انجمن ریاضی ایران

سال ۳۰، شماره پیاپی ۴۸، پاییز ۱۳۹۰

ISSN 1022-6443

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۰، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۰

(تاریخ انتشار: پاییز ۱۳۹۰)

شمارهٔ پیاپی: ۴۸

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

• ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛

• ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛

• ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

• متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.

• فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.

• نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.

• اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.

• مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.

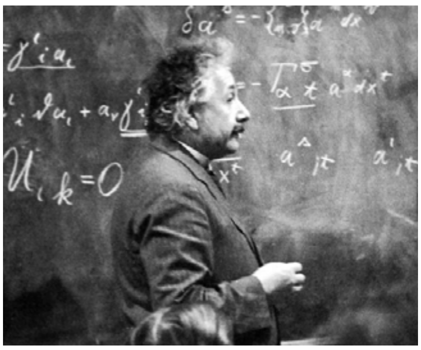
• مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در چهار شماره (بهار، تابستان، پاییز و زمستان) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.
علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب



عکس روی جلد: آلبرت اینشتین

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۱ تا ۲۲

ساختار جبری جمع در نظریهٔ نسبیت

سید قهرمان طاهریان

چکیده

در سال ۱۹۸۸، آبراهام اونگار[1] ساختار جبری مجموعهٔ سرعت‌های مجاز، یعنی سرعت‌های با اندازهٔ کمتر از سرعت حرکت نور در خلاء را با عمل جمع نسبیتی مورد بررسی قرار داد ([۱۰] و [۱۱]). این ساختار برخلاف جمع برداری در صفحهٔ اقلیدسی، نه آبلی است و نه شرکت‌پذیر. پیش از وی در سال ۱۹۶۸، هلموت کارتسل[2] برای رده‌بندی گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ــ انتقالی، به مطالعهٔ ساختارهای جبری غیرشرکت‌پذیر پرداخته بود [۱]. در این نوشتار، ابتدا رهیافت هندسی کارتسل در مدل بلترامی ــ کلاین برای هندسهٔ هذلولوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که بر اساس تعبیر هندسی جمع بردارها با بازتاب‌های نقطه‌ای، مستقل از مفهوم توازی، فرمول معروف جمع نسبیت خاص در مدل بلترامی ــ کلاین به‌شکل کاملاً طبیعی و ساده به‌دست می‌آید [۸]. سپس به بررسی رهیافت فیزیکی ساختار جمع نسبیتی و هم‌ارزی آن با رهیافت هندسی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

هدف اصلی این نوشتار، آشنا کردن خواننده با رابطهٔ عمیق بین نظریهٔ نسبیت خاص و هندسهٔ هذلولوی است. طی چند دههٔ گذشته، پیشرفت‌های زیادی در مفاهیم جبری وابسته به نظریهٔ نسبیت خاص صورت گرفته است. یکی از نخستین آموزه‌های فیزیک کلاسیک، معرفی دستگاه مختصات گالیله و به‌کارگیری مفهوم بردار به‌عنوان مدل ریاضی مناسب برای سرعت یک متحرک است. قانون متوازی‌الاضلاع و بسیاری از انگاره‌های گالیله و نیوتن در مورد فضا و زمان، بیش از دو قرن برای

1) A. A. Ungar 2) Helmut Karzel

فیزیک کلاسیک قانون خدشه‌ناپذیر محسوب می‌شدند همان‌طور که انگاره‌های اقلیدس حدود بیست قرن بر مبانی هندسه حاکم بودند. از این جهت، تاریخ فیزیک و هندسه شباهت‌های زیادی با هم دارند ([۳، ۱۳]).

۲. هندسهٔ نااقلیدسی

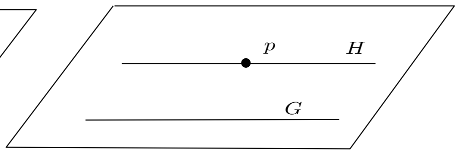
در بنای ساختارهای ریاضی همواره واقعیت‌هایی از دنیای مشاهدات ذهنی، بدیهی و مسلم پذیرفته می‌شوند تا بر اساس آن‌ها یک نظریهٔ جدید پی‌ریزی شود. پیشرفت واقعی در این علم وقتی حاصل می‌شود که این مفاهیم بنیانی و رابطهٔ آن‌ها به‌صورت دقیق بیان شوند. بدون توانایی مشاهده، پیشرفت ریاضیات به‌شکل هدفمند ممکن نبود. بی‌تردید، تعامل بین مفاهیم شهودی و مجرد نقش مهمی در گسترش و پیشرفت شاخه‌های گوناگون ریاضی داشته و دارد. اما در مشاهده، خطر دریافت‌های نادرست وجود دارد. از این‌رو بازبینی مجدد بنیان‌ها و فرمول‌بندی بهتر آن‌ها یک ضرورت اجتناب‌ناپذیر است. این واقعیت را بیش از هر جای دیگر در سیر تحول هندسه مشاهده می‌کنیم. هندسه در قرن بیستم از آن‌رو پیشرفت‌های چشم‌گیر داشت که در آغاز این قرن، با بازبینی مجدد بنیان‌ها، هندسهٔ اقلیدسی بدون نقص و شکاف، از نو پایه‌گذاری شد. پی‌ریزی دقیق هندسهٔ اقلیدسی به‌وسیلهٔ هیلبرت در سال ۱۸۹۹ برای نخستین بار در مراسم پرده‌برداری از بنای یادبود گاوس ــ وبر در گوتینگن مطرح شد. پس از آن، این شیوه به الگویی برای تمام ریاضیات تبدیل شد. اگرچه کارهای بسیار مهمی برای هدایت مسیر پیشرفت هندسهٔ جدید صورت گرفته بود، ولی هیلبرت نخستین کسی بود که این ایده‌ها را تبلور بخشید. از نوشته‌های هیلبرت کتاب مبانی هندسه شکل گرفت که تاکنون بارها به چاپ رسیده است. هیلبرت در سال ۱۹۰۳ در چاپ دوم این کتاب، مبانی هندسهٔ نااقلیدسی (هذلولوی) را ضمیمه کرد. این کتاب تأثیر زیادی بر پیشرفت‌های بعدی هندسه داشت. برای درک معنای واقعی ایده‌های هیلبرت باید ابتدا هندسهٔ اقلیدسی را دانست. بر اساس شواهد تاریخی، علم هندسه از مساحی متولد شده است و اساساً یک دانش تجربی است. هندسه نخستین علم بُنداشتی محسوب می‌شود. یعنی برخی واقعیت‌های ساده و روشن که نیازی به اثبات ندارند به‌عنوان **بُنداشت**[1] برگزیده می‌شوند و سپس گزاره‌های دیگر به‌کمک این بنداشت‌ها و بر پایهٔ قوانین منطقی استدلال، نتیجه‌گیری می‌شوند. هندسهٔ یونان باستان از حدود ۳۰۰ تا ۵۰۰ سال پیش از میلاد مسیح توسعه یافت و محتوای کلی آن در کتاب اصول اقلیدس[2] (۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح) به‌دست ما رسیده است. یکی از بنداشت‌های معروف کتاب اصول اقلیدس (بنداشت پنجم)، موسوم به بنداشت **توازی**[3] است:

> اگر خط راستی به‌وسیلهٔ دو خط راست دیگر به‌قسمی قطع شود که جمع زاویه‌های پدید آمده واقع در یک طرف کمتر از دو قائمه باشد، آن‌گاه امتداد این دو خط، در همان طرفی که جمع زاویه‌های پدید آمده کمتر از دو قائمه است، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع خواهند کرد (شکل ۱).

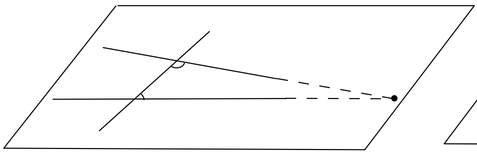
1) axiom 2) Euclid's Elements 3) parallel axiom

این بنداشت را اقلیدس در انتهای اصول خود قرار داد. از این‌رو می‌توان حدس زد که برای خودش نیز به‌درستی روشن نبود که آیا این اصل برای بنیان‌گذاری هندسه ضروری است یا نه. به عبارت دیگر، مشخص نبود که آیا این اصل نتیجه‌ای از اصول دیگر است یا اصلی است مستقل. در هر حال، بسیاری از هندسه‌دانان این اصل را چندان شهودی و بدیهی نمی‌دانستند. امکان اثبات اصل توازی بیش از ۲۰۰۰ سال در زمرهٔ پرسش‌های اساسی ریاضی بود. این اصل به‌شکل دیگری نیز قابل بیان است (شکل ۲):

> برای هر خط دلخواه G و هر نقطهٔ دلخواه p غیر واقع بر G، یک و تنها یک خط H در صفحهٔ حاوی p و G وجود دارد که از p می‌گذرد و با G موازی است (یعنی G را قطع نمی‌کند).



شکل ۲. معادل اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی).



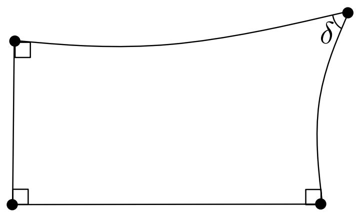
شکل ۱. اصل پنجم اقلیدس.

تلاش برای یافتن پاسخ این پرسش که آیا می‌توان اصل توازی را از اصول دیگر نتیجه گرفت، منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی در قرن نوزدهم شد. پیش از آن، در قرن هیجدهم، ساکری و لامبرت با فرض گرفتن نقیض اصل توازی بی آن که خود به اهمیت کارشان پی ببرند، گزاره‌های زیادی از هندسهٔ نااقلیدسی را ثابت کرده بودند. برای مثال لامبرت ثابت کرد در چهارگوشه‌ای با سه زاویهٔ قائمه، زاویهٔ چهارم نمی‌تواند منفرجه باشد (شکل ۳). این کار به امید یافتن تناقضی بر اساس نقیض اصل توازی بود تا به‌کمک آن، اصل توازی اثبات شود. بر اساس شواهد تاریخی، نخستین ریاضیدان برجسته‌ای که قانع شد اصل توازی بر اساس اصول دیگر قابل اثبات نیست، گاوس بود [۱۵]. وی متوجه شد که با فرض گرفتن نقیض اصل توازی، یک هندسهٔ جدید و کاملاً منطقی به‌دست می‌آید. گاوس این هندسه را نااقلیدسی نامید. لباچفسکی و بولیایی نیز به این حقیقت دست یافتند و برخلاف گاوس، نتایج خود را در سال ۱۸۳۰ منتشر نمودند. این ایده‌های نو به‌دلیل تفاوت زیاد با انگاره‌های پیشین، توجه کسی را به خود جلب نکرد. تا این‌که پس از مرگ گاوس و انتشار نامه‌هایش، برخی از ریاضیدان‌های بزرگ آن زمان از جمله بلترامی، کلاین و پوانکاره هندسهٔ نااقلیدسی را جدی گرفته و به بررسی بیشتر آن پرداختند. سرانجام کلاین در سال ۱۸۷۱ یک مدل تحلیلی برای هندسهٔ نااقلیدسی بر اساس روشی موسوم به روش کیلی ــ کلاین ارائه کرد. با این مدل، تمامی تردیدها در مورد وجود هندسهٔ نااقلیدسی پایان یافت. این هندسه را **هندسهٔ هذلولوی** و این مدل را **مدل بلترامی ــ کلاین**[1] می‌نامند.

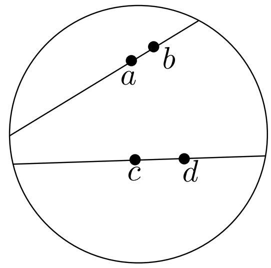
1) Beltrami - Klein model

به‌منظور معرفی مدل بلترامی ـ کلاین برای هندسهٔ هذلولوی، دایره‌ای (مثلاً دایرهٔ یکه به مرکز مبدأ مختصات) را در صفحهٔ اقلیدسی در نظر می‌گیریم. نقاط صفحهٔ هذلولوی، نقاط درونی دایره و خطوط صفحه، وترهای دایره بدون نقاط انتهایی در نظر گرفته می‌شوند (شکل ۴). از جنبهٔ تحلیلی در مدل بلترامی ـ کلاین، مجموعهٔ نقاط صفحه عبارت است از $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ که در آن $\mathbb{C}$ صفحهٔ مختلط و $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ طول بردار z است. مجموعهٔ خطوط $\mathfrak{G}_h$ در این صفحه به‌شکل تحلیلی عبارت است از $\mathfrak{G}_h := \{A \cap \mathbb{D} \ : \ A \cap \mathbb{D} \neq \emptyset\}$ که در آن A یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. در این مدل، دو پاره‌خط (a,b) و (c,d) همنهشت (قابل انطباق) هستند اگر و تنها اگر $\rho(a,b) = \rho(c,d)$ که در آن

$$\rho(x,y) := \frac{(1 - \langle x,y\rangle)^2}{(1 - x\bar{x})(1 - y\bar{y})} \quad , \qquad \langle x,y\rangle := \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$



شکل ۳. چهارگوشهٔ ابن‌هیثم ـ لامبرت.



شکل ۴. پاره‌خط‌های همنهشت در مدل کلاین.

۱.۲. تعبیر هندسی جمع

برای درک رابطهٔ بنیانی جمع در هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی، نخست به یادآوری چند ویژگی مهم جمع در صفحهٔ اقلیدسی می‌پردازیم. در صفحهٔ اقلیدسی $\mathcal{P}$، با انتخاب یک نقطهٔ مرجع O (مبدأ مختصات) می‌توان عمل جمع + را به‌قسمی تعریف کرد که $(\mathcal{P}, +)$ یک گروه آبلی باشد. برای نقاط a و b، مجموع $a + b$، رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن a، b و O هستند (شکل ۷). این روش را قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع می‌نامند. یک نقص قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، عدم کارآیی آن برای حالتی است که a، b و O واقع بر یک خط هستند. در این حالت، باید از جهت و طول بردارها هم کمک بگیریم. اشکال دیگر و اساسی این تعبیر، استفادهٔ ضمنی از اصل توازی است. این رهیافت دقیقاً به همین دلیل در صفحهٔ هذلولوی بی‌فایده است. یک تعبیر هندسی دیگر برای جمع، بر اساس مفهوم بازتاب (انعکاس) نسبت به نقطه یا خط است. ایدهٔ استفاده از بازتاب‌ها و نقش مهم آن‌ها در هندسه، تاریخچهٔ مفصلی دارد. در اینجا فقط یادآوری می‌کنیم که برای نخستین بار در سال ۱۹۳۳ تامسن[1] یک سیستم بنداشتی بر اساس بازتاب‌ها برای بنا نهادن

1) Thomsen

صفحهٔ اقلیدسی مطرح کرد. پس از وی ریاضیدان‌های دیگری همچون اشمیت[۱]، اشپرنر[۲] و باخمان[۳] هندسهٔ مطلق را با سیستم‌های بنداشتی مبتنی بر بازتاب ارائه کردند. می‌توان تعبیرهای هندسی متفاوتی برای جمع در صفحهٔ اقلیدسی به‌کمک بازتاب‌های خطی و نقطه‌ای مطرح کرد. برای خوانندگانی که کمتر با این نظریه آشنا هستند ابتدا چند قرارداد، تعریف و قضیهٔ مقدماتی را یادآوری می‌کنیم. در مورد بنداشت‌های صفحهٔ مطلق، سلیقه‌های متفاوتی وجود دارد و امروزه تعریف یکپارچه‌ای برای صفحهٔ مطلق وجود ندارد. در هندسهٔ کلاسیک، بر اساس تعریف بولیایی، منظور از هندسهٔ مطلق یا هندسهٔ نتاری[۴]، هندسه‌ای است که فقط با فرض بنداشت‌های هیلبرت در مورد وقوع، میان‌بود، قابلیت انطباق و پیوستگی به‌دست می‌آید. به این ترتیب، بنداشت توازی جزء بنداشت‌های هندسهٔ مطلق نیست. کارتسل هندسهٔ مطلق را بر مبنای بنداشت‌های دیگر و به معنای کلی‌تر تعریف می‌کند [۲]. صفحهٔ هذلولوی پیوستهٔ مورد نظر وی با مدل بلترامی ــ کلاین و در نتیجه با همهٔ مدل‌های صفحهٔ هذلولوی کلاسیک پیوسته یکریخت است. پس می‌توانیم برای منظور خود، صفحهٔ مطلق را به معنای کلاسیک در نظر بگیریم.

در مطالعهٔ ساختار صفحهٔ مطلق، پرداختن به زیرگروه‌های ویژه از گروه خودریختی‌های صفحه، کمک زیادی به درک ماهیت جبری آن می‌کند. یادآوری می‌کنیم که یک خودریختی صفحهٔ مطلق $\mathcal{P}$ نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا از $\mathcal{P}$ به $\mathcal{P}$ است که خط را به خط تصویر می‌کند. در حالت خاص یک خودریختی φ حرکت نامیده می‌شود هرگاه طولپا باشد، یعنی برای هر دو نقطهٔ a و b، پاره‌خط (a,b) با تصویر آن به‌وسیلهٔ φ، یعنی $(\varphi(a),\varphi(b))$ قابل انطباق باشد. در این صورت می‌نویسیم $(a,b)\equiv(\varphi(a),\varphi(b))$. مجموعهٔ $\mathcal{M}$، شامل همهٔ حرکت‌های صفحهٔ مطلق با عمل ترکیب توابع، گروهی تشکیل می‌دهد که به آن گروه حرکت‌های صفحهٔ مطلق می‌گویند. مهم‌ترین حرکت‌های صفحهٔ مطلق بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی هستند.

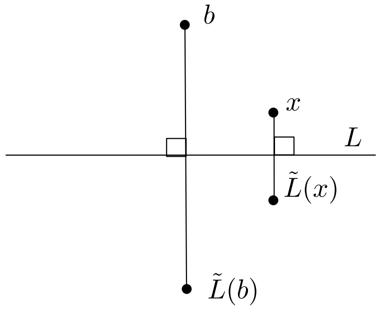
به‌طور شهودی، در صفحهٔ اقلیدسی اگر b را با پاره‌خطی به a وصل کنیم و این پاره‌خط را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، انعکاس b نسبت به نقطهٔ a حاصل می‌شود (شکل ۵). به زبان ریاضی، فرض کنیم a و b دو نقطهٔ متمایز در صفحه و $\overline{a,b}$ خط یکتایی باشد که a و b بر آن واقع هستند. منظور از بازتاب b نسبت به نقطهٔ a که آن را با $\tilde{a}(b)$ نشان می‌دهیم، نقطهٔ یکتای متمایز از b و واقع بر خط $\overline{a,b}$ است طوری‌که پاره‌خط (a,b) با پاره‌خط $(a,\tilde{a}(b))$ قابل انطباق باشد، یعنی $(a,b)\equiv(a,\tilde{a}(b))$. همچنین بنابر برداشت شهودی از بازتاب نقطه‌ای، $\tilde{a}(a):=a$ تعریف می‌شود. به این ترتیب برای هر نقطهٔ $a\in\mathcal{P}$، نگاشت $\tilde{a}:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ که ضابطهٔ آن $x\mapsto\tilde{a}(x)$ است را بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ a می‌نامیم (شکل ۵).

از نظر شهودی اگر از b بر خط L عمود کنیم و پاره‌خط حاصل را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، بازتاب خطی نقطهٔ b نسبت به خط L حاصل می‌شود (شکل ۶).
یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ مطلق برای هر نقطهٔ $p\in\mathcal{P}$ و هر خط L، دقیقاً یک خط H گذرنده

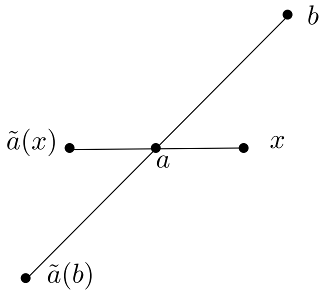
1) Schmidt 2) Sperner 3) Bachmann 4) neutral geometry

از p وجود دارد که بر L عمود است. در این حالت می‌نویسیم $H := \{p \perp L\}$. به عبارت دیگر از هر نقطهٔ صفحه می‌توان بر هر خط دلخواه صفحه، یک خط عمود یکتا رسم کرد. به زبان ریاضی، برای هر خط L، نگاشت $\widetilde{L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$، با ضابطهٔ $x \mapsto \widetilde{x}_L(x)$ به‌قسمی که $x_L = \{x \perp L\} \cap L$، بازتاب خطی نسبت به خط L نامیده می‌شود.

در اینجا به چند واقعیت مهم دربارهٔ بازتاب‌ها اشاره می‌کنیم که اثبات آن‌ها در بیشتر کتاب‌های هندسهٔ مقدماتی موجود است.



شکل ٦. بازتاب خطی نسبت به خط L.



شکل ۵. بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ a.

۱. بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی، حرکت‌های خودوارون (مرتبهٔ ۲) هستند.
۲. هر حرکت را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب (ترکیب) حداکثر سه بازتاب خطی بیان کرد.
۳. حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی برای سه خط گذرنده از نقطهٔ مشترک p، یک بازتاب خطی نسبت به یک خط گذرنده از p است.
۴. برای دو خط A و B، از $A \perp B$ و $c := A \cap B$، نتیجه می‌شود $\widetilde{c} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.
۵. هر حرکت خودوارون با نقطهٔ ثابت یکتای a لزوماً همان بازتاب نقطه‌ای $\tilde{a}$ است و برای دو نقطهٔ متمایز a و b همواره $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}$ یک بازتاب نقطه‌ای است.

اکنون به بررسی چند روش مستقل از اصل توازی برای تعبیر هندسی جمع در صفحهٔ مطلق می‌پردازیم.

قاعدهٔ اول: فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O باشد (شکل ۷). در این صورت می‌توان نوشت

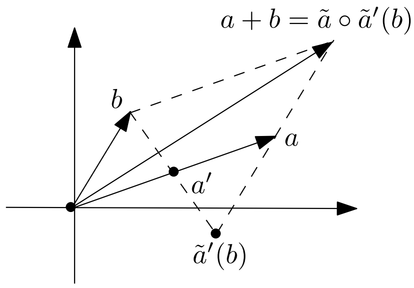
$$a + b = \tilde{a}' \circ \tilde{O}(b).$$

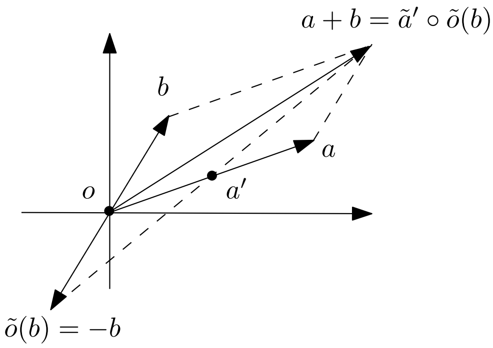
این قاعدهٔ ساده و اساسی را نخستین بار کارتسل در صفحهٔ مطلق به‌کار برد [۴]. برتری این تعبیر، استقلال آن از مفهوم توازی است. خواهیم دید که این قاعده در هندسهٔ هذلولوی همان جمع در نظریهٔ نسبیت خاص است.

قاعدهٔ دوم: مانند قاعدهٔ اول، فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O باشد (شکل ۸). در این حالت

$$a + b = \tilde{a} \circ \tilde{a}'(b).$$

برخلاف ظاهر متفاوت، این قاعده در صفحهٔ مطلق همان قاعدهٔ اول است، زیرا بنابر ویژگی ۵ انعکاس‌ها، $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}'$ یک بازتاب نقطه‌ای است و $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}'(O) = O$. در نتیجه $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}' = \tilde{O}$ و این یعنی $\tilde{a} \circ \tilde{a}' = \tilde{a}' \circ \tilde{O}$.





شکل ۸. یک تعبیر جمع با بازتاب نقطه‌ای.　　شکل ۷. تعبیر جمع با بازتاب نقطه‌ای

قاعدهٔ سوم: این قاعده بر اساس بازتاب‌های خطی بیان می‌شود. برای $x \neq O$ فرض کنیم $\overline{O,x}$ خط یکتایی باشد که از x و O می‌گذرد. همچنین فرض کنیم $(x \perp \overline{O,x})$ خطی باشد که از x می‌گذرد و بر $\overline{O,x}$ عمود است. اگر $\hat{x}$ بازتاب خطی نسبت به خط $(x \perp \overline{O,x})$ و $\hat{O}_x$ بازتاب خطی نسبت به خط $(O \perp \overline{O,x})$ باشد (شکل ۹)، مشاهده می‌شود که

$$a + b = \hat{a}' \circ \hat{O}'_x(b)$$

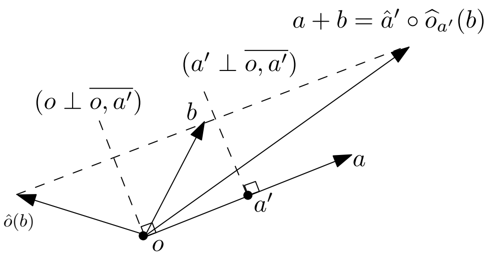
در صفحهٔ مطلق، این قاعده نیز با وجود تفاوت ظاهری، هم‌ارز قاعدهٔ اول است، زیرا بنابر ویژگی ۴ بازتاب‌ها می‌توان نوشت $\hat{a}' \circ \hat{O}'_x = (\hat{a}' \circ \widetilde{\overline{O,a'}}) \circ (\widetilde{\overline{O,a'}} \circ \hat{O}'_x) = \tilde{a}' \circ \tilde{O}$. **قاعدهٔ چهارم:** این قاعده بر اساس بازتاب نقطه‌ای نسبت به m، نقطهٔ وسط a و b به‌دست می‌آید. در این حالت (شکل ۱۰)

$$a + b = \tilde{m}(O).$$

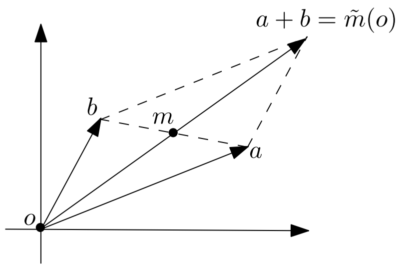
گرچه این قاعده در صفحهٔ اقلیدسی با قاعدهٔ اول هم‌ارز است ولی در صفحهٔ هذلولوی با قاعدهٔ اول هم‌ارز نیست. اونگار این جمع را مکمل جمع اینشتین[1] نامیده است [۱۳].

1) Einstein coaddition

در صفحهٔ اقلیدسی $\mathcal{P}$ فرض کنیم Δ^* مجموعهٔ انبساط‌هایی[۱] از صفحه باشد که O را ثابت نگه می‌دارند. در این صورت مجموعهٔ تکریختی‌های ساختار $(\mathcal{P}, +)$ زیرمجموعه‌ای از Δ^* است. ثابت می‌شود که به‌ازای $\Delta := \Delta^* \cup \{O\}$ (O نگاشت صفر است) ساختار $(\Delta, +, \circ)$ ($\circ$ عمل ترکیب نگاشت‌ها است) میدانی یکریخت با $\mathbb{R}$ و $(\mathcal{P}, \Delta)$ یک فضای برداری دو بعدی روی $\mathbb{R}$ است. خواهیم دید که در صفحهٔ هذلولوی، $(\mathcal{P}, +)$ یک ساختار ضعیف‌تر موسوم به K ـ لوپ[۲] (K ـ دور) است.



شکل ۹. تعبیر قاعدهٔ دوم



شکل ۱۰. تعبیر قاعدهٔ چهارم

۲.۲. نمادگذاری و پیش‌نیازها

در این بخش، منظور از $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ و $\mathbb{O}$ به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد حقیقی، مختلط، چهارگان‌ها (کواترنیون‌ها[۳]) و هشت‌گان‌ها[۴] است. اگر $\mathbb{K}$ را یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ بگیریم، $(\mathbb{K}, \mathbb{R})$ یک فضای برداری است که $\dim\,(\mathbb{K}, \mathbb{R})$ به‌ترتیب ۲، ۴ یا ۸ است. برای $z \in \mathbb{K}$ منظور از $\bar{z}$ مزدوج z است. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $z \mapsto \bar{z}$ یک پادریختی[۵] (در حالت $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ یکریختی) است که فقط اعداد حقیقی را ثابت نگه می‌دارد و نگاشت $z \mapsto z\bar{z}$ یک فرم مثبت معین را مشخص می‌کند. به‌علاوه، نمادهای زیر را نیز به‌کار می‌بریم:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}\,, \quad \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{K} \ : \ |z| = ۱\}\,, \quad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{K} \ : \ |z| < ۱\}\,,$$

$$||z||_h = \sqrt{۱ - z\bar{z}}\ (z \in \mathbb{D})$$

همان‌گونه که گفتیم تمامی صفحه‌های هذلولوی کلاسیک پیوسته، با مدل بلترامی ـ کلاین یکریخت هستند. در این مدل، مجموعهٔ نقاط صفحهٔ هذلولوی، $\mathcal{P}_h := \mathbb{D}$ است و مجموعهٔ خطوط عبارت است از $\mathfrak{G}_h := \{A \cap \mathbb{D} \ : \ A \cap \mathbb{D} \neq \emptyset\}$ که در آن A یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. به‌منظور بیان دقیق‌تر همنهشتی (قابلیت انطباق)، ابتدا این صفحه را در یک صفحهٔ تصویری می‌نشانیم. در حالت کلی صفحهٔ مطلق را می‌توان در یک صفحهٔ تصویری نشانید. دقیقاً همین ویژگی صفحهٔ

1) dilatation 2) $K-$loop 3) quaternion 4) octonion 5) antiautomorphism

مطلق، ایدهٔ بنیانی برنامهٔ معروف ارلانگن کلاین بود. در این برنامه، کلاین مدعی شد که هر هندسه را می‌توان در یک هندسهٔ تصویری نشانید. علاوه بر این، تفاوت هندسه‌ها در عناصر ناوردای زیرگروه‌های خاص گروه خودریختی‌های آن‌ها است. اگرچه این برنامه امروزه اهمیت سابق را ندارد و هندسه‌های ریمانی را در بر نمی‌گیرد ولی یکی از ایده‌های پرباری بود که منجر به نوآوری‌های زیادی در هندسه شد. یک صفحهٔ تصویری به بیان ترکیبیاتی، مجموعهٔ ناتهی $\mathcal{P}$ به‌نام مجموعهٔ نقاط و یک زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}$ موسوم به مجموعهٔ خطوط است. همچنین نقاط و خطوط توسط مفهوم وقوع با سه بنداشت زیر به هم مرتبط هستند:

۱. هر دو نقطهٔ متمایز بر یک خط یکتا واقع هستند.

۲. هر دو خط متمایز یک نقطهٔ مشترک یکتا دارند.

۳. دست‌کم چهار نقطهٔ متمایز وجود دارد که هیچ سه‌تای آن بر یک خط واقع نیستند.

از جنبهٔ تاریخی، صفحه‌های تصویری ابتدا به‌صورت تحلیلی مطرح شدند. بررسی این ساختارها ما را از بحث اصلی دور می‌کند. از این‌رو فقط به روش ساختن یک ردهٔ مهم از این صفحه‌ها به‌کمک فضاهای برداری سه بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ می‌پردازیم. سپس صفحهٔ هذلولوی بلترامی ـ کلاین را در یک حالت خاص آن می‌نشانیم. فرض کنیم V یک فضای برداری سه بعدی روی $\mathbb{R}$ باشد. به‌ازای

$$\varphi : V \to V^*/\mathbb{R}^* \ ; \ \mathfrak{x} \mapsto \mathbb{R}^*\mathfrak{x} \ , \qquad \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{\circ\} \ , \qquad V^* := V \setminus \{(\circ,\circ,\circ)\}$$

مجموعهٔ نقاط صفحهٔ تصویری، $\overline{P}$ و مجموعهٔ خطوط، $\overline{\mathfrak{G}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{P} := \varphi(V^*) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \ : \ \mathfrak{x} \in V^*\} \ , \qquad \overline{\mathfrak{G}} := \{\varphi(L \setminus \{(\circ,\circ,\circ)\}) \ : \ L \in \mathfrak{L}_۲\}$$

که منظور از $\mathfrak{L}_۲$، مجموعهٔ فضاهای برداری دو بعدی V است. به عبارت دیگر نقاط این صفحه به‌جای مختصات آفین $\mathfrak{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ دارای مختصات تصویری $\mathbb{R}^*\mathfrak{x} = \{(\lambda x_۱, \lambda x_۲, \lambda x_۳) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ و خطوط صفحه، تصویر فضاهای برداری دو بعدی تحت نگاشت کانونی φ هستند.

فضای برداری $V := \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{K}$ که $\mathbb{K}$ یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ است، یک فضای برداری ۳، ۵ یا ۹ بعدی روی $\mathbb{R}$ می‌شود. فرض کنیم تابع $f : V \times V \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$(\mathfrak{x} = (x_\circ, x), \mathfrak{y} = (y_\circ, y)) \mapsto x_\circ y_\circ - \frac{۱}{۲}(x\bar{y} + y\bar{x}) = x_\circ y_\circ - \langle x, y\rangle$$

تعریف شود. در این صورت به‌ازای $V := \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{K}$ و با نگاشت ι به‌شکل

$$\iota : \mathbb{K} \to \overline{P}; \ \ z \mapsto \mathbb{R}^*(۱, z)$$

مدل بلترامی ـ کلاین را در صفحهٔ تصویری $(\overline{P}, \overline{\mathfrak{G}})$ می‌نشانیم. با این نگاشت، نقاط هم‌خط مدل بلترامی ـ کلاین به نقاط هم‌خط در صفحهٔ تصویری $(\overline{P}, \overline{\mathfrak{G}})$ نگاشته می‌شوند. علاوه بر این،

$$\iota(\mathbb{S}) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \in \overline{P} \ : \ f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = \circ\}, \quad \iota(\mathbb{D}) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \in \overline{P} \ : \ f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) > \circ\}.$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$\rho : \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R};\quad (\mathbb{R}^*\mathfrak{x}, \mathbb{R}^*\mathfrak{y}) \mapsto \frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y})^{۲}}{f(\mathfrak{x},\mathfrak{x})f(\mathfrak{y},\mathfrak{y})}$$

با این نگاشت، به‌ازای $a=\mathbb{R}^*\mathfrak{a},\ b=\mathbb{R}^*\mathfrak{b},\ c=\mathbb{R}^*\mathfrak{c},\ d=\mathbb{R}^*\mathfrak{d}\in\mathbb{D}$ می‌توان نوشت

$$(a,b)\equiv_h (c,d) \Longleftrightarrow \rho(a,b)=\rho(c,d)$$

در این صورت به‌ازای $a\in\mathbb{D}$ و $\mathfrak{a}=(۱,a)\in V$ داریم $\iota(a)=\mathbb{R}^*\mathfrak{a}$ و بازتاب نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{\mathfrak{a}}\ :\ V\to V\ ;\ \mathfrak{x}\mapsto -\mathfrak{x}+۲\,\frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})}{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\,\mathfrak{a}$$

در نتیجه

$$\widetilde{\mathfrak{a}}((۱,x)) = -(۱,x)+\frac{۲-(a\bar{x}+x\bar{a})}{۱-a\bar{a}}(۱,a) = -(۱,x)+\frac{۲-(a\bar{x}+x\bar{a})}{\parallel a\parallel_h^{۲}}(۱,a).$$

قضیهٔ بعدی نتیجهٔ بحث فوق است.

قضیه ۱. فرض کنیم $(\mathbb{K},\mathbb{R})$ یک جبر باشد که در آن $\mathbb{K}$ یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ است. همچنین فرض کنیم $\mathbb{D}$ قرص یکهٔ باز باشد. در این صورت مدل بلترامی ـ کلاین برای هر یک از این جبرها، مجموعهٔ $\mathbb{D}$ است. ساختار متریک و در نتیجه همنهشتی در این مدل به این صورت مشخص می‌شود:

۱. برای هر $a\in\mathbb{D}$، بازتاب نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{a}:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}\ ;\ x\mapsto \frac{(a\bar{a}-۱)x+(۲-(a\bar{x}+x\bar{a}))a}{۱+a\bar{a}-(a\bar{x}+x\bar{a})}. \tag{۱}$$

۲. برای هر دو نقطهٔ $a,b\in\mathbb{D}$، نقطهٔ m، وسط a و b از رابطهٔ زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{۱-b\bar{b}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\,a+\frac{\sqrt{۱-a\bar{a}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\,b \\ &= \frac{\parallel b\parallel_h}{\parallel a\parallel_h+\parallel b\parallel_h}\,a+\frac{\parallel a\parallel_h}{\parallel a\parallel_h+\parallel b\parallel_h}\,b \end{aligned} \tag{۲}$$

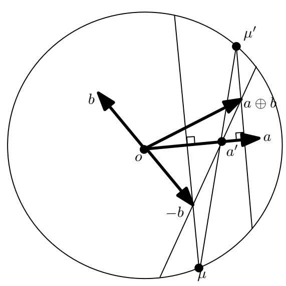
به‌ویژه در حالت خاص، نقطهٔ a'، وسط a و O از رابطهٔ

$$a'=\frac{۱}{۱+\sqrt{۱-a\bar{a}}}\,a=\frac{۱}{۱+\parallel a\parallel_h}\,a. \tag{۳}$$

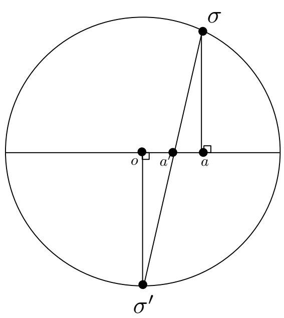
به‌دست می آید.

۳.۲. جمع در هندسهٔ هذلولوی

در این بخش، قانون اول جمع در صفحهٔ مطلق، یعنی $a \oplus b := \widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b)$ را برای مدل بلترامی ـ کلاین به‌کار می‌بریم. در این بحث، از نماد $+$ برای نشان دادن جمع در $\mathbb{K}$ و از نماد $\oplus$ برای نشان دادن جمع نسبیتی (هذلولوی) در $\mathbb{D}$ استفاده می‌کنیم. پیش از به‌دست آوردن فرمول جمع نسبیتی، روش هندسی به‌دست آوردن نقطهٔ وسط a و O و روش هندسی محاسبهٔ $a \oplus b$ را بیان می‌کنیم که بر اساس ویژگی‌های تعامد و بازتاب در مدل بلترامی ـ کلاین است.



شکل ۱۲. جمع نسبیتی بردارهای a و b.



شکل ۱۱. نقطهٔ وسط a و o.

فرض کنیم $A := \overline{O, a}$، $\sigma' \in (O \perp A) \cap \mathbb{S}$ و $\sigma \in (a \perp A) \cap \mathbb{S}$ طوری اختیار شده باشند که σ و σ' در دو طرف A قرار بگیرند. در این صورت نقطهٔ $a' := A \cap \overline{\sigma, \sigma'}$ وجود دارد و وسط a و O است (شکل ۱۱). بازتاب نسبت به نقطهٔ O، نقطهٔ b را به $-b$ می‌نگارد. پس برای محاسبهٔ $\widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b) = \widetilde{a'}(-b)$ توجه کنید که اگر $b = O$ باشد، آن‌گاه $a \oplus b = a \oplus O = a$ و در غیر این صورت، به‌ازای $\mu \in \mathbb{S} \cap (-b \perp A)$ و $\mu' \in \mathbb{S} \cap \overline{\mu, a'}$ به‌قسمی که $\mu' \neq \mu$ داریم (شکل ۱۲)

$$a \oplus b = \widetilde{a'}(-b) = \overline{-b, a'} \cap (\mu' \perp A).$$

برای محاسبهٔ $a \oplus b$ به روش تحلیلی بنابر قضیهٔ ۱، داریم

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b) \\ &= \frac{(۱ - a'\bar{a'})b + (۲ + (a'\bar{b} + b\bar{a'}))a'}{۱ + a'\bar{a'} + (a'\bar{b} + b\bar{a'})} \\ &= \frac{a + b}{۱ + \langle a, b \rangle} + \frac{۱}{۱ + ||a||_h} \left(\frac{\langle a, b \rangle\, a - a\bar{a}\, b}{۱ + \langle a, b \rangle} \right) \end{aligned}$$

این همان فرمول معروف اینشتین دربارهٔ قانون جمع سرعت‌های مجاز است. به‌منظور دست‌یابی به نتایج دیگر، این فرمول را به روش غیرمستقیم نیز محاسبه می‌کنیم. پیش از آن، یادآوری می‌کنیم که

در یک میدان $\mathbb{K}$ برای $a, b \neq c, d$ نسبت ناهمساز[1] به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$DV(a,b;c,d) := (a-c)(a-d)^{-1}(b-d)(b-c)^{-1}$$

می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز تحت بازتاب‌های نقطه‌ای، ناوردا است.

قضیه ۲. بازهٔ $\mathbb{I} := (-1, 1)$ را با دو عمل زیر در نظر می‌گیریم:

$\oplus \ : \ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}\,; \ \ (a,b) \mapsto a \oplus b := \frac{a+b}{1+a\cdot b}$

$\odot \ : \ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}\,; \ \ (a,b) \mapsto a \odot b := \tanh(\tanh^{-1}(a) \cdot \tanh^{-1}(b))$ در این صورت

۱ــ $(\mathbb{I}, \oplus)$ یک گروه یکریخت با $(\mathbb{R}, +)$ است؛

۲ــ برای $a, b \in \mathbb{D}$، همواره $\tanh(x+y) = \tanh x \oplus \tanh y$، یعنی $\tanh$ یکریختی بین $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{I}, \oplus)$ است؛

۳ــ نگاشت $\tanh$ یکریختی بین میدان‌های $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{I}, \oplus, \odot)$ است.

یادآوری می‌کنیم که تابع $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را یک‌به‌یک، پوشا و یکنوا به بازهٔ $\mathbb{I} := (-1, 1)$ تبدیل می‌کند و $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$. در ادامه، برای دست‌یابی به نتایج دیگر به محاسبهٔ فرمول اینشتین به روشی غیرمستقیم می‌پردازیم.

ابتدا فرض کنیم O، a و b هم‌خط باشند. در این صورت A یک زیرمیدان $\mathbb{K}$ است. اگر قرار دهیم $a_1 := \frac{1}{|a|}a$، آن‌گاه $A \cap \mathbb{S} = \{a_1, -a_1\}$. پس عدد

$$\begin{aligned} DV(a_1, -a_1; O, -b) &= (a_1 - O)(a_1 + O)^{-1}(-a_1 + b)(-a_1 - b)^{-1} \\ &= (a_1 - b)(a_1 + b)^{-1} \end{aligned}$$

حقیقی است. بازتاب $\widetilde{a}'$، نقاط a_1 و $-a_1$ را به هم تبدیل می‌کند. همچنین O به a و $-b$ به $a \oplus b$ تبدیل می‌شوند. در نتیجه [۸]

$$DV(a_1, -a_1; O, -b) = (a + a_1)(a - a_1)^{-1}((a \oplus b) - a_1)((a \oplus b) + a_1)^{-1}$$

از این معادله نتیجه می‌شود

$$a \oplus b = \frac{1}{1 + \bar{a}b}(a+b).$$

اکنون فرض کنیم O، a و b هم‌خط نباشند. در این صورت نقطهٔ وسط a و O بر نقطهٔ وسط $a \oplus b$ و $-b$ منطبق است (شکل ۷). به این ترتیب

$$\frac{a}{1 + \|a\|_h} = \frac{1}{\|a \oplus b\|_h + \|b\|_h}(\|b\|_h \ (a \oplus b) - \|a \oplus b\|_h \ b)$$

1) cross ratio

پس برای $\lambda = \frac{\|a\oplus b\|_h}{\|b\|_h}$ داریم $a \oplus b = \lambda\, b + \frac{۱+\lambda}{۱+\|a\|_h}\, a$ و با محاسبهٔ نُرم دو طرف نتیجه می‌گیریم

$$۱ - \|b\|_h{}^۲ \lambda^۲ = \lambda^۲(۱ - \|b\|_h{}^۲) + \frac{(۱+\lambda)^۲}{(۱+\|a\|_h)^۲}(۱ - \|a\|_h{}^۲) + \frac{۲\lambda(۱+\lambda)}{۱+\|a\|_h}\langle a, b\rangle$$

لذا [۸]

$$\lambda = \frac{\|a\|_h}{۱ + \langle a, b\rangle}$$

به این ترتیب

$$\|a \oplus b\|_h = \frac{\|a\|_h\ \|b\|_h}{۱ + \langle a, b\rangle}$$

و با جایگزینی نتیجه می‌شود [۸]

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \frac{\|a\|_h}{۱+\langle a, b\rangle}\, b + \left(۱ + \frac{\|a\|_h}{۱+\langle a, b\rangle}\right) \frac{a}{۱+\|a\|_h} \\ &= \frac{a+b}{۱+\langle a, b\rangle} + \frac{۱}{۱+\|a\|_h}\left(\frac{\langle a, b\rangle\, a - a\bar{a}\, b}{۱+\langle a, b\rangle}\right). \end{aligned}$$

آنچه گفته شد در قالب قضیهٔ زیر خلاصه شده است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم U یک خط در صفحهٔ هذلولوی باشد که $O \in U$. در این صورت

۱− برای هر $a, b \in U$، $a \oplus b = \frac{۱}{۱+\bar{a}b}(a+b)$؛

۲− مجموعهٔ U یک گروه آبلی یکریخت با $(\mathbb{I}, \oplus)$ و در نتیجه یکریخت با $(\mathbb{R}, +)$ است؛

۳− برای $a, b \in \mathbb{D}$،

$$a \oplus b = \frac{a+b}{۱+\langle a, b\rangle} + \frac{۱}{۱+\|a\|_h}\left(\frac{\langle a, b\rangle\, a - |a|^۲\, b}{۱+\langle a, b\rangle}\right) \qquad (۴)$$

و

$$(۱ + \langle a, b\rangle)\ \|a \oplus b\|_h = \|a\|_h\ \|b\|_h. \qquad (۵)$$

۳. ساختار جبری مجموعهٔ سرعت‌های مجاز با عمل جمع نسبیتی

در این بخش، ساختار جبری $(\mathbb{D}, \oplus)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همان‌گونه که اشاره کردیم، برخی از ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها متوجه رابطهٔ بین جمع نسبیتی با هندسهٔ هذلولوی شده بودند ولی به‌دلیل پیچیدگی این ساختارها، تا سال ۱۹۸۸ پیشرفت چندانی در این زمینه صورت نپذیرفت. در سال ۱۹۸۹ آبراهام اونگار رهیافت جدیدی برای توسعهٔ نسبیت خاص و هندسهٔ هذلولوی بنیان گذاشت [۱۱، ۱۴]. وی همراه با همکاران و شاگردانش، ساختار جبری جمع نسبیتی را در

قالبی کلی‌تر مطرح کرد که امروزه آن را گروه ژیرو[1] می‌نامند. پیش از وی در سال ۱۹۶۴ هلموت کارتسل برای رده‌بندی گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی، وجود این‌گونه ساختارهای جبری غیرشرکت‌پذیر را پیش‌بینی کرده بود. با یادآوری این که بنابر قضیهٔ کیلی، هر گروه را می‌توان در یگ گروه جایگشتی نشانید، به اهمیت رده‌بندی این گروه‌ها بیشتر پی می‌بریم.

فرض کنیم گروه $(\Gamma, \cdot)$ در گروه متقارن S_E، متشکل از تمام نگاشت‌های یک‌به‌یک و پوشای $\sigma : E \to E$ با عمل ترکیب توابع نشانیده شده باشد که اصطلاحاً می‌گوییم Γ روی E عمل می‌کند. هرگاه هستهٔ همریختی نشاننده، بدیهی باشد عمل را باوفا[2] می‌نامیم. اگر برای هر n زوج متمایز $(x_۱, y_۱)$، ... ، (x_n, y_n) که در آن $x_i, y_i \in E$، عضو $\gamma \in \Gamma$ وجود داشته باشد که $\gamma(x_i) = y_i$ برای هر $i = ۱, \dots, n$، گوییم Γ به‌صورت n ـ انتقالی روی E عمل می‌کند. اگر γ یکتا باشد، گوییم Γ اکیداً n ـ انتقالی روی E عمل می‌کند. در سال ۱۸۷۲، جردن همهٔ گروه‌های جایگشتی اکیداً k ـ انتقالی متناهی را برای $k \geq ۴$ مشخص نمود. این گروه‌ها S_k، $S_{k+۱}$، $A_{k+۲}$ و در حالت‌های خاص $k = ۴$ و $k = ۵$، به‌ترتیب گروه‌های ماتیو $M_{۱۱}$ و $M_{۱۲}$ هستند که آن‌ها را ماتیو در سال ۱۸۶۱ کشف کرد. در سال ۱۹۰۷، وبلن[3] و ودربورن[4] از شبه‌میدان‌های متناهی برای ساختن صفحه‌های تصویری غیردزارگی متناهی استفاده کردند. شبه‌میدان[5] یکی از مفاهیم جبری مهم است که مانند میدان، رابطهٔ عمیقی با ساختارهای هندسی دارد. شبه‌میدان مجموعه‌ای چون F مجهز به دو عمل $+$ و ضرب $\cdot$ با ویژگی‌های زیر است [۱]:

۱− $(F, +)$ یک گروه با عضو خنثای ۰ است؛

۲− $(F^* = F \setminus \{۰\}, .)$ یک گروه با عضو خنثای ۱ است؛

۳− برای هر $a, b, c \in F$، $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$؛

۴− برای هر $a \in F$، $۰ \cdot a = ۰$.

نخستین مثال‌ها برای شبه‌میدان‌های متناهی به‌وسیلهٔ دیکسون[6] در سال ۱۹۰۵ مطرح شدند. مثال از شبه‌میدان‌های نامتناهی در سال ۱۹۳۰ به‌وسیلهٔ رایدمایستر[7] و شرایر[8] مطرح شد. در سال ۱۹۳۱، کارمایکل[9] نشان داد که گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی متناهی دقیقاً گروه‌های یکریخت با $T_۲(F)$ هستند که $T_۲(F)$ عبارت است از مجموعهٔ تبدیل‌های آفین $x \mapsto a + bx$ به‌ازای $(b \neq ۰)$ روی یک شبه‌میدان متناهی.

در سال ۱۹۳۴، زاسنهاوس نشان داد که گروه‌های جایگشتی اکیداً ۳ ـ انتقالی متناهی دقیقاً گروه‌های یکریخت با $T_۳(F)$ هستند که $T_۳(F)$ عبارت است از مجموعهٔ تبدیل‌های خطی کسری $x \mapsto \frac{a+bx}{c+dx}$ به‌ازای $(ad - bc \neq ۰)$ روی یک شبه‌میدان متناهی. زاسنهاوس در ادامهٔ مطالعاتش شبه‌میدان‌های متناهی را رده‌بندی نمود و به این ترتیب در این حالت نیز مسالهٔ رده‌بندی حل شد.

1) gyrogroup 2) faithfull 3) Weblen 4) Wedderburn 5) nearfield 6) Dickson 7) Reidemeister 8) Schreier 9) Carmichael

در سال ۱۹۴۳، هال توانست نتیجهٔ کارمایکل را به‌ازای $k = ۲$ با یک شرط اضافی برای شبه‌میدان‌های نامتناهی تعمیم دهد. در سال ۱۹۵۴، تیتس[۱] و هال ثابت کردند به ازای $k \geq ۴$ گروه جایگشتی اکیداً k ـ انتقالی نامتناهی وجود ندارد. این رده‌بندی برای حالت‌های $k = ۲$ و $k = ۳$ سال‌ها همچنان ناقص باقی ماند.
برای حذف شرط اضافی هال، تیتس، گراتزه[۲] و کارتسل نشان دادند که باید مفهوم شبه‌میدان با مفهوم کلی‌تری جایگزین شود. مفهوم شبه‌حوزه[۳] که به‌وسیلهٔ کارتسل در سال ۱۹۶۴ مطرح شد، مزایای بیشتری دارد. با این تعریف، گروه‌های جایگشتی یکریخت منجر به شبه‌حوزه‌های یکریخت می‌شوند. کارتسل نشان داد که هر شبه‌حوزهٔ متناهی یک شبه‌میدان است ولی تاکنون هیچ مثالی از شبه‌حوزهٔ سره (که شبه‌میدان نباشد) یافت نشده است.

بنابر تعریف کارتسل، مجموعهٔ F همراه با دو عمل «$+$» و «$\cdot$» شبه‌حوزه نامیده می‌شود هرگاه

۱ــ $(F, +)$ یک لوپ (دور) باشد، یعنی برای هر $a, b \in F$، معادله‌های $a + x = b$ و $y + a = b$ جواب‌های منحصر به فرد x و y در F داشته باشند و $(F, +)$ دارای عنصر خنثی باشد که معمولاً با $\circ$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر برای هر $a \in F$، $a + \circ = \circ + a = a$؛

۲ــ $(F^* = F \setminus \{\circ\}, \cdot)$ گروه باشد به‌قسمی که برای هر $x \in F$، $\circ \cdot x = \circ$؛

۳ــ برای هر $a, b, c \in F$، داشته باشیم $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$؛

۴ــ برای هر $a, b, c \in F$ دقیقاً یک $d_{a,b} \in F^*$ وجود داشته باشد که

$$a + (b + c) = (a + b) + d_{a,b} \cdot c.$$

بر اساس ایده‌های هال و کارتسل قضیهٔ بعد در مورد رده‌بندی گروه‌های اکیداً ۲ ــ انتقالی ثابت می‌شود [۲].

قضیه ۴. فرض کنیم $(F, +, \cdot)$ یک شبه‌حوزه باشد. در این صورت:
الف) ساختار $(F, +)$ یک K ـ لوپ است؛
ب) اگر $a^+ : F \to F$ تابعی باشد که x را به $a + x$ تبدیل می‌کند و $a^{\cdot} : F \to F$ تابعی باشد که x را به $a \cdot x$ می‌نگارد، آن‌گاه

$$A(F) := \{a^+ \circ b^{\cdot} \mid a \in F, \quad b \in F^*\}$$

یک گروه است که روی F اکیداً ۲ ـ انتقالی عمل می‌کند.
به‌عکس برای هر گروه Γ که روی مجموعه‌ای مانند F اکیداً دوانتقالی عمل می‌کند، عمل‌های $+$ و $\cdot$ وجود دارند به‌قسمی که $(F, +, \cdot)$ یک شبه‌حوزه است و $\Gamma = A(F)$.
کارتسل مثالی از شبه‌حوزهٔ سره ارائه نکرد و هنوز هم وجود شبه‌حوزهٔ سره مسألهٔ‌ای باز است. با وجود این، وفلشاید[۴] و کربی[۵] به مطالعهٔ ساختار خاصی پرداختند که با عمل «$+$» در یک شبه‌حوزه

1) Tits 2) Gratze 3) neardomain 4) Wefelscheid 5) Kerby

مشخص می‌شود. آن‌ها خواص زیادی از این ساختار را اثبات کردند ولی چون موفق به ارائهٔ مثالی در این مورد نشدند، از چاپ آن خودداری کردند. تا این‌که در سال ۱۹۸۸ اونگار مقالهٔ خود را در مورد ساختار جبری جمع نسبیتی به مجلهٔ .Resultate Math فرستاد. وفلشاید، سردبیر این مجله، ساختار مورد نظر اونگار را بدون آن‌که مثالی برایش بشناسد از پیش به‌خوبی می‌شناخت و به همین دلیل اهمیت آن را در رابطه با گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی به آگاهی وی رسانید. اونگار نیز به همین دلیل، لوپ وابسته به جمع نسبیتی را به افتخار کارتسل K ــ لوپ (K ــ دور) نامید. پیش از آن، در مورد لوپ (دور) و اهمیت هندسی آن مطالعات زیادی صورت پذیرفته بود. یک لوپ درحالت کلی ویژگی‌های تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ندارد.

مفهوم K ـ لوپ به روش‌های مختلف قابل تعریف است که همگی هم‌ارز هستند. لوپ K یک K ـ لوپ است هرگاه رابطهٔ

$$a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c \tag{۶}$$

و ویژگی معکوس خودریخت

$$-(a + b) = (-a) + (-b) \tag{۷}$$

در آن برقرار باشند (منظور از $-a$ معکوس راست است که از رابطهٔ $a + (-a) = \circ$ به‌دست می‌آید). اگر $(K, +)$ یک لوپ باشد، برای هر $a, b, x \in K$، رابطهٔ $a + (b + x) = (a + b) + \delta_{a,\,b}(x)$ یک نگاشت دوسویی $\delta_{a,\,b} : K \longrightarrow K$ تعریف می‌کند که آن را نگاشت دقت[۳] می‌نامند. نگاشت‌های دقت در یک K ــ لوپ، خودریختی‌های آن هستند. در پی کشف اونگار، کارتسل و شاگردانش مثال‌های متعددی از K ـ لوپ کشف کردند ([۶، ۷]).

در ادامهٔ این بخش نشان می‌دهیم که $(\mathbb{D}, \oplus)$ یک K ـ لوپ است. بنا بر تعریف، O عضو خنثای عمل $\oplus$ است و $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = O$. فرض کنیم $a^+ := \tilde{a}' \circ \tilde{O}$ و $\mathcal{M} := \{a^+ : a \in \mathbb{D}\}$.

در این صورت $\mathcal{M}$ زیرگروهی از گروه حرکت‌های صفحهٔ هذلولوی است. اگر x' نقطهٔ وسط $\tilde{O}(a)$ و b باشد، آن‌گاه $x = \widetilde{x'}(O)$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $x + a = b$ خواهد بود. به همین ترتیب $x = \tilde{O} \circ \tilde{a'}(O)$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $a + x = b$ است. بنابراین $(\mathbb{D}, \oplus)$ یک لوپ است و $\tilde{O} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}, \oplus)$ [۸]، یعنی

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

علاوه بر این،

$$(a + (b + a))^+(O) \quad = \quad a^+ \circ b^+ \circ a^+(O).$$

---

1) precision map

از سوی دیگر برای هر $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{D}}$، داریم $\widetilde{\mathbb{D}} = \tilde{x} \circ \widetilde{\mathbb{D}} \circ \tilde{x}$. پس یک $c' \in \mathbb{D}$ وجود دارد که $\widetilde{c'} = \tilde{a}' \circ \tilde{O} \circ \tilde{b}' \circ \tilde{O} \circ \tilde{a}'$ و در نتیجه $a^+ \circ b^+ \circ a^+ = \widetilde{c'} \circ \widetilde{O} = c^+ = (a + (b + a))^+$.
نکتهٔ مهم دیگر این‌که $(\mathbb{D}, \oplus)$ نه تعویض‌پذیر است و نه شرکت‌پذیر. در واقع اگر قرار دهیم $\delta = \delta_{a,b} = (a^+(b)^+)^{-۱} \circ a^+ \circ b^+$، آن‌گاه طبق تعریف،

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \delta(c)$$

و $\delta(O) = O$ [۴]. به این ترتیب برای هر $x, y \in \mathbb{D}$ داریم

$$\delta \circ\ x^+ \circ \delta^{-۱}(o) = \delta \circ\ x^+(O) = \delta(x) = (\delta(x))^+(O)$$

چون $\mathbb{D}^+$ روی $\mathbb{D}$ اکیداً ۲ ـ انتقالی عمل می‌کند، $\delta \circ\ x^+ \circ \delta^{-۱} = (\delta(x))^+$ و در نتیجه

$$\delta(x) \oplus \delta(y) \quad = \quad \delta(x \oplus y)$$

یعنی δ یک خودریختی $(\mathbb{D}, \oplus)$ است [۴]. در واقع δ که پیش از این نگاشت دقت نامیده شد، یک دوران حول O است که دوران توماس[1] هم نامیده می‌شود [۱۲]. زاویهٔ دوران توماس برابر کاستی مثلث $\triangle(O, a, -b)$ است [۵].

۴. نظریهٔ نسبیت خاص

در این بخش به رهیافت فیزیکی ساختار $(\mathbb{D}, \oplus)$ می‌پردازیم. در بیشتر کتاب‌های آموزشی فیزیک دربارهٔ نسبیت خاص، به‌ندرت جمع سرعت‌ها در حالت کلی بیان می‌شود. رهیافتی که در کتاب‌های پیشرفته‌تر مطرح می‌شود بر اساس شکل کلی تبدیل‌های لورنتس است. پیش از ارائهٔ ساختار جبری جمع نسبیتی به‌وسیلهٔ اونگار، فیزیکدان‌ها در تفسیر تبدیل‌های مختصات مختلف ابهام‌های زیادی داشتند. این مشکلات زمانی برطرف شدند که ساختار جبری جمع نسبیتی مشخص شد. در واقع تبدیل‌های بین دو دستگاه مختصات تنها با سرعت نسبی آن‌ها قابل تعیین نیست. باید یکریختی‌های خاصی نیز دخالت داده شوند. این یکریختی‌ها، دوران‌هایی در فضای برداری $(\mathbb{R}^۳, \mathbb{R})$ هستند. برای نخستین بار، توماس در مدل بور برای اتم هیدروژن، دوران دستگاه مختصات چسبیده به الکترون را مورد توجه قرار داد تا بتواند با تکیه بر نظریهٔ نسبیت، رفتار اتم هیدروژن را از نظر محاسباتی تحلیل کند. تاریخچهٔ این مطلب حاوی نکات آموزنده‌ای از تاریخ فیزیک است. نخستین بار، کرونیگ[1] در سال ۱۹۲۵ متوجه شد که تکانه زاویه‌ای کل الکترون در اتم هیدروژن از تکانه اربیتالی آن بزرگتر است. تنها ایدهٔ معقولی که به ذهن می‌رسید این بود که برای خود الکترون هم یک حرکت چرخشی به دور محورش در نظر بگیریم. وی متوجه شد که با وجود این فرض، همچنان یک مشکل باقی می‌ماند؛ این‌که نتیجهٔ محاسبات نظری دو برابر مقدار حاصل از ملاحظات

---

1) Thomas rotation   2) Kronig

تجربی بود! وی ایدهٔ اسپین الکترون را با فیزیکدان‌های برجسته‌ای چون پاولی و هایزنبرگ مطرح کرد ولی نتوانست آنان را قانع کند و در نتیجه از چاپ ایده‌هایش خودداری کرد. اواخر همان سال در نامهٔ کوتاهی به مجلهٔ Naturwissenschaften گودشمیت[۲] و اُلن بک[۳] مدعی شدند که باید برای الکترون یک تکانهٔ زاویه‌ای در نظر گرفت. ایشان به بور هم نامه‌ای نوشتند و این ایده را پی‌گیری کردند. اما بور مشکل ضریب ۲، یعنی ناسازگاری نظریه و تجربه را می‌دانست و نسبت به درستی این فرضیه شک داشت. توماس که به نظریهٔ نسبیت تسلط داشت و در آن زمان مأمور به خدمت در آزمایشگاه بور بود، توانست بر اساس نسبیت خاص این ضریب را توجیه کند [۹]. چون سرعت الکترون نزدیک به سرعت نور است، مکانیک کلاسیک قادر به توجیه این پدیده نیست. این کشف حتی برای خود اینشتین هم شگفت‌آور بود. به این ترتیب، جمع نسبیتی در مکانیک کوانتومی یک کاربرد مهم دیگر به‌دست آورد. یکی از بحث‌های عمدهٔ نسبیت خاص، بررسی سرعت‌های نسبی یک متحرک نسبت به دستگاه‌های مرجع مختلف است. در فیزیک کلاسیک رابطهٔ بین سرعت نسبی یک متحرک نسبت به دستگاه‌های مختلف به‌وسیلهٔ تبدیلات گالیله تعیین می‌شود. برای توضیح نقش تبدیلات گالیله در مکانیک کلاسیک و تفاوت آن با تبدیلات لورنتس که در نظریهٔ نسبیت مطرح می‌شوند، ابتدا به یادآوری چند نکته می‌پردازیم.

دستگاه‌های مختصات K و K' را به‌ترتیب با محورهای x_1، x_2، x_3 و x'_1، x'_2، x'_3 در نظر می‌گیریم. فرض کنیم K' نسبت به K با سرعت $v = (v_1, v_2, v_3)$ در حال حرکت است. زمان را در K با t و در K' با t' نشان می‌دهیم. رخداد A در K به‌وسیلهٔ سه مختص مکانی (x_1, x_2, x_3) و یک مختص زمانی t_A مشخص می‌شود که برداری از فضا ــ زمان $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند. برای این دو دستگاه منظور از تبدیل گالیله، تبدیل

$$\gamma(A) = (x'_1, x'_2, x'_3, ct_A) = (x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, x_3 + v_3 t, ct_A)$$

است که در آن t_A در c، سرعت نور ضرب شده است. با تبدیل گالیله، اگر یک شئ نسبت به K دارای سرعت w باشد، نسبت به K' دارای سرعت $w + v$ است. آزمایش‌های مایکلسون در سال ۱۸۸۱ نشان داد که این مطلب برای سرعت نور نادرست است. نظریه‌پردازی بر اساس فرضیهٔ اتر (محیط حامل امواج نور) برای توجیه این آزمایش، با رهیافت کاملاً جدید اینشتین پایان یافت. فرضیهٔ اینشتین بر دو بنداشت استوار است:

۱) سرعت نور نسبت به همهٔ دستگاه‌های مختصات یکسان است؛

۲) تبدیل λ از K به K' و معکوس آن λ^{-1} از K' به K متقارن هستند.

بر اساس دو اصل فوق، فاصلهٔ لورنتس ــ مینکوفسکی، یعنی

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - c^2(t_A - t_B)^2$$

1) Goudsmit 2) Uhlenbeck

بین دو نقطهٔ A به مختصات (x_1, x_2, x_3, ct_A) و B به مختصات (y_1, y_2, y_3, ct_B) به‌جای فاصلهٔ اقلیدسی قرار می‌گیرد. فاصلهٔ لورنتس ــ مینکوفسکی یک فرم دوخطی نامعین است که با ماتریس زیر مشخص می‌شود:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

در حالی که فاصلهٔ اقلیدسی یک فرم مثبت معین است که با ماتریس همانی $I_{4\times 4}$ مشخص می‌شود. به این ترتیب با متر لورنتس ــ مینکوفسکی، فاصلهٔ دو رویداد A و B که آن را با $d(A, B)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از $d(A, B) = (A - B)M(A - B)^t$. در فیزیک نظری $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, d)$ را فضا ــ زمان مینکوفسکی می‌نامند. در حالت کلی ماتریس $L = (l_{ij})_{4\times 4}$ که $LML^t = M$، ماتریس لورنتس و نگاشت $\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad ; \quad A \mapsto AL$ تبدیل لورنتس نامیده می‌شود. ردهٔ خاصی از تبدیل‌های لورنتس، بوست‌های لورنتس[1] هستند. یک مثال ساده از بوست لورنتس در حالتی به‌دست می‌آید که دستگاه مختصات K' نسبت به دستگاه K حرکت یک بعدی با سرعت $v = (v_x, 0, 0)$ در راستای محور x دارد. در این حالت ماتریس نظیر یک بوست لورنتس عبارت است از

$$B(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\frac{v_x}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\frac{v_x}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}.$$

اگر مختصات رخدادی در دستگاه K برابر (x_1, y_1, z_1, t) باشد، در دستگاه K' دارای مختصات زیر است:

$$x'_1 = \gamma(x_1 + v_x t), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = \gamma(\tfrac{v_x}{c^2}x_1 + t)$$

در سال ۱۹۱۱، بریل[2] قضیهٔ مهمی در مورد بوست‌های لورنتس ثابت کرد.

قضیه ۵. برای هر ماتریس لورنتس L یک بوست لورنتس منحصر به فرد $B(v)$ با سرعت وابستهٔ v و یک ماتریس متعامد 3×3 مانند D وجود دارد که

$$L = B(v)\ \tilde{D} \quad , \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} & D & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

علاوه بر قضیهٔ فوق یک نکتهٔ مهم در مورد بوست‌های لورنتس این است که حاصل ضرب دو بوست لورنتس $B(v)$ و $B(u)$ یک بوست لورنتس است هرگاه v و u مستقل خطی باشند. قضیهٔ ۶ رابطهٔ بین دو بوست لورنتس را در حالت کلی به‌دست می‌دهد.

1) Lorenz boost 2) Brill

قضیه ٦. برای دو بوست $B(v)$ و $B(u)$ با سرعت‌های وابستهٔ v و u، بوست منحصر به فردی مانند $B(w)$ با سرعت وابستهٔ w و یک ماتریس متعامد ۳ × ۳ مانند $D(u,v)$ وجود دارد که

$$B(u)B(v) = B(w)\tilde{D}(u,v).$$

در حالت کلی اگر ماتریس D متعامد باشد، آن‌گاه ماتریس $D^{-1} = D^t$ نیز متعامد است و یک دوران را مشخص می‌کند. به این ترتیب اگر برای دو بوست $B(v)$ و $B(u)$ فرض کنیم $D(u,v)$ ماتریسی باشد که به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۵ مشخص می‌شود، آن‌گاه نگاشت $\delta_{u,v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\; ; \;\; A \mapsto A\ D^t(u,v)$ همان دوران توماس است. در بخش قبل نیز به این دوران اشاره شد.

برای سرعت‌های v و u در مجموعهٔ سرعت‌های مجاز $\mathbb{R}^3_c$ (سرعت‌های کمتر از سرعت نور در خلأ)، جمع نسبیتی $u \oplus v$ بر اساس تبدیلات لورنتس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\oplus : \mathbb{R}^3_c \times \mathbb{R}^3_c \to \mathbb{R}^3_c \;\; ; \;\; u \oplus v = \frac{u+v}{1+\frac{\langle u,v\rangle}{c^2}} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\gamma_v}{\gamma_v+1}\,\frac{\langle u,v\rangle u - u^2 v}{1+\frac{\langle u,v\rangle}{c^2}}$$

در اینجا $\langle u,v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ و $u^2 := u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. اگر سرعت نور را برابر ۱ در نظر بگیریم، جمع نسبیتی همان فرمول ۴ در قضیهٔ ۳ است که در مدل بلترامی ـ کلاین به‌دست آمد. در قضیهٔ بعد یک ویژگی K ـ لوپ برای جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز اثبات شده است. اثبات بقیهٔ ویژگی‌ها به‌طور مشابه انجام می‌شود [٦].

قضیهٔ ۷. برای $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ و دوران توماس $\delta_{u,v}$ داریم $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus \delta_{u,v}(w)$.

۵. نتیجه

در پایان بحث، دو رهیافت هندسی و فیزیکی برای بررسی ساختار جبری جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم.

- بر اساس رهیافت هندسی، به‌کمک ویژگی‌های ابتدایی بازتاب‌ها و تعبیری مستقل از توازی برای جمع بردارها در مدل بلترامی ـ کلاین، فرمول جمع نسبیتی و ساختار جبری آن به‌دست می‌آید.
- بر اساس رهیافت فیزیکی، به‌کمک دو اصل فیزیکی نظریهٔ نسبیت خاص که مبنای تجربی دارند، متر مناسب و سپس تبدیلات مناسب بین دستگاه‌های مختصات به‌دست می‌آید. سپس به‌کمک خواص این تبدیل‌ها فرمول جمع نسبیتی و ساختار جبری آن به‌دست می‌آید.

مراجع

[1] Karzel H., "Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-strukturen mit Rechtecksaxiom", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **32** (1968), 191-205.

[2] Karzel H., Sörensen K., Windelberg D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

[3] Karzel H. & Kroll H. J., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[4] Karzel H., "Recent developments on absolute geometries and algebraization by K-loops",*Discrete Math.* **208/209** (1999), 387-409.

[5] Karzel H. and Marchi, M., "Relation between the K-loop and the defect of an absolute plane", *Results. Math.*, **47** (2005), 305-326.

[6] Kiechle H., *Theory of K-Loops*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[7] Kreuzer A., "Beispiele endlicher und unendlicher K - Loops", *Resultate Math.*, **23** (1993), 355 - 362.

[8] Taherian S. gh., "On algebraic structures related to Beltrami-Klein model of hyperbolic geometry". *Results. Math.*, **57**(2010), 205-219.

[9] Thomas H. L., "The motion of the spinning electron". *Nature* (1926), 117-514.

[10] Ungar A. A., "Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group", *Found. Phys. Lett.*, **1** (1988), 57-89.

[11] Ungar A. A., "The relativistic noncommutative nonassociative group of velocities and the Thomas rotation". *Resultate Math.*, **16** (1989), 168-179.

[12] Ungar A. A., "Thomas precession and its associated grouplike structure", *Amer. J. Phys.*, **59** (1991), 824-834.

[13] Ungar A. A., *Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas Precession.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001.

[14] Ungar A. A., *Analytic Hyperbolic Geomtry and Albert Einstein special theory of relativity*, World scientific, 2008.

[۱۵] ماروین جی گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۱.

سید قهرمان طاهریان
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
taherian@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۲۳ تا ۴۵

روابط اندازه‌پذیر و معادلات عملگری تصادفی در فضاهای باناخ

روح‌الله جهانی‌پور، نرگس تراکمه سامانی

چکیده

در این مقاله، نگاشت‌های چندمقداری یا روابط اندازه‌پذیر را معرفی و ارتباط بین تعریف‌های مختلف اندازه‌پذیری آن‌ها را مطالعه می‌کنیم. موضوع نگاشت‌های چندمقداری اندازه‌پذیر، در نظریهٔ بازی و نظریهٔ کنترل کاربرد دارد. همچنین مطالب بیان شده را برای بررسی وجود جواب معادلات عملگری تصادفی غیرخطی در فضاهای باناخ به‌کار می‌بریم.

۱. مقدمه

نگاشت چندمقداری یا رابطهٔ اندازه‌پذیر، تابع مجموعه ـ مقداری است که به هر عضو t از یک فضای اندازه‌پذیر T، زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژیک X را نسبت می‌دهد به‌طوری که در یکی از چندین تعریف اندازه‌پذیری صدق کند. این روابط به‌طور گسترده‌ای در سال‌های ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ توسط محققان مشهوری چون اومان [۱]، دبریو [۱۴]، ژاکوبس [۲۸]، کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی [۳۴]، مک‌شین و وارفیلد [۳۵]، هیملبرگ [۱۹]، هیملبرگ و ون‌ولک [۲۰، ۲۱، ۲۲] و بسیاری دیگر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به‌ویژه هیملبرگ [۱۹، ۲۳] در یک پژوهش عالی، برای بررسی ویژگی‌های روابط اندازه‌پذیر، ابتدا ارتباط میان تعاریف مختلف اندازه‌پذیری را مورد مطالعه قرار داد و به‌کمک آن‌ها شرایط کافی برای اندازه‌پذیری اشتراک حداکثر شمارا از روابط اندازه‌پذیر را به‌دست آورد. این نتایج در تعمیم قضایای مهم و اساسی انتخاب کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی و توسیع اومان از قضیهٔ انتخاب اندازه‌پذیر نیومن، هم‌چنین در تعمیم قضیهٔ تابع

ضمنی فیلیپف [۱۶] مورد استفاده قرار گرفتند. در بسیاری از این کارها، X فضای متریک فشرده یا اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود. هیملبرگ برای توسیع نتایج قبلی، T را فضای اندازه‌پذیر مجرد و X را فضای متریک جدایی‌پذیر فرض کرد. حقیقت این است که در کار با T، باید فشردگی را معمولاً (نه همیشه) یا برای X یا برای مقادیر نگاشت چندمقداری با مقادیر در X، در نظر بگیریم. هیملبرگ نتایج مشابهی را با این فرض که X فضای سوسلین و روی زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر T، اندازهٔ σ ـ متناهی تعریف شده باشد، به‌دست آورد.

در نظریهٔ عملگرهای تصادفی (احتمالی) سعی می‌شود با استفاده از ابزارهای نظریهٔ احتمال و آنالیز تابعی، رفتار معادلات شامل عملگرهای تصادفی از جمله وجود و یکتایی و اندازه‌پذیری جواب‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. نتایجی که از این مطالعات به‌دست می‌آید در شناخت معادلات دیفرانسیل تصادفی کاربرد دارد. اسپاچک[1] و هانس [۱۷] مطالعه روی معادله‌های شامل عملگرهای تصادفی را آغاز و قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی از نوع انقباضی را اثبات کردند. این نتایج توسط هانس و بهاروچا ـ رید [۲، ۳] تعمیم داده و در مسائل مختلفی به‌کار برده شدند. ایتوه [۲۵، ۲۷] قضیهٔ اسپاچک و هانس را برای نگاشت‌های انقباضی چندمقداری تعمیم داد. به‌علاوه وی قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی مختلفی را روی فضاهای اندازه‌پذیر کلی برای نگاشت‌های چندمقداری یا تک‌مقداری (از نوع بسط‌ناپذیر یا چگالنده) به‌دست آورد که برای اثبات آن‌ها از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری، به‌طور مؤثری استفاده شده است. در ادامه، ایتوه [۲۶] از همین نظریه استفاده کرد تا بتواند جواب‌های معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوای تصادفی را در فضاهای باناخ به‌دست آورد. افراد دیگری از جمله کتّان و صالحی [۲۹] معادله‌های تصادفی شامل عملگرهای یکنوا را مطالعه و وجود جواب‌های معادلات همرشتاین تصادفی را اثبات کردند. روش آن‌ها برای اثبات اندازه‌پذیری جواب‌ها، تا حد زیادی به یکتایی جواب‌ها بستگی دارد. هدف اصلی ما در این مقاله این است که از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری استفاده کنیم تا وجود جواب برای معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ را نتیجه بگیریم ([۱۹]، [۲۳]، [۲۶]، [۳۰]).
از این‌جا به بعد، فرض می‌کنیم T یک فضای اندازه‌پذیر با σ ـ جبر A است. هم‌چنین در بیشتر مواقع X را فضای متریک‌پذیر و جدایی‌پذیر فرض می‌کنیم. در ابتدا بعضی از مفاهیم مقدماتی وابسته به نگاشت‌های چندمقداری را تعریف می‌کنیم.

---

1) Spacek

۲. روابط اندازه‌پذیر و ارتباط بین تعریف‌های مختلف اندازه‌پذیری

نگاشت چندمقداری یا رابطهٔ $F : T \to X$ که در این مقاله به منظور اختصار گاهی آن را صرفاً نگاشت می‌خوانیم، زیرمجموعه‌ای از $T \times X$ است که آن را به‌عنوان تابعی از T به مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X، $P(X)$، در نظر می‌گیریم و تابع مجموعه ــ مقدار نیز می‌نامیم. مجموعهٔ $\{t \in T : F(t) \neq \emptyset\}$ را دامنهٔ F می‌نامیم و آن را با نماد $\mathrm{Dom}(F)$ نشان می‌دهیم. گوییم تابع مجموعه ــ مقدار $F : T \to X$ مقادیر بسته، کراندار، فشرده و محدب دارد اگر برای هر $t \in T$، $F(t) \subseteq X$ به‌ترتیب، بسته، کراندار، فشرده و محدب باشد. نمودار رابطهٔ $F : T \to X$ را با $Gr(F)$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Gr(F) = \{(t, x) \in T \times X : x \in F(t)\}$$

در واقع $Gr(F)$ با خود F برابر است، به همین دلیل اغلب وقتی بخواهیم روی ویژگی‌های F به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $T \times X$ تأکید کنیم، ترجیح می‌دهیم این ویژگی را دربارهٔ نمودار F بیان کنیم. به منظور بیان پیوستگی و اندازه‌پذیری توابع مجموعه ــ مقدار، نوعی تصویر وارون برای آن‌ها تعریف می‌شود از این قرار که اگر $B \subseteq X$، آن‌گاه $F^{-1}(B) = \{t \in T : F(t) \cap B \neq \emptyset\}$.

اکنون چند نوع مفهوم اندازه‌پذیری برای نگاشت‌های چندمقداری تعریف می‌کنیم. ویژگی‌ها و روابط بین این تعریف‌ها، اساس بحث ما در این بخش از مقاله است.

تعریف ۱.۲ رابطهٔ $F : T \to X$ اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ بسته (به‌ترتیب، باز، برل، فشرده) B از X، $F^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر باشد.

اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد و $F : Y \to X$ $(F \subseteq Y \times X)$، آن‌گاه گوییم F اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر و غیره) است در صورتی که Y به σ ــ جبر β از زیرمجموعه‌های برل Y مجهز شده باشد. هم‌چنین اگر $F : T \times Y \to X$ $(F \subseteq (T \times Y) \times X)$، آن‌گاه انواع اندازه‌پذیری F روی σ ــ جبر حاصلضربی $\mathcal{A} \otimes \beta$ بر $T \times Y$ تعریف می‌شود. می‌دانیم هر مجموعهٔ بسته، برل است. پس اگر $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد، به‌راحتی نتیجه می‌گیریم β ــ اندازه‌پذیری F، اندازه‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد. هم‌چنین می‌دانیم هر مجموعهٔ باز در یک فضای متریک، F_σ است. پس اگر X فضای متریک باشد، اندازه‌پذیری F، ضعیف ــ اندازه‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد. هم‌چنین اگر رابطهٔ F اندازه‌پذیر یا ضعیف ــ اندازه‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم دامنهٔ F اندازه‌پذیر است، زیرا X هم باز و هم بسته است. اثبات این مطالب و آنچه در ادامه می‌آوریم در [۱۹] وجود

دارد.

گزاره ۲.۲ گیریم J مجموعه‌ای منتهاشمارا و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشت چندمقداری باشد. در این‌صورت

الف) اگر هر F_n اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) باشد، آن‌گاه نگاشت $\bigcup\limits_{n\in J} F_n : T \to X$ تعریف شده به‌صورت $(\bigcup\limits_{n\in J} F_n)(t) = \bigcup\limits_{n\in J} F_n(t)$ نیز اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

ب) اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و هر F_n ضعیف ــ اندازه‌پذیر (اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) باشد، آن‌گاه نگاشت $\prod\limits_{n\in J} F_n : T \to X^J$ تعریف شده به‌صورت $(\prod\limits_{n\in J} F_n)(t) = \prod\limits_{n\in J} F_n(t)$ نیز ضعیف ــ اندازه‌پذیر (اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

اندازه‌پذیری اشتراک منتهاشمارا از روابط اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر و غیره) مشکل است. در این مورد در آینده‌ای نزدیک بحث خواهیم کرد. فعلاً به گزارهٔ زیر قناعت می‌کنیم.

گزاره ۳.۲ فرض کنیم $F : T \to X$ یک رابطهٔ اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) و Z زیرمجموعهٔ بسته (به‌ترتیب، باز، برل، فشرده) از X باشد، آن‌گاه نگاشت $F_Z : T \to X$ تعریف شده به‌صورت $F_Z(t) = F(t) \cap Z$ نیز اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

اندازه‌پذیری شمول و بستار نگاشت‌های چندمقداری اندازه‌پذیر از ویژگی‌های مهم آن‌ها است که در اثبات بسیاری از قضایای مربوط به این بحث به‌کار می‌آیند. در واقع اگر X یک زیرفضای Y باشد و برای هر $t \in T$، $F(t) \subseteq X$، آن‌گاه F به‌عنوان نگاشتی از T به X، (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر F به‌عنوان نگاشتی از T به Y، (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر باشد. یعنی اگر $i : X \hookrightarrow Y$ نگاشت شمول باشد، آن‌گاه $F : T \to X$ (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $i \circ F : T \to Y$ (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر باشد. هم‌چنین $F : T \to X$ ضعیف ــ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\overline{F} : T \to X$ که برای هر $t \in T$، به‌صورت $\overline{F}(t) = \overline{F(t)}$ تعریف می‌شود، ضعیف ــ اندازه‌پذیر باشد.

هیملبرگ در شروع کار خود، ارتباط میان مفاهیم مختلف اندازه‌پذیری را، به‌ویژه در مواردی که روابط مقادیر بسته دارند، مورد بررسی قرار داد و شرایطی را فراهم آورد تا اشتراک منتهاشمارا از روابط اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر باشد. یکی از نتایج مهمی که وی به‌دست آورد، این بود که تحت

افزودن شرط فشردگی به مقادیر یک رابطه، ضعیف ــ اندازه‌پذیری با اندازه‌پذیری هم‌ارز می‌شود. این نتیجه در قضیهٔ (۳.۱) از [۱۹] آمده است.

در ادامه، دو قضیه می‌آوریم که در روند اثبات بسیاری از قضیه‌های مربوط به اندازه‌پذیری روابط، نقش به‌سزایی دارند. فرض کنیم $F \subseteq T \times X$ یک نگاشت چندمقداری باشد. تصویر مجموعهٔ F روی T را با $P_T(F)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین فرض می‌کنیم $(T, \mathcal{A}_\mu, \widehat{\mu})$ یک توسیع کامل برای فضای اندازهٔ $(T, \mathcal{A}, \mu)$ باشد.

قضیه ۴.۲ اگر X یک فضای متریک کامل و جدایی‌پذیر و T فضای اندازه باشد و $F \subseteq T \times X$ نسبت به σ ــ جبر حاصلضربی $\mathcal{A}_\mu \otimes \beta$ اندازه‌پذیر باشد ($F \in \mathcal{A}_\mu \otimes \beta$)، آن‌گاه $P_T(F) \in \mathcal{A}_\mu$.

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک X را فضای لهستانی گوییم هرگاه جدایی‌پذیر و متریک‌پذیر و نسبت به متر خود کامل باشد.فضای لوزین آن است که متریک‌پذیر و تصویر پیوسته و دوسویی یک فضای لهستانی باشد و بالأخره فضای توپولوژیک X را یک فضای سوسلین گوییم هرگاه متریک‌پذیر و تصویر پیوستهٔ یک فضای لهستانی باشد.

قضیه ۵.۲ اگر T یک فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد به‌طوری که $F \in \mathcal{A} \otimes \beta$، آن‌گاه F، β ــ اندازه‌پذیر است.

اثبات قضیهٔ ۴.۲ در [۱۴] و قضیهٔ ۵.۲ در [۱۹] وجود دارد. این نتایج در اثبات و تعمیم قضایایی که از این پس می‌آیند، اهمیت دارند.

در بسیاری از نمونه‌ها، مفیدتر است که اندازه‌پذیری نگاشت چندمقداری $F : T \to X$ را برحسب $\mathcal{A} \otimes \beta$ ــ اندازه‌پذیری $Gr(F)$ (برای نمونه در کارهای اومان [۱] و دبریو [۱۴]) یا برحسب اندازه‌پذیری تابع $t \to d(x, F(t))$ بیان کنیم. در پایان این بخش، ارتباط میان مفاهیم مختلف اندازه‌پذیری برای نگاشت‌های با مقادیر بسته را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم. این قضیهٔ ابزار بسیار مفیدی برای اهداف بعدی ما است. یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک X، σ ــ فشرده است اگر برابر با اجتماع تعداد متناهاشمارا از مجموعه‌های فشرده باشد.

قضیه ۶.۲ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی با مقادیر بسته باشد. احکام زیر را در نظر بگیرید:

الف) F، β ــ اندازه‌پذیر است؛

ب) F، اندازه‌پذیر است؛

پ) F، ضعیف ـ اندازه‌پذیر است؛

ت) F، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است؛

ث) برای هر $x \in X$، تابع $t \to d(x, F(t))$ نسبت به t اندازه‌پذیر است؛

ج) $Gr(F)$ اندازه‌پذیر حاصلضربی است، یعنی $Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(X)$.

در این صورت داریم

یک) الف $\Leftarrow$ ب $\Leftarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ث $\Leftarrow$ ت و پ $\Leftarrow$ ج.

دو) اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه

الف $\Leftarrow$ ب $\Leftrightarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ت $\Leftrightarrow$ ث $\Leftarrow$ ج.

سه) اگر T فضای اندازه‌ی کامل و X فضای سوسلین باشد، آن‌گاه الف $\Leftrightarrow$ ب $\Leftrightarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ث $\Leftrightarrow$ ج $\Leftarrow$ ت.

اگر نگاشت، مقادیر بسته نداشته باشد، قسمت (ج) در قضیهٔ فوق را با این گزاره جایگزین می‌کنیم که «$Gr(\overline{F})$، $\mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(X)$ ـ اندازه‌پذیر است.»

۳. اشتراک، متمم و مرز روابط اندازه‌پذیر، توسیع روابط اندازه‌پذیر

فرض کنیم برای هر n در یک مجموعهٔ منتهاشمارای J، $F_n : T \to X$ نگاشتی اندازه‌پذیر (یا شاید فقط ضعیف ـ اندازه‌پذیر) با مقادیر بسته باشد و $F : T \to X$ را به‌صورت $F(t) = \bigcap\limits_{n \in J} F_n(t)$ تعریف کنیم. اگر T اندازهٔ σ ـ متناهی کامل داشته باشد و X فضای سوسلین باشد، آن‌گاه اندازه‌پذیری F را بلافاصله از بند (سه) در قضیهٔ ۶.۲ نتیجه می‌گیریم. حتی اگر اندازه روی T کامل نباشد و X فقط فضای متریک جدایی‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم F نمودار اندازه‌پذیر دارد ($Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \beta$). برای اندازه‌پذیری F در این مورد، قضیهٔ زیر از هیملبرگ را داریم.

قضیه ۱.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی ضعیف ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد. اگر هم‌چنین فرض کنیم برای هر $t \in T$، $n \in J$ موجود است که $F_n(t)$ فشرده است، آن‌گاه $F = \bigcap\limits_{n \in J} F_n$ اندازه‌پذیر است.

وقتی دربارهٔ یافتن جواب‌های معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا بحث می‌کنیم، قضیهٔ ۱.۳ یکی از مهم‌ترین ابزارهاست. از این قضیه نتیجه‌های مفیدی به‌دست می‌آید. اگر در قضیهٔ فوق، X را فضای متریک‌پذیر σ ـ فشرده فرض کنیم و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی

(ضعیف ـ) اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n\in J} F_n$ اندازه‌پذیر است و یا اگر فرض کنیم X فضای متریک‌پذیر و جدایی‌پذیر و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم $F = \bigcap_{n\in J} F_n$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است.

قضیه ۲.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد. نگاشت $G : T \to X$ که برای هر $t \in T$ به‌صورت $G(t) = X \setminus F(t)$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر است.

در حقیقت به‌جای اندازه‌پذیری F، از این فرض ضعیف‌تر استفاده می‌کنیم که برای هر $x \in X$، $F^{-1}(\{x\})$ اندازه‌پذیر است و نشان می‌دهیم برای هر زیرمجموعهٔ B از X، $G^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. چنین چیزی ممکن است چون G مقادیر باز دارد. بگذارید اثبات این قضیه را به‌عنوان نمونه‌ای مفید بیان کنیم. فرض کنیم $B \subseteq X$ و A زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر از B باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} G^{-1}(B) &= \{t \in T : (X \setminus F(t)) \cap B \neq \emptyset\} \\ &= T \setminus \{t \in T : B \subseteq F(t)\} = T \setminus \{t \in T : A \subseteq F(t)\} \\ &= T \setminus \bigcap_{a\in A} \{t \in T : a \in F(t)\} = T \setminus \bigcap_{a \in A} F^{-1}(\{a\}) \end{aligned}$$

بنابراین $G^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر است.

با استفاده از روشی که در اینجا به‌کار بردیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F, H : T \to X$ نگاشت‌های اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشند، آن‌گاه برای هر $t \in T$، $t \to H(t) \setminus F(t)$ نگاشتی اندازه‌پذیر تعریف می‌کند. با فرض‌های قوی‌تر، اگر T فضای اندازهٔ کامل و X فضای سوسلین باشد، با استفاده از قضیهٔ ۶.۲، به‌راحتی می‌توانیم قضیهٔ ۲.۳ و نتیجه‌ای که از آن گرفتیم را بررسی کنیم، زیرا $Gr(G) = (Gr(F))^c$ و $Gr(H \setminus F) = Gr(H) \cap (Gr(F))^c$.

فرصت خوبی است تا با استفاده از نتایجی که از اندازه‌پذیری اشتراک منتهاشمارا و متمم نگاشت‌های اندازه‌پذیر به‌دست آوردیم، دربارهٔ مرز روابط اندازه‌پذیر سخن بگوییم. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. مرز مجموعهٔ A که با $Bd(A)$ نشان می‌دهیم عبارت است از $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

قضیه ۳.۳ فرض کنیم $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد. نگاشت $BdF : T \to X$ که به‌صورت $t \to BdF(t)$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و F اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده باشد؛

ب) X یک فضای متریک σ ـ فشرده و F اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد؛

پ) T فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و $Gr(F)$، $\mathcal{A} \otimes \beta$ ـ اندازه‌پذیر باشد؛

ت) T فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و F اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد.

از قضیهٔ فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه نگاشت BdF، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است.

هیملبرگ و ون‌ولک [۲۳] تعدادی از نتایجی را که تا این‌جا گردآوری شده است با تغییر و یا کاهش بعضی فرض‌ها، به‌ویژه حذف فرض جدایی‌پذیریِ X توسیع دادند و مثال‌های نقضی آوردند تا برجستگی بعضی نتایج و محدودیت‌های طبیعی را که در برخورد با نگاشت‌های اندازه‌پذیر و ویژگی‌هایشان وجود دارد، نشان دهند. ما مثال‌های دیگری نیز جمع‌آوری کرده‌ایم که در ادامه مشاهده خواهید کرد. قضیهٔ زیر در حالتی که X فضای متریک جدایی‌پذیر است در [۱۹] اثبات شده است.

قضیه ۴.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک و $F : T \to X$ $(F \subseteq T \times X)$ نگاشتی با مقادیر بسته باشد. در این صورت اندازه‌پذیری $F \Leftarrow$ ضعیف ـ اندازه‌پذیری $F \Leftarrow \mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیری F.

قضیهٔ بعد شرایط کافی برای هم‌ارز بودن اندازه‌پذیری و ضعیف ـ اندازه‌پذیری F را مشروط بر این که T و X هر دو فضاهای برل باشند، به‌دست می‌دهد. فضای برل، زیرمجموعهٔ برل یک فضای لهستانی است. اثبات این قضیه به نتیجه‌ای از براون و پوروس [۱۱] بستگی دارد با این مضمون که اگر T و X دو فضای لهستانی و $E \subseteq T \times X$ یک مجموعهٔ برل باشد که برای هر $t \in T$، مجموعهٔ $E(t) = \{x \in X : (t, x) \in E\}$، σ ـ فشرده است، آن‌گاه تصویر E روی T یک مجموعهٔ برل است.

قضیه ۵.۳ فرض کنیم T و X فضاهای برل باشند و $F : T \to X$ $(F \subseteq T \times X)$ یک نگاشت چندمقداری باشد که برای هر $t \in T$، $F(t)$ بسته و σ ـ فشرده است. در این صورت F اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر ضعیف ـ اندازه‌پذیر باشد.

هم‌ارز بودنِ اندازه‌پذیری و ضعیف ـ اندازه‌پذیری $F \subseteq T \times X$، قبلاً در حالتی که T فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک است و F مقادیر فشرده دارد و یا در حالتی که X فضای متریک‌پذیر σ ـ فشرده است و F مقادیر بسته دارد، در قضیهٔ ٦.۲ آورده شد. داوئر و ون‌ولک [۱۳] مثالی از یک نگاشت چندمقداری F با $F(t)$ی σ ـ فشرده امّا نه بسته ارائه داده‌اند که ضعیف ـ اندازه‌پذیر

است امّا اندازه‌پذیر نیست. این مثال نشان می‌دهد که شرط بسته بودن مقادیر F برای هم‌ارز بودن اندازه‌پذیری و ضعیف ــ اندازه‌پذیری الزامی است. این مثال را شرح می‌دهیم.

مثال ۶.۳ فرض کنیم $T = X = I = [0, 1]$ و $\mathcal{A}$، σ ــ جبر زیرمجموعه‌های لبگ ــ اندازه‌پذیر در I باشد. فرض کنیم Q و Q' دو زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر و جدا از هم در I باشند. هم‌چنین فرض کنیم مجموعهٔ $S \subseteq I$ لبگ ــ اندازه‌پذیر نباشد. تابع مجموعه ــ مقدار $F : I \to I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = \begin{cases} Q & t \in S \\ Q' & t \in I \setminus S \end{cases}$$

به‌وضوح F ضعیف ــ اندازه‌پذیر است، چون برای هر زیرمجموعهٔ باز $U \subseteq X$، $F^{-1}(U) = T$ یا $F^{-1}(U) = \emptyset$. امّا F اندازه‌پذیر نیست، زیرا برای هر $a \in Q$، داریم $F^{-1}(\{a\}) = S$ که طبق فرض در I اندازه‌پذیر نیست. توجه کنید که F مقادیر بسته ندارد. در بخش بعد نشان می‌دهیم نگاشت چندمقداری در این مثال، انتخاب لبگ ــ اندازه‌پذیر ندارد.

با توجه به قضیهٔ قبل، می‌توانیم گزارهٔ زیر را نتیجه بگیریم.

گزاره ۷.۳ فرض کنیم T و X فضاهای برل و $F \subseteq T \times X$ یک نگاشت چندمقداری باشد که برای هر $t \in T$، $F(t)$ مجموعه‌ای σ ــ فشرده است. اگر F یک مجموعهٔ برل در $T \times X$ باشد، آن‌گاه F نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر است.

باز هم مثالی از داوئر و ون‌ولک می‌آوریم که نشان می‌دهد عکس گزارهٔ فوق برقرار نیست. در واقع اگر تابع مجموعه ــ مقدار مقادیر بسته نداشته باشد، اندازه‌پذیری (به‌ویژه ضعیف ــ اندازه‌پذیری) لزوماً نمودار ــ اندازه‌پذیری تابع مجموعه ــ مقدار را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۸.۳ فرض کنیم $I = [0, 1]$ و S یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر I باشد. تابع مجموعه ــ مقدار $F : I \to I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = \begin{cases} I \setminus \{t\} & t \in S \\ I & t \in I \setminus S \end{cases}$$

برای این‌که نشان دهیم F اندازه‌پذیر است، کافی است نشان دهیم برای هر زیرمجموعهٔ باز A از I، مجموعهٔ $F^{+}(A) = \{t \in I : F(t) \subseteq A\}$ اندازه‌پذیر است، چون $F^{+}(A) = (F^{-1}(A^c))^c$. اگر $I \subseteq A$، آن‌گاه $F^{+}(A) = I$ و اگر $I \not\subseteq A$، آن‌گاه $F^{+}(A) = \emptyset$ یا $F^{+}(A) = \{t\}$. پس F اندازه‌پذیر است. حال فرض کنیم Δ قطر $I \times I$ باشد ($\Delta = \{(t, x) \in I \times I : t = x\}$). اگر F نمودار اندازه‌پذیر داشته باشد، آن‌گاه $Gr(F) \cap \Delta$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از $I \times I$ است. پس

$P_I(Gr(F)\cap\Delta)$ لبگ ــ اندازه‌پذیر است. امّا $P_I(Gr(F)\cap\Delta)=I\setminus S$ که طبق فرض اندازه‌پذیر نیست. بنابراین F نمودار اندازه‌پذیر ندارد.

در مثال‌هایی که در ادامه می‌آوریم، $T=[0,1]$ به σ ــ جبر برل مجهز شده و Z مجموعهٔ اعداد گنگ است. قرار می‌دهیم $X=T\times Z$ و نگاشت $P_T: X\to T$ را برای هر $(t,z)\in X$ به‌صورت $P_T(t,z)=t$ تعریف می‌کنیم (نگاشت تصویر روی T). فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ بسته از X باشد به‌طوری که $P_T(B)$ برل نیست و $Z\neq P_Z(B)$ (به‌یاد می‌آوریم که Z یک فضای لهستانی است). مثالی می‌آوریم از یک تابع مجموعه ــ مقدار $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر که ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست. این مثال نشان می‌دهد در قضیهٔ ۶.۲ (یک) و قضیهٔ ۴.۳، عکس نتیجهٔ دوم بدون فرض‌های اضافی، برقرار نیست. در این مثال، به قضیه‌ای از کونوگوی ــ نویکوف [۲۴] نیاز داریم از این قرار که

قضیه ۹.۳ اگر T زیرمجموعهٔ برلِ بازهٔ $[0,1]$، X فضای متریک σ ــ فشرده و $F:T\to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر بسته باشد و $Gr(F)\in\mathfrak{B}(T\times X)$، آن‌گاه $P_T(Gr(F))\in\mathfrak{B}(T)$.

مثال ۱۰.۳ $z_0\in Z\setminus P_Z(B)$ را انتخاب می‌کنیم. نگاشت چندمقداری $F\subseteq T\times Z$ را برای هر $t\in T$، به‌صورت $F(t)=B(t)\cup\{z_0\}$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت F نمودار بسته دارد چون $Gr(F)=Gr(B)\cup\{z_0\}$. هم‌چنین F، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشردهٔ Z باشد. در این صورت $F^{-1}(K)=P_T((T\times K)\cap F)$ که طبق قضیهٔ ۹.۳، یک مجموعهٔ برل است. پس $F^{-1}(K)$ اندازه‌پذیر است. امّا F ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست، زیرا اگر فرض کنیم G یک همسایگی $P_Z(B)$ باشد که شامل z_0 نیست، آن‌گاه $F^{-1}(G)=P_T(B)$ که طبق توضیحات قبل از مثال، برل نیست.

اکنون مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد برای هم‌ارز بودنِ اندازه‌پذیری و ضعیف ــ اندازه‌پذیری تابع مجموعه ــ مقدار $F:T\to X$ با مقادیر بسته، شرط σ ــ فشردگی برای X الزامی است. این مثال توسط کانیوسکی [۴۰] ارائه شده است.

مثال ۱۱.۳ بر اساس فرض‌های مثال قبل، نگاشت $F_*\subseteq T\times X$ را برای هر $t\in T$، به‌صورت $F_*(t)=P_T^{-1}(\{t\})$ تعریف می‌کنیم. به‌وضوح F ضعیف ــ اندازه‌پذیر است، چون P_T یک نگاشت باز است. امّا F_* اندازه‌پذیر نیست، چون $F_*^{-1}(B)=P_T(B)$ که یک مجموعهٔ برل نیست. در این‌جا $X=T\times Z$ یک فضای لهستانی است که σ ــ فشرده نیست.

در ادامه، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد اشتراک دو تابع مجموعه ــ مقدار ضعیف ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته، لزوماً ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست. برای توابع مجموعه ــ مقدار $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر

وضعیت بهتر است. در این مورد، با حذف فرض جدایی‌پذیری از X در نتایج قبلی، اگر X یک فضای متریک و برای هر n در یک مجموعهٔ منتهاشمارای J، $F_n \subseteq T \times X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه $F = \bigcap\limits_{n\in J} F_n$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است و به‌عنوان کاربردی از آن می‌توان نشان داد مرز یک تابع مجموعه ـ مقدار $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر X یک فضای متریک و $F \subseteq T \times X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده باشد، آن‌گاه رابطهٔ $BdF \subseteq T \times X$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است. این نتایج و اثبات آن‌ها در [۲۳] وجود دارد.

مثال ۱۲.۳ B را زیرمجموعه‌ای بسته از X فرض می‌کنیم و $F_* \subseteq T \times X$ را همانند مثال قبل در نظر می‌گیریم. گیریم $x_\circ \in X \setminus B$ و $F, G : T \to X$ را به‌صورت $F(t) = F_*(t) \cup \{x_\circ\}$ و $G(t) = B \cup \{x_\circ\}$ برای هر $t \in T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت F ضعیف ـ اندازه‌پذیر و G پیوسته است و $\mathrm{Dom}(F \cap G) = T$. امّا $F \cap G$ ضعیف ـ اندازه‌پذیر نیست، زیرا اگر فرض کنیم $U \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای باز شامل B باشد که شامل $x_\circ$ نیست، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(F\cap G)^{-1}(U) &= \{t \in T : F(t) \cap G(t) \cap U \neq \emptyset\}\\ &= \{t \in T : F_*(t) \cap B \neq \emptyset\}\\ &= F_*^{-1}(B) = P_T(B)\end{aligned}$$

که طبق فرض، مجموعهٔ برل نیست.

۴. قضایای انتخاب و تابع ضمنی

یکی از اصلی‌ترین اهداف ما در شناخت نگاشت‌های چندمقداری، بررسی وجود انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای آن‌ها است. ابتدا قضایای اساسی انتخاب را آورده و شرط لازم و کافی برای وجود یک خانوادهٔ چگال از انتخاب‌های اندازه‌پذیر را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اندازه‌پذیری توابع با دو متغیر، با فرض اندازه‌پذیری روی مؤلفهٔ اول و شرط پیوستگی روی مؤلفهٔ دوم، نگاشت‌های اندازه‌پذیری را که از این‌گونه توابع به‌دست می‌آیند مطالعه می‌کنیم و در ادامه، قضایای تابع ضمنی از نوع اول را با استفاده از نتایج قبل به‌دست می‌آوریم. قضایای اساسی که وجود انتخاب‌های اندازه‌پذیر را نتیجه می‌دهند، قضایای انتخاب کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی و بسط اومان از قضیهٔ انتخاب اندازه‌پذیر نیومن است.

تابع تک‌مقداری $f : T \to X$ را یک‌انتخاب برای تابع مجموعه ـ مقدار $F : T \to X$ نامیم اگر برای هر $t \in T$، $f(t) \in F(t)$. توجه می‌کنیم که مفاهیم اندازه‌پذیری، ضعیف ـ اندازه‌پذیری و

β ــ اندازه‌پذیری، وقتی در مورد توابع تک‌مقداری به‌کار روند، دو به دو هم‌ارز هستند.

قضیه ۱.۴ (**کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی**) فرض کنیم $(T, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک جدایی‌پذیر و کامل باشد. اگر $F : T \to X$ تابع مجموعه ــ مقدار ضعیف ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه F دارای انتخاب اندازه‌پذیر (معادلاً ضعیف ــ اندازه‌پذیر) است.

این قضیه با شرط قوی‌تر اندازه‌پذیری برای نگاشت چندمقداری F نیز برقرار است، زیرا هر مجموعهٔ باز G در فضای متریک X، مجموعه‌ای F_σ است، یعنی $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ که در آن برای هر $n \geq 1$، K_n بسته است. از این‌رو $F^{-1}(G) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F^{-1}(K_n)$. بلافاصله می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم.

قضیه ۲.۴ فرض کنیم $(T, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک جدایی‌پذیر باشد. اگر $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر) با مقادیر کامل باشد، آن‌گاه F انتخاب اندازه‌پذیر دارد.

قضیهٔ فوق یک تغییر جزئی از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی است. آن‌ها فرض کردند X لهستانی و F مقادیر بسته داشته باشد. قضیهٔ ۲.۴، از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی با نشاندن X در یک فضای کامل نتیجه می‌شود. از قضیهٔ ۲.۴، برای تعمیم نتیجه‌ای از کاستینگ[1] دربارهٔ خانوادهٔ چگال از انتخاب‌ها که در ادامه آورده می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۳.۴ (**اومان**) فرض کنیم T یک فضای اندازهٔ σ ــ متناهی و X زیرمجموعهٔ برل از یک فضای لهستانی باشد. اگر $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار با نمودار اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر $f : T \to X$ وجود دارد به‌طوری که $f(t) \in F(t)$ برای هر $t \in T$، به جز tهایی در یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر.

جالب است که بدانیم قضیهٔ ۳.۴ از قضیهٔ ۲.۴ نتیجه می‌شود، با این فرض که $T = [0, 1]$، $\mathcal{A}$ عبارت باشد از σ ــ جبر زیرمجموعه‌های برل T، μ اندازهٔ لبگ، X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار با نمودار سوسلین باشد. شرح کامل‌تر این مطلب در [۱۹] یافت می‌شود. هیملبرگ قضیهٔ اومان را در حالتی که X فضای سوسلین باشد، تعمیم داد. این تعمیم و اثبات آن نیز در [۱۹] موجود است.

---

1) C. Castaing

حال تعمیم زیر را از قضیه‌ای از کاستینگ بیان می‌کنیم. اگر U یک خانواده از توابع از T به X باشد، آن‌گاه $U(t)$ مجموعهٔ $\{u(t) : u \in U\}$ را برای هر $t \in T$، مشخص می‌کند.

قضیه ۴.۴ فرض کنیم X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر کامل باشد، آن‌گاه F ضعیف ـ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر خانوادهٔ شمارش‌پذیر U از انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای F وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $F(t) = \overline{U(t)}$. اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه کافی است F مقادیر بسته داشته باشد.

قضیهٔ فوق به‌طور مؤثری در اثبات وجود جواب‌های معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا که در بخش ٦ به ذکر آن می‌پردازیم، به‌کار می‌آید.

اکنون آماده‌ایم که قضایای تابع ضمنی نوع اول را که توسط فیلیپف اثبات شده است، بیان کنیم. مسألهٔ تابع ضمنی نوع اول به این صورت است که یک تابع $f : T \times X \to Y$، نگاشت چندمقداری $F \subseteq T \times X$ و تابع $g : T \to Y$ مفروض‌اند به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\{t\} \times F(t))$. تحت چه شرایطی تابع اندازه‌پذیر $r : T \to X$ وجود دارد که $r(t) \in F(t)$ و $g(t) = f(t, r(t))$؟

در این‌جا چند نمونه از قضایایی را که به این سؤال پاسخ می‌دهند، می‌آوریم.

قضیه ۵.۴ فرض کنیم X و Y فضاهای متریک جدایی‌پذیرند و $f : T \times X \to Y$ تابعی است که برای هر $x \in X$، نسبت به $t \in T$ اندازه‌پذیر و برای هر $t \in T$، نسبت به $x \in X$ پیوسته است و $\Gamma : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده و $g : T \to Y$ تابعی اندازه‌پذیر است که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\{t\} \times \Gamma(t))$. در این صورت انتخاب اندازه‌پذیر $\gamma : T \to X$ برای Γ وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) = f(t, \gamma(t))$. اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه فقط نیاز داریم که Γ مقادیر بسته داشته باشد.

وقتی روی وجود جواب برای معادلات تصادفی در فضای باناخ متناهی ـ بعد بحث می‌کنیم، قضیهٔ ۵.۴ نیازمان را به‌خوبی برطرف می‌کند. اگر در قضیهٔ ۵.۴، فرض‌های روی T و X را قوی‌تر کنیم، یعنی T را فضای اندازه σ ـ متناهی و X را فضای سوسلین در نظر بگیریم، آن‌گاه نیازی نیست Γ مقادیر بسته داشته باشد. در این صورت اگر فرض کنیم Γ نمودار اندازه‌پذیر دارد، حکم قضیهٔ فوق برای هر $t \in T$، به‌جز Tهایی که در یک زیرمجموعهٔ اندازه ـ صفر قرار دارند، به‌دست می‌آید. این نتیجه را می‌توانید در قضیهٔ (۷.۲) از [۱۹] مشاهده کنید.

اگر تابع f تنها به x بستگی داشته باشد، قضایای تابع ضمنی توسط مک‌شین، وارفیلد و هیملبرگ اثبات شده‌اند. در این‌جا نمونه‌ای از آن‌ها را ارائه می‌کنیم. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه

می‌توانید به [۱۹] بخش ۷ و [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۶.۴ فرض کنیم T فضای اندازهٔ σ ـ متناهی، X فضای سوسلین، Y فضای متریک جدایی‌پذیر، $f : X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر، $\Gamma : T \to X$ نگاشت چندمقداری با نمودار اندازه‌پذیر و $g : T \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\Gamma(t))$. در این صورت تابع اندازه‌پذیر $\gamma : T \to X$ وجود دارد که برای تقریباً هر $t \in T$، $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ و $g(t) = f(\gamma(t))$.

در انتهای این بخش، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد بسته بودن مقادیر نگاشت چندمقداری در قضایای انتخاب، یک شرط اساسی است و قابل حذف نیست.

مثال ۷.۴ نگاشت چندمقداری تعریف شده در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم F انتخاب اندازه‌پذیر ندارد. تابع $h : T \to X$ را به‌صورت

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in Q \\ 0 & t \in Q^c \\ \frac{1}{2} & t \in I \backslash (Q \cup Q^c) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در واقع، $F = h^{-1} \circ \chi_S$ که در آن χ_S تابع نشانگر مجموعهٔ S است. اگر $f : T \to X$ یک انتخاب اندازه‌پذیر برای F باشد، آن‌گاه $h \circ f = \chi_S$. چون $Q = h^{-1}(\{1\})$ مجموعهٔ برل است، پس $f^{-1}(h^{-1}(\{1\})) \in \mathcal{A}$. از طرفی $f^{-1}(h^{-1}(\{1\})) = \chi_S^{-1}(\{1\}) = S \notin \mathcal{A}$ و این یک تناقض است.

۵. توسیع انتخاب‌های اندازه‌پذیر و نگاشت در فضاهای خطی

هیملبرگ [۱۹] انتخاب‌های جزئاً تعریف شدهٔ اندازه‌پذیر برای یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر را به انتخاب‌های اندازه‌پذیر تعریف شده روی تمام T توسیع داد. فرض کنیم S زیرمجموعهٔ T (T فضای اندازه‌پذیر با σ ـ جبر $\mathcal{A}$) باشد. تابع $f : S \to X$ را اندازه‌پذیر گوییم اگر f نسبت به σ ـ جبر اثر $\mathcal{A}_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{A}\}$ روی S اندازه‌پذیر باشد. همیشه می‌توانیم چنین تابعی را به یک انتخاب اندازه‌پذیر برای یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر کامل $F : T \to X$ توسیع دهیم، مشروط بر این که X فضای متریک جدایی‌پذیر باشد و برای هر $t \in S$، $f(t) \in F(t)$. توجه کنید که نیازی نیست $S \in \mathcal{A}$.

قضیه ۱.۵ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر، $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر کامل و $f : S \to X$ تابعی اندازه‌پذیر باشد به‌طوری که برای هر $t \in S$،

$f(t) \in F(t)$، آن‌گاه انتخاب اندازه‌پذیر $g : T \to X$ برای F وجود دارد که f را توسیع می‌دهد.

اگر فرض کنیم X یک فضای لوزین و F نگاشت چندمقداری β ـ اندازه‌پذیر باشد، قضیهٔ قبل برای F با مقادیر بسته نیز درست است. توضیحات بیشتر در [٢٣] یافت می‌شود. به‌عنوان کاربردی از نتایج کلی بخش‌های گذشته، نمونه‌ای دربارهٔ نگاشت‌های چندمقداری با مقادیر در فضای خطی موضعاً محدب ارائه می‌دهیم. در این زمینه به بحث کامل نمی‌پردازیم و برای مطالعهٔ بیشتر می‌توانید به [٢۴] مراجعه کنید. یادآوری می‌کنیم که فضای فرشه E عبارت است از یک فضای خطی موضعاً محدب که توپولوژی آن توسط متریک تحت انتقال پایای d تولید شده باشد به‌طوری که (E, d) کامل است.

قضیه ٢.۵ اگر X یک فضای فرشهٔ جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی ضعیف ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه نگاشت‌های چندمقداری coF و $\overline{co}F$ تعریف شده به‌صورت $t \to coF(t)$ و $t \to \overline{co}F(t)$ نیز ضعیف ـ اندازه‌پذیر هستند (اگر فرض کنیم هر $F(t)$ کامل باشد، آن‌گاه فقط نیاز داریم که X فضای متریک جدایی‌پذیر موضعاً محدب باشد).

قضیه ٣.۵ فرض کنیم T فضای اندازه‌پذیر کامل، X فضای فرشهٔ جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر محدب و فشرده باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

الف) F اندازه‌پذیر است؛

ب) برای هر تابعک خطی پیوسته z' روی X، تابع $M_{z'} : T \to \mathbb{R}$ با تعریف $M_{z'}(t) = \max_{x \in F(t)} \langle z', x\rangle$ اندازه‌پذیر است.

٦. معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ

با استفاده از آنچه دربارهٔ نگاشت‌های چندمقداری و انتخاب‌های اندازه‌پذیر به‌دست آمد، ایتوه [٢٦] توانست به بررسی معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ بپردازد. وی در اثبات تمام قضایایی که از این پس می‌آید، از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری استفاده کرد تا وجود جواب برای معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا را به‌دست آورد. برای بیان این نتایج، ابتدا مقدمات مورد نیازمان را فراهم می‌آوریم. در این بخش، فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای باناخ (حقیقی یا مختلط) و X^* فضای دوگان آن باشد. فرض کنیم $\langle .,. \rangle$ جفت دوگانی بین X و X^* باشد. برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ قرار می‌دهیم $(x^*, x) = \langle x^*, x\rangle$ اگر X فضای باناخ حقیقی باشد و $(x^*, x) = \Re\langle x^*, x\rangle$ اگر X مختلط

باشد که در آن $\Re z$ قسمت حقیقی عدد مختلط z است. اگر X فضای هیلبرت باشد، $\langle.,.\rangle$ همان ضرب داخلی روی X است. در این‌جا، نگاشت چندمقداری $T:\Omega\to X$ را (w) ــ اندازه‌پذیر گوییم اگر برای هر زیرمجموعهٔ (ضعیف ــ) بستهٔ $C\subseteq X$، $T^{-1}(C)=\{\omega\in\Omega: T(\omega)\cap C\neq\emptyset\}\in\mathcal{A}$. نگاشت (w) ــ اندازه‌پذیر $\xi:\Omega\to X$ یک انتخاب (w) ــ اندازه‌پذیر برای نگاشت چندمقداری (w) ــ اندازه‌پذیر T است اگر برای هر $\omega\in\Omega$، $\xi(\omega)\in T(\omega)$. مجموعهٔ نگاشت‌های اندازه‌پذیر $\xi:\Omega\to X$ را که $\sup\{\|\xi(\omega)\|:\omega\in\Omega\}<\infty$ با $B(\Omega,X)$ نشان می‌دهیم.

نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ را یکنوا گوییم اگر برای هر $x,y\in D$، $(Fx-Fy,x-y)\geq 0$ و آن را کراندار گوییم اگر برای هر $B\subseteq D$ کراندار، مجموعهٔ $F(B)\subseteq X^*$ کراندار باشد. اکنون چند نوع پیوستگی برای نگاشت‌های تک‌مقداری با مقادیر در X^* تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۶ نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ را نیم‌پیوسته گوییم اگر برای هر $x\in D$ و $y\in X$ که $x+t_ny\in D$ و $t_n>0$ $(n\geq 1)$، $F(x+t_ny)\rightharpoonup F(x)$ وقتی $t_n\to 0$.

تعریف ۲.۶ نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ ضعیف‌پیوسته نامیده می‌شود اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq D$ و $x_n\to x\in D$ نتیجه دهد $Fx_n\rightharpoonup Fx$ وقتی $n\to\infty$.

تعریف ۳.۶ نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ را کاملاً پیوسته گوییم اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq D$ و $x_n\rightharpoonup x\in D$ نتیجه دهد $Fx_n\to Fx$ وقتی $n\to\infty$.

یادآوری می‌کنیم که در فضای متریک X، مجموعهٔ $A\subseteq X$ فشردهٔ نسبی است اگر $\overline{A}$ فشرده باشد. معادلاً هر دنباله از اعضای A دارای زیردنبالهٔ همگرا باشد.

تعریف ۴.۶ نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ را فشرده گوییم اگر مجموعه‌های کراندار را به‌توی مجموعه‌های فشرده نسبی بنشاند و پیوسته باشد.

تعریف ۵.۶ نگاشت $F:D\subseteq X\to X^*$ را موضعاً کراندار در $x\in D$ گوییم اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq D$ و $x_n\to x\in D$ نتیجه دهد دنبالهٔ $\{Fx_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که یک تابع ضعیف‌پیوسته، نیم‌پیوسته و موضعاً کراندار است. کاتو [۳۱] با قرار دادن فرض‌های اضافی روی دامنهٔ تابع، نشان داد ضعیف‌پیوستگی با نیم‌پیوستگی و موضعاً کرانداری هم‌ارز می‌شود. هم‌چنین وی با فرض متناهی ــ بعد بودن X نشان داد می‌توان شرط موضعاً کرانداری را حذف کرد، یعنی در این صورت، تابع پیوسته است اگر و تنها اگر نیم‌پیوسته باشد. نتایجی که کاتو به‌دست آورده در بسیاری از قضایای این بخش، در مسیر یافتن جواب‌ها

کارگشاست. حال مهم‌ترین ابزارهای ادامهٔ کار یعنی عملگر تصادفی و از پایین کرانداری یک عملگر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۶ نگاشت $F : \Omega \times D \to X^*$ را عملگر تصادفی گوییم هرگاه برای هر $x \in D$، تابع $F(.)x = F(\,.\,, x) : \Omega \to X^*$ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۷.۶ عملگر تصادفی $F : \Omega \times D \to X^*$ را از پایین کراندار گوییم اگر تابع $c : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Omega$ و $x \in D$، $(F(\omega)x, x) \geq c(\|x\|)\|x\|$ و $c(r) \to \infty$ وقتی $r \to \infty$.

تعریف ۸.۶ عملگر تصادفی $F : \Omega \times D \to X^*$ را پیوسته (نیمه‌پیوسته، یکنوا و غیره) گوییم هرگاه برای هر $\omega \in \Omega$، تابع $F(\omega)(.) = F(\omega\,, .) : D \to X^*$ پیوسته (نیمه‌پیوسته، یکنوا و غیره) باشد.

با فراهم آمدن مقدمات لازم، وجود جواب برای معادلات تصادفی با عملگرهای تصادفی (شبه) یکنوا را در فضای باناخ حقیقی بررسی می‌کنیم. برای شروع، روی یک معادلهٔ تصادفی در فضای باناخ متناهی ــ بعد بحث می‌کنیم. در اثبات گزارهٔ زیر، به‌طور مؤثری از قضیهٔ ۵.۴ استفاده می‌شود. اثبات آن‌ها در [۲۶] وجود دارد.

گزاره ۹.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ متناهی ــ بعد و $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی پیوسته و از پایین کراندار و η عضوی از $B(\Omega, X^*)$ باشد. آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

به‌طور خلاصه، روند اثبات گزارهٔ فوق به این شکل است که ابتدا با توجه به از پایین کراندار بودن F، جواب تعیّنی برای معادله در یک مجموعهٔ فشرده می‌یابیم. سپس با تعریف یک نگاشت چندمقداری با مقادیر فشرده و استفاده از قضیهٔ ۵.۴ به جواب مطلوب برای معادله دست می‌یابیم. از لم زیر در اثبات قضایای مربوط به وجود جواب برای معادلات عملگری در فضاهای باناخ، مکرر استفاده می‌شود. این لم، جدای از کاربردهای آن، قضیهٔ وجودی جالبی به‌شمار می‌آید [۶].

لم ۱۰.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ و F نگاشت نیمه‌پیوسته از زیرمجموعهٔ خطی چگال D از X به‌توی X^* باشد. اگر $x_\circ \in D$ و $y_\circ \in X^*$ داده شده باشند و برای هر $x \in D$، داشته باشیم $(Fx - y_\circ, x - x_\circ) \geq \circ$، آن‌گاه $Fx_\circ = y_\circ$.

تعریف ۱۱.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ و F یک نگاشت از X به‌توی X^* باشد. گوییم F شبه‌یکنوا است هرگاه برای هر $x \in X$، $Fx = S(x, x)$ که $S : X \times X \to X^*$ تابعی با ویژگی‌های

زیر است:

الف) برای هر $y \in X$، $S(.,y)$ نیمه‌پیوسته و یکنواست؛

ب) برای هر $x \in X$، $S(x,.)$ کاملاً پیوسته است.

نتیجهٔ زیر توسیع تصادفی قضیه‌ای است که برودر [٦] در حالت تعیّنی آن را اثبات کرده است.

قضیه ١٢.٦ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی شبه‌یکنوا و از پایین کراندار باشد. اگر η عضوی از $B(\Omega, X^*)$ باشد، آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

ایتوه در اثبات قضیهٔ ١٢.٦، از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی، قضیه‌های ١.٣ و ۴.۴ استفاده می‌کند تا بتواند وجود جواب برای این معادله را نشان دهد. اثبات آن در [٢٦] یافت می‌شود.

نتیجه ١٣.٦ اگر X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی یکنوا، از پایین کراندار و نیمه‌پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر $\eta \in B(\Omega, X^*)$، $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

اکنون توجه‌مان را به معادلاتی برمی‌گردانیم که شامل اختلال‌های فشرده از عملگرهای توصیف شده در این بخش هستند. در استدلال قضایای مربوط به عملگرهای با اختلال فشرده، از خواص اساسی نگاشت دوگانی و برخی قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی استفاده می‌شود.

قضیه ١۴.٦ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر، $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی شبه‌یکنوا و $C : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی فشرده باشد با ویژگی‌های زیر:

الف) برای هر $x, y \in X$، $S(., x, y)$ اندازه‌پذیر است و

$$a(y) = \sup\{\|S(\omega, \circ, y)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$$

که S در تعریف ١١.٦ صدق می‌کند؛

ب) برای هر $x \in X$، $b(x) = \sup\{\|C(\omega)x\| : \omega \in \Omega\} < \infty$؛

پ) اگر $x_n \rightharpoonup x_\circ$ و $(S(\omega, x_n, x_n) - S(\omega, x_\circ, x_n), x_n - x_\circ) \to \circ$، آن‌گاه

$$C(\omega)x_n \rightharpoonup C(\omega)x_\circ.$$

اگر $T=F+C$ و T از پایین کراندار باشد، آن‌گاه برای هر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega\in\Omega$، $T(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

قضیه ۱۵.٦ گیریم X فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر است و نگاشت $S:\Omega\times X\times X\to X^*$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $\omega\in\Omega$ و $y\in X$، $S(\omega,.,y)$ نیمه‌پیوسته و یکنوا است؛

ب) نگاشت $T:\Omega\times X\to X^*$ تعریف شده به‌صورت $T(\omega)x=S(\omega,x,x)$ عملگر تصادفی از پایین کراندار است؛

پ) اگر برای هر $\omega\in\Omega$، $y_n\rightharpoonup y$ و $(S(\omega,y_n,y_n)-S(\omega,y,y_n),y_n-y)\to \circ$ وقتی $n\to\infty$، آن‌گاه برای هر $x\in X$، $S(\omega,x,y_n)\rightharpoonup S(\omega,x,y)$؛

ت) اگر برای هر $\omega\in\Omega$، $y_n\rightharpoonup y$ و $S(\omega,x,y_n)\rightharpoonup x_\circ$، آن‌گاه $(S(\omega,x,y_n),y_n)\to(x_\circ,y)$ وقتی $n\to\infty$.

هم‌چنین فرض کنیم برای هر $\omega\in\Omega$ و $x\in X$، $T(\omega)$ و $S(\omega,x,.)$ کراندار باشند و برای هر زیرفضای متناهی ـ بعد F از X، $T(\omega)$ از F به‌توی X^* ضعیف‌پیوسته باشد. اگر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، آن‌گاه $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega\in\Omega$، $T(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

تا این‌جا شرط از پایین کراندار بودن عملگرهای تصادفی به ما امکان استفاده از قضایای وجودی و یافتن جواب برای معادله‌های تصادفی را می‌داد. حال گیریم عملگر تصادفی از پایین کراندار نباشد. قضیهٔ زیر توسیع تصادفی از قضیه‌ای است که برودر [۷، ۸] آن را در حالت تعیّنی اثبات کرده است.

قضیه ١٦.٦ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F:\Omega\times X\to X^*$ عملگر تصادفی یکنوا و نیمه‌پیوسته باشد که $\sup\{\|F(\omega)\circ\|:\omega\in\Omega\}=r<\infty$. فرض کنیم برای هر زیرمجموعهٔ کراندار B از X^*، زیرمجموعهٔ کراندار U از X وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\omega\in\Omega$، $F(\omega)^{-1}(B)\subseteq U$. اگر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، آن‌گاه $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega\in\Omega$، $F(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

معادلات همرشتاین[1] تصادفی، معادلاتی با عملگر تصادفی غیرخطی هستند به‌صورت $u+KNu=a$، که در آن N عملگر تصادفی نمیتسکی[2]، K عملگر تصادفی خطی و a یک تابع

1) Hammerstein 2) Nemytskii

معلوم است. هدف‌مان در این‌جا، قراردادن فرض‌هایی روی K و N است تا به جواب اندازه‌پذیر برای این نوع معادلات دست پیدا کنیم. گوییم فضای باناخ X دارای ویژگی (π) است اگر بازتابی باشد و عملگر یکنوا و نیم‌پیوستهٔ $A : X^* \to X$ وجود داشته باشد که $A\circ = \circ$، A در صفر پیوسته است و برای یک $c > \circ$ و $\alpha > ۱$، $(Au, u) \geq c\|u\|^\alpha$ برای هر $u \in X^*$.

قضیه ۱۷.٦ گیریم X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر با ویژگی (π) باشد. فرض کنیم $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی یکنوا، کراندار و نیم‌پیوسته و $K : \Omega \times X^* \to X$ یک عملگر تصادفی خطی، یکنوا و پیوسته باشد. اگر $M > \circ$ وجود داشته باشد که $(F(\omega)x, x) \geq \circ$ هرگاه $\omega \in \Omega$ و $\|x\| > M$، $\sup\{\|F(\omega)\circ\| : \omega \in \Omega\} < \infty$ و $\sup\{\|K(\omega)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$، آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد که برای هر $\omega \in \Omega$، $\xi(\omega) + K(\omega)F(\omega)\xi(\omega) = \circ$.

چون یک فضای هیلبرت H ویژگی (π) را به‌ازای $A = I$ (عملگر همانی) داراست، قضیهٔ اخیر در مورد فضاهای هیلبرت با $H^* = H$ برقرار است.

مراجع

[1] R. J. Aumann, "Integrals of set-valued functions ", *J. Math. Anal. Appl.*, **12**(1965), 1-12.

[2] A. T. Bharucha- Reid, *Random integral equations*, New York, London: Academic Press, 1972.

[3] A. T. Bharucha- Reid, "Fixed point theorems in probabilistic analysis", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**(1976), 641-657.

[4] N. Bourbaki, *General topology*, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

[5] F. E. Browder, "Nonlinear elliptic boundary value problems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**(1963), 862-874.

[6] F. E. Browder, "Non-linear equations of evolution", *Ann. Math.*, **80**(1964), 485-523.

[7] F. E. Browder, "Remarks on nonlinear functional equations" I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **51**(1964), 985-989.

[8] F. E. Browder, "Remarks on nonlinear functional equations" II, *Illinoise J. Math.*, **9**(1965), 608-616.

[9] F. E. Browder, "Mapping theorems for noncompact nonlinear operators in Banach spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **54**(1965), 337-342.

[10] F. E. Browder, *Problemes non lineaires.*, Montreal: Les Presses de L'Universite de Montreal, 1966.

[11] L. D. Brown and R. Purves, "Measurable selections of extrema", *Ann. Math. Statist.*, **1**(1973), 902-912.

[12] J. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[13] J. Dauer and F. Van Vleck, "Measurable selectors of multifunctions and applications", *Math. Systems Theory.*, **7**(1974), 367-376.

[14] G. Debreu, "Integration of correspondences", *Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.*, **2**, Part 1(1966), University of California press, Berkeley, 351-372.

[15] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Vol 1, General theory. New York: Interscience, 1958.

[16] A. F. Filippov, "On certain questions in the theory of optimal control ", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Meh.*, **2**(1959), 25-32. English translation in *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A.*, **1**(1962), pp. 76-84.

[17] O. Hans, "Random operator equations", In: Proc 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability, Vol 2, Part 1, pp. 185-202. Berkeley: University of California Press (1961).

[18] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Providence: Amer. Math. Soc., 1957.

[19] C. J. Himmelberg, "Measurable relations", *Funda. Math.*, 53-72(1975).

[20] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Extreme points of multifunctions ", *Indiana Univ. Math. J.*, **22**(1973), 719-729.

[21] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Some selection theorems for measurable functions", *Can. J. Math.*, **21**(1969), 394-399.

[22] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Selection and implicit function theorems for multifunctions with Souslin graph", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **19**(1971), 911-916.

[23] C. J. Himmelberg, T. Parthasarathy and F. S. Van Vleck, "On measurable relations", *Funda. Math.*, **111**(1981), 161-167.

[24] S. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, vol I, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[25] S. Itoh, "A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping ", *Pacific J. Math.*, **68**(1977), 85-90.

[26] S. Itoh, "Nonlinear random equations with monotone operators in Banach spaces", *Math. Ann.*, **236**(1978), 133-146.

[27] S. Itoh, "Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **67**(1979), 261-273.

[28] M. Q. Jacobs, "Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**(1968), 471-481.

[29] R. Kannan and H. Salehi, "Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities" , *J. Math. Anal. Appl.*, **57**(1977), 234-256.

[30] T. Kato, "Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity" I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**(1964), 548-550.

[31] T. Kato, "Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity" II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 886-889.

[32] K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, New York- London- Warszawa, 1966.

[33] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, New York- London- Warszawa, 1966.

[34] K. Kuratowski and C. Ryll- Nardzewski, "A general theorem on selectors ", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys.*, **13**(1965), 397-403.

[35] E. J. McShane and R. B. Warfield, "On Filippov's implicit functions lemma", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18**(1967), 41-47.

[36] E. Michael, "Topologies on spaces of subsets", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**(1951), 152-182.

[37] G. J. Minty, "On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **50**(1963), 1038-1041.

[38] A. M. Vainberg, "Nonlinear equations with monotone operators", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR 188= Soviet Math. Dokl.*, **10**(1969), 1136-1138.

[39] M. M. Vainberg, "*Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*", New York, Toronto, Wiley, 1973.

[40] D. Wagner, "Survey of measurable selection theorems", *SIAM J. Control and Optimization.*, **15**(1977), 859-903.

[41] J. R. L. Webb, "Mapping and fixed-point theorems for nonlinear operators in Banach spaces", *Proc. London Math. Soc.*, **20**(1970), 451-468.

روح‌الله جهانی پور jahanipu@kashanu.ac.ir

نرگس تراکمه سامانی

بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۴۷ تا ۵۹

قضیهٔ اصلی حساب و یکتایی تجزیه

عبدعلی کوچک‌پور و منصور معتمدی

چکیده

مفهوم یکتایی تجزیه در جبر، ریشه در قضیهٔ اصلی حساب و نظریهٔ جبری اعداد دارد. هدف این نوشتار، بررسی مفهوم تجزیه و یکتایی آن است. در بخش اول، پیشینهٔ تاریخی قضیهٔ اصلی حساب مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دوم، تجزیه در نیم‌گروه‌ها را با ذکر چند مثال مورد توجه قرار می‌دهیم. هدف بخش سوم، معرفی حوزه‌های نیم‌عاملی و مفهوم کشسانی[1] [۱] در حوزه‌های صحیح است. در بخش چهارم، ناورداهایی که دوری از اول بودن و دوری از یکتایی تجزیه را اندازه می‌گیرند، معرفی و به اختصار مطالعه می‌شوند.

۱. پیشینهٔ تاریخی

بیان قضیهٔ اصلی حساب چنین است که **هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، صرف نظر از جای عوامل، به‌صورت یکتا به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه می‌شود.** پیشینهٔ تاریخی قضیهٔ اصلی حساب به‌طور دقیق روشن نیست و در کتاب اصول اقلیدس به‌صورت فوق بیان نشده است. با این حال، اقلیدس نقش تعیین‌کننده‌ای در پیدایش آن دارد. به‌طور مشخص، فصل‌های هفت و نه کتاب اصول شامل گزاره‌هایی راجع به قضیهٔ اصلی حساب است [۱]. کمال‌الدین فارسی، متوفی در ۱۳۲۰ میلادی در کتاب تذکرةالاحباب فی بیان‌الاتحاب بخش وجودی تجزیهٔ اعداد طبیعی به اعداد اول را اثبات و زمینه را برای اثبات یکتایی آن فراهم می‌کند. در گزارهٔ ۹ مندرج در این کتاب، تمام

1) Elasticity

مقسوم‌علیه‌های یک عدد طبیعی مشخص می‌شود. این اولین اثبات شناخته شده از وجود تجزیه است [۲، ۶، ۱۰]. پرسته[1] [۲] ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ هفده میلادی هم اثباتی شبیه اثبات کمال‌الدین فارسی ارائه داده است [۱۰]. اویلر بخش وجودی قضیهٔ اصلی حساب را دانسته فرض کرده و نتایجی بسیار نزدیک به نتایج کمال‌الدین فارسی و پرسته به‌دست آورده است. لژاندر بخش وجودی قضیهٔ اصلی را اثبات کرده است، اما بیان او صریح نیست. اولین اثبات وجود و یکتایی قضیهٔ اصلی حساب توسط گاوس در اثر ماندگار وی با نام «پژوهش‌های حسابی[2]» [۳] آمده است. پس از گاوس دیگران نیز اثبات‌های گوناگونی از آن ارائه داده‌اند.

می‌توان از اصل خوش ترتیبی برای اثبات وجود تجزیه استفاده کرد به این ترتیب که فرض کنیم n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که تجزیه‌ای برای آن وجود ندارد. پس n اول نیست و اعداد طبیعی n_1 و n_2 وجود دارند به‌طوری که $n = n_1n_2$، $1 < n_1 < n$ و $1 < n_2 < n$. بنا به تعریفِ n، n_1 و n_2 حاصل‌ضرب اعداد اول هستند و از این‌رو n نیز حاصل‌ضرب اعداد اول خواهد شد که تناقض است. برای اثبات یکتایی تجزیه، به‌طور معمول از لم زیر که به لم اقلیدس معروف و در بخش نظریهٔ اعداد کتاب اصول اقلیدس مندرج است، استفاده می‌شود.

لم اقلیدس. اگر عدد اول p حاصل‌ضرب ab را بشمرد، آن‌گاه p، a یا b را می‌شمرد.

در این‌جا اثباتی برای یکتایی تجزیه بیان می‌کنیم که در آن از لم اقلیدس استفاده نمی‌شود [۱۳]. بنابر اصل خوش ترتیبی، فرض کنیم k کوچکترین عدد طبیعی باشد که دارای دو تجزیه متفاوت است، یعنی

$$k = p_1p_2\cdots p_n = q_1q_2\cdots q_m$$

پس هیچ یک از p_i ها نمی‌توانند مساوی یکی از q_j ها باشند و همچنین k نمی‌تواند اول باشد. پس $m, n \geq 2$ و از این‌رو به‌ازای یک i، $p_i^2 \leq k$ و به‌ازای یک j، $q_j^2 \leq k$. فرض کنیم $i = j = 1$. در این صورت $p_1q_1 \leq k$ و چون $p_1 \neq q_1$، داریم $p_1q_1 < k$. از این‌جا نتیجه می‌شود که $k - p_1q_1$ دارای تجزیهٔ یکتاست. دو عدد اول p_1 و q_1 عدد $k - p_1q_1$ را می‌شمرند و بنابراین باید در تجزیهٔ یکتای آن وجود داشته باشند. پس به‌ازای یک عدد طبیعی b داریم

1) Jean Prestet 2) Disquisitiones arithmeticae

$$k - p_۱q_۱ = p_۱q_۱b$$

و

$$k = p_۱q_۱(۱ + b) = p_۱ \cdots p_n$$

اینک با حذف $p_۱$ از طرفین تساوی و دریافت دو تجزیهٔ متمایز برای $k/p_۱$، تناقض لازم به‌دست می‌آید.

اثبات‌هایی که برای بخش یکتایی قضیهٔ اصلی حساب ارائه می‌شوند، مشکل‌تر از اثبات وجودی آن هستند. در اثبات وجود تجزیه، به‌طور مستقیم از تعریف عدد اول و اصل استقرای ریاضی یا هم‌ارز آن، اصل خوش ترتیبی، استفاده می‌شود. اما در اثبات بخش یکتایی، فقط از اعمال ضرب و تقسیم استفاده نمی‌شود؛ گویا جایی باید از جمع و تفریق نیز استفاده کرد.

۲. تجزیه در نیم‌گروه‌ها

در ادامهٔ مقاله، مقصود از یک نیم‌گروه، نیم‌گروهی است تعویض‌پذیر با عضو واحد. عضو واحد نیم‌گروه H را با $۱_H = ۱$ نشان می‌دهیم. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را روی H،هم‌نهشتی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in H$، $a \sim b$ ایجاب کند که $ac \sim bc$. گیریم $H^\times$ گروه عضوهای وارون‌پذیر H را نشان دهد. دو عضو $a, b \in H$ وابسته نامیده می‌شوند و می‌نویسیم $a \cong b$ اگر $u \in H^\times$ وجود داشته باشد که $a = ub$. این یک رابطهٔ هم‌نهشتی روی H است و برای هر $a \in H$، ردهٔ هم‌ارزی a، برابر است با $aH^\times$. نیم‌گروه $H_{red} = H/\cong$ را نیم‌گروه تحویل‌یافتهٔ H می‌نامیم. نیم‌گروه H را تحویل‌یافته می‌نامیم هرگاه $H^\times = \{۱\}$ که در این صورت $H = H_{red}$. عضو $a \in H$ را حذف‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر $b, c \in H$، از $ab = ac$ بتوان نتیجه گرفت $b = c$. نیم‌گروه H را یک تکواره می‌نامیم هرگاه هر عضو آن حذف‌پذیر باشد.

$A \subseteq H$ را s ـ ایدالِ[۱] H می‌نامیم هرگاه $AH = A$. به‌موجب تعریف، $\emptyset$ و H، s ـ ایدال‌های H هستند و H یک گروه است اگر و تنها اگر $\emptyset$ و H تنها s ـ ایدال‌های H باشند. برای $a \in H$، aH ایدال اصلی تولید شده با a نامیده می‌شود. اگر A یک s ـ ایدال H باشد، A را اول می‌نامیم هرگاه $H \setminus A$ زیرنیم‌گروه H باشد. همچنین نیم‌گروه تولید شده توسط $X \subseteq H$ را با $[X]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. ۱) عضو $a \in H$ را تحویل‌ناپذیر یا اتم می‌نامیم هرگاه $u \notin H^\times$ و برای هر

۱) حرف s به‌خاطر حرف اول واژهٔ Semigroup انتخاب شده است.

$u = ab$ ،$a, b \in H$ ایجاب کند که $a \in H^\times$ یا $b \in H^\times$. مجموعهٔ تمام عضوهای تحویل‌ناپذیر H را با $A(H)$ نشان می‌دهیم.

۲) تکوارهٔ H را اتمی می‌نامیم اگر هر عضو وارون‌ناپذیر آن حاصل‌ضرب تعداد متناهی از عضوهای تحویل‌ناپذیر (اتم‌های H) باشد، یعنی $H = [A(H) \cup H^\times]$.

۳) $p \in H$ را عضو اول یااول می‌نامیم هرگاه وارون‌پذیر نباشد و برای هر $a, b \in H$، $p \,|\, ab$ ایجاب کند که $p \,|\, a$ یا $p \,|\, b$.

۴) تکوارهٔ H را عاملی می‌نامیم در صورتی که هر عضو وارون‌ناپذیر آن حاصل ضرب تعداد متناهی عضوهای اول H باشد.

با توجه به تعریف بالا، می‌توان گفت که حوزهٔ صحیح R اتمی (عاملی) است اگر تکوارهٔ متشکل از عضوهای ناصفر آن، اتمی (عاملی) باشد. بدیهی است که این تعریف با تعریف متداول در کتاب‌های جبر مطابقت دارد، زیرا مجموعهٔ عضوهای ناصفر در هر حوزهٔ صحیح با عمل ضرب، یک تکواره است.

پیش از ارائهٔ مثال، به بیان دو قضیه می‌پردازیم که یک تعبیر ایدالی از عضوهای تحویل‌ناپذیر یا اتم‌ها و عضوهای اول به‌دست می‌دهند.

قضیه ۲.۲ فرض کنیم H یک تکواره باشد و $u \in H$.

۱) u عضو تحویل‌ناپذیر H است اگر و تنها اگر ایدال اصلی uH نسبت به رابطهٔ شمول در مجموعهٔ ایدال‌های اصلی H به‌جز H، ماکسیمال باشد؛

۲) عضو u اول است اگر و تنها uH یک s ـ ایدال اولِ H باشد؛

۳) هر عضو اول H یک عضو تحویل‌ناپذیر H است.

اثبات: ۱) فرض کنیم u یک عضو تحویل‌ناپذیر H و $a \in H \setminus H^\times$ چنان باشد که $uH \subseteq aH$. در این صورت به‌ازای یک $b \in H$، $u = ab$ و چون u تحویل‌ناپذیر است، نتیجه می‌گیریم $b \in H^\times$ و بنابراین $aH = uH$. اینک فرض کنیم uH در مجموعهٔ

$$\{aH | a \in H, aH \neq H\}$$

ماکسیمال است و $a,b \in H$ چنان‌اند که $u = ab$. اگر $a \in H^{\times}$ داریم $uH \subseteq aH \subseteq H$ و بنابراین $uH = aH$ که از آن نتیجه می‌شود $b \in H^{\times}$. از این رو u تحویل‌ناپذیر است.
۲) به‌موجب تعریف، pH یک s ــ ایدال اول است اگر و تنها برای هر $a,b \in H \setminus pH$ داشته باشیم $ab \in H \setminus pH$. به طور معادل برای هر $a,b \in H$ اگر $p \,|\, ab$، آن‌گاه $p \,|\, a$ یا $p \,|\, b$. بنابراین pH یک s ــ ایدال اول است اگر و تنها اگر p عضو اول باشد.
۳) فرض کنیم $p \in H$ یک عضو اول و $a,b \in H$ چنان باشند که $p = ab$. در این صورت $p \,|\, ab$ و از این‌رو $p \,|\, a$ یا $p \,|\, b$. بنابراین $p \cong a$ یا $p \cong b$. پس $a \in H^{\times}$ یا $b \in H^{\times}$ که نشان می‌دهد p عضو تحویل‌ناپذیر H است.

تعریف ۳.۲ گوییم H در شرط زنجیری فزاینده برای ایدال‌های اصلی صدق می‌کند هرگاه هر دنبالهٔ افزایشیِ ایدال‌های اصلی H ایستا باشد بدین معنی که اگر $\{a_i\}_{i \geq ۰}$ دنباله‌ای در H باشد که

$$a_۰ H \subseteq a_۱ H \subseteq a_۲ H \subseteq \cdots$$

آن‌گاه $m \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$ وجود داشته باشد که برای هر $n \geq m$، $a_n H = a_m H$.

قضیه ۴.۲ اگر H در شرط زنجیری فزاینده برای ایدال‌های اصلی صدق کند، آن‌گاه H اتمی است.

اثبات: فرض کنیم H اتمی نباشد. قرار می‌دهیم

$$\Omega = \{a \in H \setminus H^{\times} : \quad \text{حاصل‌ضرب تعداد متناهی اتم نباشد } a\}$$

در این صورت Ω تهی نیست و اگر $a \in \Omega$، آن‌گاه $a = bc$ که $b,c \in H \setminus H^{\times}$ و $b \in \Omega$ یا $c \in \Omega$. از این‌رو برای هر $a \in \Omega$ یک $a' \in \Omega$ وجود دارد که $aH \subsetneq a'H$. با شروع از $a_۰ \in \Omega$، دنبالهٔ $\{a_n\}_{n \geq ۰}$ را در Ω به‌طور بازگشتی با $a_{n+۱} = a'_n$ تعریف می‌کنیم تا این‌که دنبالهٔ افزایشیِ ایدال‌های

$$a_۰ H \subsetneq a_۱ H \subsetneq \cdots$$

که ایستا نیست به‌دست آید.

توجه می‌کنیم که اثبات فوق در واقع همان اثباتِ بخش وجودی قضیهٔ اصلی حساب است.
به‌موجب قضیهٔ ۴.۲، هر حوزهٔ صحیح که در شرایط زنجیری افزایشی برای ایدال‌های اصلی صدق کند و به‌ویژه هر حوزهٔ نویتری یک حوزهٔ اتمی است. به‌علاوه، حوزهٔ صحیح غیرنویتری دیگری وجود دارد که فاقد اتم است (صفحهٔ ۵۷ در [۷] را ببینید). همچنین گرمس[۱] [۱۵] با ذکر یک مثال

1) A. Ggrams

نشان داده است که لازم نیست یک حوزهٔ اتمی در شرط فزاینده برای ایدال‌های اصلی صدق کند.

مثال ۵.۲ حلقهٔ $\bar{\mathbb{Z}}$ متشکل از تمام اعداد صحیح جبری در $\mathbb{C}$ اتمی نیست. در واقع اگر $\bar{\mathbb{Z}}^\times \setminus \bar{\mathbb{Z}} \ni u \neq ۰$، آن‌گاه $\sqrt{u} \in \bar{\mathbb{Z}} \setminus \bar{\mathbb{Z}}^\times$ و $u = (\sqrt{u})^۲$. بنابراین $\bar{\mathbb{Z}}$ دارای عضو تحویل‌ناپذیر نیست و چون $\bar{\mathbb{Z}}$ یک هیأت نیست، نمی‌تواند اتمی باشد.

مثال ۶.۲ تکوارهٔ $H = ۱ + ۴\mathbb{N}_۰$ (منسوب به هیلبرت) مثالی است که اغلب در متون درسی برای لزوم اثبات یکتایی از آن استفاده می‌شود. بدیهی است که عضوهای تحویل‌ناپذیر این تکواره عبارتند از اعداد اول به‌شکل $p \equiv ۱ \pmod{۴}$ و qq' هایی که در شرط $q \equiv q' \equiv -۱ \pmod{۴}$ صدق می‌کنند. تحویل‌پذیرهایی از نوع دوم، اول نیستند، زیرا $q^۲, q'^۲ \in H$ و $qq'|q^۲q'^۲$، اما $qq' \nmid q^۲$ و $qq' \nmid q'^۲$. به لحاظ نبود یکتایی تجزیه، توجه می‌کنیم که

$$۶۹۳ = ۹ \times ۷۷ = ۲۱ \times ۳۳.$$

و این که هر یک از اعداد ۹، ۷۷، ۲۱ و ۳۳ در H تحویل‌ناپذیرند.

مثال ۷.۲ فرض می‌کنیم F یک هیأت باشد. قرار می‌دهیم

$$R = \{a_۰ + a_۱x^۲ + \cdots + a_nx^n | a_i \in F\}.$$

R یک حوزهٔ صحیح است. به‌سادگی دیده می‌شود که $x^۲$ در R تحویل‌ناپذیر است، اما عضو اول R نیست، زیرا $x^۶ = x^۳.x^۳$ و از این قرار $x^۲|x^۳.x^۳$، اما رابطهٔ بخش‌پذیری $x^۲|x^۳$ در R برقرار نیست.

در قضیهٔ ۲.۲ دیدیم که هر عضو اول در یک تکواره، تحویل‌ناپذیر است. مثال فوق نشان می‌دهد که یک عضو تحویل‌ناپذیر می‌تواند اول نباشد. اینک به قضیهٔ زیر توجه می‌کنیم.

قضیه ۸.۲ فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح باشد. در این صورت دو بیان زیر هم‌ارزند:

۱) R یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست؛

۲) هر عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر اول باشد.

اثبات: [۱۴] قضیهٔ (۱.۱.۱۵) را ببینید.

۳. حوزه‌های نیم‌عاملی[1] و کشسانی

یادآوری می‌کنیم که حوزهٔ اتمی R را یک حوزهٔ تجزیه یکتا می‌نامیم هرگاه، از

1) Half factorial domain

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n$$

که در آن، α_iها و β_iها تحویل‌ناپذیرند بتوان نتیجه گرفت $n = m$ و جایگشتی مانند σ روی مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ وجود دارد که برای هر i، α_i و $\beta_{\sigma(i)}$ وابسته‌اند.

اینک حوزهٔ اتمی R را یک حوزهٔ نیم‌عاملی می‌نامیم هرگاه اولین نتیجهٔ فوق برقرار باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این تعریف ریشه در نظریهٔ جبری اعداد دارد. در این‌جا فرض می‌کنیم که خواننده با مفهوم عدد رده‌ای آشناست. از جمله R یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست اگر و تنها اگر عدد رده‌ای آن برابر ۱ باشد. در این مورد می‌توانید به هر کتاب معتبر نظریهٔ جبری اعداد مراجعه کنید.

قضیه ۱.۳ (کارلیتز[1]) [۱۲] فرض کنیم R حلقه اعداد صحیح در یک توسیع متناهی هیات K از اعداد گویا باشد. R یک حوزهٔ نیم‌عاملی است اگر و تنها اگر عدد رده‌ای آن برابر ۱ یا ۲ باشد.

اثبات [۱۲] را ببینید.

مثال ۲.۳ (اندرسون[2]، اندرسون[3]، ظفرالله[4]) حلقه‌های $\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]$ و $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X]$ هر دو حوزهٔ نیم‌عاملی هستند. هیچ کدام حوزهٔ تجزیهٔ یکتا نیستند، زیرا $X^2 = XX = (iX)(-iX)$ و $x^2 = (\sqrt{2}x)(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$ به‌ترتیب تجزیه‌های نایکتا در هر حوزه هستند. فرض کنیم عضو x یک عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر حوزهٔ صحیح R باشد و $r = x_1x_2\cdots x_m$ که در آن x_i ها تحویل‌ناپذیرند. در این صورت، m را طول این تجزیه می‌نامیم. طول کوچک‌ترین تجزیهٔ x را با $\ell_R(x)$ و کران بالای این طول‌ها را با $L_R(x)$ نشان می‌دهیم. این کران بالا می‌تواند متناهی باشد که در این صورت همان طول بزرگترین تجزیهٔ x است. این کران بالا می‌تواند نامتناهی باشد. بدیهی است که $L_R(x) = \ell_R(x) = 1$ اگر و تنها اگر x تحویل‌ناپذیر باشد. اگر x تحویل‌ناپذیر نباشد، آن‌گاه $L_R(x) \geq \ell_R(x) \geq 2$. چنانچه x وارون‌پذیر باشد، قرار می‌دهیم $L_R(x) = 0$ و اگر $x = 0$، $L_R(x)$ را برابر ∞ تعریف می‌کنیم. همچنین روشن است که

$$L_R(xy) \geq L_R(x) + L_R(y)$$

اینک قرار می‌دهیم $\rho(x) = L_R(x)/\ell_R(x)$ (که می‌تواند نامتناهی باشد) و کشسانی R که آن را با $\rho(R)$ نشان می‌دهیم برابر کوچک‌ترین کران بالای $\rho(x)$ ها تعریف می‌کنیم، یعنی

$$\rho(R) = \sup\{\frac{m}{n} | x_1x_2\cdots x_m = y_1y_2\cdots y_n\}$$

---

1) L. Carlitz 2) D. D. Anderson 3) D. F. Anderson 4) M. Zafrullah

که در آن x_i ها و y_i ها عضوهای تحویل‌ناپذیر R هستند. به‌روشنی $\infty \geq \rho(R) \geq ۱$ و $\rho(R) = ۱$ اگر و تنها اگر R یک حوزهٔ نیم‌عاملی باشد. گوییم حوزهٔ صحیح R حوزهٔ تجزیهٔ کراندار است هرگاه برای هر عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر $x \in R$، $L_R(x) < \infty$ یا به عبارتی $\rho(x) < \infty$. در ادامه، مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد کشسانی یک حوزهٔ صحیح می‌تواند نامتناهی باشد. فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح و F هیأت کسرهای آن باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$Int(R) = \{f \in F[x] : f(R) \subseteq R\}$$

یک زیرحلقهٔ F است و در واقع

$$R \subseteq Int(R) \subseteq F.$$

این حلقه را حلقهٔ چندجمله‌ای‌های صحیح ــ مقدار R می‌نامیم. اگر $R = \mathbb{Z}$، حالت کلاسیک به‌دست می‌آید. در واقع $Int(\mathbb{Z})$ یک $\mathbb{Z}-$ مدول آزاد با پایهٔ

$$۱, x, \frac{x(x-۱)}{۲!}, \frac{x(x-۱)(x-۲)}{۳!}, \ldots$$

است.

برای مطالعهٔ خواص تجزیه‌ای $Int(R)$ ابتدا باید عضوهای وارون‌پذیر و تحویل‌ناپذیر R مشخص شوند. در این مورد، لم زیر به‌راحتی اثبات می‌شود.

لم ۳.۳ فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح باشد.

۱) عضوهای وارون‌پذیر $Int(R)$ همان عضوهای وارون‌پذیر R هستند؛

۲) عضو $a \in R$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر در $Int(R)$ تحویل‌ناپذیر باشد.

قضیه ۴.۳ هریک از چندجمله‌ای‌های

$$x, \frac{x(x-۱)}{۲}, \ldots, \binom{x}{n}, \ldots$$

در $Int(\mathbb{Z})$ تحویل‌ناپذیرند.

اثبات: مرجع [۱۱] صفحه ۱۳۰ را ملاحظه کنید.

قضیه ۵.۳ حوزهٔ صحیح $Int(\mathbb{Z})$ حوزهٔ تجزیهٔ کراندار است و علاوه بر آن، اگر $f \in Int(\mathbb{Z})$ و $a \in \mathbb{Z}$، داریم $L_{Int(\mathbb{Z})}(f) \leq degf + L_{\mathbb{Z}}(f(a))$.

اثبات: فرض کنیم

$$f = p_1p_2\cdots p_r g_1g_2\cdots g_s$$

که p_i ها اعداد اول و g_i ها چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در $Int(\mathbb{Z})$ باشند. آشکار است که $s \leq degf$. اگر $f(a) = 0$، بنابر قرارداد، $L_{Int(\mathbb{Z})}(f(a)) = \infty$ و نامساوی برقرار است. اگر a ریشهٔ f نباشد (چنین عضوی در $\mathbb{Z}$ وجود دارد، زیرا $\mathbb{Z}$ نامتناهی است)، $f(a)$ بر حاصل‌ضرب $p_1p_2\cdots p_r$ بخش‌پذیر است و از این‌رو $r \leq L_{\mathbb{Z}}(f(a))$.

اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، $\phi(R,n)$ تعداد طول‌های ممکن تجزیه‌هایی است که دارای تجزیه‌ای به طول n نیز هستند. به عبارت دیگر $\phi(R,n)$ عدد اصلی مجموعهٔ

$$\{m \mid x_1x_2\cdots x_m = y_1y_2\cdots y_n \quad \text{تحویل‌ناپذیرند } R \text{ ها در } y_i \text{ ها و } x_i\}$$

می‌باشد. به‌روشنی $\phi(R,1) = 1$ و $\phi(R,n) \leq \phi(R,n+1)$ و حوزهٔ صحیح R یک حوزهٔ نیم‌تجزیه است اگر و تنها اگر برای هر n، $\phi(R,n) = 1$.

قضیهٔ ۶.۳ کشسانی حلقهٔ چندجمله‌ای‌های صحیح ـ مقدار، $Int(\mathbb{Z})$، نامتناهی است. در واقع

$$\phi(Int(\mathbb{Z}),2) = \infty.$$

اثبات: برای هر عدد صحیح $n \geq 2$ داریم

$$n\binom{X}{n} = (X-n+1)\binom{X}{n-1}$$

با توجه به قضیهٔ ۵.۳، در سمت راست دو عامل تحویل‌ناپذیر وجود دارد، حال آن‌که در سمت چپ می‌توان n را چنان انتخاب کرد که تعداد دلخواهی عامل اول داشته باشد.

۴. دوری از اول بودن

فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح، $R = R\backslash\{0\}$ و $U(R)$ گروه عناصر وارون‌پذیر R باشد. در این بخش، دو ناوردای $\omega(R,x)$ و $\omega(R)$ را که به‌ترتیب دوری $x \in R$ را از اول بودن و دوری R را از حوزهٔ تجزیهٔ یکتا بودن اندازه می‌گیرد، معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴ فرض کنیم R یک حوزهٔ صحیح باشد.

۱) برای $x \in R^*\backslash U(R)$، $\omega(R,x)$ کوچک‌ترین عدد صحیح m است که اگر x_1، ... ، x_n عناصر R باشند و $x \mid x_1\cdots x_n$، آن‌گاه به‌ازای یک $t \le m$ و یک زیرمجموعهٔ $\{1,\dots,n\}$ مانند $\{i_1,\dots i_t\}$ داشته باشیم $x \mid x_{i_1}\dots x_{i_t}$. اگر چنین عدد صحیحی وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $\omega(R,x)=\infty$.

۲) اگر $x \in U(R)$، آن‌گاه $\omega(R,x)=0$.

۳) $\omega(R)=\sup\{\omega(R,x) \mid$ عضو x در R تحویل‌ناپذیر است$\}$.

۴) اگر R یک هیأت باشد، آن‌گاه $\omega(R)=0$.

۵) اگر R هیأت نباشد و عضو تحویل‌ناپذیر هم نداشته باشد، $\omega(R)=\infty$.

نتایج زیر بی‌درنگ از تعریف بالا به‌دست می‌آیند.

نتیجه ۲.۴ اگر $1 < \omega(R,x) = m < \infty$، آن‌گاه $x \in R^*\backslash U(R)$.

نتیجه ۳.۴ اگر $R \supset \{x_1,\dots,x_n\}$، $m \ge n$ و $x \mid x_1\cdots x_n$، آن‌گاه به‌ازای یک زیرمجموعهٔ $\{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \{1,\dots,n\}$، $x \mid x_{i_1}\cdots x_{i_m}$.

نتیجه ۴.۴ عناصر x_1، ... ، x_m در R وجود دارند به‌طوری که $x \mid x_1\cdots x_m$ اما x هیچ زیر حاصل‌ضرب x_i ها را نمی‌شمرد.

نتیجه ۵.۴ $\omega(R,x)=1$ اگر و تنها اگر x در R اول باشد.

نتیجه ۶.۴ اگر x_1، ... ، x_n در R اول باشند، آنگاه $\omega(R,x_1,\dots,x_n)=n$.

نتیجه ۷.۴ اگر حوزهٔ اتمی R هیات نباشد، آن‌گاه R یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست اگر و تنها اگر $\omega(R)=1$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که عناصر x_1، ... ، x_n در تعریف $\omega(R,x)$ را می‌توان عناصر تحویل‌ناپذیر اختیار کرد.

قضیه ۸.۴ فرض کنیم R یک حوزهٔ اتمی باشد و $x \in R^*\backslash U(R)$. در این صورت بیان‌های زیر هم‌ارزند:

۱) $\omega(R,x)=m<\infty$؛

۲) m کوچک‌ترین عدد طبیعی است که اگر x_1، ... ، x_n عناصر تحویل‌ناپذیر R باشند و $x \mid x_1\cdots x_n$، آن‌گاه به‌ازای یک $t \le m$ و یک زیرمجموعهٔ $\{1,\dots,n\}$ مانند $\{i_1,\dots,i_t\}$،

$x \mid x_{i_1} \cdots x_{i_t}$؛

۳) اگر $m \geq n$ و x_1، ... ، x_n در R تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه به‌ازای یک زیرمجموعهٔ $\{1, \dots, n\}$ مانند $\{i_1, \dots, i_m\}$، داریم $x \mid x_{i_1} \cdots x_{i_m}$ اما x هیچ زیرحاصل‌ضرب x_{i_k} ها را نمی‌شمرد.

اثبات: [۹] را ببینید.

قضیه ۹.۴ فرض کنیم R یک حوزهٔ اتمی باشد، اگر $\omega(R) \leq 2$، آن‌گاه R یک حوزهٔ نیم‌عاملی است.

اثبات: اگر $\omega(R) \leq 1$، آن‌گاه R یک حوزهٔ تجزیهٔ یکتاست. پس فرض کنیم $\omega(R) = 2$. اگر R یک حوزهٔ نیم‌عاملی نباشد، تجزیه‌ای مانند $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$ که در آن، x_i ها و y_j ها عناصر تحویل‌ناپذیر R هستند وجود دارد و $2 \leq n < m$. فرض کنیم n کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی باشد. از آن‌جا که $\omega(D) = 2$، می‌توان فرض کرد $x_1 \mid y_1y_2$. پس $y_1y_2 = x_1z_1 \cdots z_k$ که در آن z_i ها تحویل‌ناپذیرند و $k \geq 1$. بنابراین $x_2 \cdots x_n = z_1 \cdots z_k y_3 \cdots y_m$ که در آن $n - 1 < k + (m - 2)$. توجه می‌کنیم که تعداد عامل‌های تحویل‌ناپذیر در تجزیهٔ سمت راست برابر است با $k + (m - 2) \geq m - 1 \geq n \geq 2$. پس باید در تجزیهٔ سمت چپ هم $n - 1 \geq 2$ عضو تحویل‌ناپذیر وجود داشته باشد. وجود این تجزیهٔ جدید با فرض مینمال بودن n در تناقض است. بنابراین R یک حوزهٔ نیم‌عاملی است.

در قضیهٔ بعد ارتباط بین دو ناوردای $\rho(R)$ و $\omega(R)$ مشخص می‌شود. اثبات آن در [۹] یافت می‌شود.

قضیه ۱۰.۴ فرض کنیم R یک حوزهٔ اتمی باشد که هیأت نیست. در این صورت اولاً $\rho(R) \leq \omega(R)$ و ثانیاً اگر $\rho(R) = \frac{m}{2}$ و $x_1 \cdots x_n = y_1y_2$ که x_i ها و y_j های در R تحویل‌ناپذیرند، آن‌گاه $\rho(R) \leq \omega(R)/2$.

نوشتار خود را با قضیهٔ زیر به پایان می‌بریم.

قضیه ۱۱.۴ فرض کنیم R حلقهٔ اعداد صحیح جبری در یک هیأت جبری اعداد باشد. در این صورت بیان‌های زیر هم‌ارزند:

۱) عدد رده‌ای R برابر ۲ است؛

۲) $\omega(R) = 2$؛

۳) R یک حوزه نیم‌عاملی است.

مراجع

[۱] ال‌هیث، تامس، اصول اقلیدس سیزده مقاله، ترجمهٔ محمدهادی شفیعی‌ها، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۸۷.

[۲] قربانی، ابوالقاسم، فارسی‌نامه، فارسی، احوال و آثار کمال‌الدین فارسی، ریاضی‌دان و نورشناس ایرانی. مؤسسهٔ نشر هما، اسفند ۱۳۳۶.

[۳] معتمدی، منصور، آشنایی با نظریهٔ حلقه‌ها، ویرایش سوم، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۷.

[4] A. G. Agaragun, & C. R. Fletcher. "al-Farsi and Fundamental Theorem of Arithmatic", *Historica Mathematica*, **21**(1994), 162-173.

[5] A. G. Agaragun, & E. Mehmet Ozkan, "A historical survey of the Fundamental Theorem of Arithmatic", *Historica Mathematica*, **28** (2001), 207-214.

[6] A. G. Agaragun & C. R. Fletcher, "The Fundamental Theorem of Arithmatic dissected", *Mathematical Gazette*, **81**(1997), 53-57

[7] S. Alaca, & K. S. Williams, *Introductory algebraic number theory*, Cambridge University Press, 2004.

[8] D. D. Anderson, & D. F, Anderson and M. Zafrullah, "Factorization in integral domain", *J. Pure. App. Algebra*, **69** (1990), 1-19.

[9] D. F. Anderson & S. Chapman, "How far is an element from being prime?", *Journal of algebra and its applications*, **9**(2010), 1-11.

[10] R. P. Burn, *A pathway into number theory*, second edition, Cambridge University Press, 1997.

[11] P. J. Cahen, & J-L Chabert, *Integer-Valued Polynomials*, Mathematical Survey and Monographs, vol. 48, American Mathematical Society, 1997.

[12] L. Carlitz, “A characterization of algebraic number fields with class number two”, *Proc. Am. Math Society*, **11**(1960), 391-392.

[13] H. Davenport, *The higher arithmatic*, Hutchinson House, 1952.

[14] A. Geroldingen, & F. Holter-koch, *Nonunique factorizations, Algebraic, Combiniatorial and Analytic theory*, Chapman, & Hall/CRC, 2006.

[15] A. Grams, “Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals”, *Proc. Camb. Philo. Soc.*, **75**(1974), 321-329.

عبدعلی کوچک‌پور koochak_a@scu.ac.ir

منصور معتمدی motamedi_m@scu.ac.ir

دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۶۱ تا ۶۲

برهانی برای قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون*

کریس برنهارت

مترجم: حمیدرضا وهابی

فرض کنید $M(n,n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ روی یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. در این صورت قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون بیان می‌کند که:

قضیه ۱. فرض کنید چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $A \in M(n,n)$

$$\det(tI - A) = c_\circ t^n + c_۱ t^{n-۱} + c_۲ t^{n-۲} + \cdots + c_n$$

باشد. در این صورت

$$c_\circ A^n + c_۱ A^{n-۱} + c_۲ A^{n-۲} + \cdots + c_n I = \circ.$$

در این نوشته اثبات دیگری غیر از یک برهان استاندارد (برای مثال نگاه کنید به [۱]) برای این قضیه ارائه می‌دهیم. ایدهٔ ما برای ساده‌تر کردنِ برهان، استفاده از سری‌های توانی صوری است.

برهان. ابتدا مشاهده کنید که

$$\det(I - tA) = t^n \det(\frac{۱}{t} I - A) = c_\circ + c_۱ t + c_۲ t^۲ + \cdots + c_n t^n.$$

*) Chris Bernhardt, "A proof of the Cayley-Hamilton Theorem", *Amer. Math. Monthly*, **116**(2009), 456-457

اکنون فرمول لاپلاس برای محاسبهٔ دترمینان، نتیجه می‌دهد

$$\det(I - tA)I = (I - tA)\operatorname{adj}(I - tA)$$

که در آن $\operatorname{adj}(A)$ ماتریس الحاقی کلاسیکِ A است.

اگر سری‌های توانی صوری برحسب t با ضرایب در $M(n,n)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $I - tA$ وارون‌پذیر با وارون $\sum_{0}^{\infty} A^i t^i$ است. بنابراین

$$(\sum_{0}^{\infty} A^i t^i)(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n)I = \operatorname{adj}(I - tA).$$

اگر $\operatorname{adj}(I - tA)$ را به‌صورت یک سری توانی صوری برحسب t با ضرایب در $M(n,n)$ بنویسیم، نتیجه می‌گیریم

$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n)(\sum_{0}^{\infty} A^i t^i) = \sum_{0}^{\infty} B_i t^i.$$

مشاهده کنید که درایه‌های $\operatorname{adj}(I - tA)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب t از درجهٔ حداکثر $n - 1$ اند. بنابراین B_i برای هر $i \geq n$ ماتریس صفر است. محاسبهٔ ضرایب t^n در دو طرف تساوی نتیجه می‌دهد که

$$c_0 A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_n I = 0.$$

مراجع

[1] G. Birkoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی

دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر

hrvahabi@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۶۳ تا ۸۶

دورهای تحلیلی روی خمینه‌های مختلط *

سام نریمان

چکیده

سال ۱۹۶۱، مایکل اتیا[1] و فردریش هیتزبروخ[2] برای این که کلاس دوری در همولوژی، تحلیلی باشد، شرط توپولوژیک پیدا کردند. برای این‌که دوری تحلیلی باشد، می‌بایست شرط بدیهی برقرار شود که منجر به حدس هاج خواهد شد. در این مقاله، شرطی از هندسهٔ مختلط که از نظریهٔ هاج تحمیل می‌شود را بررسی خواهیم کرد، اما بخش اعظم مقاله را به ایده‌های اصلی مانع توپولوژیک[3] تحلیلی بودن دور، اختصاص خواهیم داد.

۱. مقدمه

فرض کنید X یک خمینهٔ مختلط و Y زیرفضای بسته، تحویل‌ناپذیر، k ـ بعدی و تحلیلی مختلط از X باشد. در این صورت Y کلاس همولوژی با ضریب صحیح از بعد $2k$ در X خواهد بود. دور تحلیلی، یک ترکیب خطی متناهی صوری $\sum n_iY_i$ است که n_i عدد صحیح و Y_i مانند بالا تعریف شده است. کلاس همولوژی این دور را با $\sum n_iy_i$ نشان می‌دهیم. اگر کلاس کوهمولوژی u دوگان پوانکارهٔ کلاس همولوژی تحلیلی باشد، می‌گوییم u کلاس کوهمولوژی تحلیلی است. در این مقاله، می‌خواهیم مانعی توپولوژیک برای تحلیلی بودن u پیدا کنیم. این شرط‌ها عملگرهای کوهمولوژی مشخصی هستند که می‌باید روی u صفر شوند؛ به‌عنوان مثال $Sq^3u = 0$.

*) این تحقیق با حمایت مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی زیرنظر دکتر مهرداد شهشهانی انجام شد.

1) M. Atiyah   2) F. Hirzebruch   3) topological obstruction

توجه کنید که Y_i ها می‌توانند تکینگی داشته باشند که در صورتی که شرط زیرخمینه بودن را اضافه کنیم، رنه توم[1] [۶] ثابت کرد که باید برای هر k، $Sq^{2k+1}u = 0$. اگر X خمینهٔ کهلر[2] باشد، شرط لازم برای تحلیلی مختلط بودن کلاس کوهمولوژی $u \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$ این است که می‌بایست در تجزیهٔ هاج[3] از نوع (q,q) باشد. هاج حدس زد که اگر X خمینهٔ افکنشی جبری باشد، این شرط کافی نیز هست. در این مقاله توضیح خواهیم داد که حدس با این کلیت برای $q \geq 2$ برقرار نیست، اما ممکن است با ضرایب در $\mathbb{Q}$ درست باشد.

۲. درآمدی بر حدس هاج

قبل از پرداختن به موضوع اصلی که پیدا کردن مانع توپولوژیک برای تحلیلی بودن دور است، لازم است کمی دربارهٔ حدس هاج صحبت کنیم. فرض کنید X یک خمینهٔ کهلر باشد، در این صورت با استفاده از تجزیهٔ هاج، داریم

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

در این‌جا $H^{p,q}(X)$ کلاس فرم‌های همساز از نوع (p,q)[4] است. فرض کنید Z زیرخمینهٔ مختلط از X و $i : Z \to X$ نگاشت شمول باشد. فرم (p,q) دلخواه α را می‌توان با واکشیدن[5] به‌روی Z انتگرال گرفت. حول نقطهٔ دلخواه از Z می‌توان مختصات z_1، ...، z_n را انتخاب کرد که Z موضعاً با معادلات $z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$ داده شود. اگر $p > k$، آن‌گاه α شامل dz_i خواهد بود که z_i به صفر واکشیده می‌شود. به‌طور مشابه برای $q > k$ نیز α به صفر واکشیده می‌شود. پس اگر $(p,q) \neq (k,k)$، انتگرال α صفر می‌شود. از طرف دیگر، مقدار انتگرال برابر ضرب کمانی[6] کلاس همولوژی Z با α است. اگر دوگان پوانکارهٔ Z را با $[Z]$ نشان دهیم، این انتگرال را می‌توان با اثر دادن ضرب ناوی[7] $[Z]$ و α روی کلاس اساسی X نیز به‌دست آورد. با توجه به محاسبهٔ بالا اگر $[Z]$ را در کلاس از نوع $(p,q) \neq (k,k)$ ضرب ناوی کنیم، صفر حاصل می‌شود. چون تجزیهٔ هاج در بیشترین درجه بدیهی است، یعنی $H^{2n}(X, \mathbb{C}) = H^{n,n}(X)$، کلاس کوهمولوژی $[Z]$ می‌بایست از

---

1) René Thom 2) Kähler Manifold 3) Hodge decomposition

۴) کلاس‌های کوهمولوژی که در پایهٔ مختلطی مثل $\{z_1, \ldots, z_n\}$ از ترکیب خطی فرم‌های دیفرانسیلی که از ضرب یک تابع همساز در $dz_{i_1} \wedge \cdots dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \cdots d\bar{z}_{j_q}$ به‌دست می‌آیند، تولید می‌شوند.

5) pullback 6) cap product 7) cup product

نوع $(n-k, n-k)$ باشد. حال سؤال طبیعی که هاج مطرح کرده این است که

کدام کلاس‌های کوهمولوژی در $H^{k,k}(X)$ از دوگان زیرخمینهٔ مختلط Z القا می‌شود؟

کلاس‌های کوهمولوژیی که در گروه $H^{2k}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{k,k}(X)$ قرار دارند را کلاس هاج می‌نامیم.

حدس هاج این است که هر کلاس هاج در خمینهٔ افکنشی مختلط X از ترکیب خطی با ضرایب گویا از کلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط القا می‌شود، به‌دست می‌آید. این حدس ابتدا با ضرایب در $\mathbb{Z}$ بود که در این مقاله با استفاده از ایده‌های اتیا و هیتزبروخ مثال نقضی در رد حدس در این حالت خواهیم ساخت. اولین نتیجهٔ شاخص در راستای حدس هاج، قضیه کلاس $(1,1)$ منسوب به لفشتز[1] است: هر عضو $H^{2}(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ از ترکیب خطی با ضرایب صحیح از کلاس‌های کوهمولوژیی که از زیرخمینه‌های مختلط با نقص بعد ۱ القا می‌شود، به‌دست می‌آید. اثبات ساده‌ای با استفاده از کوهمولوژی بافه[2] برای این قضیه وجود دارد. با توجه به نظریهٔ هاج، دورام[3] و دولبو[4]، به‌خاطر طبیعی بودن[5] کوهمولوژی‌ها، نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{array}{ccc} H^p(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H^p(X,\mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p_{dR}(X,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi_{0,p}} & H^{0,p}(X,\mathcal{O}) \end{array}$$

در بالا $\mathcal{O}$ بافهٔ نگاشت‌های هلومورف روی خمینه است و $\pi_{0,p}$ افکنش فرم هارمونیک (که همدستهٔ همان فرم مشخصی است که می‌خواهیم $\pi_{0,p}$ را رویش اثر دهیم) روی مولفهٔ $(0,p)$ تجزیهٔ هاج است. حال فرض کنید $x \in H^{1,1}(X) \cap H^{2}(X,\mathbb{Z})$. با توجه به نمودار جابه‌جایی بالا، داریم

$$i_*(x) = 0$$

از دنبالهٔ دقیق بلند کوهمولوژیی که به دنبالهٔ دقیق کوتاه بافه‌های

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

نسبت داده می‌شود ($\mathcal{O}^*$ بافهٔ توابع هولومورفی است که هیچ‌جا صفر نمی‌شوند)،

$$H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots$$

نتیجه می‌شود که x باید از $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ آمده باشد. اما این گروه، متناظر با گروه کلاف‌های خطی

1) Lefschetz 2) Sheaf cohomology 3) de Rham 4) Dolbeault 5) naturality

است. پس با توجه به نگاشت مرز، کلاف خطی $\mathcal{L}$ وجود دارد که $x = c_1(\mathcal{L})$. اما چون اولین کلاس چرن هر کلاف خطی، دوگان پوانکارهٔ صفرهای یک مقطع نوعی[1] از آن کلاف است، حکم بدیهی می‌شود.

با استفاده از قضیهٔ سخت لفشتز که در ادامه صورت ساده‌ای(!) از آن را بیان خواهیم کرد، واضح است که اگر حدس هاج برای کلاس هاج درجهٔ p صادق باشد، برای درجهٔ $2n - p$ نیز صادق است. فرض کنید X خمینهٔ افکنشی مختلط باشد. منظور از مقطع ابرصفحهٔ X، تقاطع X با ابرصفحهٔ نوعی است. دوگان مقطع ابرصفحهٔ X را با η نشان‌می‌دهیم و عملگر L را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Lz = z \cdot \eta, \quad z \in H^i(X, \mathbb{C})$$

قضیهٔ سخت لفشتز حاکی است که برای هر k، عملگر

$$L^k : H^{n-k}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k}(X, \mathbb{C})$$

یکریختی است. پس با توجه به قضیهٔ کلاس $(1, 1)$ لفشتز و قضیهٔ سخت لفشتز، حدس هاج برای کلاس هاج درجهٔ $2n - 2$ نیز برقرار است.

پس از این مقدمه از هندسهٔ مختلط و توضیح مانعی که هاج برای تحلیلی بودن یک دور عنوان کرد، مانع توپولوژیک مهمی پیدا می‌کنیم که به ما کمک می‌کند تا برای حدس هاج وقتی ضرایب در $\mathbb{Z}$ باشند، مثال نقض بسازیم.

۳. مشخصهٔ چرن[2] و نظریهٔ مانع[3]

در این بخش، با استفاده از مشخصهٔ چرن، نظریهٔ مانع را برای K ــ تئوری ارائه می‌کنیم. مشخصهٔ چرن، همریختی حلقه‌ای بین $K(X)$ (گروه گروتندیک[4] کلاف برداری روی X) و $H^{*,even}(X, \mathbb{Q})$ است. اگر $X = S^{2n}$، آن‌گاه تصویر مشخصهٔ چرن، ch، $H^*(S^{2n}, \mathbb{Z})$ می‌شود. برای هر کلاف E روی S^{2n} داریم

$$\mathrm{ch}\ (E) = \mathrm{rank}(E) + \frac{c_n(E)}{(n-1)!}.$$

---

1) generic 2) Chern character 3) Obstruction theory

۴) E_f کلافی است که از f به‌دست می‌آید.

فرض کنید E کلاف $\mathbb{C}^n$ روی S^{2n} با مقطع سرتاسری φ باشد. از توپولوژی دیفرانسیل می‌دانیم $c_n(E)[S^{2n}] = \sum_p \mathrm{index}_p \varphi$ که جمع روی صفرهای φ است. کلاف $\mathbb{C}^n$ روی S^{2n} توسط نگاشت

$$f : S^{2n-1} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

که در واقع عضو $\pi_{2n-1}(GL(n, \mathbb{C}))$ است، داده می‌شود:

$$f : x \longrightarrow (f^1(x), \ldots, f^n(x)) \in GL(n, \mathbb{C}).$$

f نگاشت $x \longrightarrow \frac{f^1(X)}{\|f^1(X)\|}$ را القا می‌کند که از S^{2n-1} به خودش است. درجهٔ این نگاشت برابر است با $c_n(E_f)[S^{2n}]$ که برای N های بزرگ همسانریختی $\pi_{2n-1}(GL(N, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ را به‌دست می‌دهد.

فرض کنید E کلافی روی CW ـ مجتمع X باشد و همچنین $\dim E = \dim X = 2k$. ۲. اگر E روی سلول $2k - 1$ بعدی بدیهی باشد، یعنی $E|_{X^{2k-1}} = I_k$، آن‌گاه E روی هر قرص $2k$ بعدی e^{2k} که به X^{2k-1} می‌چسبد تا X^{2k} را بسازد، نیز بدیهی است. از مقایسهٔ این دو بدیهی‌سازی روی $S^{2k-1} = \partial e^{2k}$، نگاشتی $\alpha_E : S^{2k-1} \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$ که در واقع عضوی از $\pi_{2k-1}(GL(k, \mathbb{C}))$ است، به‌دست می‌آید. عضو η_E در گروه پادزنجیر $C^{2k}(X, \mathbb{Z}) = C^{2k}(X, \pi_{2k-1}(GL(k, \mathbb{C})))$ را این طور تعریف می‌کنیم که روی e^{2k} همان عضو α_E از $\pi_{2k-1}(GL(K, \mathbb{C}))$ باشد که بالاتر تعریف کردیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $(k - 1)!\, \eta_E = c_k(E)$. در حالتی که $\dim_{\mathbb{C}} E > k$ نیز می‌توان E را به کلاف بدیهی و کلافی که بُعدش k باشد، شکافت که آن کلاف را با E' نمایش می‌دهیم (علت این ادعا فراتر از هدف این مقاله است) که در این حالت $\eta_E \in C^{2k}(X, \pi_{2k-1}(GL(\dim E, \mathbb{C})))$ و دوباره رابطهٔ $(k - 1)!\, \eta_E = c_k(E)$ برقرار است. حال فرض کنید $\eta \in C^{2k}(X, \mathbb{Z})$. برای r به‌قدر کافی بزرگ، می‌توانیم کلاف برداری $\mathrm{Vec}_r(X^{2k})$ را طوری پیدا کنیم که

$$(k - 1)!\, \eta = c_k(E).$$

فرض کنید تحدید E بر X^{2k-1} بدیهی باشد و همچنین روی هر سلول $2k$ ـ بعدی و e^{2k} که از روی ∂e^{2k} به X^{2k-1} می‌چسبد، نیز بدیهی است. مقایسهٔ این دو بدیهی‌سازی، عضوی در $\pi_{2k-1}(GL(r, \mathbb{C}))$ القا می‌کند که همان $\eta(e^{2k})$ است. با توجه به آنچه که گفته شد، می‌دانیم

$$(k - 1)!\, \eta = c_k(E)|_{X^{2k}}.$$

کلاف E توسط نگاشت رده‌بندی

$$\psi : X^{2k} \longrightarrow \mathrm{Grass}(r, 2r)$$

به‌دست می‌آید[1]. مانع برای گسترش ψ به X^{2k+1}، عضوی است از گروه پادزنجیر $C^{2k+1}(X^{2k+1}, \pi_{2k}(\mathrm{Grass}(r, 2r)))$ که آن را با η_ψ نشان می‌دهیم $\eta_\psi = \delta\eta$. توجه کنید که $\eta_\psi(e^{2k+1})$ عضوی از $\pi_{2k}(\mathrm{Grass}(r, 2r))$ است که توسط $\psi|_{\partial e^{2k+1}}$ تعریف می‌شود. $\eta_\psi(e^{2k+1}) = 0$ اگر و تنها اگر ψ را بتوان به سلول e^{2k+1} گسترش داد. پس اگر η پاد دور باشد، ψ را می‌توان به X^{2k+1} گسترش داد.

η_ψ را می‌توان به‌عنوان پادزنجیر در k ـ گروه تعبیر کرد:

$$\eta_\psi(e^{2k+1}) = E - I_r|_{\partial e^{2k+1}} \in \tilde{K}(S^{2k})$$

که به‌روشنی مانع برای گسترش ψ به گراسمانیان است. از طرف دیگر، چون $E - I_r$ در پوچی نگاشت طبیعی $K(X^{2k}) \longrightarrow K(X^{2k-1})$ قرار می‌گیرد، پس می‌توان به آن به‌چشم عضوی از $\tilde{K}(X^{2k}/X^{2k-1}) = K(X^{2k}, X^{2k-1})$ نگریست. حال $\eta(e^{2k})$ عضوی از $\tilde{K}(S^{2k})$ است که از واکشیدن[2] $E - I_r$ توسط نگاشت

$$\frac{e^{2k}}{\partial e^{2k}} \longrightarrow \frac{X^{2k}}{X^{2k-1}}$$

القا شده است. در نتیجه $\eta_\psi = \delta\eta$.

در ادامهٔ این بخش، احکامی دربارهٔ دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ که به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم. برای مطالعهٔ طرز ساخت دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ، به مقالهٔ [2] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲ برای CW ـ مجتمع متناهی X، دنبالهٔ طیفی $\{E_r, d_r\}$ وجود دارد که

$$E_2^{p,q} = H^p(X, K^q(point))$$

و

$$E_\infty^{p,q} = \frac{F_p K^{p+q}(X)}{F_{p+1} K^{p+q}(X)}$$

---

۱) خمینهٔ گراسمانیان $\mathrm{Grass}(r, 2r)$ زیرفضای خطی r بعدی در $\mathbb{C}^{2r}$ است.

که در آن، $F_pK^j(X)$ پالایشی [1] از $K^j(X)$ است،

$$F_pK^j(X) = \ker(K^j(X) \longrightarrow K^j(X^{p-1}))$$

و مشتق‌های این دنباله طیفی با تعلیق [2] جابه‌جا می‌شوند.

برای هر دو عدد صحیح p و q که $q \geq p$ تعریف می‌کنیم:

$$K(p,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} K^n(X^p, X^q).$$

در این صورت $E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}}$ که

$$\begin{aligned} B_r^{p,q} &= \ker(K^{p+q}(p,p-1) \longrightarrow K^{p+q}(p,p-r)), \\ Z_r^{p,q} &= \ker(K^{p+q}(p,p-1) \xrightarrow{\delta} K^{p+q+1}(p+r-1,p)). \end{aligned}$$

با استفاده از قضیهٔ تناوب بات [3]، داریم

$$E_1^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-1}) = \begin{cases} C^p(X,\mathbb{Z}) & \text{اگر } q \text{ زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

d_1 (مشتق اول دنبالهٔ طیفی) همان نگاشت پادمرز $C^p(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(X,\mathbb{Z})$ است، اگر q زوج باشد. پس برای q زوج داریم

$$E_1^{p,q} = K^{p+q}(X^p, X^{p-1}) \cong C^p(X,\mathbb{Z}) \cong H^p(X^p, X^{p-1})$$

اما می‌دانیم نگاشت مشخصهٔ چرن در این حالت:

$$\mathrm{ch} : K^p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\cong} H^p(X^p, X^{p-1})$$

یکریختی است. در دومین صفحهٔ دنباله طیفی داریم

$$E_2^{2p,0} \xrightarrow{\cong} H^{2p}(X,\mathbb{Z})$$

که به‌صورت زیر داده شده است:

$$\xi \in Z_2^{2p,0} = \ker(K^{2p}(X^{2p}, X^{2p-1}) \longrightarrow K^{2p+1}(X^{2p+1}, X^{2p})).$$

1) Filtration 2) Suspension 3) Bott periodicity formula

ξ به‌شکل $[E]-[I_r]$ است؛ در این‌جا E، کلاف با تار $\mathbb{C}^r$ روی $X^{۲p}$ است که روی $X^{۲p-۱}$ بدیهی و قابل گسترش به $X^{۲p+۱}$ است. با توجه به مطالب بخش قبل، می‌دانیم گسترش به $X^{۲p+۱}$ معادل است با صفر شدنِ $\delta \mathrm{ch}_p(\xi)$ و ch_p، p ـ امین مؤلفهٔ ch است:

$$ch_p : K(X^{۲p}, X^{۲p-۱}) \longrightarrow H^{۲p}(X^{۲p}, X^{۲p-۱})$$

در نتیجه ξ در تناظر است با $[\mathrm{ch}_p\xi] \in H^{۲p}(X^{۲p+۱}, \mathbb{Z}) = H^{۲p}(X, \mathbb{Z})$. عضو ξ تا ابد در دنبالهٔ طیفی باقی می‌ماند اگر و تنها اگر

$$\xi \in \ker(K^{۲p}(X^{۲p}, X^{۲p-۱}) \longrightarrow K^{۲p+۱}(X, X^{۲p}))$$

یعنی ξ را بتوان به کل X گسترش داد. به این ترتیب

قضیه ۲.۲ برای هر $\alpha \in H^{۲p}(X, \mathbb{Z})$ داریم $\forall k \geq ۰,\ d_{۲k+۱}\alpha = ۰$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\xi \in K(X)$ که روی $X^{۲p-۱}$ بدیهی است و «$\mathrm{ch}(\xi) = \alpha +$ کلاس‌های مرتبهٔ بالاتر».

۳. بافهٔ منسجم[1]

در این بخش، قضیه‌های کارتان دربارهٔ بافه‌های منسجم را که به قضیه‌های A و B شهرت دارند، بدون اثبات بیان می‌کنیم و در بخش‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید X خمینهٔ تحلیلی حقیقی از بُعد n و $\mathcal{O}$ جوانهٔ[2] توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X است. می‌دانیم $\mathcal{O}$ بافه‌ای منسجم است، یعنی coker نگاشتی بین بافه‌های $\mathcal{O}$ ـ مدول آزاد است.

گزاره ۱.۳ اگر S بافهٔ منسجم $\mathcal{O}$ ـ مدول باشد، قضیه‌های A و B کارتان برقرارند، یعنی برای هر $x \in X$ تصویر $H^{\circ}(X, S)$ در S_x، S_x را به‌عنوان $\mathcal{O}$ ـ مدول تولید می‌کند و $H^q(X, S) = ۰$ برای $q \geq ۱$.

گزاره ۲.۳ اگر S یک بافهٔ منسجم $\mathcal{O}$ ـ مدول باشد و A زیرمجموعهٔ فشرده از X، آن‌گاه دنباله‌ای از بافه‌های منسجم به‌صورت

$$۰ \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{\circ} \longrightarrow S \longrightarrow ۰$$

وجود دارد به‌طوری که در هر $x \in A$، این دنباله دقیق و هر $(L_i)_x$ آزاد است.

حال اگر X خمینهٔ مختلط باشد و $\mathcal{B}$ بافهٔ جوانهٔ توابع هلومورف روی X، آن‌گاه X خمینهٔ تحلیلی

1) Coherent Sheaves 2) germ

حقیقی نیز هست. اگر T بافه‌ای دلخواه از $\mathcal{B}$ ـ مدول‌ها باشد، قرار می‌دهیم $T^\circ = T \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{O}$. به‌راحتی می‌توان دید که اگر T بافه‌ای منسجم از $\mathcal{B}$ ـ مدول‌ها باشد، T° بافه‌ای منسجم از $\mathcal{O}$ ـ مدول‌ها خواهد بود.

حال تجزیهٔ[1] گروتندیک[2] برای بافه‌ها را می‌توانیم معرفی کنیم. فرض کنید V فضای برداری مختلط با بعد q باشد. دوگان V را با V^* نمایش می‌دهیم و i ـ امین ضرب خارجی V را با $\lambda^i(V)$. همریختی ضرب داخلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} V^* \otimes \lambda^i(V) &\longrightarrow \lambda^{i-1}(V) \\ f \otimes x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_i &\longrightarrow \textstyle\sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{i+j} f(x_j) x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_j \wedge \ldots \wedge x_i. \end{aligned}$$

در این‌جا منظور از $\hat{x}_j$ این است که x_j را حذف می‌کنیم.

گزاره ۳.۳ گیریم V فضای برداری مختلط با بعد q و V^* دوگان آن باشد. فرض کنید s مقطع ناصفر از V^* است. همریختی $\alpha_i : \lambda^i(V) \longrightarrow \lambda^{i-1}(V)$ را ضرب داخلی در مقطع s تعریف می‌کنیم. در این صورت دنبالهٔ دقیق

$$0 \longrightarrow \lambda^q(V) \xrightarrow{\alpha_q} \lambda^{q-1}(V) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} \lambda^0(V) \longrightarrow 0$$

را داریم.

اثبات: پایهٔ $\{e_1, \ldots, e_q\}$ را برای V انتخاب کنید طوری که $s(e_1) = 1$ و $s(e_i) = 0$ برای هر $i > 1$. در این صورت روشن است که هر دو زیرفضای $\ker \alpha_r$ و $\mathrm{Im}\alpha_{r+1}$ توسط اعضای $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ تولید می‌شوند که $2 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq q$. در نتیجه این دنباله، دقیق است. $\square$

چون ضرب داخلی، تابعگون است، حکم قبل برای کلاف‌های برداری نیز صادق است.

گزاره ۴.۳ اگر E کلاف برداری مختلط پیوسته با بعد q روی فضای X باشد و s مقطع E که هیچ جا صفر نمی‌شود، آن‌گاه دنبالهٔ دقیق از فضاهای برداری وجود دارد:

$$0 \longrightarrow E_q \xrightarrow{\alpha_q} E_{q-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_0} E_0 \longrightarrow 0$$

که $E_i = \lambda^i(E^*)$ و α_i ضرب داخلی در مقطع s هستند.

فرض کنید E کلاف برداری مختلط با بعد q را نمایش دهد که تحلیلی حقیقی نیز هست.

1) resolution 2) Grothendieck

اگر $s : X \longrightarrow E$ مقطع تحلیلی حقیقی از E باشد، بافهٔ S از صفرهای s را این گونه تعریف می‌کنیم: E را موضعاً به‌صورت $X\tilde{\mathbb{C}}^q$ نمایش می‌دهیم که s در واقع توسط q تابع $s_i : X \longrightarrow \mathbb{C}$ داده می‌شود. تعریف می‌کنیم $S = \frac{\mathcal{O}}{(s_1,\ldots,s_q)}$. این تعریف از نمایش موضعی E مستقل است. فرض کنید E_i و α_i ها مانند گزاره تعریف شده باشند. گیریم L_i بافهٔ موضعاً آزاد در تناظر با E_i باشد (توجه کنید کلاف‌های برداری، بافه‌های موضعاً آزاد هستند):

$$0 \longrightarrow L_q \xrightarrow{\alpha_q} L_{q-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} S \longrightarrow 0. \qquad (8)$$

در این‌جا $L_0 = \mathcal{O}$ و $\varepsilon : L_0 \longrightarrow S$ نگاشت طبیعی است. در نقطهٔ x که $s(x) \neq 0$ داریم $S_x = 0$ و (۱) دنبالهٔ دقیق است. فرض کنید s دارای این خاصیت است که برای x که $s(x) = 0$، یکریختی موضعی $E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^q$ در همسایگی x وجود دارد به‌طوری که اگر جوانهٔ s_x را توسط جوانهٔ s_i ها که $(1 \leq i \leq q) s_i \in \mathcal{O}_x$ نمایش دهیم. آن‌گاه s_i در $\frac{\mathcal{O}}{(s_1\ldots,s_{i-1})}$ مقسوم‌علیه صفر نیست. در این صورت دنباله (۱) در حالت $s(x) = 0$ نیز دقیق است.

۴. کلاف تفریق

فرض کنید X یک CW ـ مجتمع متناهی و Y زیرمجتمع آن باشد. E و F کلاف‌های برداری روی X و α یکریختی کلافی $E|_Y \xrightarrow{\alpha} F|_Y$ است. می‌خواهیم به هر سه‌تایی (E, F, α) عضوی از $K^\circ(X, Y)$ را نسبت دهیم. بازهٔ بستهٔ واحد را با I نمایش می‌دهیم. زیرفضای A از $X \times I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{X \times 0\} \cup \{X \times 1\} \cup \{Y \times I\}.$$

روی A کلاف برداری L قرار می‌دهیم به‌طوری که تحدیدش به $X \times 1$، E و تحدیدش به $X \times 0$، F می‌شود و روی $Y \times I$ توسط α به هم متصل می‌شوند. به بیان دقیق‌تر

$$\begin{aligned} &I_0 = I - \{0\}, \quad I_1 = I - \{1\}, && I_{01} = I_0 \cap I_1 \\ &A_0 = X \times 0 \cup Y \times I_1, && E_0 = F \\ &A_1 = X \times 1 \cup Y \times I_0, && E_1 = E \end{aligned}$$

فرض کنید $f_i : A_i \longrightarrow X$ از افکنش $X \times I \longrightarrow X$ القا شده باشد. $f_i^*(E_i)$ کلافی روی مجموعهٔ باز A_i است و α یکریختی $f_0^*(E_0) \longrightarrow f_1^*(E_1)$ را روی مجموعهٔ باز $A_0 \cap A_1 = Y \times I_{01}$ القا می‌کند که کلاف مورد نظر را روی A می‌دهد. این کلاف عضوی از $K^\circ(A)$ است که آن را با ξ

نمایش می‌دهیم. از دنبالهٔ دقیق

$$K^{\circ}(X \times I) \longrightarrow K^{\circ}(A) \xrightarrow{\delta} K^{1}(X \times I, A)$$

به‌دست می‌آوریم $\delta\xi \in K^{1}(X \times I, A)$. چون

$$(X \times I)/A = S(\frac{X}{Y}), \qquad K^{1}(S(\frac{X}{Y})) \cong K^{\circ}(X,Y)$$

پس $\delta\xi$ عضوی از $K^{\circ}(X,Y)$ است. این عضو را با $d(E,F,\alpha)$ نشان می‌دهیم و کلاف تفریق می‌نامیم.

گزاره ۱.۴ (i) $d(E,F,\alpha)$ تابعگونی است، یعنی اگر $f:(X',Y') \longrightarrow (X,Y)$ نگاشت دلخواه باشد، آن‌گاه $d(f^{*}E, f^{*}F, f^{*}\alpha) = f^{!}d(E,F,\alpha)$؛

(ii) $d(E,F,\alpha)$ تنها به ردهٔ هموتوپی α بستگی دارد؛

(iii) اگر $Y = \phi$، آن‌گاه $d(E,F,\alpha) = E - F$؛

(iv) اگر $f^{!}: K^{*}(X,Y) \longrightarrow K^{*}(X)$ نگاشت طبیعی باشد، $f^{!}d(E,F,\alpha) = E - F$؛

(v) اگر α به یکریختی $E \longrightarrow F$ روی X گسترش پیدا کند، در این صورت $d(E,F,\alpha) = \circ$؛

(vi) $d(E \oplus E', F \oplus F', \alpha \oplus \alpha') = d(E,F,\alpha) + d(E',F',\alpha')$؛

(vii) $d(F,E,\alpha^{-1}) = -d(E,F,\alpha)$؛

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، $d(E \otimes D, F \otimes D, \alpha \otimes 1) = d(E,F,\alpha).D$، که در سمت راست رابطه، از ساختار $K^{\circ}(X)$ ـ مدول $K^{\circ}(X,Y)$ استفاده کرده‌ایم.

اثبات: (i) از تعریفِ $d(E,F,\alpha)$ نتیجه می‌شود. فرض کنید π افکنش $X \times I \xrightarrow{\pi} X$ و $i_t : X \longrightarrow X \times I$ شمول $x \longrightarrow (x,t)$ باشد. یک هموتوپی α_t از یکریختی کلافی $E|_Y \longrightarrow F|_Y$ طبق تعریف، یکریختی

$$\beta : \pi^{*}E|_{Y \times I} \longrightarrow \pi^{*}F|_{Y \times I}$$

را القا می‌کند. پس

$$\begin{aligned} d(E,F,\alpha_{\circ}) &= d(i_{\circ}^{*}\pi^{*}E, i_{\circ}^{*}\pi^{*}F, i_{\circ}^{*}\beta) \\ &= i_{\circ}^{!}d(\pi^{*}E, \pi^{*}F, \beta) \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه، $d(E,F,\alpha_{1}) = i_{1}^{!}d(\pi^{*}E, \pi^{*}F, \beta)$. چون $i_{\circ} \simeq i_{1}$ و $K^{\circ}(X,Y)$ تحت هموتوپی ناورداست، پس $d(E,F,\alpha_{\circ}) = d(E,F,\alpha_{1})$ و لذا (ii) نیز ثابت می‌شود. برای اثبات (iii)

می‌بایست همریختی

$$\delta : K^0(X \times S^0) \longrightarrow K^1(X \times I, X \times S^0) \cong K^0(X)$$

بسازیم که در آن $S^0 = \{0\} \cup \{1\} \subset I$. با توجه به این‌که $K^0(X \times S^0) \cong K^0(X) \otimes K^0(S^0)$، کافی است حکم را برای وقتی که X فقط یک نقطه دارد ثابت کنیم:

$$\delta : K^0(S) \longrightarrow K^1(I, S^0) \overset{\sigma}{\cong} K^0\ (point).$$

چون δ و نگاشت تعلیق، با ch جابه‌جا می‌شود، پس کافی است

$$\delta : H^0(S^0) \longrightarrow H^1(I, S^0) = H^0\ (point)$$

را در نظر بگیریم. اما $\delta(a_1) = +1$، $\delta(a_0) = 1$، که a_0 و a_1 مولدهای $H^0(S^0, \mathbb{Z})$ متناظر با نقاط ۰ و ۱ هستند. در نتیجه اثبات (iii) کامل است. (iv) و (v) و (vi) و (viii) از سه حکم قبلی به‌سادگی نتیجه می‌شود. حال (vii) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید ξ و η کلاف‌های برداری روی $A = X \times 0 \cup X \times 1 \cup Y \times I$ باشند که توسط (E, F, α) و (F, E, α^{-1}) تعریف شده‌اند. اگر $f : A \longrightarrow A$ نگاشت $x \longrightarrow 1 - x$ روی I باشد، داریم $\eta \cong f^*\xi$. پس $\delta\eta = g^!\delta\xi$ که g نگاشت تعلیق نگاشت $x \longrightarrow 1 - x$ است. اما $g^! = -1$ و چون $\delta\eta = -\delta\xi$، حکم (vii) نتیجه می‌شود.

حال تعریف کلاف تفریق را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید E_0، E_1، ... ، E_n کلاف‌های برداری روی X باشند که

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} 0 \qquad (۹)$$

دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی Y است. تعمیم کلاف تفریق را طوری تعریف می‌کنیم که

$$d(E_0, E_1, \ldots, E_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^0(X, Y).$$

دنبالهٔ دقیق (۲) به دنبالهٔ کوتاه دقیق

$$0 \longrightarrow F_r \longrightarrow E_r \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow 0 \qquad (۱۰)$$

می‌شکند. در این‌جا $F_r = \ker \alpha_r$ که کلاف برداری روی Y است. دنبالهٔ دقیق کوتاه (۳) می‌شکافد و چون هر دو شکافتنی با هم هموتوپ هستند، با انتخاب شکافتنی دلخواه برای هر r، یکریختی‌های

زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda : \sum E_{2k+1} \longrightarrow \sum_r F_r,$$
$$\mu : \sum_k E_{2k} \longrightarrow \sum_r F_r.$$

پس $\alpha = \lambda^{-1}\mu$ یکریختی $\sum E_{2k} \longrightarrow \sum E_{2k+1}$ را القا می‌کند. با توجه به گزارهٔ ۱.۴ (ii)، می‌توانیم عضو یکتا

$$d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = d\left(\sum E_{2k}, \sum E_{2k+1}, \alpha\right) \in K^\circ(X, Y)$$

را تعریف کنیم که به‌طور خلاصه با $d(E_i, \alpha_i)$ نشان می‌دهیم. خواص کلاف تفریق تعمیم‌یافته را در گزارهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

گزاره ۲.۴ (i) $d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تابعگونی است؛

(ii) $d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تنها به کلاس هموتوپی $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ بستگی دارد؛

(iii) اگر $Y = \phi$، در این صورت $d(E_1, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i$؛

(iv) اگر $f^! : K^\circ(X, Y) \longrightarrow K^\circ(X)$ نگاشت طبیعی باشد،

$$f^! d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i;$$

(v) اگر α_1، α_2، ... ، α_n به X توسعه پیدا کند، یعنی دنبالهٔ

$$0 \to E_n \overset{\alpha_n}{\to} E_{n-1} \to \cdots E_1 \overset{\alpha_1}{\to} E_0 \to 0$$

روی X دقیق باشد، داریم

$$d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0;$$

(vi) $d(E_i, \alpha_i) + d(E'_i, \alpha'_i) = d(E_i \oplus E'_i, \alpha_i \oplus \alpha'_i)$؛

(vii) $d(0, E_0, \ldots, E_n; 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -d(E_0, \ldots, E_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$؛

(viii) اگر D کلاف برداری روی X باشد، داریم

$$d(E_i \otimes D, \alpha_i \otimes 1) = d(E_i, \alpha_i)D.$$

حال به ساختن کلاف تفریق ویژه‌ای خواهیم پرداخت. فرض کنید X یک CW ـ مجتمع متناهی و E کلاف برداری مختلط روی X با بُعد q باشد. کلاف کرهٔ واحد و قرص واحد E را به‌ترتیب با A° و A نمایش می‌دهیم. اگر $\pi : A \longrightarrow X$ نگاشت افکنشی باشد، در این صورت π^*E مقطعی دارد که هیچ‌جاروی A° صفر نمی‌شود. پس با استفاده از گزارهٔ ۴.۳ روی A°، دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری

$$۰ \longrightarrow F_q \xrightarrow{\alpha_q} F_{q-۱} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_۱} F_۰ \longrightarrow ۰$$

را داریم که $F_i = \pi^*\lambda^i(E^*)$. در نتیجه عضو زیر در $K^\circ(A, A^\circ)$ خوش‌تعریف است:

$$d(F_۰, F_۱, \ldots, F_q; \alpha_۱, \ldots, \alpha_q) \in K^\circ(A, A^\circ).$$

گزاره ۳.۴ فرض کنید E کلاف برداری مختلط روی CW ـ مجتمع متناهی X باشد و A و A° مانند بالا تعریف شده باشند. کلاف تفریق $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ را با ξ نشان می‌دهیم. در این صورت $\mathrm{ch}\xi = \varphi_*\mathcal{T}(E)^{-۱}$ که φ_* همریختی جیسین[1] و $\mathcal{T}$ کلاس تاد[2] است.

اثبات: می‌دانیم $d(\pi^*\lambda^i(E^*), \alpha_i)$ تابعگونی است، در نتیجه کافی است حکم را برای کلاف عام[3] ثابت کنیم. پس فرض کنید X فضای عام برای $U(q)$ باشد (فضای عام برای گروه G، CW ـ مجتمع متناهی نیست، اما می‌توانیم فضایی انتخاب کنیم که نوع هموتوپی آن تا سلول N ـ بعدی با فضای عام یکسان باشد و بعد N را به‌قدر کافی بزرگ کنیم). با استفاده از گزارهٔ ۲.۴ می‌دانیم اگر تصویر ξ را در $K^\circ(A) \cong K^\circ(X)$ با η نمایش دهیم، آن‌گاه

$$\eta = \sum(-۱)^i\lambda^i(E^*)$$

که جمع بالا روی همهٔ ترکیب‌های $i_۱$، $i_۲$، …، i_r که $۱ \leq i_۱ < \cdots < i_r \leq q$ گرفته می‌شود. در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{r=۰}^{q}(-۱)^r ch\lambda^r E^* &= \prod_{i=۱}^{q}(۱ - e^{-\gamma_i}) \\ &= (\gamma_۱ \ldots \gamma_q)\prod_{i=۱}^{q}\frac{۱ - e^{-\gamma_i}}{\gamma_i} \\ &= c_q(E)\mathcal{T}(E)^{-۱}.\end{aligned}$$

---

1) homomorphism Gysin 2) Todd class 3) universal bundle

اما اگر $\sum_{j=\circ}^{q} c_j(E)x^j = \prod_{i=1}^{q}(1 + \gamma_i x)$ که $c_j(E)$ کلاس‌های چرن E هستند، آن‌گاه داریم

$$\mathrm{ch}\ \lambda^r E^* = \sum e^{-(\gamma_{i_1}+\cdots+\gamma_{i_r})}.$$

از طرف دیگر، تصویر طبیعی $H^*(BU(q), BU(q-1), \mathbb{Q})$ در $H^*(BU(q), \mathbb{Q})$ یکریخت است با ایدآل تولید شده توسط $c_q(E)$ و همچنین بنابر تعریف همریختی جیسین، $\varphi_*(x)$ به $c_q(E)x$ می‌رود. پس $\mathrm{ch}\ \xi = \varphi_* \mathcal{T}^{-1}(E)$.

۵. عنصر گروتندیک

در این بخش، با ارتباط دادن مطالب دو بخش قبل برای هر بافهٔ منسجم، عنصری در K ـ گروه موسوم به عنصر گروتندیک می‌سازیم که در اثبات قضیهٔ گروتندیک ـ ریمان ـ رخ مفهوم کلیدی به‌حساب می‌آید. فرض کنید X خمینهٔ تحلیلی حقیقی و $\mathcal{O}$ بافهٔ جوانهٔ توابع تحلیلی حقیقی با مقادیر مختلط روی X باشد. برای هر زیرفضای Y از X و بافه منسجم S از $\mathcal{O}$ و مدول‌های روی X که محمل آن‌ها در Y است، عنصر $K^\circ(X, X-Y) \ni \gamma_Y(S)$ نسبت خواهیم داد. برای تعریف $\gamma_Y(S)$، ابتدا باید عنصر $K^\circ(A, B) \ni f^!\gamma_Y(S)$ را بر هر نگاشت $f : (A, B) \longrightarrow (X, X-Y)$ که (A, B) زوج مجتمع‌های متناهی است، تعریف کنیم. چون $f(A) \subset X$ فشرده است، می‌توانیم باز $f(A) \subset U$ را که $\bar{U}$ فشرده است، انتخاب کنیم. حال از گزارهٔ ۲.۳ استفاده می‌کنیم منتها به‌جای A، $\bar{U}$ را جایگزین می‌کنیم و سپس دنباله را به U تحدید می‌کنیم. پس دنبالهٔ دقیق از بافه‌ها روی U به‌صورت

$$\circ \longrightarrow L_n \xrightarrow{\alpha_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} L_\circ \xrightarrow{\alpha_\circ} S \longrightarrow \circ$$

به‌دست می‌آید. در این‌جا L_i ها بافه‌های موضعاً آزاد هستند. فرض کنید E_i ها کلاف‌های برداری مختلط متناظر با L_i ها باشند. چون محمل S در Y است، دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی $U - U \cap Y$ به‌دست می‌آوریم:

$$\circ \longrightarrow E_n \xrightarrow{\alpha_n} E_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} E_\circ \longrightarrow \circ.$$

توجه کنید که $f(B) \subset U - U \cap Y$، پس دنبالهٔ دقیق از کلاف‌های برداری روی B القا می‌شود. در نتیجه می‌توانیم تعریف کنیم

$$f^!\gamma_Y(S) = d(f^*E_\circ, \ldots, f^*E_n; f^*\alpha_1, \ldots, f^*\alpha_n).$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $f^!\gamma_Y(S)$ به تجزیهٔ افکنشی S و به انتخاب باز U بستگی نداشته و تنها به ردهٔ هموتوپی f وابسته است. پس با توجه به گزارهٔ ۲.۴ (i)، $f^!\gamma_Y(S)$ به‌خاطرِ طبیعی بودنِ تعمیم کلاف تفریق، عضو $\gamma_Y(S)$ را به‌طور یکتا در $K^\circ(X, X-Y)$ مشخص می‌کند.

گزاره ۱.۵ فرض کنید X قرص باز $\sum_1^n |z_i|^2 < 1$ در $\mathbb{C}^n$ و Y زیرفضایی از X باشد که با معادله‌های $z_i = 0$ $(1 \leq i \leq q)$ داده شده است. فرض کنید $\mathcal{B}_Y$ بافهٔ توابع هولومورف روی Y (که روی $X - Y$ صفر است) باشد: $\mathcal{B}_Y^\circ = \mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{O}_X$. در این صورت داریم

$$\mathrm{ch}\ \gamma_Y(\mathcal{B}^\circ) = u$$

که u مولد $H^{2q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ متناظر با Y است.

اثبات: چون $\mathcal{B}_Y^\circ = \frac{\mathcal{O}_X}{(z_1,\dots,z_q)}$، می‌توانیم از نکته‌ای که در انتهای بخش ۳ آوردیم برای کلاف بدیهی $E = X \times \mathbb{C}^q$ استفاده کنیم. در این صورت، تجزیه‌ای از $\mathcal{B}_Y^\circ$ به‌دست می‌آوریم. این تجزیه را به قرص

$$A: \quad \sum_{i=1}^{q} |z_i|^2 \leq \frac{1}{2}, \quad z_i = 0 \ (i > q)$$

تحدید می‌کنیم. با استفاده از گزارهٔ ۳.۴ به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{ch}\ \gamma_Y(\mathcal{B}^\circ) = u$$

که $u \in H^{2q}(A, A^\circ; \mathbb{Z})$ مولد متناظر با دوگان Y است. چون

$$H^{2q}(A, A^\circ; \mathbb{Z}) \cong H^{2q}(X, X-Y; \mathbb{Z}),$$

پس حکم نتیجه می‌شود.

۶. دورهای تحلیلی

در این بخش توضیح می‌دهیم که چگونه مشکل فنی در تعریف ردهٔ همولوژی یا کوهمولوژی تحلیلی مختلط را رفع می‌کنیم. به این منظور، از گزاره‌های مقدماتی و کلاسیک زیر استفاده می‌کنیم.

گزاره ۱.۶ گیریم X خمینهٔ مشتق‌پذیر و Y زیرخمینهٔ بسته از نقص بعد k و $f: A \longrightarrow X$ نگاشتی از CW ـ مجتمع متناهی A با بُعد کمتر از k به X باشد. در این صورت با هموتوپی به‌قدر دلخواه کوچک، می‌توان f را با g هموتوپ کرد که $g(A) \subseteq X - Y$.

گزاره ۲.٦ گیریم X خمینهٔ مختلط و Y زیرخمینهٔ تحلیلی با مقادیر مختلط از X با نقص بُعد مختلط q و (A, B) زوج CW ــ مجتمع متناهی با بُعد کمتر از $2q$ باشد. در این صورت برای هر نگاشت $f : (A, B) \longrightarrow (X, X - Y)$ می‌توان نگاشت g هموتوپ با f را پیدا کرد که $g(A) \subseteq X - Y$.

گزاره ۳.٦ فرض X و Y مانند گزاره قبل باشند. در این صورت $i : X - Y \longrightarrow X$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$i^* : H^r(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^r(X - Y; \mathbb{Z}), \quad 0 \leq r \leq 2q - 2.$$

اثبات: اگر A یک CW ــ مجتمع متناهی باشد و $f : A \longrightarrow X$ نگاشت دلخواه، از گزارهٔ ۲.٦ برای زوج $(A^{2q-1}, \emptyset)$ که A^i سلول i ــ بعدی A است، نتیجه می‌گیریم f با نگاشت g هموتوپ است که $g(A^{2q-1}) \subseteq X - Y$. پس i^* یک‌به‌یک است. حال گزارهٔ ۲.٦ را برای زوج $(A^{2q-2} \times I, A^{2q-2} \times 0 \cup A^{2q-2} \times 1)$ به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که کلاس هموتوپی $g : A^{2q-2} \longrightarrow X - Y$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ f معین می‌شود. پس i^* پوشا نیز هست.

حال با استفاده از گزارهٔ قبل، کلاس دوگان زیرفضای تحلیلی را تعریف می‌کنیم. فرض کنید X خمینهٔ همبند مختلط و Y زیرفضای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) از نقص بُعد q در X باشد. اگر W زیرفضای تکین Y باشد، می‌بایست نقص بعدش بزرگتر از یا مساوی با $q + 1$ باشد. پس اگر گزارهٔ قبل را برای X و W به‌کار ببریم، داریم

$$i^* : H^{2q}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q}(X - W, \mathbb{Z}).$$

i^* یکریختی است، اما از طرفی، $Y - W$ زیرخمینهٔ بسته از $X - W$ است و هر دو به‌طور طبیعی به‌خاطرِ ساختار مختلط، جهت‌دار هستند. پس $Y - W$ کلاسی مانند $y'' \in H^{2q}(X - W, \mathbb{Z})$ را تعریف می‌کند.

گزاره ۴.٦ اگر X خمینهٔ مختلط و Y زیرخمینهٔ تحلیلی (حقیقی اما با مقادیر مختلط) از X با نقص بُعد q باشد، W را زیرفضای تکین Y قرار می‌دهیم. در این صورت یک و فقط یک کلاس $y \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$ وجود دارد که تصویرش در $H^{2q}(X - W, \mathbb{Z})$ کلاس y' است که توسط $Y - W$ به‌دست می آید.

کلاس y در گزارهٔ ۴.٦ را کلاسی که توسط زیرفضای Y مشخص می‌شود، می‌نامیم.

گزاره ۵.٦ گیریم X و Y مانند گزارهٔ قبل باشند. نگاشت $j:(X-W,X-Y)\longrightarrow(X,X-Y)$ یکریختی زیر را القا می‌کند:

$$j^*:H^r(X,X-Y;\mathbb{Z})\longrightarrow H^r(X-W,X-Y;\mathbb{Z}),\qquad (0\leq r\leq 2q).$$

اثبات: استدلال شبیه گزارهٔ ۳.٦ است. فرض کنید $f:(A,B)\longrightarrow(X,X-Y)$ نگاشتی از زوج CW ـ مجتمع‌های متناهی (A,B) باشد. گزارهٔ ۲.٦ را برای زوج (A^{2q+1},B^{2q+1}) و فضاهای X و $X-W$ به‌کار می‌بریم. پس نگاشت g هموتوپ با f وجود دارد که $g(A^{2q+1})\subseteq X-W$. در نتیجه j^* یک‌به‌یک است. حال اگر گزارهٔ ۲.٦ را برای زوج $(A^{2q}\times I,B^{2q}\times I\cup A^{2q}\times 0\cup A^{2q}\times 1)$ و فضاهای X و $X-W$ به‌کار ببریم، مانند گزارهٔ ۳.٦ نتیجه می‌گیریم که j^* پوشا نیز هست.

گزاره ٦.٦ فرض کنید X و Y مانند گزارهٔ ۲.۵ تعریف شده‌اند با این تفاوت که Y تحویل‌ناپذیر است. در این صورت $H^{2q}(X,X-Y;\mathbb{Z})$ گروه دوری نامتناهی است که با عضوی مانند u تولید می‌شود که تصویرش در $H^{2q}(X;\mathbb{Z})$، کلاس y است.

اثبات: با استفاده از گزاره‌های ۳.٦ و ۵.٦، نمودار جابه‌جایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc}
H^{2q}(X,X-Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^*} & H^{2q}(X-W,X-Y;\mathbb{Z})\\
\downarrow & & \downarrow\\
H^{2q}(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2q}(X-W;\mathbb{Z})
\end{array}$$

در این‌جا i^* و j^* هر دو یکریختی هستند. با توجه به نحوهٔ تعریف کلاس y، می‌توانیم برای اثبات گزاره، حکم را برای $X-W$ و $Y-W$ به‌جای X و Y ثابت کنیم، یعنی می‌توانیم فرض کنیم Y بدون تکینگی و همبند است. پس $H^{2q}(X,X-Y;\mathbb{Z})$ دوری نامتناهی است که با کلاس تعریف شده توسط Y تولید می‌شود.

۷. قضیهٔ اصلی

فرض کنید X خمینهٔ مختلط باشد و $y\in H^{2q}(X;\mathbb{Z})$. می‌گوییم کلاس y تحلیلی مختلط است اگر زیرفضاهای تحلیلی (حقیقی با مقادیر مختلط) Y_i وجود داشته باشند به‌طوری که $y=\sum n_iy_i$، $n_i\in\mathbb{Z}$ و y_i کلاسی است که توسط Y_i در $H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ تعریف می‌شود. حال می‌توانیم قضیهٔ اصلی این مقاله را بیان کنیم.

قضیه ۱.۷ اگر X خمینهٔ مختلط و $y \in H^{2q}(X;\mathbb{Z})$ دور تحلیلی مختلط باشد، آن‌گاه $d_r y = 0$ برای هر r که d_r مشتق‌های دنباله طیفی اتیا ـ هیتزبروخ $H^* \Longrightarrow K^*$ هستند. به‌طور خاص، برای هر عدد اول p داریم $\delta_p P_p^1(y) = 0$.

P_p^1، p ـ امین توان عملگر استینراد است که

$$P_p^1 : H^{2q}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q+2p-2}(X, \mathbb{Z}_p).$$

در حالتی که $p = 2$، $\delta_p P_p^1$ همان Sq^3 است.

با استفاده از گزاره‌های ۲.۶ و ۶.۶ و همچنین ۱.۸ که در بخش بعد اثبات می‌کنیم، قضیهٔ ۱.۷ از گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۷ فرض کنید X خمینهٔ مختلط و Y زیرفضای بستهٔ تحویل‌ناپذیر تحلیلی از نقص بُعد مختلط q باشد و u مولد $H^{2q}(X, X-Y, \mathbb{Z})$ باشد که در گزارهٔ ۶.۶ بیان کردیم. در این صورت

$$\mathrm{ch}\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ) = \rho_*(u) + \text{درجات بالاتر}$$

که در آن $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ عنصر گروتندیک از بافهٔ $\mathcal{B}_Y^\circ$ است و ρ_* نگاشتی که از نشاندن ضرایب $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Q}$ القا می‌شود.

توجه کنید که چون $\mathcal{B}_Y^\circ$ بافه‌ای منسجم است، پس $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ خوش‌تعریف است. از طرفی چون $\gamma_Y(\mathcal{B}_Y^\circ)$ و u تابعگونی هستند، کافی است گزارهٔ ۲.۷ را برای مثال خاص ثابت کنیم. اما گزارهٔ ۱.۵ حالت خاص گزارهٔ ۱.۷ است وقتی X قرص باز $\sum|z_i|^2 < 1$ و Y زیرفضای $z_i = 0$ ($1 \leq i \leq q$) است. در نتیجه، گزارهٔ ۲.۷ و با توجه به خواص دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ و قضیهٔ ۲.۲، قضیهٔ ۱.۷ نیز اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۱.۷ شرط لازم را برای آن‌که یک دور، تحلیلی باشد به‌دست می‌دهد که این به ما کمک می‌کند تا دورهایی بسازیم که تحلیلی هستند. در حالتی که خمینهٔ X استاین Stein باشد مثال ساده‌ای وجود دارد، اما مثال خمینهٔ افکنشی جبری که از روی ایده‌های سِر Serre ساخته شده بیشتر جالب توجه است.

گزاره ۳.۷ اگر G گروهی متناهی باشد و $n > 2$، خمینهٔ جبری افکنشی X وجود دارد که نوع هموتوپی n ـ ام X با ضرب فضاهای آیلنبرگ ـ مک‌لین $K(G, 1) \times K(\mathbb{Z}, 2)$ یکسان است و مشخصاً $H^*(G, \mathbb{Z})$ یک فاکتور مستقیم[1] $H^*(X, \mathbb{Z})$ است.

---

1) direct factor

گزاره ۴.۷ اگر p عددی اول، آن‌گاه گروه متناهی G و ردهٔ کوهمولوژی $y \in H^{۲q}(G,\mathbb{Z})$ با مرتبهٔ p وجود دارند که $\delta_p P_p^{۱}(y) \neq ۰$.

در نتیجه با استفاده از مشاهدهٔ بخش بعد در مورد مشتق دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ و دو گزارهٔ قبل، خمینهٔ افکنشی جبری پیدا کردیم که مثال نقض حدس هاج است.

اثبات ۳.۷. سِر در [۵] نشان داد که برای عدد طبیعی r داده شده، نمایش G در $\mathbb{C}^{N+۱}$ و خمینهٔ جبری Y در $\mathbb{P}^N$ وجود دارند که Y تحت عمل G ناوردا است و همچنین اولاً عمل G روی Y نقطه ثابت ندارد، ثانیاً Y تقاطع تام[۱] از تعدادی ابررویه[۲] درجهٔ d در $\mathbb{P}^N$ است که روی Y تکینگی ندارند و به‌طور تراگذر[۳] یکدیگر را قطع می‌کنند و ثالثاً بُعد مختلط Y، r است. Y همبند است و $X = \frac{Y}{G}$ یک خمینهٔ جبری افکنشی. توجه کنید که $Y \longrightarrow \mathbb{P}_N$، $(r-۱)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است. چون در ابتدا با درنظر گرفتن همهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ d، $\mathbb{P}^N$ را در $\mathbb{P}^M$ بنشانید، با توجه به انتخاب Y، Y از تقاطع تراگذر $\mathbb{P}^M$ با زیرفضای خطی L به‌دست می‌آید. اما از هندسهٔ دیفرانسیل می‌دانیم نگاشت $L \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ با نگاشت $L' \cap \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ هم‌ارز هموتوپی است که L' زیرفضای خطی هم‌بُعد L است که $\mathbb{P}^N$ را به‌طور تراگذر قطع می‌کند. در نتیجه $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$ را می‌توانیم با $Y' \longrightarrow \mathbb{P}^N$ که Y' تقاطع تام ابررویه‌های بدون تکینگی است، جایگزین کنیم. حال اگر از صورتی از قضیهٔ لفشتز که توسط بات [۳] ثابت شد استفاده کنیم، نتیجه می‌شود $Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$، $(r-۱)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است. فرض کنید $v \in H^{۲}(Y,\mathbb{Z})$ تحدید مولد طبیعی $\mathbb{P}^N$ باشد. در این صورت v، کلاس چرن تحدید کلاف خطی $\mathbb{C}^{n+۱} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ است. چون G روی این فضای کلاف عمل می‌کند، کلاف ξ روی X وجود دارد به‌طوری که $\eta = \pi^*\xi$ که در آن $\pi : Y \longrightarrow X$ نگاشت پوششی است. اگر u کلاس چرن ξ باشد، می‌بایست $v = \pi^* u$. فرض کنید u توسط نگاشت $f : X \longrightarrow K(\mathbb{Z},۲)$ القا شده باشد و $g : X \longrightarrow B_G$ نگاشتی باشد که نگاشت پوششی $X \longrightarrow Y$ را القا می‌کند. همچنین فرض کنید $\bar{g} : Y \longrightarrow E_G$ نگاشت طبیعی باشد که از g روی کلاف‌ها القا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} Y & (f\circ\pi,\bar{g}) \longrightarrow & K(\mathbb{Z},Y)\times E_G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ X & (f,g)\longrightarrow & K(\mathbb{Z},Y)\times B_G \end{array}$$

1) complete intersection 3) hypersurface 4) transversally

نگاشت $(f\circ\pi,\bar{g})$، $(r-1)$ ـ هم‌ارز هموتوپی است و در نتیجه (f,g) نیز این‌گونه است. اگر فرض کنیم $r-1\geq n$، با توجه به این‌که $B_G=K(G,1)$، حکم ثابت می‌شود.

اثبات ۴.۷: فرض کنید p عدد اول فرد است و $G=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$. با توجه به انتخاب G، هر عضو غیرصفر $H^q(G,\mathbb{Z})$، $(q\geq 1)$ دارای مرتبهٔ p است. در نتیجه $H^*(G,\mathbb{Z})$ پوچی همریختی باکشتاین[1]

$$\beta: H^*(G,\mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^{*+1}(G,\mathbb{Z}_p)$$

است. با استفاده از فرمول کونت[2] روی میدان‌ها، داریم

$$H^*(G,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p[u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3]$$

که برای $i=1,2,3$، $u_i^2=0$ و همچنین $\beta(u_i)=v_i$، $P_p^1(u_i)=0$ و $P_p^1(v_i)=v_i^p$. قرار می‌دهیم $\mathcal{L}^1=\beta P_p^1-P_p^1\beta$. به‌سادگی مشاهده می‌شود که $\mathcal{L}^1$ پادمشتق است و اگر $x\in\ker\beta$، آن‌گاه $\mathcal{L}^1(x)=\beta P_p^1(x)$. در نتیجه برای اثبات گزارهٔ ۴.۷ می‌بایست نشان دهیم $y\in H^{2q}(G,\mathbb{Z}_p)$ وجود دارد به‌طوری که $\beta(y)=0$ و $\mathcal{L}^1(y)\neq 0$. تعریف می‌کنیم $y=\beta(u_1u_2u_3)$. به‌وضوح $\beta(y)=0$ و

$$\mathcal{L}^1(y)=\mathcal{L}^1\left(\sum_{\text{دوری}}(v_1v_2^pu_3)\right)=-\sum_{\text{دوری}}(v_1v_2^pu_3-v_1u_2v_3^p)\neq 0.$$

۸. عملگر d_{2p-1}

در این بخش به اثبات ادعایی درباره مشتق‌های d_{2p-1} از دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ که در بخش قبل استفاده کردیم، می‌پردازیم. صورت ادعایی که در بخش قبل استفاده کردیم به‌شکل زیر بود:

گزاره ۱.۸ اگر مشتق‌های دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ d_ru صفر باشند، آن‌گاه $\delta_pP_p^1(u)=0$.

این گزاره از گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۸ گیریم $u\in H^k(X;\mathbb{Z})$ که p عددی اول است. در این صورت عدد صحیح N که نسبت به p اول است وجود دارد به‌طوری که $d_s(Nu)=0$، $s<2p-1$ و $d_{2p-1}(Nu)=-N\delta_pP_p^1(u)$.

با توجه به بخش (۲) که شرط صفر شدن مشتق‌های دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ را برحسب

---

1) Bockstein 2) Künneth formula

مشخصهٔ چرن بیان کردیم، ضابطهٔ اولین مشتق ناصفر برحسب مشخصهٔ چرن قابل بیان است.

لم ۳.۸ با نمادگذاری بخش (۲)، فرض کنید $d_s\alpha = 0$ برای $s < r$. اگر پادزنجیر $\mathrm{ch}_{k+r-1}(\xi)$ را با β نمایش دهیم، $\delta\beta$ نمایش پادزنجیر $d_r\alpha$ خواهد بود.

برای اثبات گزارهٔ ۲.۸ از خواص فضای آیلنبرگ ـ مک‌لین $K(\mathbb{Z},n)$ استفاده می‌کنیم:

(۱) $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ برای $0 < q < n$ متناهی و مستقل از n است؛

(۲) p ـ زیرگروه $H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z})$ برای $0 < q < 2p-1 \leq n$ صفر است؛

(۳) اگر $n > 2p-1$، p ـ زیرگروه $H^{n+2p-1}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z})$ دوری از مرتبهٔ p است که با $\delta_p P_p^1(v)$ که v کلاس پایه‌ای[1] $K(\mathbb{Z},n)$ است، تولید می‌شود.

همچنین از خواص گروه هموتوپی پایدار گروه‌ها نیز استفاده می‌کنیم:

(۴) $\pi_q^s = \pi_{n+q}(S^n)$ برای $0 < q < n-1$ متناهی و مستقل از n است؛

(۵) p ـ زیرگروه π_q^s برای $0 < q < 2p-3$ صفر است؛

(٦) p ـ زیرگروه π_{2p-3}^s دوری از مرتبهٔ p است.

لم ۴.۸ اگر p اول و $\mathbb{P}^n$ فضای افکنشی مختلط از بعد n باشد، نگاشت پایدار[2] $g: S^{2p} \longrightarrow \mathbb{P}^p$ از درجهٔ Mp وجود دارد که M نسبت به p اول است.

اثبات: دنبالهٔ دقیق از گروه هموتوپی پایدار برای زوج $\mathbb{P}^n$ و $\mathbb{P}^{n-1}$ را درنظر بگیرید:

$$\cdots \longrightarrow \pi_q^s(\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_q^s(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{j_*} \pi_{q-2n}^s \delta \longrightarrow \cdots$$

برای اثبات لم کافی است عضو $\alpha \in \pi_{2p}^s(\mathbb{P}^p)$ پیدا کنیم که $j_*(\alpha) = Mp\eta$ (η مولد $\pi_0^s = \mathbb{Z}$ است). معادلاً نشان دهیم $\delta(\eta) \in \pi_{2p-1}^s(\mathbb{P}^{p-1})$ مرتبه‌ای دارد که Mp را می‌شمارد. با قراردادن $q = 2p-1$ و $n = 2,\ldots,p-1$ در دنبالهٔ دقیق بالا و با استفاده از (۵) و (٦)، نتیجه می‌گیریم که $\pi_{2p-1}^s(\mathbb{P}^{p-1})$ دوری مرتبهٔ p است و لم ثابت می‌شود.

حال به اثبات گزارهٔ ۲.۸ بازمی‌گردیم. چون دنبالهٔ طیفی اتیا ـ هیتزبروخ طبیعی است، کافی است فرض کنیم X ساختار سلولی متناهی ـ بعد اما بعد به‌دلخواه بزرگ از $K(\mathbb{Z},k)$ است و u از

1) fundamental class

۲) منظور این است که $k > 0$ وجود دارد که $S^k g: S^{2p+k} \longrightarrow S^k\mathbb{P}^p$ درجه‌اش Mp است ($S^k g$ یعنی k بار روی g نگاشت تعلیق را اثر دهید).

کلاس پایه‌ای v القا شده باشد. با توجه به (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم عدد صحیح N وجود دارد که نسبت به p اول است و $d_s(Nv) = ۰$ برای $s < ۲p - ۱$ و

$$\exists \lambda \in \mathbb{Z}_p : \quad d_{۲p-۱}(Nv) = \lambda N \delta_p P_p^{۱}(v)$$

چون دنبالهٔ طیفی تحت نگاشت تعلیق نیز پایدار است، پس λ از k مستقل است. برای محاسبهٔ λ، فرض کنید

$$X = S^{۲n}(\mathbb{P}^p) \cup \mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$$

که $\mathbb{D}^{۲n+۲p+۱}$ سلولی است که با نگاشت g در لم ۴.۸ به‌دست آوردیم. اگر x مولد $H^{۲}(\mathbb{P}^p, \mathbb{Z})$ باشد، با ترکیب نگاشت تعلیق با خودش داریم $u = S^{۲n}(x) \in H^{۲n+۲}(X, \mathbb{Z})$. می‌دانیم عضو $\xi \in K(\mathbb{P}^p)$ وجود دارد که

$$\mathrm{ch}\xi = e^x - ۱ = x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}.$$

در نتیجه عضو $K(S^{۲n}(\mathbb{P}^p)) \ni \eta = S^{۲n}(\xi)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{ch}\eta = S^{۲n}(e^x - ۱) = u + \cdots + \frac{S^{۲n}(x^p)}{p!}.$$

با توجه به لم ۳.۸، $d_r u$ توسط پادزنجیر $\frac{My}{(p-۱)!}$ که y مولد گروه پادزنجیر $C^{۲n+۲p+۱}(X, \mathbb{Z})$ است، قابل نمایش است. از طرف دیگر برای x در $\mathbb{P}^p$ داریم $P_p^{۱}(x) = \bar{x}^p$ که $\bar{x}$ نمایش x به پیمانهٔ p است. پس $\delta_p P_p^{۱}(u)$ توسط My قابل نمایش است. چون $(p-۱)! \equiv_p -۱$، پس $\lambda = -۱$ و این اثبات ۲.۸ را کامل می‌کند.

مراجع

[1] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, "Analytic cycles on complex manifolds", *Topology*, **1**(1962), 25-45.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, "Vector bundles and homogeneous spaces", *Proceedings of Symposiam of American Mathematical Society*, **3**(1960), 7-38.

[3] R. Bott, "On theorem of Lefschetz", *Mich. Math. J.*, **6**(1959), 211-216.

[4] P. Griffiths, *Topics in algebraic and analytic geometry*, Princeton University Press, 1974.

[5] J-P. Serre, "Sur la topolgie des variétés algébriques en characteristique p", *Symposium Internacional de Topologia Algebraica*, Mexico, 1958, 24-53.

[6] R. Thom, "Quelques properétés des varietés différentiables", *Comment. Math. Helvet.*, **28**(1954), 17-86.

سام نریمان

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

sam.nariman@gmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۸۷ تا ۹۹

دیدار با مسأله

بامداد یاحقی

دست در عمل زن تا اخلاص ظاهر شود.
دست در اخلاص زن تا نور ظاهر شود.

ابوالحسن خرقانی

در پیوند با بخش «حل مسأله» این شماره، مسألهٔ ۱ با الهام از نکتهٔ آورده شده در ابتدای فصل ۴ کتاب آنالیز حقیقی (ویرایش سوم) تألیف ه.ل. رویدن، توسط نگارنده طرح شده است. روش نخست حل مسألهٔ ۳ از نگارنده است. نگارنده، مسألهٔ ۳ را همراه با راه‌حلش برای مسابقهٔ ریاضی دانشجویی دورهٔ کارشناسی دانشگاه تورنتو در سال ۲۰۰۸ پیشنهاد کرد که قسمت دوم آن به‌عنوان یکی از سؤالات مسابقهٔ ریاضی دانشجویی دانشگاه تورنتو در بهار ۲۰۰۹ انتخاب شد. با توجه به این مطلب، روش دیگر حل مسألهٔ ۳، به‌طور دقیق‌تر ایدهٔ زیبای تحویل نابرابری (i) مسألهٔ ۳ در $\mathbb{R}^3$ به همان نابرابری در $\mathbb{R}^2$، از ادوارد باربو[1] از دانشگاه تورنتو است. مسألهٔ ۵ حالت خاص مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» است. برهان مسأله که آسان است، از نگارنده می‌باشد.

در پیوند با بخش «مسأله برای حل» این شماره، مسألهٔ ۱ از ریاضیدان معروف پال اردوش است. این مسأله در شمارهٔ پیشین نشر ریاضی توسط نگارنده حل شده است ولی آن را اینجا می‌آوریم تا در دسترس علاقه‌مندان بیشتری قرار گیرد.

نگارنده برهان کامل مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» و همچنین منبع اصلی مسأله را

1) Edward Barbeau

نمی‌داند. دوستانی که می‌دانند لطفاً اطلاع‌رسانی کنند. شایان گفتن است که بخش آخر مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» را به مسابقه گذاشته‌ایم. این گوی و این میدان! نگارنده سال‌ها پیش به مسألهٔ ۳، بدون راه حل آن، برخورد کرده و آن را در اردوهای نهایی المپیاد ریاضی دانش‌آموزان مطرح کرده بود. دوستانی که منبع این مسأله را می‌دانند لطفاً اطلاع‌رسانی کنند.

مسألهٔ ۴ از مسأله‌های ۶۰۸، ۶۰۹ و ۶۱۰ کتاب «مجموعهٔ مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی» از ب. پ. دمیدویچ به ترجمهٔ احسان‌الله قوام‌زاده قوام، چاپ انتشارات میر مسکو گرفته شده است. راه حلی برای مسأله در کتاب اخیر ارائه نشده است.

مسألهٔ ۵ و همچنین مسألهٔ ۶، به‌طور طبیعی به ذهن افرادی که با نظریهٔ مثلثی‌سازی سر و کار دارند خطور می‌کند. نگارنده، سال‌ها پیش در اینترنت به مسألهٔ ۷ برخورد کرده بود.

در پایان، شایان گفتن است که تاکنون حتی یک نظر یا راه حل از خوانندگان بخش دیدار با مسأله دریافت نشده است. امیدوارم از این پس علاقه‌مندان به حل مسائل ریاضی همت گمارده، با ارائهٔ مسائل و نظراتشان، به برقرار ماندن این بخش در درازمدت کمک کنند، باشد که به غنای این بخش بیافزایند.

حل مسأله

۱. فرض کنید $a,b\in\mathbb{R}$ که $a<b$، $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد. تعریف استاندارد انتگرال ریمان ـ اشتیلیس روی بازهٔ $[a,b]$ به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\int_a^b f d\alpha := \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha) = \inf_{p\in\mathcal{P}[a,b]} U(p,f,\alpha),$$

که در آن $p=\{x_۰=a,x_۱,\dots,x_n=b\}$ ($n\in\mathbb{N}$ ، $x_۰=a<x_۱<\cdots<x_n=b$) یک افزار بازهٔ $[a,b]$ و $\mathcal{P}[a,b]$ مجموعهٔ همهٔ افزارهای بازهٔ $[a,b]$ و

$$\begin{aligned} L(p,f,\alpha) &= \sum_{n=۱}^{n}(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-۱}))\inf_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x), \\ U(p,f,\alpha) &= \sum_{n=۱}^{n}(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-۱}))\sup_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x). \end{aligned}$$

در تعریف بالا بسته به این‌که sup و inf را روی بازه‌های $(x_{i-۱},x_i]$، $[x_{i-۱},x_i)$، یا $(x_{i-۱},x_i)$ بگیریم، در مجموع چهار تعریف برای انتگرال ریمان ـ اشتیلیس روی بازهٔ $[a,b]$ به‌دست می‌آوریم.

ثابت کنید اگر α پیوسته باشد[۱]، این چهار تعریف با هم معادل‌اند.

حل. حکم را برای تعریف متداول انتگرال‌های پایینی و بالایی با نشان دادن این‌که

$$\sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha) = \sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\},$$

$$\inf_{p\in\mathcal{P}[a,b]} U(p,f,\alpha) = \inf\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\geq f|_{(x_{i-1},x_i)}\},$$

که در آن $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$ به‌ازای هر $1\leq i\leq n$، ثابت می‌کنیم. در حالت‌های مربوط به سه تعریف دیگر، برابری‌های بالا به‌طور مشابه ثابت می‌شوند. از دو برابری بالا، برابری نخست را ثابت می‌کنیم. برابری دیگر به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

از آنجا که برای افراز داده شدهٔ $p=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b]$، به‌ازای هر $1\leq i\leq n$ داریم

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\leq f|_{(x_{i-1},x_i)},$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} L(p,f,\alpha) &= \sum_{n=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta\alpha_i\\ &\leq \sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که

$$\sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha)\leq \sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}.$$

برای دیدن نابرابری در جهت دیگر، فرض کنید برای افراز داده شدهٔ $p=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b]$ به‌ازای هر $1\leq i\leq n$، داشته باشیم

$$c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)},$$

که در آن $c_i\in\mathbb{R}$. فرض کنید $M>0$ یک کران بالای f بر بازهٔ $[a,b]$ باشد. چون α بر $[a,b]$ پیوسته و لذا پیوستهٔ یکنواخت است، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد

$$0<\delta<\frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

---

۱) در شمارهٔ قبل، فرض پیوستگی α از قلم افتاده بود.

موجود است به‌طوری که $|\alpha(x)-\alpha(y)| < \frac{۱}{۲Mn}\varepsilon$ هرگاه $|x-y| \le \delta$. افراز

$$y_۰ = x_۰ = a < y_۱ < \cdots < y_{۲n} = x_n = b$$

را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$y_۰ = a, y_۱ = x_۰ + \delta, y_۲ = x_۱ - \delta, y_۳ = x_۱ + \delta, \ldots, y_{۲n-۱} = x_n - \delta, y_{۲n} = b.$$

به‌روشنی می‌توان نوشت

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i \Delta\alpha_i \le \sum_{j=۱}^{۲n} c'_j \Delta\alpha_j,$$

که در آن $\Delta\alpha_j = \alpha(y_j) - \alpha(y_{j-۱})$، $c'_۱ = c_۱$، $(۱ \le i \le n-۱)$ $c'_{۲i} = \max(c_i, c_{i+۱})$، $(۲ \le i \le n)$ $c'_{۲i-۱} = c_i$ و $c'_{۲n} = c_n$. ولی

$$\sum_{j=۱}^{۲n} c'_j \Delta\alpha_j = \sum_{j=۱}^{n} c'_{۲j-۱} \Delta\alpha_{۲j-۱} + \sum_{j=۱}^{n} c'_{۲j} \Delta\alpha_{۲j}.$$

از طرفی به‌ازای هر $۱ \le j \le n$ داریم $c'_{۲j-۱} \le m_{۲j-۱}$ که در آن

$$m_{۲j-۱} = \inf_{y_{۲j-۱} \le x \le y_{۲j}} f(x).$$

پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\sum_{j=۱}^{۲n} c'_j \Delta\alpha_j &\le \sum_{j=۱}^{n} m_{۲j-۱} \Delta\alpha_{۲j-۱} + \sum_{j=۱}^{n} c'_{۲j} \Delta\alpha_{۲j} \\
&= \sum_{j=۱}^{۲n} m_j \Delta\alpha_j + \sum_{j=۱}^{n} (c'_{۲j} - m_{۲j}) \Delta\alpha_{۲j} \\
&\le \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} L(p, f, \alpha) + \sum_{j=۱}^{n} ۲M \frac{۱}{۲Mn}\varepsilon \\
&= \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} L(p, f, \alpha) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

در نتیجه به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$،

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i \Delta\alpha_i \le \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} L(p, f, \alpha) + \varepsilon,$$

که از آنجا به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i \Delta\alpha_i \leq \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha).$$

بنابراین

$$\sup\{\sum_{n=۱}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=۱}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-۱},x_i)}\} \leq \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha).$$

این برهان را به پایان می‌رساند. ■

۲. (i) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی و نیز دارای این خاصیت باشد که در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی است. تابع f را مشخص کنید.

(ii) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی و نیز دارای این خاصیت باشد که در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی است. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

(iii) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و دارای این خاصیت باشد که در هیچ نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای ماکسیمم موضعی نیست. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است یا یک $a\in\mathbb{R}$ موجود است که f بر $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی و بر $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. به‌وضوح می‌توان حکمی مشابه برای حالتی که f فاقد نقطهٔ مینیمم موضعی بر $\mathbb{R}$ است، تنظیم و ثابت کرد.

حل. (i) از آنجا که f دارای خاصیت مقدار میانی است، با نشان دادن این‌که برد f شماراست، ثابت می‌کنیم f تابع ثابت است. فرض کنید $x\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. چون f در نقطهٔ x دارای اکسترمم موضعی است، یک بازه با دو سر گویا حول x مانند I_x موجود است به‌طوری که $f(x)\leq f(y)$ یا $f(x)\geq f(y)$ به‌ازای هر $y\in I_x$. این امر ایجاب می‌کند که $f(x)=\inf_{y\in I_x} f(y)$ یا $f(x)=\sup_{y\in I_x} f(y)$ به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$. از آنجا که تعداد بازه‌های با دو سر گویا شماراست و به‌روشنی

$$f(\mathbb{R})\subseteq\{\inf_{y\in I} f(y) : I=(a,b), a,b\in\mathbb{Q}\}\cup\{\sup_{y\in I} f(y) : I=(a,b), a,b\in\mathbb{Q}\},$$

نتیجه می‌گیریم که برد f شماراست و این مطلب با توجه به این که f دارای خاصیت مقدار میانی است، ثابت می‌کند که f تابع ثابت است.

(ii) برای حل مسأله، نخست لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. گیریم R یک مجموعهٔ تماماً مرتب با دست‌کم سه عضو و $f: R \to R$ تابعی نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی باشد. در این صورت عضوهایی مانند $x_۱, x_۲, x_۳ \in R$ موجودند به‌طوری که $x_۱ < x_۲ < x_۳$ و $f(x_۲) \geq \max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$ یا $f(x_۲) \leq \min\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$.

برهان. به برهان خلف عمل کرده، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $x_۱, x_۲, x_۳ \in R$ که

$$x_۱ < x_۲ < x_۳$$

داریم $f(x_۲) < \max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$ و $f(x_۲) > \min\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$. از آنجا که $\max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big) = f(x_۱)$ یا $\max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big) = f(x_۳)$، درمی‌یابیم که به‌ازای هر $x_۱, x_۲, x_۳ \in R$ که $x_۱ < x_۲ < x_۳$ داریم

$$f(x_۱) < f(x_۲) < f(x_۳) \quad \vee \quad f(x_۱) > f(x_۲) > f(x_۳). \qquad (*)$$

عضوهایی مانند $a, b, c \in R$ که $a < b < c$ اختیار کنید. در نتیجه

$$f(a) < f(b) < f(c) \quad \vee \quad f(a) > f(b) > f(c).$$

فرض کنید $f(a) < f(b) < f(c)$. نشان می‌دهیم f اکیداً صعودی است که امری ناممکن است. برای این منظور، گیریم $x, y \in R$ که $x < y$ دلخواه باشند. پنج حالت تشخیص می‌دهیم (i) $x < y < a$، (ii) $x < y = a$، (iii) $x < a < y$، (iv) $x = a < y$ و (v) $a < x < y$. در هر حالت با توجه به $(*)$ به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $f(x) < f(y)$ و از آنجا درمی‌یابیم که f اکیداً صعودی است که تناقض است. اگر $f(a) > f(b) > f(c)$، با روشی مشابه می‌توان دید که f اکیداً نزولی است که دوباره تناقض حاصل می‌شود. بنابراین حکم به روش برهان خلف به اثبات می‌رسد. $\square$

حال برای اثبات حکم بخش (ii)، به برهان خلف فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی باشد. از لم بالا نتیجه می‌شود که عضوهایی مانند $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری که $x_۱ < x_۲ < x_۳$ و

$$f(x_۲) \geq \max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big) \quad \vee \quad f(x_۲) \leq \min\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big).$$

این امر با توجه به پیوستگی f ثابت می‌کند که f بر بازهٔ $[x_۱, x_۳]$ و لذا بر $\mathbb{R}$، به‌ترتیب دارای ماکسیمم موضعی و مینیمم موضعی است. این تناقض، حکم را به اثبات می‌رساند.

توضیح. از آنجا که هر تابع یک‌به‌یک بر $\mathbb{R}$ فاقد اکسترمم موضعی است، بخش (ii) در واقع ثابت می‌کند که هر تابع یک‌به‌یک بر $\mathbb{R}$ اکیداً یکنواست، یعنی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

(iii) فرض کنید تابع f که فاقد ماکسیمم موضعی است اکیداً یکنوا نباشد. نشان می‌دهیم یک $a \in \mathbb{R}$ موجود است که f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای این منظور، با توجه به لم ارائه شده در بخش (ii)، نتیجه می‌گیریم که عضوهایی مانند $x_۱, x_۲, x_۳ \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری که $x_۱ < x_۲ < x_۳$ و

$$f(x_۲) \geq \max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big) \quad \vee \quad f(x_۲) \leq \min\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big).$$

از آنجا که $f(x_۲) \geq \max\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$، از پیوستگی f که نتیجه می‌دهد f بر بازهٔ $[x_۱, x_۳]$ و لذا بر $\mathbb{R}$، دارای ماکسیمم موضعی است، در می‌یابیم که $f(x_۲) \leq \min\Big(f(x_۱), f(x_۳)\Big)$. با توجه به پیوستگی f، فرض کنید که مینیمم مطلق f بر بازهٔ $[x_۱, x_۳]$ در نقطهٔ $a \in (x_۱, x_۳)$ رخ دهد. توجه کنید که $a \notin \{x_۱, x_۳\}$، زیرا در غیر این صورت $f(a) = f(x_۲) = f(x_۳)$ یا $f(a) = f(x_۱) = f(x_۲)$ که در هر صورت با توجه به پیوستگی f ایجاب می‌کند f بر $[x_۲, x_۳]$ یا $[x_۱, x_۲]$ دارای ماکسیمم مطلق و لذا دارای ماکسیمم موضعی بر $\mathbb{R}$ باشد، که امری ناممکن است. حال نشان می‌دهیم f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ثابت می‌کنیم f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است، به‌طور مشابه ثابت می‌شود که f بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای این منظور، به برهان خلف عمل کرده، فرض کنید f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی نباشد. در نتیجه اعدادی $x < y \leq a$ موجودند به‌طوری که $f(x) \leq f(y)$. دو حالت می‌توان تشخیص داد.

اگر $f(x) \leq f(a)$، آن‌گاه چون f در a دارای مینیمم موضعی است، با توجه به پیوستگی f نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f بر بازهٔ (x, a) ماکسیمم موضعی برای f در $\mathbb{R}$ می‌شود که امری ناممکن است و اگر $f(x) > f(a)$، چون $f(x) \leq f(y)$، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f بر بازهٔ (x, a) ماکسیمم موضعی برای f در $\mathbb{R}$ می‌شود که دوباره امری ناممکن است. بنابراین در هر صورت به تناقض می‌رسیم. این امر، حکم را به برهان خلف ثابت می‌کند. ■

۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط، نه لزوماً متناهی‌بعد و $\|.\|$ نشانگر نرم ناشی از ضرب داخلی روی V باشد. فرض کنید $x, y, z \in V$. ثابت کنید

(i) $\|x+y\|\|x+z\| \leq \|y\|\|z\| + \|x\|\|x+y+z\|$؛

(ii) $\|x+y\| + \|x+z\| + \|y+z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\|$.

حل. روش نخست. نخست توجه کنید از آنجا که فضای خطی تولیدشده توسط بردارهای $x, y, z \in V$ حداکثر سه‌بعدی است، با توجه به قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت، کافی است که حکم را به‌ترتیب برای فضاهای اقلیدسی و یکانی $\mathbb{R}^۳$ و $\mathbb{C}^۳$ با ضرب داخلی متداول آن‌ها ثابت کنیم. از آنجا که نابرابری‌ها در $\mathbb{C}^۳$ را دوباره می‌توان به حکمی مشابه در $\mathbb{R}^۶$ تحویل کرد و این حکم اخیر با به‌کار بردن قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت به‌نوبهٔ خود به حکم مشابهی در $\mathbb{R}^۳$ تحویل می‌شود، نتیجه می‌گیریم که کافی است نابرابری‌های (i) و (ii) را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ با ضرب داخلی متداولش ثابت کنیم.

حال با به توان رسانیدن طرفین نابرابری (ii) و دسته‌بندی مناسب جملات و با توجه به این‌که به‌آسانی ثابت می‌شود در هر فضای ضرب داخلی V

$$\|x+y\|^۲ + \|x+z\|^۲ + \|y+z\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + \|z\|^۲ + \|x+y+z\|^۲,$$

به‌ازای هر $x, y, z \in V$، درمی‌یابیم که کافی است نابرابری (i) را ثابت کنیم. برای اثبات نابرابری (i) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ به‌روشنی کافی است آن را در $\mathbb{R}^۴$ ثابت کنیم. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۴$ را به‌عنوان فضای کواترنیون‌های حقیقی، یعنی $\mathbb{H}$ در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که $\|uv\| = \|u\|\|v\|$ به‌ازای هر $u, v \in \mathbb{H}$ و در نتیجه $\|u^{-۱}\| = \|u\|^{-۱}$ به‌ازای هر $۰ \neq u \in \mathbb{H}$. قرار دهید

$$\alpha = x+y, \beta = x+z, \gamma = x+y+z.$$

باید نشان دهیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\alpha + \beta - \gamma\|\|\gamma\|,$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{H}$. اگر $\|\alpha\|\|\beta\| = ۰$، چیزی برای اثبات نداریم. پس بدون آن‌که از کلیت مسأله کاسته شود، فرض کنید $\alpha, \beta \neq ۰$. حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \beta &= (\gamma\alpha^{-۱}\gamma - \gamma\alpha^{-۱}\beta - \gamma + \beta) - (\gamma\alpha^{-۱}\gamma - \gamma\alpha^{-۱}\beta - \gamma) \\ &= (\gamma\alpha^{-۱} - ۱)(\gamma - \beta) + \gamma(۱ + \alpha^{-۱}\beta - \alpha^{-۱}\gamma), \end{aligned}$$

که از آن به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$\|\beta\| \leq \|(\gamma\alpha^{-۱} - ۱)(\gamma - \beta)\| + \|\gamma(۱ + \alpha^{-۱}\beta - \alpha^{-۱}\gamma)\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\gamma\alpha^{-1} - 1\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|1 + \alpha^{-1}\beta - \alpha^{-1}\gamma\| \\
&= \|\gamma - \alpha\|\|\alpha^{-1}\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|\alpha^{-1}\|\|\alpha + \beta - \gamma\| \\
&= \|\alpha\|^{-1}\|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\alpha\|^{-1}\|\gamma\|\|\alpha + \beta - \gamma\|.
\end{aligned}
$$

رابطهٔ اخیر به‌روشنی ایجاب می‌کند

$$\|\alpha\|\|\beta\| \quad \leq \quad \|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|\alpha + \beta - \gamma\|,$$

که همان نتیجهٔ مورد نظر ماست.

روش دیگر. همان‌گونه که در راه حل نخست استدلال کردیم، کافی است که نابرابری (i) را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی متداولش ثابت کنیم. با قرار دادن

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x + z, \quad \gamma = x + y + z,$$

مطابق بالا کافی است نشان دهیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\alpha + \beta - \gamma\|\|\gamma\|.$$

برای این منظور، فرض کنید ω تصویر متعامد γ بر فضای خطی تولیدشده توسط بردارهای α و β باشد. در نتیجه می‌توان نوشت $\gamma = \omega + \delta$ که در آن بردار $\delta \in \mathbb{R}^3$ بر بردارهای α و β و در نتیجه بر بردار ω عمود است. حال می‌توان نوشت

$$\|\gamma - \alpha\|^2 = \|(\omega - \alpha) + \delta\|^2 = \|\omega - \alpha\|^2 + \|\delta\|^2 \geq \|\omega - \alpha\|^2,$$

که از آنجا به‌دست می‌آوریم $\|\gamma - \alpha\| \geq \|\omega - \alpha\|$. به‌طور مشابه داریم $\|\gamma - \beta\| \geq \|\omega - \beta\|$، $\|\alpha + \beta - \gamma\| \geq \|\alpha + \beta - \omega\|$ و $\|\gamma\| \geq \|\omega\|$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\omega - \alpha\|\|\omega - \beta\| + \|\alpha + \beta - \omega\|\|\omega\|.$$

ولی فضای خطی تولیدشده توسط سه بردار α و β و ω حداکثر دو بعدی است. پس با توجه به قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت کافی است که نابرابری اخیر را برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ ثابت کنیم. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ را به‌عنوان صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}^2$ در نظر می‌گیریم. پس بدون آن‌که از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\alpha\beta = (\omega - \alpha)(\omega - \beta) + (\alpha + \beta - \omega)\omega.$$

با گرفتن نرم از طرفین رابطهٔ بالا و استفاده از نابرابری مثلثی و این‌که $||uv|| = ||u||||v||$ به‌ازای هر $u, v \in \mathbb{C}$، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} ||\alpha\beta|| &\leq ||(\omega-\alpha)(\omega-\beta)|| + ||(\alpha+\beta-\omega)\omega|| \\ &= ||\omega-\alpha||||\omega-\beta|| + ||\alpha+\beta-\omega||||\omega||, \end{aligned}$$

این همان نتیجهٔ مورد نظر است. ■

۴. (i) فرض کنید C خمی بسته، محدب و به‌طور قطعه‌ای هموار در صفحه باشد. در این صورت، خطی مانند ℓ موجود است به‌طوری که ℓ هم طول خم و هم مساحت محدود به خم C را نصف می‌کند.

(ii) فرض کنید Σ رویه‌ای بسته، محدب و هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد. در این صورت صفحه‌ای مانند p موجود است به‌طوری که p هم مساحت رویه و هم حجم محدود به رویهٔ Σ را نصف می‌کند.

حل. (i) فرض کنید L و A به‌ترتیب نشانگر طول خم C و مساحت ناحیهٔ محدود به خم C باشند. فرض کنید $x_0 \in C$ یک نقطهٔ هموار خم C و $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ نشانگر پرمایش خم C نسبت به طول قوس باشد که با افزایش طول قوس در جهت مثلثاتی روی خم حرکت کنیم. تابع $a : [0, \frac{L}{2}] \to \mathbb{R}$ توسط $a(s) = A(D_1(s)) - A(D_2(s))$، که در آن $D_1(s)$ و $D_2(s)$ نشانگر ناحیه‌های محدود به پاره‌خط $\alpha(s)\alpha(s+\frac{L}{2})$ و به‌ترتیب بخشی از خم C هستند که در جهت مثلثاتی از $\alpha(s)$ به $\alpha(s+\frac{L}{2})$ و از $\alpha(s+\frac{L}{2})$ به $\alpha(s)$ پیموده می‌شوند و $A(D_i(s))$ نشانگر مساحت ناحیهٔ $D_i(s)$ $(i = 1, 2)$ است. توجه کنید که $D_2(s) = D \setminus D_1(s)$ که در آن D نشانگر ناحیهٔ محدود به خم C است. به‌طور دقیق‌تر

$$A(D_1(s)) = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{L}{2}} r^2(s,t)d\theta(s,t), A(D_2(s)) = A - A(D_1(s)),$$

که در آن $r(s,t) = ||\alpha(s+t) - \alpha(s)||$ و $\theta(s,t)$ زاویهٔ بین مماس راست بر خم C در نقطهٔ $\alpha(s) \in C$ و پاره‌خط $\alpha(s)\alpha(s+t)$. بنابراین

$$a(s) = 2A(D_1(s)) - A = \int_{t=0}^{\frac{L}{2}} r^2(s,t)d\theta(s,t) - A.$$

در زیر نشان می‌دهیم که تابع a بر $[0, \frac{L}{2}]$ پیوسته و در واقع لیپ‌شیتز است. برای این منظور، قرار دهید

$$d = \text{diam }(D) = \sup\{||x_1 - x_2|| : x_1, x_2 \in D\} = \text{diam }(C).$$

به‌روشنی (چرا؟)

$$|a(s_1) - a(s_2)| \leq 2\frac{\pi d^2}{2}|s_1 - s_2| = \pi d^2 |s_1 - s_2|.$$

چون $a(\frac{L}{2}) = -a(0)$، درمی‌یابیم که $a(\frac{L}{2})a(0) < 0$. در نتیجه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، نقطهٔ $s_0 \in [0, \frac{L}{2}]$ موجود است به‌طوری که $a(s_0) = 0$. به عبارت دیگر،

$$A(D_1(s_0)) = A(D_2(s_0)).$$

یعنی پاره‌خط $\alpha(s_0)\alpha(s_0 + \frac{L}{2})$ هم طول و هم مساحت خم C را نصف می‌کند.

(ii) فرض کنید D، A، و V به‌ترتیب نشانگر ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ، مساحت رویهٔ Σ و حجم ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ باشند. فرض کنید S^2 نشانگر کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^3$ باشد. به‌روشنی به‌ازای هر $x \in S^2$ یک صفحهٔ یگانهٔ P_x در $\mathbb{R}^3$ موجود است که دارای بردار نرمال x است و مساحت Σ نصف می‌کند. حال تابع $v : S^2 \to \mathbb{R}$ را توسط

$$v(x) = V(D_1(x)) - V(D_2(x)) = 2V(D_1(x)) - V$$

تعریف کنید که در آن $D_1(x)$ ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ و صفحهٔ P_x است به‌طوری که بردار نرمال x به درون $D_1(x)$ اشاره می‌کند، $D_2(x) = D \setminus D_1(x)$ و $V(D_i(x))$ $(i = 1, 2)$ نشانگر حجم ناحیهٔ $D_i(x)$ است. با ایده‌ای مشابه با ایدهٔ ارائه شده در (i) می‌توان نشان داد که v روی S^2 پیوسته و در واقع لیپ‌شیتز است. (چگونه؟) از آنجا که $v(-x) = -v(x)$ به‌ازای هر $x \in S^2$، نتیجه می‌گیریم $v(x_0)x(-x_0) \leq 0$ که در آن $x_0 = (0, 0, 1) \in S^2$. فرض کنید C کمانی واقع بر S^2 باشد که نقاط $x_0, -x_0 \in S^2$ را به هم می‌پیوندد و $\alpha : [0, 1] \to S^2$ پرمایشی از کمان C باشد که $\alpha(0) = x_0 = -\alpha(1)$. به‌روشنی تابع $w := v \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ پیوسته است و به‌علاوه $w(0) = -w(1)$. در نتیجه $w(0)w(1) \leq 0$ و لذا عددی مانند $0 \leq t_0 \leq 1$ وجود دارد به‌طوری که $w(t_0) = 0$؛ یعنی $V(D_1(\alpha(t_0)) = V(D_2(\alpha(t))$. بنابراین صفحهٔ $P_{\alpha(t_0)}$ مساحت رویهٔ Σ و حجم محدود به رویهٔ Σ را نصف می‌کند. ■

توضیح. با الهام از مسألهٔ بالا، حل تمرین زیر را به خواننده واگذار می‌کنیم.
فرض کنید E_1 و E_2 دو ناحیهٔ از هم جدا و کراندار در صفحه باشند که به‌ترتیب دارای مساحت‌های A_1 و A_2 هستند. ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که مساحت هر دو ناحیه را نصف می‌کند.

۵. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ یک عضو یگانهٔ $f(x) \in A$ موجود است به‌طوری که $|x - f(x)| = \sup\{|x - a| : a \in A\}$. ثابت کنید A مجموعهٔ تک‌عضوی است.

حل. به برهان خلف عمل کنید: یک $a \in A$ اختیار کنید. قرار دهید $a_1 = f(a)$ و $a_2 = f(a_1)$. در این صورت به‌روشنی $a_1, a_2 \in A$ دو نقطهٔ متمایز هستند و A زیرمجموعهٔ بازهٔ بسته با دو سر a_1 و a_2 است. به‌ازای $m = \frac{a_1+a_2}{2}$، هر دو نقطهٔ a_1 و a_2 دورترین نقاط A از m خواهند بود که به‌وضوح یک تناقض است. این حکم را ثابت می‌کند. ■

۲ مسأله برای حل

۱. فرض کنید مربعی با طول ضلع a شامل دو مربع با درون‌های مجزا با طول ضلع‌های به‌ترتیب a_1 و a_2 باشد. ثابت کنید $a_1 + a_2 \leq a$.

۲. فرض کنید $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$ و مجموعهٔ بستهٔ $A \subseteq \mathbb{F}^n$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{F}^n$، عضو یگانهٔ $a_x \in A$ موجود است به‌طوری که

$$\|x - a_x\| = \sup\{\|x - a\| : a \in A\},$$

که در آن $\|\,.\,\|$ نشانگر نرمی دلخواه بر $\mathbb{F}^n$ است. ثابت کنید A یک مجموعهٔ تک‌عضوی است. آیا حکم را بدون فرض بسته بودن مجموعهٔ A می‌توانید ثابت کنید؟

توضیح. مسألهٔ بالا را در حالت کلی، بدونِ فرض بسته بودنِ مجموعهٔ A به مسابقه می‌گذاریم. به سه راه‌حل درست مسأله، به رسم یادگار از سوی فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی جایزه‌ای تقدیم خواهد شد.

۳. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^3$ دارای این خاصیت باشد که هر صفحه در $\mathbb{R}^3$ مجموعهٔ S را در یک دایره یا در یک نقطه قطع می‌کند یا اصلاً قطع نمی‌کند. ثابت کنید S یک کره یا یک مجموعهٔ تک‌عضوی است.

۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به‌ازای هر $b > a$ بر بازهٔ (a, b) کراندار است. در این صورت

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x+1) - f(x)\Big)$؛

(ii) اگر $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+۱)-f(x)}{x^n}\right)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$، آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+۱}}=\frac{\ell}{n+۱}.$$

۵. فرض کنید $\mathbb{H}$ نشانگر حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها باشد. ثابت کنید هر ماتریس مربعی روی $\mathbb{H}$ مثلثی‌پذیر است. به عبارت دیگر اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A\in M_n(\mathbb{H})$، آن‌گاه یک ماتریس وارون‌پذیر $P\in M_n(\mathbb{H})$ موجود است به‌طوری که $P^{-۱}AP$ ماتریسی بالامثلثی است.

۶. فرض کنید F یک میدان باشد. ماتریس $A\in M_n(F)$ که در آن $n>۱$ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه $A:F^n\to F^n$ به‌عنوان تبدیلی خطی دارای زیرفضای پایای غیربدیهی نباشد. ثابت کنید ماتریس A تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای ویژهٔ آن، به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب از F، روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

۷. ثابت کنید

$$(xyz)^۲+(xyz)+۱\le ۳(x^۲-x+۱)(y^۲-y+۱)(z^۲-z+۱),$$

به‌ازای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$.

بامداد یاحقی

دانشگاه گلستان، گروه ریاضی

bamdad@bamdadyahaghi.com

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 30, No. 3, Fall 2011

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: