mathbb{R}^*$ و δ یک پیمانه روی I باشد. گوییم $\dot{\mathcal{P}}$، δ ـ ظریف است اگر برای هر i داشته باشیم

$$I_i \subseteq (x_{i-۱} - \delta(t_i), x_i + \delta(t_i)).$$

با درنظر داشتن دو تعریف بالا، تعریف انتگرال مک‌شین این چنین است.

تعریف ۳.۶. [**مک‌شین، ۱۹۷۳**]فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}^*$ بازه‌ای بسته و $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. گوییم f انتگرال‌پذیر مک‌شین روی I است هرگاه عدد حقیقی A موجود باشد به‌طوری که برای هر $\varepsilon > ۰$ تابع پیمانه δ_ε روی I یافت شود چنان‌که برای هر افراز نشان‌دار آزاد δ ـ ظریف $\dot{\mathcal{P}}$ از I داشته باشیم $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon$.

عدد A را انتگرال مک‌شین f روی I می‌گوییم و با $\int_I f$ نشان می‌دهیم.

از تعریف بالا روشن است که هر تابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل نیز هست و این دو انتگرال با یکدیگر برابرند. انتگرال مک‌شین خواص پایه‌ای انتگرال را داراست؛ برای مثال به [۱۱] مراجعه کنید. توابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، به‌طور مطلق انتگرال‌پذیرند در حالی‌که توابع انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل این چنین نیستند. این مطلب تفاوت بنیادی انتگرال مک‌شین را با انتگرال هنستاک ـ کورزویل نشان می‌دهد. با توجه به این نکته، به‌راحتی می‌توان تابعی ساخت که انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل باشد ولی انتگرال‌پذیر مک‌شین نباشد.

مثال ۴.۶. فرض کنید $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$، $f(۰) = ۰$ و $f(x) = ۲x \cos \frac{\pi}{x^۲} + \frac{۲\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^۲}$ برای $۰ < x \leq ۱$. تابع f انتگرال‌پذیر هنستاک ـ کورزویل است در حالی‌که انتگرال‌پذیر مک‌شین نیست.

قضیهٔ زیر رابطهٔ انتگرال مک‌شین و انتگرال هنستاک ـ کورزویل را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۶. تابع $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر مک‌شین است اگر و تنها اگر انتگرال‌پذیر مطلق هنستاک ـ کورزویل باشد.

بر اساس تعریف انتگرال مک‌شین می‌توان بسیاری از قضایای همگرایی و صورت‌های مختلف قضیهٔ اساسی حسابان را با کلیتی در حد نظریهٔ لبگ، مستقیماً اثبات کرد. اما این مطلب عجیبی نیست، زیرا می‌توان نشان داد هر تابع انتگرال‌پذیر مک‌شین، انتگرال‌پذیر لبگ نیز هست و برعکس. به‌علاوه، مقدار این دو انتگرال با یکدیگر برابر است.

سپاسگزاری: از داوران محترم که نکات سودمندی را متذکر شدند، سپاسگزاری می‌کنیم.

مراجع

[1] R. G. Bartle, *"A modern theory of integration"*, Amer. Math. Soc., GSM Vol. 32, Rhode Island, 2001.

[2] A. Denjoy, " Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue", *Compt. Rend.*, **154**(1912), 859-862.

[3] A. Denjoy, "Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale", *Compt. Rend.*, **154**(1912), 1075-1078.

[4] A. Denjoy, "Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables", *Ann. Ecole. Norm. Sup.*, **33**(1916), 127-222.

[5] R. A. Gordon, *"The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock"*, Amer. Math. Soc. GSM Vol.4, Rhode Island, 1994.

[6] R. Henstock, "A new descriptive definition of the Ward integral", *J. London. Math. Soc.*, **35**(1960), 43-48.

[7] R. Henstock, "The equivalence of generalized forms of the Ward, variational, Denjoy-Stieltjes and Perron-Stieltjes integral", *Proc. London Math. Soc.*, **10**(1960), 281-303.

[8] R. Henstock, "Definition of Riemann type of the variational integrals", *Proc. London. Math. Soc.*, **11**(1961), 402-418.

[9] R. Henstock, "N-variation and N-variational integrals of set functions", *Proc. London. Math. Soc.*, **11**(1961), 109-133.

[10] R. Henstock, *The theory of integration*, Butterworths, London, 1963.

[11] D. S. Kurtz and C. Swartz, *The theories of integration*, World Scientific, Singapore, 2004.

[12] J. Kurzweil, "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter", *Czech. Math. J.*, **82**(1957), 418-449.

[13] P. Lee and R. Vyborny, *The integral: an easy approach after Henstock and Kurzweil*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[14] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1980.

[15] E. J. McShane, “A unified theory of integration”, *Amer. Math. Monthly*, **80**(1973), 349-359.

[16] E. J. McShane, *Unified integration*, Academic Press, New York, 1983.

[17] O. Perron, “Über den Integralbegriff”, *Sitzber Heidelberg. Akad. Wiss. Abt.*, **16** (1914), 1-16.

[18] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[19] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[20] C. Swartz, *Introduction to gauge integrals*, World Scientific, Singapore, 2001.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۷ (تابستان ۱۳۹۰) صص. ۳۷ تا ۵۶

گفتگو با بردلی افرون*

سوزان هلمز، کارل موریس و راب تیبشیرانی

مترجم: کسری علیشاهی

بردلی افرون استاد آمار و آمارزیستی در دانشگاه استنفورد است. کارهای تحقیقاتی او ترکیبی از زمینه‌های نظری و کاربردی را در برمی‌گیرد که شامل رویکرد بیزی تجربی، تحلیل داده‌های بقا، خانواده‌های نمایی، روش‌های بوت‌استرپ[۱] و جکنایف[۲] و بازه‌های اطمینان می‌شود. بیشتر کارهای عملی او از همکاری با پروژه‌های زیست‌پزشکی در دانشکدهٔ پزشکی استنفورد نشأت گرفته است و تعدادی مقاله مرتبط با اخترشناسی و فیزیک نیز نوشته است. مقالات نظری او نیز اغلب با مسائل مشخص و ملموس عملی آغاز می‌شوند. در متن پیش‌رو، هر سه مصاحبه کننده از همکاران علمی نزدیک او هستند.

بردلی در می سال ۱۹۳۸ در سن پائول در مینسوتا به دنیا آمد. پدر و مادر او، اشر و مایلز افرون، مهاجران یهودیِ روس‌تبار بودند. برَد با بورس تحصیلی به کلتِک آمد و در سال ۱۹۶۰ در رشتهٔ ریاضی از آنجا فارغ‌التحصیل شد. او از پاییز همان سال دانشجوی استنفورد شد و در نهایت، دکترای خود را زیر نظر روپرت میلر[۳] و هرب سولومون[۴] از دانشکدهٔ آمار دریافت کرد. از دیگر اعضای هیات علمی دانشکدهٔ آمار در آن زمان می‌توان از چارلز استاین[۵]، هرمان چرنف، مانی پارزن، لینکلن موزس و اینگرام اُلکین[۶] نام برد. برد از سال ۱۹۶۰ تاکنون صرف‌نظر از گذراندن دوره‌های فرصت مطالعاتی در هاروارد، امپریال کالج و برکلی، در استنفورد بوده است. او مسئولیت‌های متعددی در دانشگاه داشته است: رئیس دانشکدهٔ آمار، معاون گروه علوم، دبیر شورای دانشگاه و رئیس کمیتهٔ مشاور دانشگاه و در حال حاضر مسؤول برنامهٔ ریاضیات کاربردی دورهٔ کارشناسی است.

*) Holmes, S. & Morris, C. & Tibshirani, R., "Bradley Efron: A Conversation with Good Friends", *Statistical Sciences*, **18**(2003), 268-281.

1) Bootstrap method 2) Jackknife 3) Rupert Miller 4) Herb Solomon

5) Charles Stein 6) Ingram Olkin

افتخارات علمی افرون شامل دکترای افتخاری از شیکاگو، مادرید و اُسلو، جایزهٔ مک آرتور، عضویت در آکادمی ملی علوم و آکادمی علم و هنر آمریکا، عضویت در مؤسسه آمار ریاضی و انجمن آمار آمریکا، مدال ویلکز، جایزهٔ پارزن، جایزهٔ رائو، و جایزهٔ آماردان برجسته از شاخهٔ شیکاگوی انجمن آمار آمریکا می‌شود. او در سلسله سخنرانی‌های ریتس، والد و فیشر سخنران مدعو بوده است و صاحب کرسی ماکس استاین[1] به‌عنوان استاد علوم تجربی و انسانی در استنفورد است. افرون ویراستار مجلهٔ انجمن آمار آمریکا و رئیس مؤسسهٔ آمار ریاضی بوده است و به‌عنوان رئیس آیندهٔ انجمن آمار آمریکا انتخاب شده است که از ۲۰۰۴ رسماً در این سمت قرار خواهد گرفت. بخشی از این مصاحبه برگرفته از گفتگوی ضبط شده در انجمن آمار آمریکا در ۵ نوامبر ۲۰۰۱ با حمایت مالی مرکز تحقیقات فیزر است و بقیهٔ آن در دانشکدهٔ آمار دانشگاه استنفورد انجام شده است.

۱. سال‌های آغازین

تیبشیرانی: بیا از خیلی قبل شروع کنیم، اولین بار چطور با آمار مواجه شدی؟

افرون: پدر من در سن پائول، مینسوتا، فروشنده و رانندهٔ کامیون بود ولی عشق عجیبی به ریاضیات داشت. او به‌دقت، نتایج مسابقات بیسبال و بولینگ را دنبال می‌کرد و این اثری بیش از آنچه تصور می‌کردم بر من گذاشت. وقتی من به کلتک رفتم، در آنجا با آدم‌های فوق‌العاده باهوشی آشنا شدم ولی تقریباً هیچ خبری از آمار نبود. ما فقط یک درس آمار از کتاب سای درمن[2] گذراندیم. من از یکی از اساتیدم، مورگان وارد[3]، پرسیدم که آیا چیز بیشتری هست که بتوانم بخوانم و او کتاب کرامر را به من داد که از اول تا آخرش را خواندم. به نظرم کتاب مناسبی بود. کرامر این کتاب را در انزوا و در طول جنگ جهانی دوم نوشته است و من هم کتاب را در انزوا در کلتک خواندم. تصمیم گرفتم رشتهٔ آمار را انتخاب کنم چون آینده‌ای به‌عنوان یک ریاضیدان قرن بیستمی برای خودم نمی‌دیدم. من برای قرن نوزدهم مناسب بودم ولی توانایی ذهنی درک تجریدی که ریاضیات مدرن را در بر گرفته نداشتم، برای همین به سمت آمار رفتم. با برکلی وارد مذاکره شدم و در مصاحبهٔ خیلی خوبی با دو نفر به نام جرزی و اریک هم شرکت کردم که خیلی با من مهربان بودند ولی در نهایت به استنفرد متمایل شدم. وقتی آنجا رفتم، متوجه شدم که در دانشکدهٔ ریاضی ثبت نام شده‌ام چون استاد راهنمایم به آن‌ها گفته بود که من احتمالاً علاقه‌مند هستم که ریاضیات را ادامه بدهم. سال اول را در دانشکدهٔ ریاضی گذراندم و بعد به آمار تغییر رشته دادم. همان موقع بود که من و کارل، که اولین بار در ۱۹۵۷ به‌عنوان دانشجوی سال اول در کلتک همدیگر را دیده بودیم، دوباره هم‌رشته شدیم. هیچ‌کس در علم، تنها کار نمی‌کند و من بیش از استحقاق خودم از موهبت داشتن همکاران عالی بهره‌مند بوده‌ام. در رشته‌هایی مثل آمار، شما به‌تنهایی به جایی نمی‌رسید. باید آدم‌های هوشمندی دور و برتان باشند که شما را به چالش بکشند. یکی از مزایای بزرگ دانشکدهٔ آمار استنفورد این است که پر از آدم‌هایی است که مشتاقند شما را به روشی خوشایند به چالش بکشند.

1) Max H. Stein 2) Cy Derman 3) Morgan Ward

تیبشیرانی: درست است که در دوران دانشجویی، تو را یک بار از دانشگاه اخراج کردند؟

افرون: یکی از دلایل آمدن من به استنفورد، مجلهٔ طنز دانشگاه بود. من در کلتک یک ستون طنز می‌نوشتم و همیشه دوست داشتم که برای یک مجلهٔ طنز کار کنم. استنفورد یک مجلهٔ طنز عالی به نام چاپارل[1] داشت. در ماه‌های اولی که من آنجا بودم، ویراستار مجله دچار مشکل روانی شد و کارش به بیمارستان کشید. من به‌جای او ویراستار شدم. در یکی از همان شماره‌های مجله، شعری به نام جوان عیاش چاپ کردیم که در آن یک مقدار زیاده‌روی کرده بودیم. من تعلیق شدم و اگر پادرمیانی افرادی مثل آل بوکر[2]، هلسی رویدن[3] و هرب سولومون که در دانشگاه مسئولیت بالایی داشتند نبود، نزدیک بود برای همیشه اخراجم کنند. من شش ماه معلق بودم و بعد دوباره به دانشگاه برگشتم و در این دوران مشهورتر از هر زمان دیگری در طول عمرم شده بودم. عکسم هر روز در روزنامه چاپ می‌شد.

موریس: من به یاد دارم که برد به‌عنوان دانشجوی کارشناسی نویسندهٔ واقعاً خوبی بود. چیزی که تو نوشته بودی خیلی معمولی بود. الان مردم هیچ فکر بدی دربارهٔ چنین نوشته‌ای نمی‌کنند. تو از قریحهٔ سرشار نویسندگی‌ات استفاده کرده بودی. من فکر می‌کنم همین قریحه یکی از دلایل موفقیت تو در آمار بوده است. توانایی‌ات در این‌که مطالب را طوری کنار هم قرار دهی که مردم موضوع را بهتر بفهمند.

تیبشیرانی: کمی برایمان از خانواده‌ات بگو. آن طور که من می‌دانم سه تا از برادرهای تو کار دانشگاهی می‌کنند و پسرت هم به‌زودی وارد کار دانشگاهی خواهد شد.

افرون: پدرم به ما نشان داد که به درد کارهای سنگین نمی‌خوریم. برادر بزرگترم، آرتور، استاد بازنشستهٔ زبان انگلیسی است. یک متخصص برجسته در ادبیات نمایشی. او یک مجله به اسم پانچ[4] در ادبیات نمایشی منتشر می‌کند که عنوانش از سانچو پانزا گرفته شده است. من پانچ را می‌خوانم. ترکیبی است از نظریات بغرنج انگلیسی و ادبیات سیاه. دو برادر کوچکترم، که دوقلو هم هستند، همیشه خیلی نزدیک بوده‌اند. دان به خدمت سربازی فراخوانده شد و به کانادا رفت و آنجا زندگی خوبی دارد. هر دوی آن‌ها در روانشناسی اجتماعی کار می‌کنند. دان مجلهٔ خودش را با موضوع خانواده درمانی اداره می‌کند و رون متخصص در زمینهٔ احساسات ناخوشایند است. او کتابی نوشته با عنوان «همیشه عصبانی[5]». پسرم مایلز از آن مواردی است که برای ما جالب‌اند: یک دانشجوی علوم انسانی که در چند سال اخیر ناگهان به آمار علاقه‌مند شده است. او الان در چپل هیل در زمینهٔ بازیابی اطلاعات کار می‌کند. گاهی به من تلفن میزند و سؤالات سختی دربارهٔ تجزیهٔ مقادیر تکین می‌پرسد.

موریس: در دههٔ شصت اتفاقات زیادی هم‌زمان در حال وقوع بود. من نمی‌توانستم در مورد انتخاب رشته تصمیم بگیرم و آمار راهی بود که به ریاضیات و تقریباً هر چیز دیگری در کنارش بپردازی.

---

1) Chaparral 2) Al Bowker 3) Halsey Royden 4) Paunch 5) Angry All the Time

خیلی از دانشجوهای ما همین الان هم این را یکی از جذابیت‌های رشتهٔ آمار می‌دانند. این نه فقط جذابیت که در واقع یک ضرورت است. در حوالی دههٔ شصت، بیشتر دانشکده‌ها در حال شکل‌گیری بودند. آمار هم موضوعی بود که ناگهان قد عَلَم کرده بود. آن موقع آمار، حداقل آماری که ما می‌خواندیم، خیلی مجرد بود. بخشی از کار تو آمار زیستی بود ولی درس‌های زیادی هم گذراندی که عمدتاً ریاضیات محض بودند. من تصمیم گرفتم که به RAND بروم. پیش خودم فکر کردم که یک سال آنجا می‌مانم و هر چیزی که در مورد آمار کاربردی لازم است را یاد می‌گیرم. ولی یازده سال آنجا ماندم. کاربردها، ریاضیات و محاسبه، مثلث ایده‌های آمار را می‌سازند. این‌که این سه تا چطور به هم گره خورده‌اند، محور اصلی رشتهٔ ما است. به نظر می‌رسد خیلی مهم است که ما علاقه‌مان را به هر سه جنبه حفظ کنیم.

۲. شروع بوت‌استرپ

تیبشیرانی: برد، تصور من این است که کارهای تو روز به روز کاربردی‌تر می‌شوند. به نظر می‌رسد که علاقه‌ات به مسائل واقعی بیشتر شده است. آیا این مشاهدهٔ درستی است؟

افرون: می‌شود قضیه را به شکل دیگری هم بیان کرد و آن این است که من دیگر ایدهٔ جدیدی ندارم و این اتفاقی است که از تقریباً بیست سال پیش افتاده است. چیزی که من الان دارم، همکارانم و کارهای کاربردیم هستند. ما در آمار موقعیتی استثنائی داریم؛ ما آخرین بقایای دانشمندان اصیل هستیم. به این معنی که می‌توانیم به رشته‌های متعددی سرک بکشیم و با آدم‌های برجستهٔ آن رشته‌ها همکاری کنیم. این برای من روش فوق‌العاده‌ای برای ورود به یک موضوع جدید است. بعضی‌ها به کاربرد، صرفاً به‌خاطر خود کاربرد، علاقه دارند ولی من همیشه به‌خاطر آمار به کاربرد علاقه‌مند بوده‌ام. مثلاً من و راب با هم روی میکروآرایه‌ها کار می‌کنیم. این موضوع خیلی هیجان‌انگیز است، ولی من به هیچ عنوان علاقه‌ای به زیست‌شناسی میکروآرایه‌ها ندارم. البته به‌عنوان یک آماتور برایم جالب است ولی دغدغهٔ اصلی‌ام این است که نظریهٔ استنباط چطور در این مورد به‌کار می‌آید.

تیبشیرانی: یک موضوع عجیب برای من این است که با این که برای ما آمار موضوع ساده‌ای است ولی برای بقیهٔ دانشمندان اصلاً این طور نیست. یکی از همکاران من که خیلی هم دانشمند خوبی است، معتقد است که برای من خیلی سخت‌تر است که به او آمار یاد بدهم تا برای او که به من زیست‌شناسی بیاموزد. زیست‌شناسی برای من خیلی ترسناک به نظر می‌رسد؛ انبوهی از حقایق اسرارآمیز. ولی آمار یک روش فکر کردن است که یاد گرفتنش برای دیگران، اگر از قبل در این رشته آموزش ندیده باشند، بسیار دشوار است. به نظر می‌آید ما از مهارتی یکتا برخورداریم.

موریس: فکر می‌کنی آمار موضوع سختی است یا ما آن را به موضوع سختی تبدیل کرده‌ایم؟

تیبشیرانی: البته این هم بخشی از ماجراست ولی مفاهیم اساسی به‌ظاهر ساده آنقدر هم که به نظر می‌رسد ساده نیستند.

موریس: مثلاً ... ؟

تیبشیرانی: مثلاً آزمون جایگشت برای به‌دست آوردن p ـ مقدار از مجموعه‌ای از داده‌ها.

موریس: فکر می‌کردم بلافاصله خود p ـ مقدار را مثال بزنی. من تصور می‌کنم p ـ مقدار مفهوم دشواری است. محاسبه‌اش ساده است ولی گیج‌کننده است به این معنی که مردم معمولاً تعبیر اشتباهی از آن دارند. p ـ مقدار قطعاً گزاره‌ای دربارهٔ داده‌ها، به فرض درستی فرض صفر، است ولی خیلی‌ها فکر می‌کنند احتمال درستی فرض صفر به شرط داده‌ها است.

تیبشیرانی: مثال دیگر، اختلاط است. تعداد بسیار زیادی از دانشمندانِ واقعاً خوب آزمایش‌های بدی طراحی می‌کنند که در آن‌ها عوامل مهم با هم مخلوط می‌شوند. اختلاط در رشتهٔ ما اساسی است. ما این پدیده را می‌فهمیم و می‌دانیم چطور آن را تشخیص دهیم.

افرون: بسیاری از همکاران علمی من در احتمال خیلی خوب هستند؛ مثلاً می‌توانند محاسبات احتمالاتی مربوط به مدل‌های ظریف و پیچیده را انجام دهند، ولی در استدلال معکوس از داده‌ها به مدل احتمالاتی مناسب، کاملاً ضعیف هستند. به یاد دارم سال اولی که وارد آمار شدم، فکر می‌کردم آمار باید برای من ساده باشد چون من از رشتهٔ ریاضی می‌آمدم که به مراتب سخت‌تر است. ولی آمار در شروع برای من خیلی سختتر از هر رشتهٔ دیگری بود. سال‌ها طول کشید تا واقعاً احساس راحتی کنم. فهمیدن این که مردم چرا در آمار چنین کارهایی می‌کنند ساده نیست؛ چرا از p ـ مقدار یا چیزهای دیگر استفاده می‌کنند. شما باید وارد مسائل عملی بشوید و باید حسی نسبت به مسأله پیدا کنید. آمار تنها جایی است که در آن استنباط آماری انجام می‌شود. ما خدمتی واقعی ارائه می‌کنیم که تفکر معکوس است. شما از فکر کردن بر روی یک مسألهٔ مشخص جزئی شروع می‌کنید و بعد به حالت کلی برمی‌گردید. این ممکن است از نظر فلاسفه، نشدنی به‌نظر آید ولی کاری است که ما هر روز انجام می‌دهیم.

تیبشیرانی: من سال ۱۹۸۱ به استنفورد آمدم. چند سالی بعد از آن که تو بوت استرپ را ابداع کرده بودی. برایمان از تفکرات و وقایعی که منجر به ابداع بوت‌استرپ شد بگو.

افرون: داستان بوت‌استرپ شاهدی است بر اهمیتِ داشتن همکاران خوب. روپرت میلر مقاله‌ای با عنوان «یک جکنایف قابل اعتماد» نوشته بود که تلاش خوبی بود برای توجیه نظری جکنایف. آن موقع من و روپرت هر دو در یک سال، سال ۱۹۷۲، برای فرصت مطالعاتی در امپریال کالج پیش دیوید کاکس بودیم. روپرت یک سخنرانی دربارهٔ جکنایف انجام داد. بعد از آن دیوید پیش من آمد و پرسید تو فکر می‌کنی مطلب مهمی اینجا وجود داشته باشد؟ سال‌ها بعد فهمیدم که او داشت به من نشانه‌ای قوی برای کار در این زمینه می‌داد. در سال ۱۹۷۷ از من دعوت شد که در قالب سخنرانی‌های ریتس، یک سخنرانی ارائه کنم. من یک خط یادداشت نوشتم: جکنایف، تقریبی از چیست؟ همان موقع که آن یک خط را می‌نوشتم، در مسیر درست جواب قرار گرفتم. در ابتدا با چیزی شروع کرده بودم که واقعاً پیچیده بود. من به آن توزیع ترکیبی می‌گویم چون

به‌جای جایگشت‌ها، ترکیب‌ها را در نظر گرفته بودم. بعد متوجه شدم که می‌توانم از شرّ بخشی از پیچیدگی رها بشوم. بعدتر از شرّ بخش بیشتری از پیچیدگی رها شدم و خیلی زود، دیگر هیچ پیچیدگی‌ای باقی نمانده بود. کمی بی‌معنی به نظر می‌رسید ولی من سخنرانی را ارائه دادم و تقریباً همه خیلی خوششان آمد. از آن به بعد، هیچ وقت به قضاوت خودم دربارهٔ موضوعاتی که روی آن‌ها کار می‌کنم اطمینان نمی‌کنم.

تیبشیرانی: مقاله به آنالز فرستاده شد. بازخوردشان چه بود؟

افرون: روپرت میلر آن موقع ویراستار آنالز بود. من متن سخنرانی ریتس را فرستاده بودم و مقاله رد شد. ویراستار همکار، که نامش مشخص نمی‌شود، گفته بود که مقاله هیچ قضیه‌ای ندارد. در نتیجه، من چند قضیه اضافه کردم و فشار زیادی به روپرت آوردم و او هم بالاخره مقاله را چاپ کرد. من قبلاً ویراستار مجلهٔ انجمن آمار آمریکا بودم و این ماجرا من را به یاد قانونی انداخت که آن موقع برای خودم داشتم. وقتی مقاله‌ای مردم را عصبانی می‌کند باید آن را با دقت بیشتری بررسی کرد. مقالات اعصاب خُرد کن، جامعه‌ای دوقله‌ای تشکیل می‌دهند: بدترین مقالاتی که تا به حال دیده‌اید، که زیرجامعهٔ بزرگی است، و تعداد کمی مقالهٔ واقعاً خوب. از آن موقع تا الان، من تعداد زیادی مقاله نوشته‌ام. اگر فکر می‌کنید هر مقاله‌ای که می‌فرستم فوراً پذیرفته می‌شود، اشتباه می‌کنید. بسیاری از مقالاتم رد شده‌اند. من معمولاً برای بازنویسی مقالات زحمت زیادی می‌کشم. سخت تلاش می‌کنم و نظرات داوران را جدی می‌گیرم، ولی هیچ وقت از این که داور از چیزی خوشش نیاید ناامید نمی‌شوم چون ممکن است دلیلش این باشد که ایدهٔ جدیدی مطرح کرده‌ام.

تیبشیرانی: من وقتی بعد از فارغ‌التحصیلی تعدادی سخنرانی دربارهٔ بوت‌استرپ انجام دادم متوجه چیز غریبی شدم: صحبت در این مورد برای افراد رشتهٔ خودمان خیلی سخت‌تر است. وقتی برای فیزیک‌دان‌ها یا شیمی‌دان‌ها صحبت می‌کردم، می‌گفتند آهان! این همان شبیه‌سازی است. ما این کار را زیاد انجام می‌دهیم. ولی به‌عنوان ابزاری برای استنباط آماری، پذیرفتنش خیلی سخت‌تر بود چون نیاز به تولید اعداد تصادفی داشت که هنوز خوب جا نیفتاده بود.

موریس: این ماجرا خیلی به‌موقع اتفاق افتاد. ما ۳۰۰ دلار در ساعت می‌پرداختیم تا از یک کامپیوتر استفاده کنیم و ۳۰۰ دلارِ آن موقع الان احتمالاً ۱۰۰۰ دلار ارزش داشت. کامپیوترها کند بودند. هر کدام از این محاسبات از چند دقیقه تا یک ساعت طول می‌کشید و این مشکل بزرگی بود. ابداع بوت‌استرپ همزمان با آمدن کامپیوترهای شخصی رخ داد. همهٔ ما می‌دانیم که الان محاسبات، مسألهٔ عمده‌ای حداقل از نظر هزینه نیست، ولی از جنبهٔ مفهومی هنوز مسأله‌ای جدی است. بوت‌استرپ مثالی است از این که تو وقتی تلاش می‌کردی نوشته‌جات مربوط به موضوعی که اطلاع زیادی درباره‌اش نداشتی یعنی جکنایف را مطالعه کنی، نظریه‌اش را به‌وجود آوردی. این رویکرد، خواندن نتایج دیگران و تلاش برای این که آن‌ها را یک قدم بهبود ببخشی، می‌تواند کاملاً موفقیت‌آمیز باشد. ولی تصور می‌کنم عموماً ثمربخشی آن، کمتر از رویکردی است که گفتی در بیست سال گذشته در

پیش گرفته‌ای: درگیر شدن در یک مسألهٔ واقعی و خیلی زود به چیزهایی برمی‌خوری که قبلاً هیچ موقع متوجه‌اش نشدی.

افرون: من به خودی خود، خوانندهٔ خوبی نیستم. ولی وقتی شروع به کار کردن روی موضوعی می‌کنم، مایلم هر چیزی دربارهٔ آن وجود دارد را بخوانم. وقتی جای پایی در یک زمینه پیدا کرده باشم و بتوانم بفهمم که مردم چرا فلان کار را انجام می‌دهند، خواندن برایم خیلی ساده‌تر می‌شود. این دقیقاً سخت‌ترین قسمت نوشتن است: این‌که توضیح دهید چرا کاری را انجام می‌دهید نه این‌که چه کاری انجام می‌دهید. وقتی کسی بفهمد که شما چرا کاری را انجام می‌دهید به احتمال زیاد حس خوبی نسبت به آن پیدا خواهد کرد.

موریس: در مورد بوت‌استرپ، چرا تو به‌جای تلاش برای حل مسأله‌ای مشخص به‌کمک یک مجموعهٔ داده‌ها، از ایده‌های نظری شروع کردی؟

افرون: واقعیت این بود که یک همکار مسألهٔ جالبی مطرح کرده بود که با شهود من سازگار بود. حجم انبوهی از مقالات بیمایه و کسل کننده‌اند، عمدتاً به این دلیل که هیچ چیز شگفت‌انگیزی ندارند. وقتی آن‌ها را مطالعه می‌کنید از همان ابتدا کاملاً می‌دانید که جواب قرار است چه باشد. خیلی به‌ندرت به چیزی برمی‌خورید که برایتان عجیب باشد. یادم می‌آید قضیهٔ بنجامینی ــ هوشبرگ[1] دربارهٔ نرخ‌های اکتشاف غلط، واقعاً مرا متعجب کرد. من هنگامی که شگفت‌زده می‌شوم، با اشتیاق بسیار بیشتری مطالعه می‌کنم.

تیبشیرانی: چیز دیگری که تو را متمایز می‌کند این است که تو با افراد زیادی مقالهٔ مشترک ننوشته‌ای. ما از معدود کسانی هستیم که با تو مقالهٔ مشترک داریم. تو در روش کارت مستقل و فردگرا هستی.

افرون: فردگرایی واژهٔ مؤدبانه‌ای است. راب می‌توانست بگوید من به‌عنوان یک همکار در نوشتن مقالهٔ مشترک آدم سختی هستم. من در شروع کار هیچ چیز را نمی‌فهمم و بعد وقتی که می‌فهمم اصرار دارم که آن را به روش خودم بیان کنم. توجهم به‌سرعت از مطلبی به مطلب دیگر منحرف می‌شود. یکی از ویژگی‌های فوق‌العادهٔ آمار این است که می‌توانی به تعداد زیادی از شاخه‌ها سر بکشی. برای کسی با دامنهٔ توجه کوتاه مدت، این رشته ایدآل است چون هر وقت از داده‌های بافت‌بَرداری خسته شدی می‌توانی سراغ داده‌های اخترشناسی بروی. رشتهٔ ما خیلی متراکم نیست. قاعدتاً تصویری از ریاضیات باید از یک لکهٔ مرکزی بسیار چگال و تعدادی لکهٔ کوچکتر که کمی از مرکز خارج شده‌اند، تشکیل شده باشد. ولی تصویری از آمار بسیار پراکنده‌تر خواهد بود، با تعداد زیادی فضای خالی در قسمت‌های کشف نشده.

موریس: کار دیگری که بوت‌استرپ انجام داد این بود که به تعداد زیادی از آماردان‌ها بهانه‌ای داد تا بخواهند که برایشان کامپیوتر خریده شود و این یک تحول بود. بیزگرایان برای مدتی عقب ماندند

1) Benjamini - Hochberg

ولی بعد آن‌ها هم با MCMC وارد صحنه شدند و ناگهان همه در آمار صاحب کامپیوتر شدند.

۳. بیزگرایی و بیزگرایی تجربی

تیبشیرانی: در سال ۱۹۸۱ تو این سؤال را مطرح کردی که چرا همه بیزگرا نیستند؟ بیست و دو سال بعد از آن زمان، فکر می‌کنی نسبت بیزگراها در میان ما افزایش یافته است؟

افرون: بله، تصور می‌کنم علاقه به آمار بیزی، به‌ویژه در انگلستان بیشتر شده است. انجمن سلطنتی آمار، هر شماره به بیز می‌پردازد. این مسأله بی‌دلیل نیست. یکی از دلایلش این است که آمار بیزی اکنون نسبت به بیست سال پیش تغییر کرده است. واقع‌گراتر شده است و همتش را به‌جای بحث‌های فلسفی دربارهٔ این‌که چرا فراوانی‌گرایی اشتباه است، صرف حل مسائل واقعی می‌کند. قطعاً یک انقلاب محاسباتی در آمار بیزی رخ داده است. روش نمونه‌گیری گیبس یک مثال واقعاً برجسته است. من معتقدم که بیزگرایی تجربی فصل مشترک طبیعی فراوانی‌گرایی و بیزگرایی است، ولی این نظر آنقدر که من امیدوار بودم مورد توجه قرار نگرفته است. روش‌های بیزی از نوع MCMC یک مشکل دارند، این‌که ناچارند از توزیع‌های پیشین ساده‌ای استفاده کنند که با MCMC هماهنگ باشد. انگار که با همهٔ پیشرفت‌های ریاضی و محاسباتی، مردم همچنان مسیری را انتخاب می‌کنند که کمترین مقاومت را برانگیزد. از یک نظر این کار، مسألهٔ اصلی آمار بیزی را که انتخاب توزیع پیشین است مخفی می‌کند. نکتهٔ جذاب بیزگرایی تجربی، اگر درست استفاده شود، دور زدن مسألهٔ انتخاب توزیع پیشین در فضای با بُعد بالای پارامترها است، که اساس اختلاف میان آمار بیزی و آمار فراوانی‌گرا است.

موریس: از نظر تو بیزگرایی تجربی ناکام بوده است؟

افرون: بیزگرایی تجربی فقط در مقایسه با چیزهایی مانند آزمون ویلکاکسون[1] که میلیون‌ها بار مورد استفاده قرار می‌گیرند، ناکام بوده است. استفاده از ایده‌های بیزگرایی تجربی یا مدل‌های سلسله مراتبی، عمومیت بیشتری پیدا کرده است، ولی این ایده‌ها واقعاً به جامعهٔ کاربردی نفوذ نکرده‌اند. من به فواید ممکن فکر می‌کنم و فایدهٔ استفاده از ابزارهایی مثل آزمون ویلکاکسون در عمل آنقدرها بیشتر از آزمون t نیست. ولی فواید عملی بیزگرایی تجربی می‌تواند حتی آماردان‌ها را هم شگفت‌زده کند. شما می‌توانید به‌راحتی ۵۰٪ تا ۷۵٪ ریسک را از بین ببرید. پس چرا از آن‌ها بیش از این استفاده نمی‌شود؟ دلیلش این است که ما به اندازهٔ کافی از بنیادهای نظری این روش‌ها و این‌که چه مواقعی باید از آن‌ها استفاده کرد مطمئن نیستیم. تحلیل واریانس به‌شکل باورنکردنی پر استفاده و برای موقعیت‌های متعددی مناسب است. یکی از علل این امر این است که فیشر به دانشمندان یاد داد که آماردان‌ها به‌خوبی از عهدهٔ تحلیل واریانس برمی‌آیند، بنابراین محققان در طراحی آزمایش‌ها ما را در نظر می‌گیرند. فکر می‌کنم اگر ما در تحلیل مسائل بیزگرایی تجربی متبحر شویم و به هر دو

---

1) Wilcoxon test

جنبهٔ نظری و کاربردی آن اطمینان پیدا کنیم، آن وقت آزمایشگران شروع به طراحی آزمایش‌هایی خواهند کرد که از آن نوع ساختارهای موازی که در بیزگرایی تجربی مورد نیاز است استفاده می‌کند. میکروآرایه‌ها مثال خوبی از ساختار موازی مفید هستند.

هلمز: هنگام استفاده از بیزگرایی تجربی، مشکل سازگاری به‌وجود نمی‌آید؟ چه توجیهی برای ترکیب کردن پارادایم‌ها وجود دارد، که رویکرد بیزی در پیش بگیریم و بعد با داده‌ها مانند یک فراوانی‌گرا برخورد کنیم؟

افرون: سازگاری پاسخی است از بیزگراها در مقابل بهینگی. فراوانی‌گراها از بهینگی صحبت می‌کنند. بیزگراها برای مقابله، به سازگاری متوسل می‌شوند و می‌گویند که فراوانی‌گرایی ناسازگار است، زیرا اطلاعات به‌دست آمده از موقعیت‌های مختلف را به‌نحو منطقی ترکیب نمی‌کند و این انتقاد کاملاً درستی است، به‌ویژه وقتی مجبوریم اطلاعات را با هم تلفیق کنیم. بیزگرایی جذابیت‌های دیگری هم دارد. مثلاً این‌که بسیار بیشتر از فراوانی‌گرایی نسبت به مدل‌سازی خوشبین است. فراوانی‌گرایی در این مورد، موضعی تدافعی دارد و تلاش می‌کند ادعایی نکند که احتمال اشتباه بودنش زیاد باشد. چیزهای زیادی در آمار بیزی هست که من می‌پسندم. چیزی که نمی‌پسندم انتخاب فی‌البداههٔ یک توزیع پیشین و ادعای یافتن جواب است. این خیلی خطرناک است، به‌خصوص در مورد مسائل در ابعاد بالا. نظریهٔ بیزی بسیار جذاب خواهد شد وقتی ایدهٔ خوبی داشته باشید که توزیع پیشین دست‌کم خیلی بد نیست. ممکن است در موقعیت پیچیده‌ای قرار بگیرید که فراوانی‌گرایی در آن گم می‌شود. مثلاً تعداد زیادی مقایسهٔ همزمان؛ و آن وقت رویکرد بیزی حرف‌های جالبی برای گفتن خواهد داشت.

تیبشیرانی: من فکر می‌کنم نکتهٔ مهم دیگر این است که مردم وقتی به استفاده از یک ابزار گرایش پیدا می‌کنند که به سؤالاتی جواب دهد که قبلاً جوابی برای آن وجود نداشته است. آمار پایدار در دههٔ شصت خیلی گسترش پیدا کرده بود، ولی ما الان چقدر از آن استفاده می‌کنیم؟ آمار پایدار در موقعیت‌هایی که ما از قبل نتایجی داشتیم نتیجه‌ای با کیفیت بهتر به‌دست می‌دهد. بوت‌استرپ به مسائلی جواب می‌دهد که قبلاً جوابی برای آن‌ها وجود نداشت. این از آن نوع ابزارهایی است که مردم از آن استقاده خواهند کرد. تحلیل واریانس مثال خوبی است. ابزاری بنیادی که به سؤالاتی پاسخ می‌دهد که از نظر علمی اهمیت دارند.

افرون: نکتهٔ مثبت بوت‌استرپ آن است که انعطاف‌پذیر است و استفاده از آن ساده است و هر چه زمان می‌گذرد ساده‌تر می‌شود. استفاده از نظریه‌هایی مثل مینیمم واریانس یکنواخت ناریب که شما ناچارید در هر مورد از نو فکر کنید و کلک تازه‌ای پیدا کنید، ساده نیست. اما موردی مثل تخمین بیشترین درستنمایی که یک الگوریتم همه‌جا کار می‌کند، فوق‌العاده موفق است. بنابراین شاید آنچه تلاش داشتم بگویم این بود که لازم است بیزگرایی تجربی خودکار شود.

تیبشیرانی: فکر می‌کنم نکته‌ای که برد سعی دارد بگوید این است که یک روش برای فراگیر شدن باید نیمه خودکار شده باشد. اما اگر برای به‌کار بردن آن در هر مورد یک تز دکترای آمار لازم باشد،

در آن صورت تعداد ما کافی نیست تا آن را به ابزاری فراگیر تبدیل کنیم.

موریس: خیلی از نرم‌افزارها در حال حاضر روش‌هایی دارند که به خلاصه شدن مدل‌ها کمک می‌کنند. آیا این به نظر تو کافی نیست؟

افرون: وقتی شما از یک تخمین بیزی یا بیزی تجربی استفاده می‌کنید، برخلاف نظریهٔ کلاسیک، مطمئن نیستید که هر θ به‌طور نااریب به‌وسیلهٔ x متناظرش تخمین زده شود. با تخمین بیشترین درستنمایی، هر پارامتر به روشی کم و بیش نااریب تخمین زده خواهد شد. اگر از یک تخمین بیزی تجربی استفاده کنید همه چیز به سمت مرکز کشیده می‌شود. شما باید دندان روی جگر بگذارید و باور داشته باشید که گرچه در هر کدام از تخمین‌ها به‌تنهایی ممکن است کمی از هدف دور شوید ولی در مجموع اوضاع به مراتب بهتر است. این چیزی است که ما باید به مردم که شامل خودمان هم می‌شوند، بقبولانیم.

موریس: من معتقدم که عملاً همهٔ برآوردها بهتر می‌شوند. نه به تعبیر فراوانی‌گرایانه، اما به این معنی که بر مبنای اطلاعات موجود، هر کدام از آن‌ها بیشتر احتمال دارد که بهتر شده باشند. البته بعد از این‌که مقادیر واقعی مشخص شد، متوجه خواهیم شد که بعضی از برآوردها بهتر از بقیه‌اند.

افرون: ولی ممکن است بدانی که برای یک پارامتر غالباً بزرگ، مثلاً ۸۰٪ احتمال دارد که تخمینی کمتر از مقدار واقعی به‌دست آید.

موریس: من اصلاً این طور فکر نمی‌کنم. اگر تو هر دو مرحلهٔ مدل را درست انجام داده باشی، با نزدیک کردن مقادیر تخمین‌ها به یکدیگر، وضع بهتری خواهی داشت. نکته اینجاست که باید در مورد مرحلهٔ دوم مدل آگاه باشی، که شامل تبادل‌پذیری پارامترها یا شاید چیزهای پیچیده‌تری بشود.

افرون: بنابراین همان‌طور که ما نوشته‌ایم، باید به ارتباط میان پارامترها اعتقاد داشته باشی. مثلاً اگر روی پنی‌سیلیسن و آمپی‌سیلین و ده نوع آنتی‌بیوتیک دیگر آزمایش می‌کنی و برای هر کدام تخمینی داری، باید باور داشته باشی که همهٔ داده‌ها، و نه فقط داده‌های پنی‌سیلین، می‌توانند بر تخمین پنی‌سیلین تأثیر بگذارند.

موریس: تو باید در شروع، تصمیم بگیری که آیا مایل هستی تخمین‌ها را با هم ترکیب کنی یا نه. داده‌ها باید تصمیم بگیرند که یک انقباض بزرگ ممکن است یا نه. مثلاً در بررسی داده‌های بیمارستان‌ها، من تخمین بیمارستان‌های ویرجینیا که مقدار زیادی روند مشابه در آن‌ها انجام می‌شود را منقبض خواهم کرد. تقریباً ۱۶۰ تا از این بیمارستان‌ها وجود دارد. من معتقدم اطلاعات یکی از این بیمارستان‌ها به بقیهٔ آن‌ها هم ربط دارد. نمی‌دانم چقدر، ولی داده‌ها کمک خواهند کرد که تصمیم بگیرم.

افرون: اما اگر تو به بیمارستانی که بهترین امتیاز را کسب کرده بگویی که امتیاز آن‌ها را به پایین منقبض کرده‌ای چون فکر می‌کنی بخشی از آن ناشی از شانس بوده است، آن‌ها با تو موافق نخواهند بود.

موریس: آن‌ها خوششان نخواهد آمد. اما در بیشتر موارد حق با من است. به‌علاوه، یاد دادن این ایده‌ها در اولین درس آمار خیلی مشکل است ولی اکثر کسانی که ما با آن‌ها طرفیم بیش از یک درس نگذرانده‌اند.

افرون: خوب، من فکر می‌کنم نکتهٔ اساسی این است که آمار قرن بیستم به ما یاد داد که هر پارامتری را جداگانه بررسی کنیم، تلاش کنیم آن را بدون اریبی برآورد کنیم، یا با یک تخمین نااریب آزمون کنیم. شاید قرن بیست و یکم باید در مسیر برگشت حرکت کند. ما باید بپذیریم که دیگر این پناهگاه را نخواهیم داشت.

تیبشیرانی: تو قبلاً به نکتهٔ دیگری هم اشاره کردی، این‌که دانشمندان از ما آن سؤالاتی را می‌پرسند که ما به آن‌ها یاد داده‌ایم که بپرسند. مثلاً آن‌ها دربارهٔ آزمون t سؤال می‌کنند. چون این چیزی است که فکر می‌کنند آماردانان قادرند انجام دهند. بعضی وقت‌ها فکر می‌کنم این همهٔ چیزی است که آن‌ها فکر می‌کنند ما می‌توانیم انجام دهیم. همین طور که آن‌ها دربارهٔ علم آمار چیزهای بیشتری یاد می‌گیرند، اگر ما بتوانیم مسائل موازی را با روش‌های بیزی تجربی به‌خوبی حل کنیم، آن‌وقت سؤال‌های بیشتری از این نوع از ما خواهند پرسید.

موریس: پس شاید ما باید درس‌های مقدماتی آمار را به روش متفاوتی ارائه کنیم. برای مثال اگر به کسانی درس می‌دهیم که قرار نیست آماردان شوند، می‌توانیم به آن‌ها یاد بدهیم که آمار چه قابلیت‌هایی دارد. چه نوع مسائلی ممکن است پیش بیاید و چه موقع باید یک آماردان استخدام کرد. آن‌ها هم ممکن است چنین درسی را بیشتر دوست داشته باشند، چون می‌بینند که به چیزهایی که لازم دارند بدانند نزدیک است، نه این که فقط یک ترم شکنجه شوند.

افرون: در حال حاضر درس دادن ما به‌شدت تاریخی است. ما با روش‌های نظریهٔ نرمال از اوایل قرن بیستم شروع می‌کنیم و کم‌کم روش‌های پیچیده‌تر پارامتری را بیان می‌کنیم. بعد شاید در فصل سوم به روش‌های ناپارامتری بپردازیم. اگر رشتهٔ آمار در جهت معکوس توسعه یافته بود، اگر کامپیوترها پیش از ریاضیات در دسترس بودند، ما احتمالاً با روش‌های ناپارامتری شروع می‌کردیم که اساساً ساده‌ترند. بعد در اواخر ترم به مطالب خیلی سخت‌تر مثل آزمون t و نظریهٔ نرمال می‌رسیدیم.

موریس: کاری که ما الان می‌کنیم مثل این است که به کسانی که می‌خواهند رانندگی یاد بگیرند درسی بدهیم که با نحوهٔ عملکرد موتورهای مدل T شروع می‌شود.

۴. فیشر و دیگر بزرگان

تیبشیرانی: تو دربارهٔ فیشر زیاد صحبت کرده‌ای و گفته‌ای که او یکی از قهرمانان فکری تو بوده است. چه کسان دیگری در ۵۰ سال گذشته بر تو تأثیر گذاشته‌اند؟

افرون: فیشر قهرمانِ همه است. ما فوق‌العاده خوش‌شانس بوده‌ایم که ذهنی تا این حد قوی در رشتهٔ خودمان داشته‌ایم. سخت است کسی را قهرمان بخوانیم ولی افرادی در این رشته هستند که آن‌ها را

هم از نظر قدرت ذهنی و هم به جهت کارهایی که انجام داده‌اند، ستایش می‌کنم: نیمن [1]، هُتلینگ [2] و روپرت میلر. اگر بخواهم ببینم چه کسی بیشترین تأثیر را بر کارهای من گذاشته: چارلز استاین، که او را هم به‌شدت ستایش می‌کنم و هرب رابینز.

تیبشیرانی: دیوید کاکس [3] چطور؟

افرون: خیلی زیاد و بدون هیچ جور ارتباط نزدیک شخصی. کاکس تجسم سنت فیشر است و من گمان نمی‌کنم برای تفکر روشن در استنباط مثال بهتری وجود داشته باشد. سخت است بدانیم این روزها حال و روز فیشری‌ها چگونه است. در حال حاضر، کاکس دیگری در آن سطح دیده نمی‌شود. امیدوارم که این جریان از بین نرود چون سنتی بسیار عالی است که خیلی خوب خود را با جامعهٔ کسانی که با مسائل عملی آمار استباطی درگیرند، هماهنگ کرده است.

موریس: جالب است. من قبلاً از تو نشنیده بودم که بگویی ما دیگر کسی مانند دیوید کاکس نخواهیم داشت.

افرون: در این مورد مطمئن نیستم. هنوز آنقدر نگذشته که بتوانم با اطمینان بگویم. میراث فیشری‌ها عمدتاً از انگلستان سرچشمه می‌گیرد. این نگاه واقعاً جالبی به آمار است که در حقیقت نه فراوانی‌گرایانه است و نه بیزگرایانه. نوعی روح انعطاف‌پذیری در آن وجود دارد و نیز مقدار زیادی هوشمندی الگوریتمی و من در حال حاضر چنین خرد عملی‌ای را حتی در خاستگاه این سنت، انگلستان، نمی‌یابم.

موریس: ما همهٔ فیشری‌ها را از انگلیس به آمریکا برده‌ایم.

افرون: آمریکا بستر خیلی مناسبی برای تفکر فیشری نبوده است. اینجا بیش از هر چیز، قلمرو تفکر فراوانی‌گرایانه و چیزی که شاید بتوان آن را پسا فراوانی‌گرایانه نامید، بوده است؛ نوعی توافق فلسفی الحادی که در یادگیری ماشینی نمود می‌یابد. مردم به یاد ندارند که توکی [4] و موستلر [5] کتابی نوشتند، همان کتاب سبز معروف که در آن حتی از احتمال هم خبری نیست چه رسد به نظریهٔ استنباط.

موریس: به نظر من می‌آید که فیشر، حتی با همهٔ نبوغی که داشت، اگر به مسائل واقعی نمی‌پرداخت، فیشر نمی‌شد. او متخصص بزرگی در علم ژنتیک بود، اما در کشاورزی هم کار کرد و طراحی آزمایش‌ها را توسعه داد. تصور می‌کنم که اکنون افرادی وجود دارند که این کار را بکنند، اما من نگران حذف شدن جنبهٔ نظری هستم.

تیبشیرانی: من نگران حذف شدن مدل‌ها هستم. کاری که توکی در دههٔ شصت کرد این بود که گفت دیگر احتیاجی به مدل نیست. من فکر می‌کنم او بیش از حد بر تحلیل اکتشافی داده‌ها تأکید کرد. اتفاق مشابهی در یادگیری ماشینی دارد رخ می‌دهد. مردم طوری عمل می‌کنند که انگار ما فقط به الگوریتم‌های سریعِ دقیق نیاز داریم و احتیاجی به مدل نیست. به اعتقاد من برای فهمیدن این که یک الگوریتم چطور کار می‌کند لازم است بدانیم چه مدلی مناسب آن است. فکر می‌کنم این

1) Neyman 2) Hotelling 3) David Cox 4) Tukey 5) Mosteller

زمینه‌ای بارور است. معتقدم هستهٔ اصلی رشتهٔ ما مدل‌سازی است.

۵. مدل و محاسبات

موریس: دانش عمیق‌تر ممکن است در خود مدل باشد. حتی اگر مدل اشتباه باشد، ممکن است سال بعد کسی بتواند از آن استفاده کند و چیز بهتری به‌دست بیاورد.

افرون: مفهوم مدل به‌شدت به مفهوم بهینگی گره خورده است. در واقع شما تا وقتی مدل نداشته باشید نمی‌توانید در مورد بهینگی صحبت کنید. باوجود این‌که در حال حاضر بهینگی برای کسانی که در یادگیری ماشینی کار می‌کنند چندان جالب نیست، در بلند مدت اگر آن را به نظریه برنگردانید علمی به‌وجود نخواهد آمد. من هم امیدوارم که مدل‌ها به صحنه بازگردند. مدل‌ها را به‌خوبی می‌توان نقد کرد، زیرا مردم بارها و بارها از آن‌ها استفاده می‌کنند.

موریس: راب، می‌بینم که از مدل‌ها دفاع می‌کنی، تصور می‌کنم تو بیش از من ناپارامتری هستی، ولی با وجود این، از به حاشیه رفتن مدل‌ها متأسفی؟

تیبشیرانی: مدل‌ها می‌توانند هیجان‌انگیزتر از آنچه در ابتدا به نظر می‌رسد باشند. مدل لزومی ندارد که فقط سادهٔ خطی باشد. باید همیشه مدلی در ذهن داشته باشی تا بدانی در یک موقعیت مشخص بهترین کاری که باید بکنی چیست. چون برای دانستن این‌که چه موقع یک روش موفق نیست، باید بدانی بهترین روش کدام است. در این صورت می‌توانی پیش بروی و بگویی روش، در این مورد، کار نخواهد کرد. من معتقدم برای فهمیدن ویژگی‌های عملیاتی، مدل لازم است.

موریس: من فکر می‌کنم مدل غالباً یک ساده‌سازی بیش از اندازه است.

افرون: اصلاً خود احتمال یک ساده‌سازی عظیم است. ما با انبوهی از اتفاقات غیر قابل توصیف و نویزی مواجه‌ایم. احتمال، مفهوم نویز را بی‌اندازه ساده می‌کند و بعد مدل احتمال همه چیز را باز هم ساده‌تر می‌کند. مغزهای کوچک ما در مواجهه با این جهان پیچیده همین که بتوانند محاسبه و پیشبینی کنند، کار بزرگی انجام داده‌اند و ما به هر جور کمکی نیازمندیم. این‌که اکنون کامپیوترهای بزرگی داریم که می‌توانند هر محاسبه‌ای را که بخواهیم انجام دهند، قطعاً کمک بزرگی است. من یک بار در انجمن ریاضی آمریکا سخنرانی کردم. اولین نکته‌ای که توجهم را جلب کرد این بود که همه به‌شکل باورنکردنی پیر هستند (این مربوط به زمانی می‌شود که من پیر نبودم). با این سؤال شروع کردم که چه اتفاقی برای ریاضیات می‌افتاد اگر کسی یک کامپیوتر بی‌نهایت سریع اختراع می‌کرد؟ آن وقت شما آن را به خانه می‌آوردید و از جعبه خارج می‌کردید و تا ظهر می‌توانستید تکلیف فرضیهٔ ریمان یا حدس گلدباخ را مشخص کنید و پرسیدم: آیا این پایان ریاضیات خواهد بود؟ و بعد وقتی همه خیلی نگران به نظر می‌رسیدند، من جواب سؤال خودم را دادم: نه، این پایان ریاضیات نخواهد بود، زیرا مردم تازه شروع به استفاده از ماشین‌ها برای جواب دادن به سؤالات سخت‌تر می‌کنند. چیزی شبیه این در آمار اتفاق افتاده است. ما می‌توانیم به سؤالات قدیمی که

خیلی سخت به نظر می‌آمدند جواب دهیم؛ تقریباً همهٔ سؤالات. پس یعنی رشتهٔ ما به تاریخ پیوسته است؟ نه، ما تازه شروع به پرسیدن سؤالات واقعی‌تر کرده‌ایم. در حقیقت الان آماردان‌های بیشتری وجود دارند و آمار شاخهٔ علمی مهم‌تری شده است.

تیبشیرانی: صحبت از پیری شد؛ تعداد زیادی از آماردانان وقتی به سن ۶۰ یا ۶۵ سالگی می‌رسند، به فلسفه رو می‌آورند. سعی می‌کنند نظریهٔ بزرگ وحدت همه چیز را کشف کنند، ولی تو این کار را نکردی. به نظر می‌رسد تو هنوز به مسائل کوچکتر ولی واقعاً کاربردی، علاقه‌مندی. آیا این یک انتخاب آگاهانه بوده است؟

افرون: من معمولاً دربارهٔ چنین چیزهایی فکر نمی‌کنم، ولی وقتی وارد سن ترسناک ۶۰ سالگی شدم، فکر کردم که تا به حال هیچ برنامه‌ای نداشته‌ام و فقط روی هر موضوع لذت‌بخشی که پیش آمده فکر کرده‌ام؛ با هر همکاری که خوشم آمده یا روی هر مقاله‌ای که جالب به نظر رسیده، کار کرده‌ام. من واقعاً باید تمرکز کنم و تلاش کنم کار بزرگی انجام دهم. ولی بعد که در این باره بیشتر فکر کردم، دیدم اصلاً نمی‌توانم به این پند عمل کنم. نمی‌شود سر جای خود نشست و یک کار بزرگ انجام داد، یا دست‌کم من نمی‌توانم. بنابراین به سراغ کارهای متعدد کوچک برگشتم به این امید که بعضی از آن‌ها خوب از آب در بیاید. آمار، رشتهٔ فوق‌العاده دست و دل بازی است، لزومی ندارد باهوش‌ترین آدم دنیا باشی یا صبح و شب کار کنی؛ همهٔ آن چه باید بکنی این است که به ایده‌ای برسی و آن را رها نکنی. همان‌طور که گفتم، بیشتر این رشته به‌شکل متراکم پر نشده است و بنابراین من به کار کردن روی مسائل کوچک ادامه می‌دهم.

۶. آمار و علم

تیبشیرانی: یکی از چالش‌هایی که من به آن برخورده‌ام این است که ما رشتهٔ عجیبی داریم از این نظر که خیلی از کسانی که رشته‌شان آمار نیست کار آماری می‌کنند. ما کار شیمی یا زیست‌شناسی نمی‌کنیم. ما داخل آزمایشگاه نمی‌رویم و لوله‌های آزمایش را پر نمی‌کنیم. ولی آمار چیزی است که برای انجام آن فقط یک کامپیوتر شخصی لازم است. همین باعث می‌شود افراد زیادی تصور کنند که می‌توانند آن را به‌خوبی انجام دهند، در حالی که نمی‌توانند. ما نه تنها باید به‌خوبی آمار انجام دهیم، بلکه باید به دانشمندان سایر علوم راه درست انجام امور را بیاموزیم.

موریس: بنابراین آمار اگر بخواهد باقی بماند باید اساساً میانرشته‌ای باشد. من می‌خواهم مطمئن شوم که ما زمان کافی برای صحبت دربارهٔ یک موضوع دیگر که تو از آن تصویری واقعی داری، خواهیم داشت. من می‌دانم که تو در استنفورد بعضی مسئولیت‌های اجرایی داشته‌ای که باعث شده دید جامع‌تری از نقش آمار پیدا کنی. استنفورد جای واقعاً جالبی است. شما دانشکده‌ای خیلی قوی و دانشگاهی خیلی قوی دارید با موقعیت‌های بین رشته‌ای. چرا ما باید تلاش کنیم که دانشکده‌های آمار را حفظ کنیم؟ من مطمئنم که آمار به حیات خود ادامه خواهد داد. ما چه کار می‌توانیم بکنیم که دانشکده‌هایی سالم و رشته‌ای قوی داشته باشیم؟

افرون: من برای مدتی رئیس دانشکده بودم، به‌قول یکی از همکارانم مثل موشی خانگی که تعلیم می‌بیند تا تبدیل به موش صحرایی شود. من رئیس دانشکدهٔ علوم بودم. تجربهٔ واقعاً جالبی بود. انجام این کارها ساده نیست، ولی آماردان‌ها برای این مقام مزیتی واقعی دارند چون ما با رشته‌های زیادی سر و کار داریم، در حالی که اکثر دانشگاهیان فقط با رشتهٔ خودشان در تماس‌اند. آماردان‌ها در مقایسهٔ چیزها خیلی خوب‌اند و این کاری است که یک رئیس به‌وفور انجام می‌دهد. بعضی وقت‌ها نمی‌شود گفت «الف» یا «ب» خوب‌اند یا نه ولی می‌شود گفت «الف» بهتر است یا «ب». من زمان زیادی صرف صحبت با دانشمندان دیگر کردم. آن‌ها عالی‌اند ولی من به این نتیجه رسیدم که آمار رشتهٔ واقعاً خوشبختی است. اولاً ما گروه کوچکی هستیم و فشار زیادی تحمل نمی‌کنیم. ما برای پول در آوردن تحت فشار وحشتناک نیستیم. شیمی‌دان‌ها و زیست‌شناسان زیر فشار شدیدی هستند تا آزمایشگاه‌های بزرگ راه بیاندازند، چون این تنها راه برای انجام کار علمی برای آنان است. این روزها شما می‌توانید با قیمت خیلی کم یک کامپیوتر بخرید و اگر بخواهید سنتی کار کنید حتی لازم نیست کامپیوتر را هم داشته باشید. آماردان‌ها روابط صمیمی‌ای با هم دارند. بعضی از رشته‌ها به‌شکل مخوفی رقابتی‌اند. چون در آمار جوایز عظیم یا شهرت وجود ندارد، افراد با هم کاملاً خوب‌اند.

ما با هم زیاد مجادله می‌کنیم، ولی اصولاً آماردان‌های دیگر را دوست داریم و کار یکدیگر را، اگر نه در صفحات مجله‌هایمان دست‌کم در قلبمان، ستایش می‌کنیم. من با خوشحالی به آمار برگشتم، با آرزوی این‌که دانشکدهٔ کوچکمان به‌خوبی به پیش برود. همان‌طور که قبلاً گفتیم، دانشکده‌های آمار تنها جایی در دنیا هستند که در آن‌ها استنباط به‌شکل جدی مطالعه می‌شود. اگر دانشکده‌های آمار از بین بروند، مردم همچنان قادر خواهند بود کارهایی که ما کرده‌ایم را انجام دهند، ولی در این صورت تا وقتی فیشر دیگری نیاید هیچ ایدهٔ جدیدی در استنباط به‌وجود نخواهد آمد. فیشر آماردان نبود، ولی تا قبل از فیشر، آماردان بودن تقریباً محال بود.

تیبشیرانی: تو در مورد رشتهٔ ما خوشبینی؟

افرون: بله، و من از آن دسته آدم‌های خوشحالی نیستم که نسبت به همه چیز خوشبین‌اند. به نظر من می‌رسد که اگر به آمار در قرن بیستم نگاه کنیم، خمی صعودی با شیب یکنواخت می‌بینیم. ممکن است به‌سادگی تأثیری که داشته‌ایم را دست‌کم بگیریم، اما هیچ رشته‌ای به‌عنوان روش اصلی انجام علم، بر این همه رشتهٔ دیگر تسلط نداشته است. آمار پدیده‌ای قرن بیستمی است. می‌توان گفت تاریخ جدید آمار دقیقاً از ۱۹۰۱ و با پیرسن[1] و بیومتریکا[2] آغاز می‌شود. در شروع، آماردان‌های خیلی کمی وجود داشتند، ولی بعد به‌تدریج رشته‌های بیشتر و بیشتری شروع به استفاده از آمار به‌عنوان راهی برای تبادل اطلاعات کردند. همان کاری که پزشکی امروز انجام می‌دهد: آیا آزمایش بالینی انجام شده است؟ آزمایش تصادفی بوده است؟ آزمایش کور بوده است؟

1) Pearson 2) Biometrika

سطح معناداری چه بوده است؟ این، در مقایسه با روش قدیمی بررسی موردی، یک گام بزرگ رو به جلو بوده است؛ روشی که پزشکان پیش از آن برای آزمایش به‌کار می‌بردند: من مریضی را معاینه کردم و به او نیتروگلیسیرین دادم و حالش خیلی بهتر شد! رشته‌ها یکی بعد از دیگری به روش‌شناسی آماری اعتماد کردند. البته این به‌طور خاص مناسب رشته‌هایی است که در آن یک قسمت کوچک از داده‌ها به خودی خود حاوی اطلاعات قطعی نیست. اگر شما از یک نفر بپرسید که آیا طرفدار دموکرات‌ها است یا جمهوری‌خواهان، چندان مهم نیست. اما اگر از هزار نفر بپرسید، آن وقت یک نظرسنجی مفید خواهید داشت. علوم دقیق بیشترین مقاومت را در برابر آمار کرده‌اند، چون به آن نیاز نداشته‌اند. اطلاعات آن‌ها سخت به‌دست می‌آید. اندازه‌گیری می‌کنند و به‌طور حتم نظریهٔ اینشتین، انتقال نور را بهتر از نظریهٔ نیوتن پیش‌بینی می‌کند.

موریس: خوب! بله، ما با کاربردها به شکلی متفاوت از ریاضیات برخورد می‌کنیم. ریاضی‌دان‌ها می‌گویند این به درد رشته‌هایی مثل فیزیک می‌خورد. امیدوارم که ما همچنان به این ارتباط‌های متنوع و به کسانی که می‌توانند چنین ارتباط‌هایی برقرار کنند، ارزش بدهیم.

افرون: من بر مبنای تجربهٔ استنفورد فکر می‌کنم یک چیزی اتفاق بیفتد. ما در کنار دانشکدهٔ آمار، دانشکدهٔ آمار زیستی داریم. ممکن است دانشکدهٔ آمار زمین‌شناسی یا آمار اخترشناسی هم به‌وجود آید. این رشته‌ها شروع به استفادهٔ بیشتر از آمار کرده‌اند. در فیزیک، در هر آزمایش $۱۰^{۲۶}$ ذره وجود دارد و نیازی به آمار احساس نمی‌شود. ولی وقتی موقعیت‌هایی با ۱۰ یا ۱۰۰ ذره پیش می‌آید، ناگهان کارایی استنباط اهمیت پیدا می‌کند. پاییز سال آینده یک کنفرانس فیزیک و آمار در مرکز شتاب‌دهندهٔ خطی استنفورد برگزار می‌شود.

تیبشیرانی: یک مثال دیگر، میکروآرایه‌های DNA است. در بسیاری از حوزه‌های ژنتیک نیازی به آماردان نیست تا بگوید که یک اثر عمده وجود دارد، ولی اگر شما به ۶۰۰۰ عامل بالقوه مؤثر نگاه کنید، برای جدا کردن علائم واقعی از نویز، نیاز به کمک آماری خواهید داشت.

موریس: تا اینجا چند نکته را خلاصه کنم: من فکر می‌کنم اگر دانشکده‌های آمار نبودند، دنیا به عقب برمی‌گشت. دانشکدهٔ آمار محل برقراری پیوندهای بین رشته‌ای است. به‌علاوه جای خوشایندی است. فکر می‌کنم افرادی هستند که عاشق چنین کاری هستند و قرار نیست همه این کار را بکنند. دانشکده‌های آمار می‌توانند روند تزریق روش‌های خوب آماری به سایر رشته‌ها را ساده‌تر کنند. ما باید این را جدی بگیریم. باید هیأت علمی و دانشجویانی را که به این کار علاقه‌مندند، جذب کنیم. اگر منزوی شویم و تلاش نکنیم خودمان را به دیگران معرفی کنیم، ارتباطات میانرشته‌ای را از دست خواهیم داد.

۷. جهت‌های آینده

افرون: در صنعت و خدمات هم همین‌طور ولی به‌طور خاص در دانشگاه، ایده‌ها حرف اول را می‌زنند. آنچه ما باید واقعاً انجام دهیم این است که به تولید ایده‌های خوب ادامه دهیم. سابقهٔ ما

خیلی خوب بوده است. هر چند سال یک بار، ایدهٔ واقعاً مفیدی از آمار برآمده است. اگر ما به این روند ادامه دهیم، نگرانی‌ای بابت آیندهٔ دانشکده‌های آمار وجود نخواهد داشت.

هلمز: تو رئیس بعدی انجمن آمار آمریکا خواهی بود. جهت ویژه‌ای وجود دارد که آماردان‌ها علاقه‌مند باشند به‌طور گروهی، به سمت آن حرکت کنند؟

افرون: در انجمن آمار همین سؤال را از من پرسیدند. این سنت دلپسندی است که رئیس باید برای نشست مشترک آمار، موضوعی انتخاب کند. موضوعی که من، پس از مدتی تعمق، انتخاب کردم آمار به‌عنوان نظامی یکپارچه بود. هیچ کس نگران فیزیک به‌عنوان نظامی یکپارچه یا اخترشناسی به‌عنوان نظامی یکپارچه نیست، اما این رشته‌ها از مزیتِ داشتن سنتی هزار ساله و موضوعی کاملاً مشخص برخوردارند. آمار رشته‌ای با یک یا دو قرن سابقه است با موضوع استنباط که حتی در علوم طبیعی رخ نمی‌دهد. در آمار، نیروی گریز از مرکز وحشتناکی وجود دارد، چون ما در جبهه‌های متعددی کار می‌کنیم و تعدادمان آنقدرها زیاد نیست. به‌راحتی می‌توان تصور کرد که این رشته به ریاضی‌دانان، آماردان‌های شرکت‌های داروسازی، تحلیل‌گران داده‌های بقا، محققان نمونه‌گیری و ... تجزیه شود. وقتی از من خواسته شد که کاندیدای ریاست انجمن شوم، خوشحال شدم و احساس افتخار کردم، شاید چون آماردان‌های کرانهٔ غربی نقش بزرگی در انجمن آمار امریکا نداشته‌اند و بیشتر جذب مؤسسهٔ آمار ریاضی می‌شوند. من خوشحالم که ما بیش از یک تشکیلات آماری داریم، اما انجمن آمار آمریکا چتر ما است. من مایلم افراد در دانشکده‌های برکلی، استنفورد، شیکاگو و سیاتل احساس کنند که در همان رشته‌ای هستند که آماردان‌های مرک[1]، فایزر[2]، DOE و پرودنتیال[3] در آن کار می‌کنند. من خوشحالم که آماردان‌ها در زمینه‌های بسیار متنوعی کار می‌کنند. این برای ما سطح تماس وسیع‌تری با دانشمندان دیگر ایجاد می‌کند. آمار سابقهٔ طولانی در به‌دست آوردن ایده‌ها از افرادی خارج از رشته دارد، شاید حتی فیشر چنین مثالی باشد، ویلکاکسون قطعاً هست. رمز ماجرا در این است که در رشتهٔ خودمان یک هستهٔ مرکزی قوی حفظ کنیم ولی در عین‌حال راه را برای مسائل و ایده‌هایی که از بیرون می‌آیند باز نگاه داریم. از مزایای انجمن آمار، بزرگی و سنت آن است. بر دیوار دفتر انجمن دست‌نوشته‌هایی از سال ۱۸۳۹ وجود دارد (به‌نظر می‌رسد آن‌ها در مورد عضوگیری خیلی نگران بوده‌اند). به‌علاوه، انجمن مجلهٔ JASA را دارد، مجله‌ای عالی که طیف بسیار وسیعی از افراد را جذب می‌کند و نشست‌های مشترک آماری که تعداد فوق‌العاده زیادی شرکت کننده دارد.

۸. نصیحت‌ها و دغدغه‌ها

هلمز: به نظر تو بهترین آموزش ممکن برای دانشجویانی که به رشتهٔ آمار می‌آیند چیست؟

افرون: برای موفقیت در آمار چه چیزهایی لازم است؟ باید مقدار مشخصی ریاضیات بدانی و

1) Merck 2) Pfizer 3) Prudential

واقعاً عاشق اعداد باشی، در غیر این صورت از پس حجم عظیم کارهای عددی که باید انجام داد بر نخواهی آمد. ریاضی‌دان‌های زیادی وجود ندارند که عاشق اعداد باشند. آن‌ها از اعداد فرار می‌کنند. اگر به یک مجلهٔ ریاضی نگاه کنی، خیلی کم و به‌ندرت عدد می‌بینی. مقدار کمی علوم تجربی قطعاً مفید است، چون موضوع رشتهٔ ما استنباط علمی است. مردم می‌توانند پیش‌زمینه‌های بسیار متنوعی داشته باشند. زمینهٔ سنتی ریاضی به‌تنهایی آنقدر هم مطلوب نیست. ما زمان زیادی صرف این می‌کنیم تا به دانشجویانی که بیش از حد زمینهٔ ریاضی دارند از نو بیاموزیم که کمتر اصل‌موضوعی و دقیق باشند و در عوض مسائل را بیشتر از زاویه‌ای که با روح استنباط آماری سازگار باشد ببینند. باید در مورد هر مسألهای میزان درست دقت را پیدا کرد.

تیبشیرانی: ما امروز به دانشجویانی نیاز داریم که توانایی برنامه‌نویسی بهتری داشته باشند.

افرون: قطعاً مفید است، چون یکی از تجهیزات اصلی ما است. شما دانشجوی زیست‌شناسی‌ای که نداند چطور با پیپت کار کند نمی‌خواهید. من خوشحالم که ما الان دانشجویانی داریم که از فیزیک یا زیست‌شناسی آمده‌اند. آن‌ها ثمرات زیادی برای آمار دارند. ممکن است راه‌های جدیدی برای مواجهه با مسائل داشته باشند. آموزش ریاضی برای اهداف عمومی علم عالی نیست. شما باید حسی نسبت به علوم و عالمان داشته باشید. اخترشناسان ستاره‌ها را دارند، زمین‌شناسان صخره‌ها را دارند،و ما علم را داریم. این مادهٔ خامی است که آماردان‌ها با آن کار می‌کنند. شروع کردن فی‌البداهه از تحلیل داده‌ها کار ساده‌ای نیست. شما با حجم انبوهی داده مواجه‌اید. اول از همه باید چکار کرد؟ بعضی اوقات حتی مقدار کمی آمار هم می‌تواند مفید باشد. من این روزها با آمارزیستی‌ها زیاد کار می‌کنم. می‌دانید که آن‌ها برای حمله به مسائل پیچیده روشی دارند که چندان هم ریاضی محض واقعی نیست. آماردان‌های خوب کمک می‌کنند که آن‌ها به روشی منطقی و روشن فکر کنند.

هلمز: گاهی اوقات دانشمندان، ما را متهم می‌کنند که وقتی دنبال جوابی ساده هستند، سعی می‌کنیم به آن‌ها جواب درست بدهیم. آن‌ها انتظار میزان بیشتری تقریب را دارند.

افرون: چیزی که از نظر ما درست است، از نظر آن‌ها گیج کننده است. بعضی وقت‌ها حق دارند و واقعاً گیج‌کننده است. به یاد می‌آورم که در یکی از شکست‌های واقعی که به‌عنوان مشاور آماری تجربه کردم، خانم دانشمندی نتایج یک آزمایش بزرگ دوجمله‌ای با تعداد زیادی عامل را برایم آورده بود. من به‌دقت همه چیز را با رگرسیون منطقی توضیح دادم. او به هیچ وجه نمی‌توانست logitها را به‌عنوان جواب قبول کند و در نهایت، نتایج من را دور انداخت و درصدهای ساده را چاپ کرد که احتمالاً برای مخاطب او درست بود. برای او این کار درست بود. من همیشه متأسفم که چرا تلاش بیشتری برای رسیدن به تفاهم انجام ندادم. به‌سادگی می‌توانستم نتایجم را به زبان درصدها بیان کنم. فکر می‌کنم همین کافی بود. از آن به بعد، همیشه در نوشتن توضیحات برای مراجعین یا همکارانم دقیق بوده‌ام تا از زبانی قابل قبول یا حداقل به‌شکل قابل قبولی شبیه به زبانی که آن‌ها عادت دارند با آن فکر کنند، استفاده کنم. همیشه در این کار موفق نبوده‌ام، برای این کار گاهی

دانش علمی بیش از سواد من لازم بوده است. این موضوع، یک سؤال جالب پیش می‌آورد: به‌عنوان آماردان همکار، چه اندازه باید از علوم دیگر مطلب بدانیم؟ جواب‌های متنوعی به این سؤال وجود دارد. این جواب که «هر چقدر بیشتر بدانیم بهتر است»، لزوماً درست نیست. چون اگر خیلی زیاد بدانیم بیش از حد به موضوع نزدیک می‌شویم و ممکن است فکر کنیم که متخصص آن علم هستیم. بعضی آدم‌ها می‌توانند در زمان کوتاه ماهیت اصلی یک موضوع را به‌خوبی یاد بگیرند. ولی اگر قرار باشد برای این‌که به زیست‌شناسان کمک آماری بدهیم خودمان زیست‌شناس شویم، در این صورت آماردانی وجود نخواهد داشت؛ فقط زیست‌شناسانی وجود دارند که با اعداد، بهتر کار می‌کنند. من قویاً احساس می‌کنم که جوهری از استدلال آماری وجود دارد که از میان رشته‌های متعددی می‌گذرد و این همان چیزی است که ما یاد می‌گیریم. البته ما علاقه‌مندیم افرادی، احیاناً خیلی مطلع، هم باشند که متخصص کمک در رشته‌های خاصی باشند. این الگوی دیگری از همکاری علمی است.

هلمز: غالباً اگر زبان دانشمندان سایر علوم را ندانی، نمی‌توانی به سؤالات آن‌ها پاسخ دهی.

افرون: زبان قطعاً بسیار مهم است؛ دست‌کم در حد دانستن نام چیزهای مهم. واهه پتروسیان[۱] خیلی خوب ایده‌های پیچیدهٔ اخترشناسی مربوط به تبدیلات هوشمندانهٔ نسبیتی را برای من توضیح می‌دهد. خوب، شاید من نتوانم واقعاً فیزیک یاد بگیرم اما حداقل او به من شکل یک تابع را نشان می‌دهد و بعد ما می‌توانیم در این باره با هم صحبت کنیم. این روزها موضوع زیست‌شناسی خیلی پیچیده است، به اندازهٔ یک عمر کار برای انجام وجود دارد ولی ما می‌توانیم به اندازهٔ کافی یاد بگیریم تا بتوانیم مفید باشیم. آیا ما دانشجویانمان را درست تربیت می‌کنیم؟ نمی‌دانم. ما به آن‌ها نمی‌گوییم که بروند و یک سال در یک آزمایشگاه زیست‌شناسی یا چیزی شبیه آن کار کنند. شاید باید این کار را بکنیم، ولی من فکر نمی‌کنم این بهترین کار باشد. راه بهتر این است که اینجا آمار یاد بگیرند ولی دست‌کم آگاه باشند که چطور با دانشمندان سایر رشته‌ها ارتباط برقرار کنند. آن وقت اگر از اینجا بیرون بروند و شغلی بگیرند که قرار باشد برای ۲۰ سال آینده با میکروبیولوژیست‌ها کار کنند، خیلی معقول است که بیشتر از من میکروبیولوژی یاد بگیرند. ولی فکر نمی‌کنم وظیفهٔ ما یاد دادن میکروبیولوژی باشد.

تیبشیرانی: شاید استانداردهای ریاضی ما بیش از حد بالا است و به همین دلیل، تعداد زیادی از دانشجویان را که ممکن است آماردان‌های خوبی بشوند اما آمار ریاضی‌شان خوب نیست، از دست می‌دهیم.

افرون: در استنفورد در این مورد نگرانی وجود دارد ولی شک دارم که دانشگاه‌های زیادی این دغدغه را داشته باشند. حقیقت این است که نظریه، به زبان ریاضیات بیان می‌شود. اخیراً روی مقاله‌ای از هرب رابینسون که در ۱۹۵٦ نوشته شده کار می‌کردم و به یاد آورده بودم که قبلاً عرف چقدر متفاوت بوده است. مقاله با طوفانی از تعاریف سیگما میدان، تابع زیان، تابع خطر،

1) Vahe Petrosian

قانون تصمیم و ... شروع می‌شود. بعد یکراست به سراغ چیزهای جالبی می‌رود که مقاله واقعاً دربارهٔ آن نوشته شده است. همهٔ سخنرانی‌ها در سکوئیا هال همین‌طور شروع می‌شدند. رشتهٔ ما الان نسبت به سال ۱۹۶۰ کمتر ریاضی است. ولی این چیز وحشتناکی نیست. در دههٔ ۶۰ ما همچنان سعی می‌کردیم نتایج بیشتری از نظریهٔ استنباط زیبایی که فیشر، نویمن، والد و غول‌های دیگر پایه‌گذاری کرده بودند، استخراج کنیم. بیشتر مسائل، یک یا دو یا چند پارامتر داشتند. بعد از آن دنبال کردن موضوع دیگر واقعاً برای ذهن انسان سخت می‌شد. این‌طور نیست که ما الان در آمار بهتر شده باشیم و در حقیقت پیشرفت کمی در پایه‌های استنباط آماری رخ داده است. همین یک ساعت پیش داشتم به یک مسألهٔ ژنتیکی با ۴۴۴ اثر اصلی نگاه می‌کردم که با استانداردهای موجود خیلی کوچک است. امید چندانی برای یک راه‌حل در قالب نظریهٔ تصمیم به شیوهٔ اصل موضوعی وجود ندارد. حداقل من چنین راه‌حلی ندارم، اما با یک کامپیوتر خوب و تعدادی ابزار مدرن آماری مثل الگوهای تعمیم یافتهٔ خطی، اعتبارسنجی متقابل، بوت استرپ، Splus، نمودارهای ساده، هموارکننده‌ها و چیزهای دیگری از این دست، می‌شود به مسأله حمله کرد و حقیقت این است که این تحلیل من را متوجه نقصی در استنباط در کارهای قبلی کرد که روی میکروآرایه‌ها انجام داده بودم. شاید همهٔ این کارهای روش‌شناسانه‌ای که ما انجام داده‌ایم، حرکتی است به سمت دور جدیدی از پیشرفت در نظریهٔ استنباط. می‌توان به‌سادگی پذیرفت که ۱۰ میلیون برابر شدنِ توان محاسباتی که ما شاهد آن بوده‌ایم، وسعت و عمق بیشتری به آمار خواهد داد.

مترجم: کسری علیشاهی
دانشکدهٔ علوم ریاضی — دانشگاه صنعتی شریف
alishahi@sharif.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۷ (تابستان ۱۳۹۰) صص. ۵۷ تا ۷۸

هندسی‌سازی ۳ ـ خمینه‌ها از طریق شار ریچی*

مایکل ت. اندرسون

مترجم: سید محمدباقر کاشانی

۱. مقدمه

رده‌بندی رویه‌های بسته، نقطهٔ عطفی در توسعهٔ توپولوژی است، چنان‌که اکنون این مطلب (قضیهٔ رده‌بندی رویه‌ها) برای بیشتر دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی به‌عنوان مقدمه‌ای بر توپولوژی، تدریس می‌شود. از زمان حل مسألهٔ وحدت‌بخشی رویه‌ها به‌وسیلهٔ پوانکاره و کوبه، بهترین درک از این رده‌بندی توپولوژیکی را اکنون به‌زبان هندسی‌سازی ۲ ـ خمینه‌ها در اختیار داریم: هر رویهٔ بستهٔ Σ متریکی با خمیدگی گاوسی ثابت ۱+، ۰ یا ۱− می‌پذیرد، پس به‌وسیلهٔ هندسهٔ یکی از فضا ـ فرم‌های استاندارد $\mathbb{S}^2$، $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{H}^2$ وحدت‌بخشی می‌شود. بنابراین هر رویهٔ Σ خارج‌قسمتی است از ۲ ـ کره، صفحهٔ اقلیدسی یا قرص هذلولولی حاصل از عمل یک گروه گسستهٔ Γ که طولپا و آزاد عمل می‌کند.

---

*) Anderson, Michael T., "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow", *Notices of the American Mathematical Society*, **51**(2004), 184-193.

مایکل ت. اندرسون استاد ریاضی در دانشگاه ایالتی نیویورک، استونی‌بروک است. آدرس رایانامه او عبارت است از anderson@math.sunysb.edu.

با توجه به این‌که زمان چاپ مقالهٔ انگلیسی سال ۲۰۰۴ بوده است، محتوای این مقاله، گزارش وضعیت هندسی‌سازی در آن زمان است. خوانندهٔ علاقه‌مند برای کسب اطلاعات به‌روز می‌تواند مرجع [۲۲] را ببیند ـ م.

رده‌بندی خمینه‌های با بعد بیشتر، خیلی مشکل‌تر است. در حقیقت، به‌علت پیچیدگی گروه بنیادی، رده‌بندی کاملی مانند آن‌چه دربارهٔ رویه‌ها وجود دارد، در بعدهای بزرگتر از (یا مساوی با) ۴ ممکن نیست. در بعد ۳، این بحث (قضیهٔ وحدت‌بخشی) قابل اعمال نیست و رده‌بندی کامل ۳ ـ خمینه‌ها مدت زیادی برای توپولوژی‌دان‌ها یک رؤیا بوده است. این مسأله، حدسیهٔ پوانکاره را به‌عنوان یک حالت خیلی ویژه، نیز شامل می‌شود.

در این مقاله، کار قابل توجه اخیر گریشا پرلمن [۱۵ — ۱۷] را که ممکن است مسألهٔ رده‌بندی ۳ ـ خمینه‌ها را (به معنی طبیعی) حل کرده باشد، گزارش می‌کنیم. کار پرلمن در حال حاضر تحت بررسی شدید و دقیق گروه‌های تحقیقاتی زیادی در جهان قرار دارد. تاکنون بخش بزرگی از کار او به‌وسیلهٔ متخصصان این مبحث، معتبر شناخته شده است. اگرچه فعلاً زود است که کار او را راه‌حل قطعی برای مسأله تلقی کنیم، ولی ایده‌های پرلمن بسیار اصیل و از بینش عمیق برخوردار است. نتایجی که او به‌دست آورده است، تاکنون مورد استفادهٔ دیگرانی که در موضوع‌های وابسته تحقیق می‌کنند نیز قرار گرفته است. این رویدادها، نوشتن مقاله‌ای (توصیفی) را در این باره توجیه می‌کند، در صورتی که قبل از این رویدادها، (نوشتن این مقاله) ممکن بود نابهنگام ارزیابی شود.

کار پرلمن بر کار پیشین ترستُن و همیلتون بنا شده است. در دو بخش بعدی، تصویر ترستن از ۳ ـ خمینه‌ها و شار ریچی را مورد بحث قرار می‌دهیم که به‌وسیلهٔ همیلتون معرفی و بررسی شده است. برای به‌دست آوردن پیش‌زمینه‌های بیشتر، به‌ویژه دربارهٔ حدسیهٔ پوانکاره، مقالهٔ میلنُر [۱۴] و مرجع‌های موجود در آن را ببینید. برای ملاحظهٔ توضیح و اظهارنظر مفصل‌تر و بحث دربارهٔ کار پرلمن، [۱۳] را نگاه کنید.

۲. حدسیهٔ هندسی‌سازی

درحالی که حدسیهٔ پوانکاره به مدت حدود صد سال مطرح بوده است، تیزبینی‌های قابل توجه ترستن در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ به این اندیشهٔ واقع‌بینانه منجر شد که می‌توان ۳ ـ خمینه‌های بسته را نیز به روشی مشابه رده‌بندی رویه‌ها از طریق قضیهٔ وحدت‌بخشی، درک و رده‌بندی نمود. برای توضیح این مطلب، ابتدا باید ببینیم هندسه‌های متناظر در بعد سه کدامند. به زبان هندسهٔ ریمانی، یک ساختار هندسی بر خمینهٔ M، متریک ریمانی کامل موضعاً همگن g است. بنابراین، M را می‌توان به‌صورت خارج‌قسمت $\Gamma/G/H$ بیان کرد که در آن G گروه طولپایی فضای پوششی عام $(\widetilde{M}, g)$ است و Γ و H به‌ترتیب زیرگروه‌های گسسته و فشردهٔ گروه لی G هستند. ترستن نشان داد[۱] هشت هندسهٔ سادهٔ همبند G/H (توصیف شده در بالا) در بعد سه وجود دارد که خارج قسمت‌های

---

۱) رده‌بندی ترستن اصولاً حالت خاصی از رده‌بندی بسیار قدیمی‌تر بیانکی از متریک‌های همگن فضا ـ زمان است که از نسبیت عام ناشی می‌شوند. برای نکات بیشتر دربارهٔ (فرهنگ مرتبط با) این رده‌بندی، [۳] را نگاه کنید.

فشرده می‌پذیرند. مانند بعد دو، مهمترین هندسه‌ها آن‌هایی هستند که دارای خمیدگی ثابت‌اند: هندسهٔ هذلولوی $\mathbb{H}^۳$ با خمیدگی ۱−، هندسهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ با خمیدگی ۰ و هندسهٔ کروی $\mathbb{S}^۳$ با خمیدگی ۱+. پنج هندسهٔ باقیمانده، حاصلضرب یا حاصلضرب تابدار با هندسه‌های دو بُعدی‌اند. $S^۱$ ـ کلاف‌های (تاری) بدیهی بر پایهٔ یک رویه از گونهٔ g $(g > ۱)$ دارای هندسهٔ $\mathbb{H}^۲ \times \mathbb{R}$ هستند، در حالی‌که کلاف‌های نابدیهی دارای هندسهٔ $\widetilde{SL(۲, \mathbb{R})}$ می‌باشند[۱]؛ $S^۱$ ـ کلاف‌های نابدیهی بر پایهٔ چنبرهٔ $T^۲$ دارای هندسهٔ پوچ[۲] هستند، در حالی‌که $T^۲$ ـ کلاف‌های نابدیهی بر پایهٔ $S^۱$ دارای هندسهٔ سُل[۳] (یا پوچ یا هندسهٔ $\mathbb{R}^۳$) هستند؛ سرانجام $S^۱$ ـ کلاف‌ها بر پایهٔ $S^۲$ دارای هندسهٔ $\mathbb{S}^۲ \times \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{S}^۳$) هستند. مثلاً هر ۳ ـ خمینهٔ تاربندی‌شدهٔ زایفر، یعنی ۳ ـ خمینه‌ای که یک $S^۱$ ـ عمل موضعاً آزاد می‌پذیرد، دارای چنین ساختار هندسی است.

۳ ـ خمینه‌های هندسی، یعنی ۳ ـ خمینه‌هایی که ساختار هندسی می‌پذیرند، بلوک‌های ساختمانی ۳ ـ خمینه‌های پیچیده‌تر هستند. برای سادگی، در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم همهٔ خمینه‌های M جهت‌پذیرند. بلوک‌های ساختمانی به‌روش جمع همبند در امتداد کره‌های ۲ ـ بعدی $S^۲$ و نیز در امتداد چنبره‌های $T^۲$ گردهم می‌آیند. به‌عنوان یک مثال سادهٔ چنین گردهم آمدن، فرض کنید M_i مجموعه‌ای باپایان از ۳ ـ خمینه‌های تاربندی‌شدهٔ زایفر[۴] بر رویه‌های Σ_i با مرز ناتهی باشد، چنان‌که ∂M_i متشکل از چنبره‌هاست. این چنبره‌ها را می‌توان دوبه‌دو توسط وابرسانی‌هایی به یکدیگر چسباند تا یک ۳ ـ خمینهٔ بسته یا یک ۳ ـ خمینه با مرز چنبره(ای) به‌دست آید. ۳ ـ خمینه‌ای که به این ترتیب حاصل می‌شود، خمینهٔ گرافی [یعنی خمینه‌ای که جمعوندهای تجزیهٔ چنبره‌ای آن، فقط خمینه‌های زایفر باشند] نام دارد (به هر فضای تاربندی‌شدهٔ زایفر، یک رأس و به هر چنبره که دو چنین فضای زایفر را به هم وصل می‌کند، یک ضلع نسبت داده می‌شود). یک $T^۲$ ـ کلاف بر پایهٔ $S^۱$ یک خمینهٔ گرافی است، زیرا برابر است با اجتماع دو فضای تاربندی‌شدهٔ زایفر بر $S^۱ \times I$. خمینه‌های گرافی و بررسی کامل ساختارشان توسط والد هاوزن[۵]

---

۱) $\widetilde{SL(۲, \mathbb{R})}$ عبارت است از گروه لی پوششی عام $SL(۲, \mathbb{R})$ با یک متریک ریمانی ناوردای چپ ـ م.

۲) Nil عبارت است از گروه لی پوچ‌توان هایزنبرگ ۳ ـ بعدی متشکل از ماتریس‌های به‌صورت $\begin{bmatrix} ۱ & * & * \\ ۰ & ۱ & * \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ همراه با متریک ریمانی پوچ‌توان ـ م.

۳) Sol عبارت است از گروه لی حل‌پذیر پوانکاره ـ لورنتس $E(۱, ۱)$ متشکل از حرکت‌های صلب یک فضا زمان ۲ ـ بعدی با متریک تخت $dt^۲ - dx^۲$. در حالت‌های ۲ و ۳ فضای پوششی عام خمینهٔ معرفی‌شده، الگوی ذاتی هندسهٔ مطلوب را ارائه می‌کند ـ م.

۴) خمینهٔ فشردهٔ $N^۳$، فضای تاری زایفر (Seifert) نامیده می‌شود اگر یک برگ‌بندی با برگ‌های $S^۱$ بپذیرد (ن.ک. ص ۲ از [۲۰]) ـ م.

5) Waldhausen

معرفی و انجام شده است.

به‌عکس، فرض کنید M یک ۳ ـ خمینهٔ بستهٔ دلخواه و مانند قبل جهت‌پذیر باشد، آن‌گاه بر اساس ساختار ساده‌ترین رویه‌هایی که در M نشانده می‌شوند (یعنی کره‌ها و چنبره‌ها)، M به قطعه‌هایی تجزیه یا شکافته می‌شود. از نظر توپولوژیکی، این کار به‌کمک نتایج کلاسیک ذیل در توپولوژی ۳ ـ خمینه‌ها انجام می‌پذیرد:

تجزیهٔ کره‌ای (یا اول) (کِنِسِر، میلنُر)

فرض کنید M یک ۳ ـ خمینهٔ بسته باشد، آن‌گاه M یک تجزیهٔ جمع همبند باپایان به‌صورت

$$M = (K_1\sharp....\sharp K_p)\sharp(L_1\sharp....\sharp L_q)\sharp(\sharp_1^r S^2 \times S^1) \tag{۳}$$

می‌پذیرد. در اینجا عامل‌های K و L، ۳ ـ خمینه‌های بستهٔ تحویل‌ناپذیرند، یعنی هر ۲ ـ کرهٔ نشانده شدهٔ S^2 (در M) مرز یک گوی سه‌بعدی می‌باشد. عامل‌های K دارای گروه بنیادی بی‌پایان هستند و عبارتند از ۳ ـ خمینه‌های غیرکروی ($K(\pi, 1)$ ها)[1] در حالی‌که عامل‌های L دارای گروه بنیادی باپایان هستند و فضای پوششی عام آن‌ها یک ۳ ـ کرهٔ هموتوپی است. چون $M\sharp S^3 = M$، فرض می‌کنیم هیچ عامل L، S^3 نیست مگر این‌که $M = L = S^3$. عامل‌ها در تجزیهٔ (۱) با تقریب جایگشت یگانه‌اند و از M با اعمال جراحی[2] بر مجموعه‌ای از فضاهای اساسی یعنی ۲ ـ کره‌های توپولوژیکی نابدیهی (نشانده شده) در M (با جایگزینی ناحیه‌های $S^2 \times I$ با دو نسخه از B^3)، به‌دست می‌آیند. شکل ۱ را ببینید. عامل‌های K در تجزیهٔ (۱) ممکن است چنبره‌های توپولوژیکی اساسی را دربرداشته باشند. یک چنبرهٔ نشانده شدهٔ T^2 در M تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر نگاشت شمول آن در M: $d : T^2 \hookrightarrow M$، نگاشت یک‌به‌یک $d_\sharp : \pi_1(T^2) \longrightarrow \pi_1(M)$ روی گروه π_1 القا کند. یک ۳ ـ خمینهٔ N چنبرهٔتحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر هر چنبرهٔ نشانده شدهٔ تراکم‌ناپذیر را بتوان به یک چنبره در ∂N تغییر شکل داد. بنابراین اگر $\partial N = \emptyset$، آن‌گاه N هیچ چنبرهٔ تراکم‌ناپذیر ندارد.

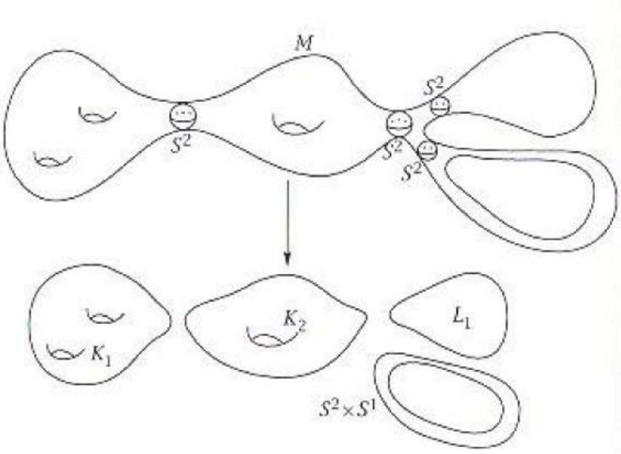
تجزیهٔ چنبره‌ای (یاکو ـ شالِن، یوهانسِن)

فرض کنید M یک ۳ ـ خمینهٔ بستهٔ تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت، مجموعه‌ای باپایان و احتمالاً تهی از چنبره‌های تراکم‌ناپذیر مجزا در M وجود دارد که M را به

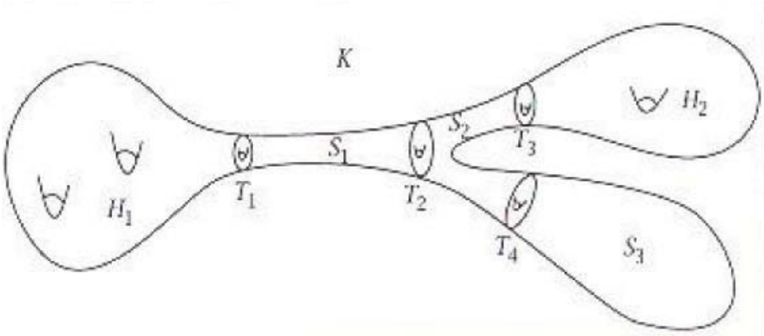
---

۱) فضای توپولوژیک $X = K(\pi, 1)$ عبارت است از فضای توپولوژیکی که $\pi_i(X) = \{0\}$ برای $i \neq 1$، $\pi_1(X) = \pi$ و π هر گروه داده شده است. ن.ک. صفحهٔ ۴۸۴ از [۲۴].

۲) ن.ک. صفحه‌های ۳۲۵ و ۳۲٦ از [۲۱] ـ م.



شکل ۱. تجزیهٔ کره‌ای



شکل ۲. تجزیه چنبره‌ای. S_i فضای زایفر تاربندی‌شده، H_j فضای چنبره ــ تحویل‌ناپذیر

مجموعه‌ای باپایان از ۳ ــ خمینه‌های فشرده (با مرز چنبره‌ای) تجزیه می‌کند و هر یک از آن‌ها ۳ ــ خمینهٔ چنبرهٔتحویل‌ناپذیر یا فضای زایفر تاربندی‌شده می‌باشد. یک تجزیهٔ درشت‌تر ولی اصولاً هم‌ارز، توسط چنبره‌هایی داده می‌شود که M را به عامل‌های چنبرهٔتحویل‌ناپذیر یا خمینهٔ گرافی جداسازی می‌کنند. شکل ۲ را ببینید.

به‌استثنای $S^{۲} \times S^{۱}$ و $\mathbb{Z}_{۲}$ ــ خارج‌قسمت جهت‌پذیر آن $S^{۲} \times_{\mathbb{Z}_{۲}} S^{۱} \simeq \mathbb{RP}^{۳} \sharp \mathbb{RP}^{۳}$، ۲ ــ کره‌های اساسی مانع‌هایی برای وجود ساختار هندسی بر یک ۳ ــ خمینه هستند. این مطلب دربارهٔ چنبره‌های اساسی نیز درست است، مگر این‌که M یک خمینهٔ زایفر تاربندی‌شده یا یک ۳ ــ خمینهٔ سُل باشد. بنابراین تجزیه‌های کره‌ای و چنبره‌ای، M را به‌صورت توپولوژیک به

قسمت‌هایی تقسیم می‌کنند که این مانع‌های شناخته‌شده حذف می‌شوند.

حدسیهٔ هندسی‌سازی (ترستن). اگر M یک ۳ ـ خمینهٔ بستهٔ جهت‌دار باشد، آن‌گاه هر مولفهٔ تجزیهٔ کره‌ای و چنبره‌ای، یک ساختار هندسی می‌پذیرد.

حدسیهٔ هندسی‌سازی، رده‌بندی کامل و مؤثری از همهٔ ۳ ـ خمینه‌های بسته ارائه می‌دهد که از خیلی جنبه‌ها به رده‌بندی رویه‌ها شباهت دارد. به‌طور دقیق‌تر، این حدسیه، رده‌بندی ۳ ـ خمینه‌ها را به رده‌بندی ۳ ـ خمینه‌های هندسی تحویل می‌کند. رده‌بندی ۳ ـ خمینه‌های هندسی نسبتاً ساده است و به‌جز برای حالت ۳ ـ خمینه‌های هذلولوی که یک شاخهٔ فعال تحقیقی باقیمانده است، برای سایر حالت‌ها کاملاً شناخته شده است.

برای نشان دادن قدرت حدسیهٔ ترستن، ببینیم چگونه می‌توان حدسیهٔ پوانکاره را از آن نتیجه گرفت. اگر M یک ۳ ـ خمینهٔ سادهٔ همبند باشد، آن‌گاه تجزیهٔ کره‌ای (۱) متضمن این است که M یک L عامل باشد. حدسیهٔ هندسی‌سازی نتیجه می‌دهد که L هندسی است و بنابراین $L = S^۳/\Gamma$. از این‌رو $M = L = S^۳$.

تحقیقات و تدوین ترستن دربارهٔ (از) حدسیهٔ هندسی‌سازی، موضوع توپولوژی خمینه‌های سه‌بعدی را متحول ساخت. برای ملاحظهٔ شرحی در این خصوص، [۱۸] و [۱۹] و مرجع‌های آن‌ها را ببینید. او دریافت که در ردهٔ ۳ ـ خمینه‌ها(ی تحویل‌ناپذیر)، ۳ ـ خمینه‌های هذلولوی مانند حالت رویه‌ها عمومی‌ترین خمینه‌ها هستند و ایده‌ها و روش‌های بسیاری برای فهم ساختار ۳ ـ خمینه‌ها ارائه کرد. ترستن و محققان دیگر، حدسیهٔ هندسی‌سازی را در چند حالت مهم ثابت کردند که مشهورترین آن‌ها عبارت است از قضیهٔ خمینهٔ هَکِن: اگر یک ۳ ـ خمینهٔ هکن تحویل‌ناپذیر باشد، یعنی M یک رویهٔ تراکم‌ناپذیر با گونهٔ g ($g \geq ۱$) را دربرداشته باشد، آن‌گاه حدسیهٔ هندسی‌سازی برای M برقرار است.

دو مؤلفهٔ مهم در رویکرد ترستن عبارتند از مفهوم تغییر (شکل) و تبهگونی ساختارهای هذلولوی بر خمینه‌های نافشرده (یا تغییر شکل ساختارهای هذلولوی تکین بر خمینه‌های فشرده). هشت ساختار هندسی که در ابتدای این بخش اشاره کردیم، صُلبند، یعنی هیچ ساختار هندسی وجود ندارد که به‌طور پیوسته بین آن‌ها قرار گیرد. بنابراین بر یک ۳ ـ خمینهٔ مرکب، ساختار هندسی هر عامل (در تجزیهٔ (۱)) در گذر از آن عامل به عامل دیگر، باید تبهگون شود؛ هیچ ساختار یا متریکی وجود ندارد که هندسی‌سازی همهٔ M را بدهد. مثلاً در شکل ۲، تکه‌های H ممکن است خمینه‌های هذلولوی باشند که به‌وسیلهٔ چنبره‌ها از تکه‌های زایفر تاربندی‌شدهٔ S جدا شده‌اند. اگرچه این شکافت، توپولوژیکیْ خوش‌تعریف است، هندسه‌ها در ناحیه‌های به هم چسبیده، سازگار نیستند و از نظر متریکی، هیچ ناحیهٔ طبیعی وجود ندارد که در آن، عمل چسباندن انجام شود.

به‌طور مستقل و تقریباً همزمان با ترستن، گروموف [۱]، [۸] نیز تغییر شکل و تبهگونی متریک‌های ریمانی کلی‌تری را فقط با شرط خمیدگی کراندار به‌جای خمیدگی ثابت، مطالعه (می)کرد. ایدهٔ او این است که رفتار یک متریک یا یک خانواده از متریک‌ها را با قرار دادن یک

کران یکنواخت بر تانسور خمیدگی ریمانی متریک(ها)، می‌توان کنترل کرد[۱]. این ایده، منجر به قضیهٔ مهم فشرده‌سازی گروموف[۲]، نظریهٔ ساختاری خمینه‌های تقریباً تخت[۳] و نظریهٔ خمینه‌های ریمانی فروریختنی[۴] شد که به‌تفصیل توسط او، چیگر و فوکایا مطالعه و اثبات شده است.

صورتی از این نتایج به‌ویژه به اهداف ما مربوط است. فرض کنید (M, g) یک خمینهٔ بستهٔ ریمانی با حجم نرمال‌شدهٔ واحد باشد و فرض کنید

$$| \, Riem \, | \leq \Lambda \tag{۴}$$

برای یک ثابت دلخواه $\Lambda < \infty$. متریک g یک تجزیهٔ طبیعی از M به بخش‌های ضخیم و نازک، $M = M^\nu \cup M_\nu$ به‌دست می‌دهد که

$$M^\nu = \{x \in M \mid volB_x(۱) \geq \nu\}, \quad M_\nu = \{x \in M \mid volB_x(۱) < \nu\} \tag{۵}$$

در اینجا $B_x(۱)$ گوی ژئودزیکی حول x به شعاع ۱ و $\nu > ۰$ عدد دلخواه کوچک ثابت است. اکنون ردهٔ همهٔ n ــ خمینه‌های ریمانی با حجم واحد که در شرط (۲) صدق می‌کنند و تجزیه‌های متناظر (۳) را در نظر بگیرید. در این صورت، هندسه و توپولوژی M^ν به‌طور اولیٰ کنترل می‌شود، یعنی برای یک $\nu > ۰$ داده شده، فقط تعدادی باپایان (وابسته به Λ و ν) نوع توپولوژیکی ممکن برای M^ν وجود دارد. همچنین، فضای متریک‌ها بر M^ν به معنی طبیعی فشرده است: هر دنباله دارای زیردنباله‌ای همگرا در توپولوژی $C^{۱,\alpha}$، $\alpha < ۱$ است (با تقریب وابرسانی‌ها)[5]. برای ν به اندازهٔ کافی کوچک، بخش نازک M یعنی M_ν یک F ــ ساختار به معنی چیگر ــ گروموف می‌پذیرد. در بعد سه، این مطلب دقیقاً بدین معنی است که M_ν یک خمینهٔ گرافی با مرز چنبره‌ای (یا تهی) است. به‌ویژه، توپولوژی M_ν قویاً محدود شده است. یک متریک بر M_ν قویاً فرو می‌ریزد بدین معنی که دایره‌ها در تکه‌های زایفر تاربندی‌شدهٔ M_ν و چنبره‌هایی که این بخش‌ها را به هم می‌چسبانند

---

۱) تانسور خمیدگی، یک (۳, ۱) تانسور پیچیده است که برحسب مشتق‌های مرتبهٔ دوم متریک بیان می‌شود. در یک دستگاه مختصات موضعی نرمال به مرکز یک نقطهٔ داده شده، مؤلفه‌های تانسور ریمان به‌صورت $R^l_{ijk} = -\frac{۱}{۲}(\partial_i\partial_k g_{jl} + \partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_k g_{il} - \partial_i\partial_l g_{jk})$ داده می‌شوند.

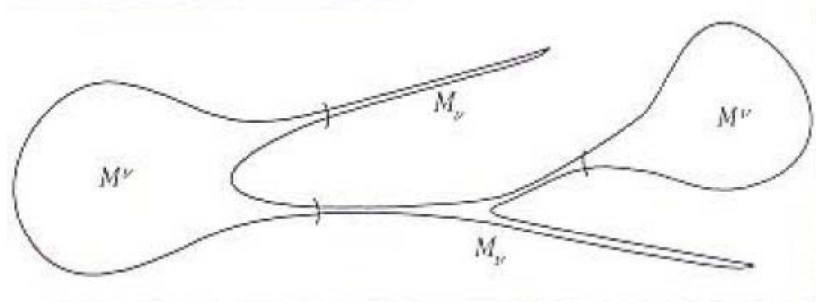
۲) ن.ک. صفحات ۱۱۸—۱۱۹ از [۲۱] ــ م.

۳) خمینهٔ ریمانی (M^n, g)، ϵ ــ تخت نامیده می‌شود اگر خمیدگی M^n کرانی به‌صورت $|Rm| \leq \frac{\epsilon}{diam^۲(M^n, g)}$ برحسب قطر خمینه داشته باشد. گفته می‌شود M^n تقریباً تخت است اگر برای هر $\epsilon \geq ۰$، ϵ ــ تخت باشد. در اینجا $Rm(x, y, w, z) = Riam(x, y, w, z) := g\,(R(x, y)w, z)$ که R، (۳, ۱) تانسور خمیدگی ریمانی M^n است (ن.ک. ص ۱۷ از [۲۰]) ــ م.

۴) خمیدهٔ ریمانی (M^n, g)، ϵ ــ فروریخته($\epsilon > ۰$) نامیده می‌شود اگر $\forall x \in M$، $inj(x) \leq \epsilon$ که $inj(x)$ شعاع یکایکی خمینه در نقطهٔ x است. گفته می‌شود خمینهٔ M^n فرو می‌ریزد اگر خانواده‌ای از متریک‌های ریمانی $\{g_\epsilon : \epsilon > ۰\}$ بپذیرد چنان‌که $\lim_{\epsilon \to ۰}(\sup inj_{g_\epsilon}(x)) = ۰$، ن.ک. صص ۱۱—۱۵ از [۲۱]) ــ م.

۵) ن.ک. صفحه‌های ۳۰۱—۳۰۳ و ۳۰۸—۳۱۱ از [۲۳] ــ م.

قطر بسیار کوچکی، وابسته به ν دارند. شکل ۳ را به‌عنوان یک تصویر نمونه ببینید. نیز، برای هر $\nu > ۰$ ثابت، وقتی $\frac{\nu'}{\nu} \to ۰$، فاصلهٔ بین M^ν و بخش نازک دلخواه $M_{\nu'}$ به‌دلخواه بزرگ می‌شود. توجه کنید که نتایج مشابه به‌طور موضعی و نیز برای خمینه‌های نافشردهٔ کامل برقرار است. بنابراین نرمال‌سازی به حجم واحد (که قبلاً گفته شد) اساسی نیست. رویکرد ترستن به هندسی‌سازی دربارهٔ «بخش هذلولوی» حدسیه، پیشرفت زیادی کرده است. در مقایسه با این پیشرفت، پیشرفت کمی در «بخش خمیدگی مثبت» حدسیه حاصل شده‌است؛ مثلاً حدسیهٔ پوانکاره. قابل ذکر است که در بین هشت هندسه، هندسه‌های با خمیدگی ثابت $\mathbb{H}^۳$ و $\mathbb{S}^۳$ مهمترین هندسه‌ها برای درک موضوع هستند (از نظر مشخص کردن این‌که کدام خمینه‌ها هندسی‌اند). هندسه‌های (مخلوط) دیگر در مقام مقایسه، بسیار ساده‌ترند.



شکل ۳. تجزیه ضخیم ـ نازک

از نقطه‌نظر هندسهٔ ریمانی، حدسیهٔ ترستن به‌طور اصولی وجود «بهترین متریک» ممکن بر یک ۳ ـ خمینهٔ بسته را ارائه می‌دهد. در حالتی که M خودش هندسی نباشد، باید اجازه داد که متریک بهینه، دارای ناحیه‌های تبهگون باشد. بحث و شکل‌های قبل حاکی از این است که تبهگونی باید از طریق تجزیه در امتداد ۲ ـ کره‌ها (تجزیهٔ کره‌ای) و فرو ریختن خمینه‌های گرافی در امتداد دایره‌ها و چنبره‌ها (تجزیهٔ چنبره‌ای) رخ دهد.

۳. شار ریچی

یک روش یافتن بهترین متریک بر یک خمینه عبارت است از یافتن یک معادلهٔ تحولی طبیعی که به‌وسیلهٔ یک میدان برداری تعریف شده بر فضای متریک‌ها توصیف شود و تلاش برای اثبات این‌که خط‌های شار (خم‌های انتگرال میدان برداری = جواب‌های معادلهٔ تحولی) برای همهٔ زمان‌ها وجود دارند و به یک حد هندسی میل می‌کنند. در حالتی که یک خط شار همگرا نباشد، متریک‌های وابسته، تبهگون می‌شوند و لذا نیاز است که تبهگونی با توپولوژی M مرتبط شود.

به‌طور اصولی فقط یک میدان برداری (یا دقیق‌تر، خانواده‌ای از میدان‌های برداری) ساده و

طبیعی بر فضای متریک‌ها وجود دارد. این میدان با فرمول

$$\frac{d}{dt}g(t) = -۲Ric_{g(t)} + \lambda(t).g(t) \qquad (۶)$$

داده می‌شود. در اینجا Ric عبارت است از خمیدگی ریچی که در مختصات موضعی با فرمول $R_{ij} = (Ric)_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}$ داده می‌شود. بنابراین Ric اثر (trace) تانسور خمیدگی ریمانی است. ضریب ۲ در معادلهٔ فوق فقط برای آسانی است و می‌تواند با بازپرمایش زمان تغییر کند؛ $\lambda(t)$ ثابتی است که به زمان t بستگی دارد. شار ریچی، معرفی شده توسط همیلتون [۱۱] با قرار دادن $\lambda = ۰$ به‌دست می‌آید، یعنی

$$\frac{d}{dt}g(t) = -۲Ric_{g(t)} \qquad (۷)$$

دلیل این‌که معادلهٔ (۴) تنها معادلهٔ شار طبیعی است، اصولاً همان دلیلی است که منجر به معادله‌های میدان اینشتین در نسبیت عام شد. خمیدگی ریچی یک فرم دوخطی متقارن مانند تانسور متریک است. علاوه بر ضریب‌های متریک، فرم ریچی تنها فرمی است که به مشتق‌های (حداکثر) مرتبه دوم متریک بستگی دارد و نسبت به تغییر مختصات ناوردا است، یعنی یک $(۲,۰)$ تانسور به‌دست آمده از متریک. با بازمقیاس‌بندی متریک و متغیر زمان t، می‌توان معادلهٔ (۵) را به (۴) تبدیل کرد. مثلاً بازمقیاس‌بندی شار ریچی (۵) چنان‌که حجم $(M, g(t))$ (ثابت) نگه‌داشته شود، منجر به معادلهٔ شار (۴) با $\lambda = ۲\int R$ می‌شود، یعنی λ دو برابر مقدار میانگین خمیدگی عددی R است.

در یک دستگاه مختصات موضعی مناسب، معادلهٔ (۵) شکلی خیلی طبیعی دارد. بنابراین در زمان t، با انتخاب مختصات موضعی همساز که نگاشت‌های موضعاً تعریف شدهٔ همساز برحسب متریک $g(t)$ باشند، (۵) به‌صورت

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g) \qquad (۸)$$

درمی‌آید که Δ عملگر لاپلاس ــ بلترامی بر نگاشت‌ها $(C^\infty(M))$ نسبت به متریک $g = g(t)$ می‌باشد و Q یک عبارت برحسب (مشتقات) مرتبهٔ پایین‌تر است که برحسب g و مشتق‌های جزئی مرتبهٔ اول آن، از درجهٔ دو می‌باشد. این، یک معادلهٔ غیرخطی حرارت ــ گونه برای g_{ij} است. از بررسی این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، وجود و یگانگی جواب‌های شار ریچی بر یک فاصلهٔ زمانی با هر متریک اولیهٔ هموار، به‌دست می‌آید. این امر، دلیل وجود علامت منها$(-)$ در معادلهٔ (۵) است. علامت به‌اضافه$(+)$ در معادلهٔ (۵) منجر به معادلهٔ حرارت ــ گونهٔ پسرو می‌شود که در حالت کلی هیچ جوابی ندارد.

در اینجا چند مثال ساده از جواب‌های صریح شار ریچی ارائه می‌کنیم. اگر متریک اولیهٔ $g(۰)$ خمیدگی ریچی ثابت داشته باشد، یعنی $Ric = \alpha.g$، آن‌گاه متریک تحولی $g(t)$ دقیقاً یک بازمقیاس‌بندی $g(۰)$ است: $g(t) = (۱ - ۲\alpha t)g(۰)$. توجه کنید که اگر $\alpha > ۰$، آن‌گاه شار،

متریک را منقبض می‌کند، در حالی‌که اگر $\alpha < 0$، شار، متریک را در همهٔ جهت‌ها به‌طور یکنواخت منبسط می‌کند. بنابراین اگر $g(t)$ بازمقیاس‌بندی شود چنان‌که خمینه حجم ثابت داشته باشد، خم حاصل ثابت است. نقطه‌های پایدار شار ریچی با حجم نرمال‌شده، دقیقاً ردهٔ متریک‌های اینشتین هستند، یعنی متریک‌های با خمیدگی ریچی ثابت. در بعد سه، متریک‌های اینشتین دارای خمیدگی ثابت‌اند و بنابراین هندسه‌های $\mathbb{H}^3$، $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{S}^3$ را به‌دست می‌دهند.

به‌طور کلی‌تر، اگر $Ric(x,t) > 0$، آن‌گاه شار، متریک $g(t)$ را در همسایگی x، (با بزرگ‌شدن t مثبت) منقبض می‌کند، در حالی‌که اگر $Ric(x,t) < 0$، آن‌گاه شار، $g(t)$ را در همسایگی x منبسط می‌کند. در یک نقطهٔ عمومی، جهت‌هایی با خمیدگی ریچی مثبت و جهت‌هایی با خمیدگی ریچی منفی وجود دارد که در امتداد آن‌ها، متریک موضعاً منقبض یا منبسط می‌شود.

فرض کنید $g(0)$ یک متریک حاصلضرب بر $\sum \times S^1$ باشد که $\sum$ رویه‌ای با متریک دارای خمیدگی ثابت است. در این صورت $g(t)$ یک متریک حاصلضرب باقی می‌ماند و طول عامل S^1 نیز ثابت است، در حالی‌که عامل رویه برحسب علامت خمیدگی‌اش منبسط یا منقبض می‌شود.

سرانجام، شار ریچی با عمل گروه وابرسانی‌ها جابه‌جا می‌شود، بنابراین همهٔ طولپایی‌های متریک اولیه را حفظ می‌کند. پس ۳ ـ خمینه‌های هندسی، هندسی باقی می‌مانند. برای هندسه‌های «نامثبت» مخلوط $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$، $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$، پوچ و سُل، شار ریچی با حجم نرمال‌شده، عامل‌های S^1 یا T^2 را منقبض می‌کند و عامل رویه (پایه) را بسط می‌دهد در حالی‌که برای هندسهٔ مثبت مخلوط $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$، شار با حجم نرمال‌شده، S^2 را منقبض و عامل $\mathbb{R}$ را بسط می‌دهد.

اکنون معادلهٔ شار ریچی (۵) را در حالت کلی در نظر بگیرید. از شکل آن واضح است که شار $g(t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر خمیدگی ریچی آن کراندار باقی بماند. از این مطلب، نتیجه می‌شود که برای بررسی وجود $g(t)$ باید معادله‌های تحولی خمیدگی القاشده از معادلهٔ شار برای متریک، مورد رسیدگی قرار گیرد. ساده‌ترین معادله از این نوع، عبارت است از معادلهٔ تحولی خمیدگی عددی، یعنی $R = tr_g Ric = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$:

$$\frac{d}{dt}R = \Delta R + 2 \mid Ric \mid^2 \tag{9}$$

محاسبهٔ (۷) در نقطه‌ای که کمینهٔ R بر M، یعنی R_{min} حاصل می‌شود، این حقیقت مهم را نتیجه می‌دهد که R_{min} در امتداد شار، یکنوای نانزولی است. به‌ویژه، شار ریچی خمیدگی مثبت را (در همهٔ بعدها) حفظ می‌کند. به‌علاوه اگر $R_{min}(0) > 0$، همان بحث نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dt}R_{min} \geq \frac{2}{n}R_{min}^2, \qquad n = dim M$$

حال بنابر نامساوی کُشی ـ شوارتز، $|Ric|^2 \geq \frac{1}{n}R^2$ و یک انتگرال‌گیری ساده نامساوی

$$t \leq \frac{n}{2R_{min}(0)} \tag{10}$$

را به‌دست می‌دهد. بنابراین، اگر $R_{min}(0) > 0$، شار ریچی فقط تا زمان بیشینهٔ $T \leq \frac{n}{2R_{min}(0)}$ وجود دارد. به‌عکس، در ناحیه‌هایی که خمیدگی ریچی منفی معین است، شار برای هر زمان (مثبت) وجود دارد.

تحول خمیدگی ریچی همان شکل کلی (۷) را دارد:

$$\frac{d}{dt}R_{ij} = \Delta R_{ij} + \widetilde{Q}_{ij} \tag{11}$$

عبارت $\widetilde{Q}$ خیلی پیچیده‌تر از خمیدگی ریچی در (۷) است ولی فقط شامل جمله‌های درجهٔ دوم خمیدگی است. با وجود این، $\widetilde{Q}$ متضمن تانسور کامل خمیدگی ریمانی g، Riem، و نه فقط خمیدگی ریچی است (مانند رابطهٔ (۷) که متضمن خمیدگی ریچی و نه فقط خمیدگی عددی است). یک ویژگی مقدماتی ولی مهم در بعد سه این است که خمیدگی ریمانی، Riem، به‌طور کامل به‌صورت جبری به‌وسیلهٔ خمیدگی ریچی مشخص می‌شود. نتیجهٔ این مطلب این است که به‌طور کلی، فرصت «مطالعه و کارکردن» روی شار ریچی در بعد سه فراهم‌تر است. مثلاً تحلیل $\widetilde{Q}$ نشان می‌دهد که شار ریچی، مثبت‌بودن خمیدگی ریچی را در بعد سه حفظ می‌کند: اگر $Ric_{g(0)>0}$، آن‌گاه $Ric_{g(t)>0}$ برای $t > 0$. این مطلب در بعدهای بالاتر درست نیست. از طرف دیگر، در ابعاد بزرگتر از ۲، شارریچی، منفی‌بودن خمیدگی ریچی و وجود یک کران پایینی کلی $Ric \geq -\lambda$، به‌ازای $\lambda > 0$ را حفظ نمی‌کند. از این پس، فرض می‌کنیم $\dim M = 3$.

در قضیهٔ فشردگی گروموف و تجزیهٔ ضخیم/نازک (۳)، فرض وجود کران برای $|Riem|$ را می‌توان با فرض وجود کران برای $|Ric|$ جایگزین نمود (زیرا بعد سه را مطالعه می‌کنیم). به‌علاوه، در فاصلهٔ زمانی $[0, t]$ که $|Ric|$ کراندار است، متریک‌های $g(t)$ همگی به‌عنوان فرم‌های دوخطی با یکدیگر نیم ـ طولپایند: $cg(0) \leq g(t) \leq Cg(0)$ که C و c به t وابسته‌اند. بنابراین، ناحیهٔ به‌دلخواه نازک M_ν، $\nu \ll 1$ فقط با فرض کراندار بودنِ $|Ric|$ در زمان‌های به اندازهٔ دلخواه بزرگ، می‌تواند بروز کند.

بحث بالا نشان می‌دهد شار ریچی مفهومی بسیار طبیعی است و ویژگی‌های جالب زیادی دارد. به‌کمک تصویر ترستن از ۳ ـ خمینه‌ها، برخی ارتباط‌های هندسی یا توپولوژیکی را می‌توان دید. با وجود این، اولین نشانهٔ حقیقی مبنی بر این‌که شار ابزار مهم جدیدی در مطالعهٔ مسائل هندسی است، عبارت است از نتیجهٔ ذیل از همیلتون:

- **قضیهٔ فضا ـ فرم** [۸]. اگر $g(0)$ یک متریک با خمیدگی ریچی مثبت بر ۳ ـ خمینهٔ M باشد، آن‌گاه شار ریچی با حجم نرمال‌شده برای همهٔ زمان‌ها وجود دارد و به متریک کامل (کروی) بر S^3/Γ میل می‌کند که Γ یک زیرگروه باپایان $SO(4)$ است که بر S^3 آزاد عمل می‌کند.

بنابراین شار ریچی، ۳ ـ خمینه‌های با خمیدگی ریچی مثبت را «هندسی‌سازی» می‌کند. از زمان اثبات این نتیجهٔ بنیادی، یک سؤال باز این بوده است که آیا این نتیجه می‌تواند به متریک‌های اولیه با خمیدگی عددی مثبت تعمیم یابد؟

اگرچه تحول خمیدگی در امتداد شار ریچی برای متریک‌های اولیهٔ عمومی بسیار پیچیده است، بررسی تفصیلی (۹) منجر به نتایج مهم ذیل می‌شود:

- **تخمین تنگی خمیدگی** [۱۰]، [۱۲]. فرض کنید $g(t)$ جوابی برای شار ریچی بر ۳ـ خمینهٔ بستهٔ M باشد. در این صورت نگاشت ناصعودی $\phi : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $\phi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$، همچنین ثابت C که فقط به $g(0)$ بستگی دارد چنان وجود دارد که

$$Riem(x,t) \geq -C - \phi\left(R(x,t)\right).\mid R(x,t)\mid . \qquad (۱۲)$$

این عبارت بدین معنی است که همهٔ خمیدگی‌های مقطعی R_{ijji} حاصل از $g(t)$، ($\{e_i\}$ پایهٔ یکه متعامد در (x,t) است) به‌وسیلهٔ سمت راست معادلهٔ (۱۰) از پایین کراندار می‌شوند.

این تخمین، کران پایین یکنواخت برحسب زمان برای $Riem(x,t)$ به‌دست نمی‌دهد، ولی وقتی با این حقیقت توأم شود که خمیدگی عددی $R(x,t)$ از پایین به‌طور یکنواخت کراندار است، نتیجه خواهد داد که $|Riem(x,t)| \ll 1$ فقط هنگامی که $R(x,t) \ll 1$. بنابراین برای کنترل اندازهٔ خمیدگی کامل، $\mid Riem \mid$، کافی است فقط یک کران بالا برای خمیدگی عددی R بیابیم. این امر قابل توجه است، زیرا خمیدگی عددی نسبت به خمیدگی کامل، ناوردای متریکی خیلی ضعیف‌تری است. به‌علاوه، در نقاطی که خمیدگی به اندازهٔ کافی بزرگ است، (۱۰) نشان می‌دهد که $Riem(x,t)/R(x,t) \geq -\delta$ به‌ازای یک δ کوچک. بنابراین اگر متریک چنان مقیاس‌بندی شود که $R(x,t) = 1$، آن‌گاه $Riem(x,t) \geq -\delta$. در چنین مقیاسی، متریک در یک همسایگی (x,t) تقریباً دارای خمیدگی نامنفی است.

- **تخمین هَرنک** [۹]. فرض کنید $(N, g(t))$ جوابی برای شار ریچی با خمیدگی نامنفی و کراندار $Riem \geq 0$ و $g(t)$ متریک ریمانی باشد. در این صورت برای $0 < t_1 \leq t_2$ داریم

$$R(x_2, t_2) \geq \frac{t_1}{t_2} \exp\left(-\frac{d_{t_1}^2(x_1,x_2)}{2(t_2 - t_1)}\right) R(x_1, t_1) \qquad (۱۳)$$

که d_{t_1} نگاشت فاصله بر (N, g_{t_1}) است.

این تخمین ارتباط یا کنترل هندسهٔ جواب شار ریچی را در نقطه‌های مختلف فضا ـ زمان ممکن می‌سازد. یافتن تخمینی مشابه (۱۱) در حالت کلی، یعنی بدون فرض $Riem \geq 0$ یکی از موانع عملی برای پیشرفت شار ریچی بوده است.

بررسی بالا نشان می‌دهد که خمیدگی متریک حاصل از شار ریچی به خمیدگی مثبت مطلوب میل می‌کند. تمایل شار، به تحول برای مثبت‌ترشدن خمیدگی است و قوی‌ترین نتایج در حالت خمیدگی مثبت به اثبات رسیده است، مطلبی که تا اندازه‌ای در تضاد با رویکرد ترستن است.

۴. تشکیل تکینی

بررسی عمیق‌تر شار ریچی به تکینی‌هایی که در زمان باپایان بروز می‌کنند، مربوط می‌شود. همان‌طور که رابطهٔ (۸) نشان می‌دهد، در حالت کلی شار ریچی برای زمان به‌دلخواه بزرگ وجود ندارد. در حالت متریک‌های اولیه با خمیدگی ریچی مثبت، تکینی با بازمقیاس‌بندی شار ریچی چنان‌که حجم ثابت بماند، برطرف می‌شود. قضیهٔ فضا ــ فرم همیلتون نشان می‌دهد که شار با حجم نرمال‌شده برای همهٔ زمان‌ها وجود دارد و به‌طور هموار به یک متریک کامل (کروی) میل می‌کند. با وجود این، وضعیت برای متریک‌هایی که خمیدگی ریچی مثبت ندارند، الزاماً بسیار پیچیده‌تر است؛ مثلاً متریک‌های اولیه با خمیدگی عددی مثبت را در نظر بگیرید. هر خمینه که جمع همبند عامل‌های S^3/Γ و $S^2 \times S^1$ باشد، دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت است (با تجزیهٔ کره‌ای (۱) مقایسه کنید). بنابراین به دلایل توپولوژیکی روشن، شار ریچی با حجم نرمال‌شده به‌صورت مطلوب نمی‌تواند به متریک کامل (با خمیدگی مثبت) میل کند، حتی شار نرمال‌شده، تکینی تولید می‌کند.

تکینی‌ها مکرراً در رده‌های متعددی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی ظاهر می‌شوند و طی چند دهه، مطالعهٔ زیادی بر روی آن‌ها انجام شده است. به‌ویژه در متن‌های هندسی، روش معمول برای درک ساختار تکینی‌ها این است که جواب (شار ریچی) بر دنباله‌ای که به تکینی میل می‌کند، بازمقیاس‌بندی یا بازنرمال‌سازی شود تا آن را کراندار کند و تلاش شود تا به جوابی حدی از مسألهٔ بازنرمال‌سازی رسید. این جواب حدی به‌عنوان الگویی برای تکینی در نظر گرفته می‌شود و انتظار این است که الگوهای تکینی، ویژگی‌های خاصی داشته باشند که آن‌ها را از جواب دلخواه معادله، بسیار ساده‌تر کند.

تکینی شار ریچی فقط در صورتی امکان تشکیل دارد که خمیدگی بی‌کران شود. در این صورت فرض کنید $\lambda_i^2 = |Riem|(x_i, t_i) \to \infty$ به‌ازای دنباله‌ای از نقطه‌های $x_i \in M$ و زمان‌های $t_i \to T < \infty$. آن‌گاه طبیعی است که متریک‌ها و زمان‌های بازمقیاس‌بندی شده

$$\widetilde{g_i}(\widetilde{t_i}) = \lambda_i^2 g(t), \qquad \widetilde{t_i} = \lambda_i^2 (t - t_i) \tag{۱۴}$$

را بررسی کنیم. متریک‌های $\widetilde{g_i}$ نیز جواب‌هایی از شار ریچی‌اند و در نقطه‌های $(x_i, 0)$ دارای خمیدگی کراندار می‌باشند. به‌ازای انتخاب‌های مناسب x_i و t_i، خمیدگی در همسایگی x_i کراندار است و برای زمان‌های گذشتهٔ نزدیک، $0 \leq \widetilde{t_i}$، می‌توان نقطه‌هایی برگزید که خمیدگی $(M, g(t))$، $0 \leq t \leq t_i$، در آن نقاط بیشینه باشد.

بازمقیاس‌بندی (۱۲) همهٔ فاصله‌ها را با ضریب λ_i و زمان را با ضریب λ_i^2 منبسط می‌کند. بنابراین عملاً مطالعهٔ ما به ناحیه‌های بسیار کوچک حول (x_i, t_i) با اندازهٔ فضایی از مرتبهٔ $r_i = \lambda_i^{-1}$ منحصر می‌شود و با به‌کاربردن روش‌های میکروسکوپی، می‌توان ویژگی‌های در مقیاسی با اندازهٔ حدود یک را بررسی نمود. در این بررسی، به‌طور ضمنی فرض می‌شود مختصات در همسایگی x_i

با به‌کاربردن وابرسانی‌های موضعی مرتبط با بازمقیاس‌بندی متریک، تغییر می‌کند.

صورتی موضعی از قضیهٔ فشردگی گروموف، گذر به جواب حدی شار ریچی را مجاز می‌سازد که حداقل موضعاً در فضا و زمان تعریف شده است، مشروط بر این‌که حجم‌های موضعی خمینه(های) ریمانی بازمقیاس‌بندی شده، دارای کران پایین باشند. به‌طور صریح‌تر، باید x_i در $M^\nu(\bar{g}_i(\bar{t}_i))$ (برای یک $\nu > 0$ ثابت) انتخاب شود؛ (۳) را ببینید. این بدان معنی است که برحسب شار اولیهٔ مقیاس‌بندی نشده، متریک $g(t)$ نباید برمبنای مقیاس خمیدگی‌اش، موضعاً فرو ریخته شود، یعنی

$$volB_{x_i}(r_i, t_i) \geq \nu r_i^3.$$

یک حد همبند بیشینهٔ $(N, \widetilde{g}(\widetilde{t}, x))$ شامل نقطهٔ پایه‌ای $x = \lim x_i$، الگوی تکینی نامیده می‌شود. مشاهده کنید که توپولوژی خمینهٔ حدی N ممکن است از خمینهٔ اولیهٔ M متمایز باشد و ممکن است بیشتر قسمت‌هایش در بازمقیاس‌بندی، به بینهایت واگرا شود.

برای توصیف مفید بودن بالقوهٔ این فرایند، فرض کنید نافروریختگی [فصل‌های ۸ و ۹ از [۲۱] را ببینید] موضعی بر مقیاس خمیدگی را داشته باشیم و نقطه‌های با خمیدگی بیشینه در فضا و زمان $0 \leq t \leq t_i$ انتخاب شده باشند. آن‌گاه (حداقل در امتداد یک زیردنباله) یک جواب حدی برای شار ریچی $(N, \widetilde{g}(\widetilde{t}, x))$ بر پایهٔ x (که دست‌کم برای زمان‌های $(-\infty, 0)$ تعریف شده است) به‌دست می‌آید. به‌علاوه، $\widetilde{g}(\widetilde{t})$ یک متریک ریمانی کامل بر N است. در اصطلاح همیلتون، این جواب‌ها، جواب‌های قدیمی شار ریچی نامیده می‌شوند. به‌کمک تخمین‌های (۱۰) و (۱۱) می‌توان نشان داد که چنین الگوهای تکینی در حقیقت دارای ویژگی‌های مهمی هستند که آن‌ها را از جواب‌های عمومی شار ریچی بسیار ساده‌تر می‌کند. همچنان که متعاقب (۱۰) بحث شد، تخمین تنگی متضمن این است که خمینهٔ ریمانی حدی، خمیدگی نامنفی داشته باشد. به‌علاوه، توپولوژی خمینه‌های کامل N با خمیدگی نامنفی در بعد سه کاملاً شناخته شده است. اگر N نافشرده باشد، آنگاه با $\mathbb{R}^3$، $S^2 \times \mathbb{R}$ یا خارج قسمتی از این فضاها وابرسان است. اگر N فشرده باشد، آنگاه صورتی کمی قوی‌تر از قضیهٔ همیلتون متضمن این است که N با S^3/Γ، $S^2 \times S^1$ یا $S^2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ وابرسان باشد. همچنین، تخمین هرنک (۱۱) در حد برقرار است.

این ویژگی‌های عمومی الگوهای تکنیکی مسلماً نویدبخش‌اند. با وجود این، برای هر گونه بهره‌برداری واقعی از این توصیف، باید بر مسائل زیادی غلبه کرد.

۱) باید نافروریختگی در مقیاس خمیدگی ثابت شود تا یک الگوی تکنیکی به‌دست آید.

۲) به‌طور کلی، خمیدگی ممکن است در مقیاس‌ها یا (با) سرعت‌های مختلف بسیاری به بینهایت واگرا شود و شناخت ساختار الگوهای تکینی در نقطه‌های فضا ـ زمان با خمیدگی بیشینه، به‌تنهایی کافی نیست. پدیده‌هایی نسبتاً مشابه (با نام متداول پدیده‌های حبابی) در بسیاری از مسائل هندسی وردشی دیگر ظهور می‌کند، مثلاً نگاشت‌های همساز، معادله‌های یانگ ـ میلز، متریک‌های اینشتین و مثال‌های دیگر (در این بسترهای بیضوی، مشکلات

مربوط به مقیاس‌های چندگانه، به‌طور مؤثر برطرف شده است).

۳) حتی اگر کسی بتواند دو مسألهٔ قبلی را حل کند، مسألهٔ اصلی باقی است و آن عبارت است از مرتبط کردن ساختار تکینی‌ها با توپولوژی خمینهٔ زمینه.

مطالعهٔ تشکیل تکینی‌ها در شار ریچی را همیلتون [۱۰] آغاز کرد. همچنین [۴] را برای مطالعهٔ جدیدترین مرور این موضوع ببینید. اگرچه در خلال دههٔ گذشته پیشرفت‌های فنی بیشتری حاصل شده است، مسأله‌های اصلی در وجود ساختار الگوهای تکینی و ارتباطشان با توپولوژی تا زمان ظهور تحقیقات پرلمن در سال‌های ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳، لاینحل باقی مانده بود.

۵. کار پرلمن

تحقیقات اخیر پرلمن [۱۵]—[۱۷] (همراه با یک مقالهٔ کمتر اساسی که قرار است منتشر شود)، حل کامل حدسیهٔ هندسی‌سازی را دربردارد. این اثبات با معرفی ایده‌های هندسی بسیار نوآورانه و تکنیک‌هایی برای درک شار ریچی، حاصل شده است. به‌ویژه، کار پرلمن موضوع‌های (مانع‌های) ۱ تا ۳ پیشگفته را کاملاً حل (برطرف) کرده است (می‌کند). در اینجا الزاماً به‌اختصار بعضی از سرخط‌های کار وی را توصیف می‌کنیم.

الف) نافروریختن

عمل (گر) هیلبرت ـ اینشتین

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R(g) dV_g \tag{۱۵}$$

را به‌عنوان تابعکی بر فضای متریک‌های ریمانی $\mathbb{M}$ بر یک خمینهٔ M در نظر بگیرید. نقطه‌های بحرانی $\mathcal{R}$ متریک‌های ریچی تخت ($Ric = 0$) هستند. عمل (گر) را می‌توان مثلاً با افزودن یک ثابت کیهانی $\Lambda 2-$ تعدیل کرد تا عملی به‌دست آید که نقطه‌های بحرانی‌اش، متریک‌های اینشتین با خمیدگی ریچی ثابت باشد[۱]. طبیعی است تلاش کنیم تا شار ریچی را با $\mathcal{R}$ مرتبط سازیم. مثلاً آیا شار ریچی، شار گرادیان $\mathcal{R}$ (نسبت به یک L^2 متریک طبیعی بر فضای $\mathbb{M}$) است؟ با وجود این، اگرچه این فرض نزدیک به صحت است، برای مدتی طولانی خلاف آن استنباط می‌شد. در حقیقت، شار گرادیان $\mathcal{R}$ حتی وجود ندارد، زیرا وجود آن متضمن وجود معادلهٔ حرارت ـ گون پسرو برای خمیدگی عددی R است (مشابه (۷) ولی با یک علامت منها قبل از Δ).

اکنون تابعک تقویت‌کنندهٔ $\mathcal{R}$ را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dV_g \tag{۱۶}$$

---

۱) عمل (۱۳) منجر به معادلات میدان خلاء اینشتین در نسبیت عام برای متریک‌های لورنتزی بر یک خمینهٔ ۴ بعدی می‌شود. جملهٔ $\lambda(t)$ در (۴) البته مشابه ثابت کیهانی است.

این نگاشت، تابعکی بر فضای بزرگتر $\mathbb{M} \times C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ یا معادلاً خانواده‌ای از تابعک‌ها بر $\mathbb{M}$، پرمایش‌شده به‌وسیلهٔ $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ [۱] است. اندازهٔ هموار dm را بر M تثبیت کنید و نگاشت اتصال پرلمن را با این الزام که (g, f) در رابطهٔ

$$e^{-f} dV_g = dm \tag{۱۷}$$

صدق کند، تعریف کنید. تابعک حاصل

$$\mathcal{F}^m(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^{۲}) dm \tag{۱۸}$$

تابعکی با قلمرو $\mathbb{M}$ است. در نگاه اول ممکن است این تابعک خیلی پیچیده‌تر از عمل (۱۳) به نظر آید. با وجود این، برای هر $g \in \mathbb{M}$، ردهٔ بزرگی از نگاشت‌های f (یا اندازه‌های dm) وجود دارد چنان‌که شار $L^{۲}$ ـ گرادیان $\mathcal{F}^m$ در g وجود دارد و به‌سادگی از رابطهٔ

$$\frac{d\widetilde{g}}{dt} = -۲(Ric_{\widetilde{g}} + D^{۲} f) \tag{۱۹}$$

به‌دست می‌آید. در اینجا $D^{۲} f$ هسیان f نسبت به $\widetilde{g}$ است. معادلهٔ تحولی (۱۷) برای $\widetilde{g}$ چیزی نیست جز شار ریچی (۵) که به‌وسیلهٔ یک وابرسانی بسیار کوچک اصلاح شده است:

$$D^{۲} f = (\frac{d}{dt})(\phi_t^* \widetilde{g}) \quad \text{که در آن} \quad (\frac{d}{dt})\phi_t = \nabla f.$$

بنابراین، شار گرادیان $\mathcal{F}^m$ عبارت است از شار ریچی با تقریب وابرسانی‌ها (انتخاب‌های مختلف dm متناظر با انتخاب‌های مختلف وابرسانی(ها) است). به‌ویژه، تابعک $\mathcal{F}^m$ در امتداد شار ریچی صعود می‌کند.

با این تابعک پیچیده‌تر چه می‌توان کرد؟ دیده می‌شود که به‌ازای هر متریک اولیهٔ دادهٔ شدهٔ $g(۰)$ و $t > ۰$، نگاشت f (و بنابراین اندازهٔ dm) را می‌توان آزادانه در $g(t)$ مشخص کرد که $g(t)$ با شار ریچی (۵) تحول می‌یابد. پرلمن این آزادی را به‌کار می‌بَرَد تا هندسهٔ (ناشی از) $g(t)$ را با انتخاب‌های مناسب f به‌خوبی بررسی کند. مثلاً او با مطالعهٔ بسیار ساده‌ای از شکل $\mathcal{F}^m$ نشان می‌دهد که فروریختن یا فرونریختن متریک $g(t)$ در همسایگی نقطهٔ $x \in M$ از اندازهٔ $\mathcal{F}^m(g(t))$ را می‌توان (با انتخاب e^{-f} به‌عنوان تقریبی بر یک نگاشت دلتا به مرکز x) آشکار کرد. هرچه متریک $g(t)$ در همسایگی x بیشتر فروریخته باشد، اندازهٔ $\mathcal{F}^m(g(t))$ بیشتر منفی است ($|\mathcal{F}^m(g(t))| \gg ۱, \mathcal{F}^m(g(t)) < ۰$). فروریختن متریک $g(t)$ با هر مقیاسی در زمان باپایان نفی می‌شود که این حکم از ترکیب مطلب اخیر با این حقیقت ناشی می‌شود که تابعک $\mathcal{F}^m$ در امتداد شار ریچی صعودی است. در حقیقت، این بحث نسبت به تابعکی مقیاس ـ ناوردا و قدری پیچیده‌تر

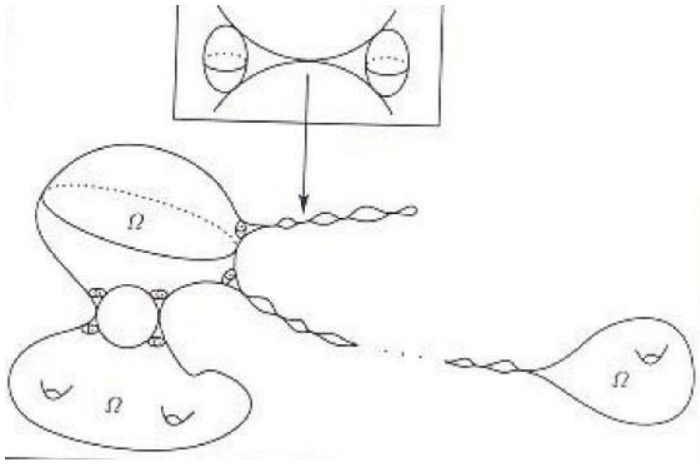
---

۱) تابعک (۱۴) در نظریهٔ ریسمان به‌عنوان عمل مؤثر انرژی ـ پایین [۵] ظهور می‌کند. نگاشت یا میدان عددی f اتساع نامیده می‌شود. جالب است توجه کنیم که در این زمینه، میدان جاذبه‌ای و میدان اتساع همزمان از کوانتش انرژی ـ پایین جهانْ‌برگ ریسمانی (الگوی σ) ناشی می‌شوند [۵، ص ۸۳۷].

از $\mathcal{F}$ انجام می‌شود. با الهام از مشابهت‌هایی خاص در فیزیک آماری، پرلمن آن را تابعک آنتروپی می‌نامد.

ب) الگوهای تکینی

دومین بخش جالب توجه [۱۵] اساساً عبارت است از رده‌بندی همهٔ الگوهای تکینی کامل $(N, g(t))$ که در زمان باپایان رخ می‌دهد. در اینجا، کامل‌بودن یعنی این‌که $g(\circ)$ یک متریک ریمانی کامل بر N است. از این به بعد، علامت منهای $(-)$ را از نمادها حذف می‌کنیم. اگر N هموار و فشرده باشد، آن گاه از قضیهٔ فضا ــ فرم همیلتون نتیجه می‌شود N با $S^{۳}/\Gamma$، $S^{۲} \times S^{۱}$ یا $S^{۲} \times_{\mathbb{Z}_{۲}} S^{۱}$ وابرسان است. در حالت مهم‌تر و مشکل‌تری که N کامل و نافشرده است، پرلمن ثابت می‌کند که هندسهٔ N در همسایگی بینهایت (یعنی خارج یک زیرمجموعهٔ فشرده از N) به ساده‌ترین و طبیعی‌ترین صورت ممکن است. در زمان ۰ و در نقطه‌های x با شرط ۱ $\gg r(x) = dist(x, x_{\circ})$، برای یک نقطهٔ پایه‌ای $x_{\circ}$، یک همسایگی بزرگ x (در مقیاسی که ۱ $= R(x)$) به یک همسایگی بزرگ (نسبت به متریک حاصلضرب بر $S^{۲} \times \mathbb{R}$) ϵ ــ نزدیک است. با انتخاب $r(x)$ به اندازهٔ کافی بزرگ می‌توان ϵ را به اندازهٔ کافی کوچک کرد. چنین ناحیه‌ای، ϵ ــ گردن نامیده می‌شود. بنابراین هندسه، در همسایگی بینهایت در N عبارت است از هندسهٔ اجتماعی از ϵ ــ گردن‌ها که شعاع به آهستگی متغیر $S^{۲}$ یا یکنواخت کراندار است یا به بینهایت واگراست، ولی فقط با نرخ خیلی کوچکتر از $r(x)$. همچنین، این ساختار طی یک فاصلهٔ زمانی منفی بلندمدت برقرار است، بنابراین در چنین ناحیه‌هایی جواب، به شار ریچی تحولی پسرو بر $S^{2} \times \mathbb{R}$ نزدیک است. از نظر توپولوژیکی، N با $\mathbb{R}^{۳}$ وابرسان است یا (N, g) با $S^{۲} \times \mathbb{R}$ طولپاست. پرلمن نشان می‌دهد که این نتیجهٔ ساختاری برای الگوهای تکینی، برای جواب $g(t)$ در همسایگی خیلی نزدیک زمان تکینی T نیز برقرار است.



شکل ۴. شیپورها روی حد تکین

بنابراین در هر نقطهٔ پایه‌ای (x,t) که خمیدگی به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، بازمقیاس‌بندی فضا ـ زمان با خمیدگی مطابق رابطهٔ (۱۲)، بر دامنه‌های فشردهٔ بزرگ، به دامنهٔ بزرگ متناظر در یک مدل تکینی کامل، هموار ـ نزدیک است. مدل‌های تکینی کامل «ایدآل»، واقعاً هندسه و توپولوژی را در همسایگی هر تکینی توصیف می‌کنند. در نتیجه، یک شناخت مشروح موضعی از هندسه و توپولوژی $(M, g(t))$ (برای t در همسایگی T) به‌دست می‌آید. به‌ویژه، این مطلب، صورتی عمومی از نامساوی هَرنک (۱۱) را به‌طور اصولی اثبات می‌کند. این نتیجه‌ها البته نسبتاً فنی است و اثبات‌ها ساده نیست. با وجود این، آنقدر مشکل نیستند که غیرقابل درک باشند و عمدتاً مبتنی بر ابزارها و آگاهی‌های جدید برای درک شار ریچی هستند. یک ایدهٔ کلیدی عبارت است از به‌کاربردن نتیجهٔ نافروریختنی (قبلاً اشاره شده) در همهٔ مقیاس‌های مرتبط.

پ) رابطه با توپولوژی

اکنون نقطهٔ مبنایی عبارت است از ظهور ۲ ـ کره‌های S^2 در نزدیکی (همسایگی) تکینی‌ها. از رابطهٔ (۱) به‌خاطر آورید که قبل از این‌که بتوان M را هندسی‌سازی کرد، باید تجزیهٔ کره‌ای را بر آن اعمال نمود. هیچ هندسه‌ای متناظر با تجزیهٔ کره‌ای وجود ندارد[1]. در حالی که تجزیهٔ کره‌ای ساده‌ترین عملی است که می‌توان از نظر توپولوژیکی، هندسی و تحلیلی انجام داد، این تجزیه سخت‌ترین مفهوم ادراکی است. چگونه ۲ ـ کره‌ها در M کشف می‌شوند تا بر آن‌ها جراحی حاصل از هندسهٔ متریک، اعمال شود؟ مشاهده می‌شود که ۲ ـ کره‌های نشانده‌شده در ϵ ـ گردن‌ها، به‌صورت طبیعی در همسایگی (نزدیکی) تکینی‌های شار ریچی ظهور می‌کنند. پس از آن، ایده این است که ۳ ـ خمینهٔ M در امتداد ۲ ـ کره‌ها دقیقاً قبل از اولین زمان تکینی T جراحی شود. شکل ۴ تصویری نموداری از متریک جزئاً تکین $g(T)$ بر M ارائه می‌دهد. متریک $g(T)$ بر یک دامنهٔ بیشینهٔ $\Omega \subset M$ که در آنجا خمیدگی موضعاً کراندار است، هموار است ولی روی مکمل Ω که در آنجا خمیدگی با میل‌کردن $t \to T$، به بینهایت واگرا می‌شود، تکین است، یعنی تعریف شده نیست.

ابتدا فرض کنید $\Omega = \emptyset$ چنان‌که خمیدگی $g(t)$ همه‌جا بر M هنگامی که $t \to T$، به بینهایت واگرا شود. در این صورت، گوییم جواب شار ریچی در زمان T به پایان می‌رسد. توجه کنید که $R(x,t) \gg 1$ برای هر $x \in M$ و t در همسایگی T (بنابر تخمین تنگی (۱۰)). با فرض درک الگوی تکینی بالا، دیده می‌شود که M با S^3/Γ، $S^2 \times S^1$ یا $S^2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ وابرسان است. در این صورت، مسأله حل شده است، زیرا M هندسی است. اگر $\Omega \neq \emptyset$، آن‌گاه نکتهٔ اصلی این است که هر همسایگی کوچکِ مرز $\partial\Omega$، متشکل از شیپورها است. یک شیپور، متریکی بر $S^2 \times [0, \delta]$ است که عامل S^2 آن تقریباً کروی با شعاع کوچک $p(r)$ است و $\frac{p(r)}{r} \longrightarrow 0$ وقتی $r \to 0$. بنابراین شیپور، اجتماعی از ϵ ـ گردن‌های گردهم آمده با مقیاس‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر است. تصویر

۱) ممکن است چنین اندیشیده شود که هندسهٔ $S^2 \times \mathbb{R}$ متناظر با تجزیهٔ کره‌ای است، ولی این واقعاً درست نیست. این ادعا، در بهترین حالت، فقط در یک زمینهٔ ایدآل یا حدی می‌تواند بامعنی باشد.

درون کادر در شکل ۴، نمایانگر یک متریک جزئاً تکین بر خمینهٔ هموار $S^۲ \times I$، متشکل از یک زوج شیپور است که با متریک ناتبهگون به هم متصل شده‌اند. در زمان T، ممکن است Ω تعداد بی‌پایان مؤلفه از اندازهٔ به‌دلخواه کوچک که حاوی چنین شیپورهایی هستند، داشته باشد. با وجود این، همه به جز تعدادی باپایان از این مؤلفه‌ها، شیپورهای دوگانه‌اند که هرکدام از نظر توپولوژیکی دوباره به‌صورت $S^۲ \times I$ می‌باشد. به بیان کمّی، ثابت کوچک $p_۰ > ۰$ وجود دارد چنان‌که اگر Ω شیپورهایی با کرهٔ $S^۲ \times \{\delta\}$ از شعاع ناکمتر از $p_۰$ نداشته باشد، آن‌گاه مانند قبل، در حالتی که $\Omega = \emptyset$، M با $S^۳/\Gamma$، $S^۲ \times S^۱$ یا $S^۲ \times_{\mathbb{Z}_۲} S^۱$ وابرسان است و در این حالت، اثبات تمام است. اگر شیپورهایی حاوی یک کرهٔ $S^۲ \times S$ از اندازهٔ معین $p_۰$ در Ω وجود داشته باشد، با اعمال جراحی بر هر چنین شیپوری که عبارت است از بریدن آن در امتداد $S^۲$ با شعاع $p_۰$ و چسباندن یک ۳ ــ گوی هموار به آن، مجموعه‌ای از ۳ ــ خمینه‌های نامتقاطع به‌دست می‌آید. اکنون با چندپارچه کردن M به تعدادی باپایان از مؤلفه‌ها به‌وسیلهٔ جراحی بر ۲ ــ کره‌ها، به‌طور مجزا شار ریچی بر هر مؤلفه اعمال و بررسی می‌شود. یک بحث مفهوماً آسان ولی از نظر فنی سخت که مبتنی بر کاهش حجم وابسته به هر جراحی می‌باشد، نشان می‌دهد که زمان‌های جراحی موضعاً باپایان است: بر هر فاصلهٔ زمانی باپایان، فقط در تعدادی باپایان از زمان‌ها، تکینی رخ می‌دهد.

به‌عنوان مثال ملموس، فرض کنید متریک ابتدایی $g(۰)$ بر M دارای خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه تخمین (۸) نشان می‌دهد که شار ریچی کاملاً به پایان می‌رسد، یعنی در زمان باپایان از بین می‌رود. بنابراین در خلال شار ریچی، فقط تعدادی باپایان جراحی بر M اعمال می‌شود و از بحث بالا نتیجه می‌شود که M با جمع همبند باپایانی از عامل‌های $S^۳/\Gamma$ و $S^۲ \times S^۱$ وابرسان است.

نتیجهٔ این فرایند این است که اگر به‌صورت موفقیت‌آمیزی چنین مؤلفه‌هایی را که در زمان باپایان محو می‌شوند (و قبلاً از نظر توپولوژیکی مشخص شده‌اند) کنار بگذاریم یا از آن‌ها چشم‌پوشی کنیم، شار ریچی روی بازهٔ زمانی بی‌پایان $[۰, \infty)$ وجود دارد. در این صورت هندسهٔ مؤلفه‌های باقی‌ماندهٔ M، $\{\widetilde{M}_i\}$ در زمان به اندازهٔ کافی بزرگ $T_۰$، چگونه است؟ در اینجا تجزیهٔ ضخیم/نازک گروموف ــ ترستن ظاهر می‌شود. یک مؤلفهٔ $\{\hat{M}\} \in \{\widetilde{M}_i\}$ را تثبیت کنید و متریک بازمقیاس‌بندی شدهٔ $\hat{g}(t) = t^{-۱}g(t)$ را بررسی کنید. برای $t = T_۰$، به‌آسانی از معادلهٔ شار ریچی دیده می‌شود که حجم $\hat{M}$، یعنی $vol(\hat{M}, \hat{g}(t))$ به‌طور یکنواخت کراندار است. برای ν به اندازهٔ کافی کوچک، پرلمن ثابت می‌کند که کنترل کافی بر بخش ν ــ ضخیم $\hat{M}^\nu$ تعریف‌شده در (۳) وجود دارد چنان‌که $\hat{M}^\nu$ با یک ۳ ــ خمینهٔ هذلولوی کامل H (با تعدادی باپایان مؤلفه) وابرسان است. شار ریچی هموار بر $\hat{M}^\nu$ برای زمان بی‌پایان وجود دارد و وقتی $t \to \infty$، بازمقیاس‌بندی‌های $t^{-۱}g(t)$ به متریک هذلولوی با خمیدگی $-\frac{۱}{۴}$ میل می‌کنند (چون شار ریچی برای همهٔ زمان‌ها وجود دارد، معقول است انتظار داشته باشیم که شار (با حجم نرمال‌شده) به متریک اینشتین که در مسألهٔ مورد بحث ما الزاماً یک متریک هذلولوی است، میل کند). علی‌رغم آن‌که کنترل کمتری بر بخش ν ــ نازک $\hat{M}_\nu$ وجود دارد، این کنترل چنان هست که نتیجه دهد $\hat{M}_\nu$ با یک خمینهٔ گرافی G (با تعدادی باپایان مؤلفه) وابرسان است. اگرچه ممکن است هنوز بینهایت بار جراحی برای ادامهٔ شار ریچی برای همهٔ زمان‌ها لازم

باشد، همهٔ جراحی‌های اضافی در $\hat{M}_\nu = G$ انجام می‌شود[۱].

بنابراین ۳ ـ خمینهٔ ابتدایی M به‌صورت توپولوژیکی (در زمان بزرگ متناهی) چنین تجزیه می‌شود:

$$M = (K_1 \sharp \cdots \sharp K_p) \sharp (\sharp_1^q S^3/\Gamma_i) \sharp (\sharp_1^r S^2 \times S^1) \qquad (۲۰)$$

پرلمن اخیراً نشان داده‌است [۱۷] که عامل‌های S^3/Γ و $S^2 \times S^1$ الزاماً در زمان کراندار، منسوخ می‌شوند (با کران وابسته به متریک اولیه). بنابراین فقط K عامل‌ها پس از یک زمان به اندازهٔ کافی طولانی وجود دارند (با وجود این، این نتیجه برای حدسیهٔ هندسی‌سازی، مورد نیاز نیست).

علاوه بر این، هر $K = K_i$ از طریق تجزیهٔ ضخیم/نازک به اجتماعی به‌صورت

$$K = H \cup G \qquad (۲۱)$$

تجزیه می‌شود که H یک خمینهٔ هذلولوی کامل (احتمالاً ناهمبند) با حجم باپایان است و G یک خمینهٔ گرافی (احتمالاً ناهمبند) است. اجتماع H و G در امتداد مجموعه‌ای از چنبره‌های نشانده‌شده تشکیل می‌شود. پرلمن با به‌کاربردن اثبات‌های مرجع [۱۱] یا [۱] و [۲] نشان می‌دهد هر چنین چنبره‌ای در K تراکم‌ناپذیر است. این فرایند، هر دو تجزیهٔ کره‌ای و چنبره‌ای M را نتیجه می‌دهد. هرچند گفته نشد که شار ریچی تجزیهٔ بیشتر G به مؤلفه‌های برگ‌بندی شدهٔ زایفر را نمایان می‌کند، این مطلب از دیدگاه توپولوژیکی نسبتاً مقدماتی است. مؤلفه‌های چنبره‌ای تحویل‌ناپذیر K به‌عنوان خمینه‌های هذلولوی شناخته شده‌اند.

در اینجا مرور مختصر ما بر حدسیهٔ هندسی‌سازی تمام می‌شود. تحقیق‌های پرلمن هیجان بسیار زیادی در جامعهٔ تحقیقاتی ریاضی و نیز در سطحی بزرگ‌تر در جامعهٔ علمی علاقه‌مند، ایجاد کرده‌است. در حالی‌که در حال حاضر، جزئیات کارش هنوز در دست بررسی است، زیبایی و عمق این کار جدید کاملاً روشن است.

من از بروس کلاینر، جان لات و جک میلنُر به‌خاطر پیشنهادها و نظریات زیادشان که به بهبود مقاله انجامید، بسیار متشکرم.

تشکر مترجم: مترجم از آقای فیروز پاشایی به‌خاطر تهیهٔ صورت تایپی نهایی مقاله سپاسگزار است.

---

۱) ادعا نمی‌شود که کران (۲) بر $\hat{M}_\nu$ برای هر t بزرگ و برای $\Lambda < \infty$، برقرار است.

کتابنامه

[1] M. Anderson, "Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds", in *Comparison Geometry* (Berkeley 1993-94), MSRI Publications, vol. 30, 1997, pp. 49-82.

[2] M. Anderson, "Scalar curvature and the existence of geometric structures on 3-manifolds" I, *J. Reine Angew. Math.*, **533**(2002), 125-182.

[3] L. Anderson, "The global existence problem in general relativity", preprint, 1999, gr-qc/9911032; to appear in *50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity*, P. T. Chruściel and H. Friedrich, eds.

[4] H. D. Cao and B. Chow, "Recent developments on the Ricci flow", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**(1999), 59-74.

[5] E. D'Hoker, "String theory", in *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, Vol. 2*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[6] M. Gromov, *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes*, Cedic /Fernand Nathen, Paris, 1981.

[7] M. Gromov, "Volume and bounded cohomology", *Inst. Hautes Études Sci. publ. math.*, **50**(1982), 5-100.

[8] R. Hamilton, "3 - manifolds of positive Ricci curvature", *J. Differential Geom.*, **17**(1982), 255-306.

[9] ——, "The Harnack estimate for the Ricci flow", *J. Differential Geom.*, **37**(1993), 225-243.

[10] ——, "Formation of singularities in the Ricci flow", *Surveys in Differential Geometry*, Vol. 2, International Press, 1995, pp. 7-136.

[11] ——, "Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds", *Comm. Anal. Geom.*, **7**(1999), 695-729.

[12] T. Ivey, "Ricci solitons on compact three-manifolds", *Differential Geom. Appl.*, **3**(1993), 301-307.

[13] B. Kleiner and J. Lott, *Ricci flow* website:
http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/ perelman.html.

[14] J. Milnor, "Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3 - manifolds", *Notices Amer. Math. Soc.*, **50**(2003), 1226-1233.

[15] G. Perelman, "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications", preprint, 2002, math. DG/0211159.

[16] —–, "Ricci flow with surgery on three-manifolds", preprint, math. DG/0303109, 2003.

[17] —–, "Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds", preprint, 2003, math.DG/0307245.

[18] W. Thurston, *The Geometry and Topology of three-manifolds*, preprint, 1978, Princeton University, available online at
http://www.msri.org/publications/books/gt3m;
and Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, Princeton University Press, 1997.

[19] —–, "Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6**(1982), 357-381.

مرجع‌های استفاده‌شده و اضافه‌شده توسط مترجم

[20] B. Chow, & D. Knopf, *The Ricci Flow: An introduction*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 110, AMS. 2004.

[21] J. W. Morgan, & G. Tian, *Ricci Flow and the Poincare Conjecture*, Electronic version at arxiv: math/0607607v2

[22] J. W. Morgan, & F. T-H. Fong, *Ricci Flow and Geometrization of 3-Manifolds*, Univ. Lect. Series, Vol 53, 2010.

[23] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, 2nd ed., Springer, 2006.

[24] G. E. Bredon,*Topology and Geometry*, GTM, Springer, 1993.

مترجم: سید محمدباقر کاشانی
دانشکدهٔ علوم ریاضی— دانشگاه تربیت مدرس
kashanim@modares.ac.ir

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 30, No. 2, Summer 2011

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: