بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۱، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۱

(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۹۱)

شمارهٔ پیاپی: ۴۹

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمد جلوداری ممقانی
سردبیر: بهمن طباطبائی شوریجه
ویراستار ارشد: روح‌اله جهانی‌پور
مدیر اجرایی: سهیلا غلام‌آزاد

حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
همکار این شماره: فریده صمدیان
نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸–۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:

الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.

ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.

• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

عکس روی جلد: به مناسبت درگذشت پرویز شهریاری و به پاس خدمات ارزندهٔ ایشان در گسترش و عمومی‌سازی ریاضیات کشور

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ۱ تا ۲۲

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن (۱)

حامد فرهادپور

تقدیم به استاد گرامی دکتر احمد شفیعی ده‌آباد

چکیده

این مقالهٔ دو قسمتی که قسمت دوم آن در شمارهٔ بعدی به چاپ خواهد رسید کوششی است برای بیان بخشی از تاریخچه، کاربردها و چشم‌اندازهای نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سه و چهار بعدی.

۱. انقلابی در ریاضیات

در پاییز سال ۱۹۹۴، ناتان زایبرگ[۱] و ادوارد ویتن[۲] انقلابی در ریاضیات به پا کردند. آن‌ها ضمن کار بر روی نظریه‌های پیمانه‌ای فرامتقارن[۳]، به یک سری معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دست یافتند که طبق روال فیزیک‌دانان باید همان نتایج نظریهٔ دانلدسن[۴] را به ارمغان می‌آورد. قبلاً ویتن نشان داده بود که نظریهٔ دانلدسن مدلی به‌صورت نظریهٔ میدان کوانتومی[5] دارد. در واقع زایبرگ و ویتن با شمردن جواب‌های این معادلات روی یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی هموار مثل X، به نگاشت $SW_X : \mathrm{Spin}^c(X) \to \mathbb{Z}$ رسیدند که یک ناوردای دیفرانسیلی برای خمینه‌های ۴ ــ بعدی به‌دست می‌دهد. دو مزیت ویژهٔ نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن نسبت به نظریهٔ دانلدسن باعث شد که در همان بدو

---

1) Natan Seiberg 2) Edward Witten 3) Supper Symmetric Gauge Theories 4) Simon Donaldson 5) Quantum Field Theory

پیدایش مورد اقبال بزرگان ریاضی قرار گیرد: یکی این‌که گروه پیمانه‌ای[۱] در این نظریه، یعنی $U(1)$ بر خلاف گروه‌های پیمانه‌ای در نظریهٔ دانلدسن یعنی $SU(2)$ و $SO(3)$، گروهی است آبلی و این خاصیت، تحلیل‌های مورد نیاز را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر می‌کند. دوم این‌که فضای پیمانه‌ای[۲] جواب‌های این معادلات نیز بر خلاف فضای پیمانه‌ای در نظریهٔ دانلدسن فشرده است و این ویژگی از بروز بسیاری از مشکلات تکنیکی جلوگیری می‌کند. این دو خاصیت برای اهل فن، آن قدر بااهمیت است که ویتن این نظریه را رویکردی ساده به نظریهٔ دانلدسن می‌نامد و تاوبز[۳] عقیده دارد که کار با این نظریه دست‌کم هزار برابر ساده‌تر از کار با نظریهٔ دانلدسن است. در فاصلهٔ زمانی چند ماه، به‌کمک این نظریه، اثبات‌هایی کوتاه‌تر و ساده‌تر از نتایج پیشرفتهٔ دانلدسن، به‌ویژه مشهورترین قضیهٔ وی راجع به قطری‌شدن ماتریس فرم تقاطعی که در ادامهٔ مطلب به آن اشاره شده است، ارائه شد.

لازم به ذکر است که خاستگاه فیزیکی نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، مقالات [49] و [50] و شروع ریاضی آن در مقاله مشهور ویتن [62] با عنوان Monopoles and Four Manifolds است. در واقع ویتن در این مقاله به بیان و شرح معادلات و ناورداها و ویژگی‌های بنیادی آن‌ها روی خمینه‌های ۴ ـ بعدی و ارتباط آن با نظریهٔ دانلدسن می‌پردازد. در مدت کوتاهی پس از شروع نظریه، پیشرفت‌های نسبتاً چشمگیری در مطالعهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی حاصل شد. برخی از انگاره‌های کلاسیک مانند انگارهٔ توم[۴] و تعمیم‌های آن، جواب داده شد و برای بعضی ازانگاره‌ها که قبلاً اثبات شده بود، مانند انگارهٔ وان دون[۵] برهان‌های ساده‌تری ارائه گردید. دیری نپایید که تاوبز، این نظریه را روی خمینه‌های همتافته[۶] مورد مطالعه قرار داد ([54]، [55] و [56]). وی علاوه بر محاسبهٔ ناورداها، آن‌ها را به‌صورت شمردن خم‌های شبه‌هولومورف[۷] نیز تعبیر کرد ([57]، [58] و [59]).

امروزه کاربردهای این نظریه، طیف وسیعی از دیگر حوزه‌های ریاضی و فیزیک مانند هندسهٔ جبری، هندسهٔ کهلری[۸]، هندسهٔ مختلط، هندسهٔ ریمانی، هندسه و توپولوژی همتافته و سایا[۹]، توپولوژی دیفرانسیل، نظریهٔ ریسمان[۱۰]، نظریهٔ M و حتی نظریهٔ پرلمان[۱۱] (که منجر به اثبات انگارهٔ هندسی‌سازی ترستن[۱۲] و به‌دنبال آن انگارهٔ توپولوژیک پوانکاره در حالت ۳ ـ بعدی شد) را در بر می‌گیرد. اخیراً نیز تاوبز با مطالعهٔ معادلات زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سایای ۳ ـ بعدی تکلیف انگارهٔ ونشتین[۱۳] را یکسره کرد. انگاره‌ای وسوسه‌انگیز که به‌مدت تقریباً سی سال ریاضیدانان را درگیر خود کرده بود ([60] و [61]).

بیان معادلات و ناورداهای زایبرگ ـ ویتن و ویژگی‌های بنیادی آن‌ها نیاز به پیش‌نیازهای تکنیکی از هندسهٔ اسپینی[۱۴]، کلاس‌های مشخصه[۱۵] و آنالیز سرتاسری[۱۶] دارد که خارج از حوصلهٔ

---

1) Gauge Group 2) Moduli Space 3) Clifford Henry Taubes 4) Rene Thom
5) A. Van de Ven 6) Symplectic 7) Psedu-Holomorphic Curves 8) Kahler 9) Contact
10) String Theory 11) G. Preleman 12) Thurstone's Geometrization Conjecture
13) Alan Weinstein 14) Spin Geometry 15) Characteristic Classes 16) Global Analysis

این مقاله است، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به مراجع پایان مقاله به‌ویژه [5]، [19]، [20]، [25]، [32]، [47]، [63] و [64] مراجعه کند

۲. بعد چهارم

می‌توان گفت تا سال ۱۹۸۱ میلادی برخلاف ابعاد دیگر، هیچ پیشرفت چشمگیری در شناخت خمینه‌های ۴ ـ بعدی صورت نگرفته بود اگرچه این خمینه‌ها کاربردهای کلیدی خود را دست‌کم در نظریهٔ نسبیت به اثبات رسانده بودند. تا این‌که در این سال، فریدمن[1] یک رده‌بندی کامل از خمینه‌های ۴ ـ بعدی توپولوژیک همبند ساده ارائه داد [10]. اما خیلی زود دانلدسن نشان داد که خمینه‌های ۴ ـ بعدی هموار دارای جهانی بکرتر می‌باشند و هندسهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی بسیار پیچیده‌تر از توپولوژی آن‌ها است [4].

پیش از فریدمن، در سال ۱۹۵۲ رخلین[2] نشان داده بود اگر خمینهٔ هموار X دارای فرم تقاطعی[3] زوج باشد، نشان[4] آن همواره مضربی از عدد ۱۶ خواهد بود [14]. همچنین میلنور نشان داد که به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ وایتهد[5] دو خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی هم‌ارز هموتوپیک هستند اگر و تنها اگر دارای یک فرم تقاطعی باشند. حال فرم مثبت معین داده شده توسط ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$E_8 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{8\times 8}$$

E_8 دارای نشان ۸ است و بنابر قضیهٔ رخلین، نمی‌تواند نشان دهندهٔ فرم تقاطعی هیچ خمینهٔ هموار ۴ ـ بعدی باشد. از طرف دیگر بر اساس دیاگرام دینکین[6]، می‌توان یک خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی موسوم به خمینهٔ E_8 ارائه داد به‌طوری که فرم تقاطعی آن E_8 باشد. به زبان ساده، خمینهٔ ۴ ـ بعدی توپولوژیکی وجود دارد که دارای هیچ ساختار هموار نمی‌باشد.

فریدمن [10] نشان داده است که خمینه‌های توپولوژیک ۴ ـ بعدی همبند ساده و بسته را می‌توان

1) Michael H. Freedman 2) V.A. Rochlin 3) Intersection Form 4) Signature 5) G. W. Whitehead 6) Dynkin

در حد همسانریختی به‌کمک فرم تقاطعی رده‌بندی کرد:

- برای یک فرم تقاطعی زوج دقیقاً یک ردهٔ همسانریختی از خمینه‌های ۴ـبعدی وجود دارد.
- برای یک فرم تقاطعی فرد دقیقاً دو رده وجود دارد که به‌کمک ناورداهای کربی ـ سای‌بنمن[۱] از یکدیگر متمایز می‌شوند و حداکثر یکی از آن‌ها دارای نمایش هموار است.

اثبات انگارهٔ توپولوژیک پوانکاره در بعد ۴، نتیجه‌ای از کار فریدمن است، زیرا طبق مطالب اخیر، $H_۲(M) = ۰$ ایجاب می‌کند که M با $S^۴$ همسانریخت باشد. کارهای فریدمن به چند حالت خاص دیگر (که در آن‌ها، گروه بنیادی غیربدیهی، اما هنوز به اندازهٔ کافی ساده است) نیز تعمیم داده شده است. اما در حالتی که گروه بنیادی بزرگ باشد، عملاً چیز زیادی در دست نیست. این نکته نیز قابل توجه است که به‌ازای هر گروه دارای نمایش متناهی[۲] مثل G، یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار X وجود دارد به‌طوری که $\pi_۱(X) = G$ و حتی گامف[۳] نشان داده است که این خمینه را می‌توان همتافته[۴] انتخاب کرد [13].

رده‌بندی خمینه‌های توپولوژیک به مسألهٔ رده‌بندی فرم‌های دوخطی متقارن تک ـ مدولار[۵] تبدیل می‌شود. این مطلب نمونه‌ای قابل تأمل راجع به گذر از توپولوژی به جبر است. میلنور و هوس مولر[۶] در [34] نشان دادند که فرم‌های نامعین را می‌توان به‌کمک رتبه و نشان و زوجیت[۷] رده‌بندی کرد. در حد یکریختی، فرم‌های تقاطعی به این شرح هستند:

- اگر فرم نامعین و فرد باشد، به‌صورت $n[۱] \oplus m[-۱]$ است.
- اگر فرم نامعین و زوج باشد، به‌صورت $\pm ۲nE_۸ \oplus kH$ است (که در اینجا $H = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$).
- اگر فرم معین باشد، تعداد زیادی حالت وجود دارد. از هر رتبه تعداد باپایان فرم وجود دارد که این تعداد نیز به‌سرعت رشد می‌کنند. برای نمونه، بیش از $۱۰^{۵۰}$ فرم معین متمایز از رتبهٔ ۴۰ وجود دارند. بنابراین رده‌بندی این حالت در عمل ناامید کننده است.

توجه کنید که طبق قضایای فریدمن، ردهٔ همسانریختی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی جهت‌دار و بسته و همبند ساده توسط دو عدد صحیح $(b_۲, \tau)$ یعنی دومین عدد بتی، نشان خمینه و همچنین زوجیت آن معین می‌شود.

از طرف دیگر، دانلدسن در [4] نشان داده است که فرم تقاطعی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار در صورت معین بودن، به‌صورت یک ماتریس قطری با درایه‌های اصلی ۱ و ۱− است. در واقع دانلدسن این مطلب مهم را نیز نشان داده است که خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی ممکن است دارای تعداد نامتناهی ساختار هموار باشد. به‌زبان دیگر، فرم تقاطعی این قابلیت را ندارد که بین ساختارهای

1) Kirby-Siebenmann 2) Finitely Represented 3) R. E. Gompf 4) Symplectic
5) Unimodular 6) D. Husemoller 7) Parity

هموار تمایز ایجاد کند. به همین دلیل، برای تمایز گذاردن بین ساختارهای غیرهمسانریخت، باید چاره‌ای دیگر اندیشید. دانلدسن باالهام از کارهای تاوبز در رابطه با نظریهٔ اینستانتون[1]ها، نظریهٔ جدیدی بنا نهاد که به نظریهٔ دانلدسن شهرت یافت. به‌طور دقیق‌تر، وی با شمردن هموستارهایی مثل A روی یک کلاف با گروه ساختاری $SU(۲)$ یا $SO(۳)$ که جزء خودگان آن‌ها یعنی F_A^+ صفر می‌شود، یک ناوردای دیفرانسیلی موسوم به چندجمله‌ای دانلدسن برای خمینه‌های ۴ ــ بعدی هموار به‌دست آورد. او به همراه کرونهایمر[2] بسیار کوشیده‌اند تا تصویر روشنی از این نظریه را به جهان ریاضی و فیزیک عرضه کنند. شرح کامل ماجرا در [6] آمده است. نظریهٔ دانلدسن که از سنگین‌ترین نظریه‌های ریاضی به‌شمار می‌رود به مدت ۱۲ سال (از ۱۹۸۲ تا ۱۹۹۴) هندسه‌دانان را مشغول خود ساخت، اما علی‌رغم کارهای سنگین در این زمینه، پیشرفت‌های محدودی در شناخت خمینه‌های ۴ ــ بعدی هموار به ارمغان آمده است.

سرانجام با روی کار آمدن نظریهٔ بدیع زایبرگ ــ ویتن، پیشرفت‌های بیشتری در زمینهٔ خمینه‌های ۴ ــ بعدی به‌وجود آمد. همچنین اکثر نتایج نظریهٔ دانلدسن به‌طور ساده‌تری اثبات شد. از جملهٔ این موارد می‌توان به مسألهٔ ساختارهای هموار ناهم‌ارز[3] در توپولوژی دیفرانسیل اشاره کرد. آغاز مطالعهٔ معنادار این مسأله به میلنور باز می‌گردد. او بود که نشان داد دقیقاً ۲۷ ساختار هموار ناهم‌ارز روی $S^۷$ وجود دارد. در بعد چهارم هیچ پیشرفتی در این زمینه حاصل نشد تا این‌که دانلدسن و تاوبز به این مسأله علاقه نشان دادند.

۳. ساختارهای هموار ناهم‌ارز

در توپولوژی هندسی، مویس[4] نشان داده است که هر خمینهٔ توپولوژیک با بعد کمتر یا مساوی ۳ دقیقاً یک ساختار هموار دارد. همچنین اسمیل[5] با استفاده از h ــ هم مرزی نشان داده است که در بعدهای بزرگتر یا مساوی ۵، هر خمینهٔ توپولوژیک یا اصلاً دارای ساختار هموار نیست یا این که حداکثر دارای تعداد متناهی ساختار هموار است. در بعد چهارم، وضع کاملاً متفاوت و شگفت‌انگیز است حتی برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۴$. بر خلاف دیگر ابعاد که $\mathbb{R}^n(n \neq ۴)$ها تنها دارای یک ساختار هموار می‌باشند، تاوبز نشان داده است که $\mathbb{R}^۴$ دارای تعداد ناشمارا ساختار اگزاتیک است. اگرچه چیگر[6] در [3] به‌کمک هندسهٔ ریمانی پیشرفته نشان داده است که هر خمینهٔ ۴ ــ بعدی فشرده حداکثر دارای تعداد شمارای نامتناهی ساختار هموار است، تاکنون هیچ موردی از خمینه‌های هموار ۴ ــ بعدی و فشرده با تعداد متناهی ساختار هموار ارائه نشده است. دو خمینهٔ هموار X و Y را نسبت به هم اگزاتیک گویند هرگاه همسانریخت بوده ولی وابرریخت نباشند. همچنین دو ساختار دیفرانسیل‌پذیر $S_۱$ و $S_۲$ روی خمینهٔ X را اگزاتیک گویند هرگاه نگاشت همانی $I_X : (X, S_۱) \to (X, S_۱)$ هموار نباشد.

1) Instanton 2) Peter Kronheimer 3) Exotic 4) E. Moise 5) Stephen Smale
6) Jeff Cheeger

پیداکردن ساختار اگزاتیک روی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی همبند ساده و بسته با $b_۲$ کوچک یکی از مسائل جذاب و سابقه‌دار در توپولوژی دیفرانسیل می‌باشد. در این خصوص، **انگارهٔ هموار پوانکاره** را داریم که حاکی است اگر X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار بسته و هم‌ارز هموتوپی با $S^۴$ باشد، آن‌گاه لزوماً X با $S^۴$ و ابرریخت است.

اولین ساختار هموار ناهم‌ارز روی رویهٔ گویای $\mathbb{CP}^۲\#_n\overline{\mathbb{CP}^۲}$ وقتی در اواخر دههٔ هشتاد میلادی پیدا شد که دانلدسن نشان داد رویه‌ای موسوم به دولگاچف[1] با $\mathbb{CP}^۲\#_۹\overline{\mathbb{CP}^۲}$ همسانریخت است ولی وابرریخت نیست [6]. او برای این کار از ناورداهای خویش استفاده کرده است. خیلی زود فرایدمن[2] و مورگان[3]، اکنک[4] و وان‌دون در [38] با استفاده از نظریهٔ دانلدسن به معرفی خانواده‌ای نامتناهی از ساختارهای هموار ناهم‌ارز روی رویهٔ $\mathbb{CP}^۲\#_۹\overline{\mathbb{CP}^۲}$ پرداختند. کمی بعد، کاتشیک[5] در [18] و اکنک و وان‌دون در [39] با به‌کار بردن نظریهٔ پیمانه‌ای $SO(۳)$، یک ساختار هموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_۸\overline{\mathbb{CP}^۲}$ پیدا کردند که این بار رویه‌ای موسوم به بارلو[6] ظاهر گردید. پانزده سال گذشت و از ساختارهای هموار ناهم‌ارز خبری نشد تا این که پارک[7] در سال ۲۰۰۴ یک ساختارهموار ناهم‌ارز همتافته روی $\mathbb{CP}^۲\#_۷\overline{\mathbb{CP}^۲}$ بنا کرد [41]. این بار از نتایج تاوبز در هندسهٔ همتافته استفاده شد. علاوه بر این، پارک با استفاده از این مطالب، سومین ساختار هموار ناهم‌ارز را روی $\mathbb{CP}^۲\#_۸\overline{\mathbb{CP}^۲}$ معرفی کرد. همچنین در اینجا بود که ارتباط بین وجود ساختارهای همتافته و ساختارهای هموار ناهم‌ارز آشکار گردید. به‌دنبال آن، تحقیقات فینتاشل[8]، استرن[9]، پارک، اشتیپشیتز[10] و سابو[11] نشان داد که تعداد نامتناهی ساختارهموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_n\overline{\mathbb{CP}^۲}(n = ۵, ٦, ۷, ۸)$ وجود دارد ([9]، [42]، [43] و [52]). در سال ۲۰۰٦ فینتاشل، دوگ پارک[12] و استرن [9] وجود یک خانواده نامتناهی از ساختارهای هموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_۳\overline{\mathbb{CP}^۲}$ را نشان دادند و سرانجام در سال ۲۰۰۷، اخمدوف[13] و دوگ پارک [1] و اسکات بالدریج[14] و پال کرک[15] [2] یکی از این ساختارهای هموار ناهم‌ارز را ارائه کردند. تاکنون مورد دیگری از ساختارهای هموار ناهم‌ارز اعلام نشده است.

از دیگر کاربردهای درخشان نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، اثبات انگاره‌ای سابقه‌دار از رنه توم ریاضیدان و فیلسوف شهیر فرانسوی (۲۰۰۲—۱۹۲۳) و تعمیم‌های آن توسط کرونهایمر، مروکا، فینتاشل، استرن، مورگان، اژواچ، سابو و تاوبز می‌باشد.

۴. مسألهٔ کمینه شدن گونه‌ها و انگارهٔ توم

اگرچه مطالعهٔ هندسه و توپولوژی رویه‌ها نسبتاً آسان است و به زمان گاوس برمی‌گردد، اما مسائل مربوط به نشاندن آن‌ها در خمینه‌های با بعد بالاتر بسیار مشکل‌اند.

---

1) Dolgachev 2) R. Friedman 3) John W. Morgan 4) C. Okonek 5) D. Kotschik 6) Barlow 7) Jongil. Park 8) R. Fintushel 9) R. Stern 10) A. Stipsicz 11) Zoltan. Szabo 12) Doug Park 13) A. Akhmedov 14) Scott. Baldridge 15) Paul Kirk

بررسی معنادار این موضوعات اساساً در حوزهٔ توپولوژی هندسی قرار می‌گیرد و با کارهای ویتنی[۱]، توم و میلنور شروع شده و تاکنون ادامه دارد. در این قسمت به بیان یکی از مسائل کمینه‌شدن گونه[۲]ها که نقش بسزای آن در مطالعهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی به تجربه ثابت شده است، می پردازیم. برای این منظور، فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار فشرده و جهت‌پذیر باشد، گروه همولوژی $H_{۲}(X,\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید و ردهٔ همولوژی $\alpha \in H_{۲}(X,\mathbb{Z})$ را اختیار کنید. طیف وسیعی از رویه‌های دو بعدی در X با گونه‌های مختلف و همچنین ساختارهای هندسی مختلف می‌توانند نمایندهٔ این ردهٔ همولوژی باشند. این امر واقعیتی از نظریهٔ کوبوردیسم توم است. حال فرض کنید Σ چنین نماینده‌ای با گونهٔ g باشد. با چسباندن دستوارهٔ[۳] مناسب کوچکی می‌توان به نمایندهٔ دیگری چون Σ با گونهٔ بزرگتر رسید. بنابراین نمی‌توان کران بالایی برای این گونه‌ها متصور شد، اما دلیلی ندارد که از کران پایین این گونه‌ها نپرسیم. در واقع هدف، پیدا کردن مقادیر تابع زیر است:

$$\begin{cases} MG : H_{۲}(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{N} \cup \{۰\} \\ MG(\alpha) := \min\{g \mid \text{همولوژی گونه رویه‌ای است که رده} \alpha \text{ را نشان می‌دهد.}\} \end{cases}$$

حال توجه خود را به صفحهٔ تصویری مختلط، یعنی $X = \mathbb{CP}^{۲}$ معطوف می‌کنیم. یک خم جبری Σ را در آن اختیار کنید و توجه داشته باشید که چنین خمی همواره وجود دارد و دارای درجه است. به‌زبان ساده، درجهٔ Σ تعداد دفعاتی است که خم، خط تصویری را قطع می‌کند. در توپولوژی جبری راه دیگری برای محاسبهٔ درجه وجود دارد: یک خم جبری نشانده شده در $\mathbb{CP}^{۲}$ را می‌توان به‌صورت نشانندهٔ هلومورف $i : \Sigma \to \mathbb{CP}^{۲}$ تعبیر کرد که در آن Σ یک رویهٔ ریمانی فشرده است. در این صورت درجهٔ خم جبری، عدد صحیح d است که

$$i_{*}(H_{۲}(\Sigma,\mathbb{Z}) \text{ کلاس بنیادی در }) = d.(H_{۲}(\mathbb{CP}^{۲},\mathbb{Z}) \text{ مولد})$$

در هندسهٔ جبری نشان داده می‌شود که گونهٔ یک خم جبری نشانده شده در $\mathbb{CP}^{۲}$ با درجهٔ d را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$g = \frac{(d-۱)(d-۲)}{۲}$$

توم عقیده داشت که اگر یک رویه و یک خم جبری در $H_{۲}(\mathbb{CP}^{۲},\mathbb{Z})$ هم‌رده باشند، گونهٔ خم جبری کمتر از گونهٔ رویه دیگر است:

انگارهٔ توم: فرض کنید Σ یک رویهٔ هموار جهت‌دار نشانده شده در $\mathbb{CP}^{۲}$ با گونهٔ g باشد به‌طوری که ردهٔ همولوژی نمایش داده شده توسط آن با ردهٔ همولوژی یک خم جبری Σ' از درجهٔ d یکسان باشد، در این صورت: $\quad g(\Sigma') = \frac{(d-۱)(d-۲)}{۲} \leq g$.

1) H. Whitney 2) Genus 3) Handle Attachment

تلاش‌های زیادی برای اثبات این انگاره صورت گرفت که تنها منجر به اثبات آن در حالت‌های $d = ۱, ۲, ۳, ۴, ٦$ و به‌دست آوردن نامساوی‌های ضعیف‌تر شد. مثلاً کرور[1] و میلنور آن را در حالت $d = ۳$ اثبات کردند [17]. لازم به ذکر است که مورگان انگارهٔ توم را به خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط تعمیم داده است.

در کنگرهٔ جهانی ریاضیات سال ۱۹۸٦، کرونهایمر با استفاده از نظریهٔ دانلدسن برنامه‌ای را برای حمله به این مسأله در حالت کلی تدوین کرد. به‌طور دقیق‌تر، وی به مطالعهٔ معادلات اینستانتون روی $X - \Sigma$ با در نظر گرفتن تکینگی‌های احتمالی روی Σ پرداخت. این برنامه در سال‌های بعد توسط وی و مروکا[2] دنبال و منجر به نتایجی قابل قبول در حالت $b^+(X) \geq ۲$ گردید، مثلاً وقتی که $X = K_۳$. اما با توجه به این‌که $b^+(\mathbb{CP}^۲) = ۱$، نتایج آن‌ها برای انگارهٔ اصلی توم کارآمد نبود. شرح مبسوطی از این ماجراها شامل رهیافت‌ها و چالش‌ها در [21] و [22] و [24] آمده است.

هنوز چند ماهی از تولد نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن سپری نشده بود که راه باز شد و کرونهایمر و مروکا به‌کمک این نظریه به اثباتی برای انگارهٔ توم نایل شدند [23]. همچنین به‌موازات آن‌ها، فینتاشل و استرن نیز انگاره را در حالت خاص کره‌های ایمرسیون مجدداً به‌کمک نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن اثبات نمودند [7]. از طرف دیگر مورگان، سابو، کرونهایمر و مروکا با به‌دست آوردن یک فرمول ضربی[3] برای ناورداهای زایبرگ ـ ویتن، انگارهٔ تعمیم یافتهٔ توم را در حالتی که ردهٔ همولوژی دارای عدد تقاطعی[4] نامنفی باشد به اثبات رساندند [35]. سرانجام سابو انگاره را در کلی‌ترین حالت روی خمینه‌های همتافته و بدون در نظر گرفتن شرط اضافی روی عدد خودتقاطعی اثبات کرد [40]. در سال ۲۰۰۷ میلادی، کرونهایمر و مروکا و اژواچ[5] و سابو به‌پاس تلاش‌های مستمرشان در پیشبرد هندسه و توپولوژی به دریافت جایزهٔ وبلن[6] نایل آمدند. از دیگر کاربردهای نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، مهار نسبی انگارهٔ لجام گسیختهٔ $\frac{۱۱}{۸}$ است: در سال ۱۹۸۲، انگاره‌ای موسوم به $\frac{۱۱}{۸}$ توسط ماتسوموتو[7] در [33] ارائه شد. صورت این انگاره چنین است:

انگارهٔ $\frac{۱۱}{۸}$: فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی اسپینی، همبند ساده و بسته باشد، در این صورت

$$\frac{b_۲(X)}{|\tau(X)|} \geq \frac{۱۱}{۸}$$

که در اینجا $b_۲(X)$ و $\tau(X)$ به‌ترتیب دومین عدد بتی X و نشان X را نمایش می‌دهند.

با توجه به این که برای رویهٔ $K_۳$ داریم $\frac{b_۲(K_۳)}{|\tau(K_۳)|} = \frac{۱۱}{۸}$، کران $\frac{۱۱}{۸}$ قابل تعویض با عدد بزرگتری نمی‌باشد. دانلدسن در چند حالت خاص به این انگاره پاسخ مثبت داده است. کرونهایمر نیز نتایج وی را تا حدی توسعه داده است. اما بیشترین پیشرفت‌ها در زمینهٔ اثبات این انگاره، از آن فاروتا[8] است. وی در [12] رابطهٔ $\frac{b_۲(X)}{|\tau(X)|} \geq \frac{۱۰}{۸}$ را با استفاده از معادلات زایبرگ ـ ویتن روی X به اثبات

1) M. Kervaire 2) Tomasz Mrowka 3) Product Formula 4) Self-Intersection Number
5) Peter Ozsvath 6) O. Veblen 7) Y. Matsumoto 8) M. Furuta

رسانیده است. پس از آن، تا زمان نگارش این مقاله، پیشرفت عمدهٔ دیگری در زمینه اثبات این انگاره صورت نگرفته است.
خالی از لطف نیست که بدانیم اثبات یا رد انگارهٔ $\frac{11}{8}$ چه نقشی در توپولوژی دیفرانسیل خمینه‌های ۴ ـ بعدی دارد. برای این منظور، فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار، همبند ساده، بسته و جهت‌دار باشد. در این صورت با توجه به کارهای دانلدسن دو حالت تمیز می‌دهیم:

- **حالت اول:** اگر Q_X فرد باشد، آن‌گاه دارای نمایشی به‌صورت زیر است:

$$Q_X \simeq n[1] \oplus m[-1]$$

- **حالت دوم:** اگر Q_X زوج باشد، آن‌گاه یا Q_X بدیهی است، یعنی $H_2(X) = 0$ و یا این‌که دارای نمایشی به‌صورت زیر است:

$$Q_X \simeq \pm 2nE_8 \oplus kH \quad n,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

پرسشی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا این نمایش‌ها مصداق واقعی پیدا می‌کند یا نه؟ توجه کنید که حالت اول به‌وسیلهٔ $X = (\#_n \mathbb{CP}^2)\#(\#_k \overline{\mathbb{CP}^2})$ محقق می‌شود. برای بررسی حالت دوم، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

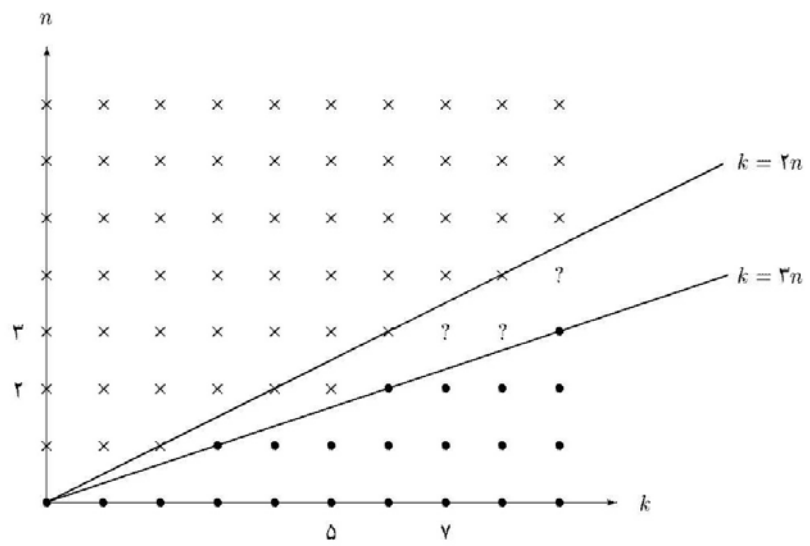
- **(الف)** $k \geq 3n$. در این حالت فرم‌های $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط خمینه‌های $X = (\#_n K_3)\#(\#_{k-3n} S^2 \times S^2)$ با توجه به روابط $Q_{S^2 \times S^2} = H$ و $Q_{K_3} = -2E_8 \oplus 3H$ محقق می‌شوند.
- (ب) $k \leq 2n$. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، فاروتا در راستای اثبات انگارهٔ $\frac{11}{8}$ با استفاده از نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن نشان داد که اگر X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار همبند ساده باشد، داریم $\frac{b_2(X)}{|\tau(X)|} > \frac{10}{8}$. حال فرض کنید فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط چنین خمینه‌ای محقق شود، بنابراین

$$\frac{b_2(X)}{|\tau(X)|} = \frac{16n + 2k}{16n} > \frac{10}{8}$$

یا معادلاً $k > 2n$. با توجه به این مطلب، در حالت $k \leq 2n$ فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط هیچ خمینهٔ ۴ ـ بعدی محقق نمی‌شود.

- (پ) $2n < k < 3n$. این حالت از بقیه پیچیده‌تر است. فقط برای $(k, n) = (5, 2)$ می‌دانیم که فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط هیچ خمینهٔ هموار ۴ ـ بعدی محقق نمی‌شود. پروژه‌ای هم به رهبری استرن برای بررسی $(k, n) = (7, 3)$ شروع شده است. نکتهٔ قابل تأمل این است که در صورت درست بودن انگارهٔ $\frac{11}{8}$، به‌راحتی می‌توان نشان داد که این حالت برای هیچ خمینهٔ هموار ۴ ـ بعدی محقق نمی‌شود.

خلاصهٔ این مطالب را می‌توان در نموداری به‌صورت زیر نمایش داد. توجه کنید که علامت • حالاتی را نشان می‌دهد که فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ می‌تواند توسط خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار محقق شود و علامت × حالاتی را نشان می‌دهد که این امر رخ نمی‌دهد. همچنین علامت ? مواردی را نشان می‌دهد که امید است با اثبات یا رد انگارهٔ $\frac{11}{8}$ جواب داده شود.



۵. جغرافیا و گیاه‌شناسی همتافته

فرض کنید زوج $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا خمینهٔ ۴ ـ بعدی بسته و همبند ساده‌ای چون X با یک ساختار هموار یا همتافته و یا مختلط یافت می‌شود به‌طوری که $(b_2(X), \tau(X)) = (m,n)$ ؟ مطالعه روی چنین سؤالاتی در مورد رویه‌های مختلط توسط پرسون[1] در اوایل دههٔ هشتاد میلادی صورت گرفت [44]. در واقع، وی دو دستهٔ کلی از مسائل را تحت عناوین جغرافیای[2] مختلط و گیاه‌شناسی[3] مختلط مطرح کرد. به‌طور دقیق‌تر:

- **(جغرافیا)** همهٔ زوج‌های $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را پیدا کنید به گونه‌ای که متناظر با آن‌ها خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده X چنان یافت شود که

$$(c_1^2(X), c_2(X)) = (3\tau(X) + 2\chi(X), \chi(X)) = (m,n)$$

در اینجا c_1 و c_2 و χ به‌ترتیب اولین و دومین کلاس چرن و شاخص اویلر X را نشان می‌دهند.

1) P. Persson 2) Geography 3) Botany

- **(گیاه‌شناسی)** با تثبیت زوج $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، همهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده X را پیدا کنید به‌طوری که

$$(c_1^2(X), c_2(X)) = (m,n).$$

پیشرفت‌های صورت گرفته در این زمینه در [9]، [14] و [51] آمده است. طبق رده‌بندی کدیرا، خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط با شرایط مذکور، همتافته نیز هستند. تعمیم این مسائل به حالت همتافته به‌صورت زیر انجام می شود:

- **(جغرافیای همتافته)** همهٔ زوج‌های $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را پیدا کنید به گونه‌ای که متناظر با آن‌ها، خمینه‌های ۴ ـ بعدی همتافتهٔ بستهٔ همبند ساده X چنان یافت شود که

$$(b^2(X), \tau(X)) = (m,n).$$

- **(گیاه‌شناسی همتافته)** با تثبیت زوج $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، همهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی همتافتهٔ بستهٔ همبند ساده X را پیدا کنید به‌طوری که

$$(b^2(X), \tau(X)) = (m,n).$$

گذار از هندسهٔ مختلط به هندسهٔ همتافته، همواره کار سختی بوده است و جغرافیا و گیاه‌شناسی همتافته نیز از این قاعده مستثنی نیستند. از مهم‌ترین ابزارهایی که تاکنون برای مطالعهٔ این سؤالات به‌کار رفته است می‌توان به این موارد اشاره کرد: نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، جراحی گامف[1]، مدادهای لفشتز[2]، پوشش‌های شعبه‌دارشدهٔ همتافته[3]. به‌عنوان نمونه داریم [51]:

قضیه: اگر X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده و جهت‌پذیر باشد، آن‌گاه $c_1^2(X) = 0$ یا $c_1^2(X) > 0$ و $2\chi(X) - 6 \leq c_1^2(X) \leq 9\chi(X)$.

حال مجموعهٔ

$$D = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m > 0, 2n - 6 \leq m \leq 9n\}$$

را در نظر بگیرید. اگرچه جغرافیا و گیاه‌شناسی این ناحیه کاملاً مشخص نشده است، اما اکثر نقاط D متناظر با رویه‌های بیضوی از نوع عمومی[4] هستند. برای نقاط خارج از D نیز نتایجی توسط اشتیپشیتز به دست آمده است [51].

---

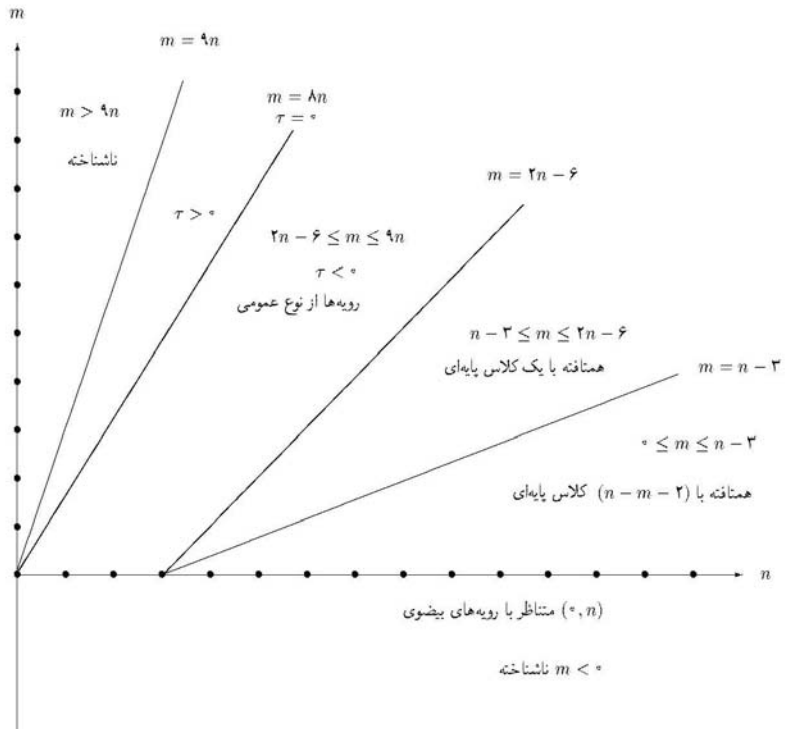
1) Gompf Surgery 2) Lefschets Pencils 3) Symplectic Branched Covers

4) General Type

قضیه: متناظر با هر زوج $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ که $0\le m\le 2n-6$، خمینهٔ تحویل‌ناپذیری چون X وجود دارد به طوری که $(c_1^2(X),\chi(X))=(m,n)$.

از مسائل باز در این زمینه، تعمیم یا رد نامساوی بوگومولو ـ میااکا ـ یائو[1] برای حالت همتافته است. طبق این نامساوی، برای هر رویهٔ مختلط X داریم $c_1^2(X)\le 9\chi(X)$. خلاصهٔ تحقیقات در زمینهٔ جغرافیا و گیاه‌شناسی خمینه‌های ۴ ـ بعدی در شکل ۱ـ۱ آمده است (مرجع [9] را ببینید).

ردهٔ همولوژی دوبعدی $c\in H_2(X,\mathbb{Z})$ را یک کلاس پایه‌ای X گویند هرگاه ناورداهای زایبرگ ـ ویتن متناظر با آن ناصفر باشند.



شکل ۱: خلاصه تحقیقات در زمینه جغرافیا و گیاه‌شناسی خمینه‌های ۴ ـ بعدی [9]

۶. گذار از دیوار در بعد چهار

فرض می‌کنیم X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار و بسته باشد. دو حالت زیر را تمیز می‌دهیم: اول این‌که $b_2^+(X)>1$. در این حالت، ناوردای زایبرگ ـ ویتن به متریک ریمانی روی X بستگی

1) Bogomolov-Miyaoka-Yau

ندارد. حالت دوم این که $b_2^+(X) = 0, 1$. در این حالت بستگی شدیدی بین متریک ریمانی روی X و ناوردای زایبرگ ــ ویتن وجود دارد. برای بررسی این وابستگی، نیاز به مفاهیمی چون ساختارهای حجره‌ای[1] و گذار از دیوار[2] و شارش طیفی[3] داریم. در این حالت، فضای متریک‌های ریمانی روی X یعنی $\mathfrak{Met}(X)$ را به‌طور مشخص، به حجره‌هایی تقسیم می‌کنند و فضای بین دو حجره را دیوار می‌نامند، مقدار ناوردا با گذار از دیوار، طبق فرمول‌های معینی موسوم به فرمول‌های گذار از دیوار، یک واحد کم یا زیاد می‌شود. بحث دقیقی از این مفاهیم در [31]، [36]، [37] و [47] آمده است.

۷. نظریهٔ چسباندن

چه در نظریهٔ دانلدسن و چه در نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن مسأله‌ای کلی به این صورت مطرح می‌شود: فرض کنید خمینهٔ ۴ ــ بعدی X از چسباندن[4] دو خمینهٔ ۴ ــ بعدی X_1 و X_2 توسط خمینهٔ ۳ ــ بعدی M حاصل شده باشد. هدف، به‌دست آوردن اطلاعاتی راجع به X است در صورتی که اطلاعات مشابهی برای X_1 و X_2 در دست باشد. مثلاً می‌خواهیم بدانیم ناوردای زایبرگ ــ ویتن X چه ارتباط با ناوردای زایبرگ ــ ویتن X_1 و X_2 دارد. اولین تلاش برای مطالعهٔ این مسأله توسط ویتن در [62] صورت گرفته است. به‌ویژه وقتی که چسباندن به‌وسیلهٔ کرهٔ ۳ ــ بعدی صورت گرفته باشد، حاصل کار همان جمع همبند است که در این حالت قضایای صفر[5] به‌دست می‌آیند. بیان دقیق این مفاهیم نیاز به تعریف خمینه‌های با انتهای استوانه‌ای[6] و تعمیم معادلات و ناورداهای زایبرگ ــ ویتن روی این خمینه‌ها و ... دارد. شرحی از این ماجرا و همچنین کارهای انجام شده در این زمینه در [36]، [46] و [47] آمده است.

۸. کاربردها در هندسه کی‌لری

هندسهٔ کی‌لری در قلب هندسهٔ ریمانی، هندسهٔ مختلط و هندسهٔ همتافته قرار دارد، بنابراین از بدو پیدایش، مورد توجه اهالی هر یک از این سه حوزه قرار داشته است. بزرگانی چون وایل[7]، کدیرا[8]، کلابی[9]، یائو و گروموف در این زمینه به تحقیق پرداخته اند. نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن نیز با این هندسه بسیار سازگار است. به‌کمک این نظریه، بسیاری از کارهای قبلی در این زمینه به‌طور ساده‌تری اثبات و در برخی موارد نیز بهبود بخشیده شد. ویتن، تیان[10]، یائو، کرونهایمر، مروکا، موریسون[11]، فرایدمن، مورگان و لی برون[12] رهبری نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن را در این زمینه و زمینه‌های مرتبط به عهده دارند.

1) Chamber Structure 2) Wall-Crossing 3) Spectral Flow 4) Gluing 5) Vanishing Theorems 6) Manifolds With Cylindrical End 7) H. Weyl 8) K. Kodaira 9) Calabi 10) Gang Tian 11) Morison 12) Claude LeBrun

رده‌بندی رویه‌های کی‌لری توسط انریکو[1] و کدیرا صورت گرفت. کلید فهم این رده‌بندی، کلاف کانونیک و بُعد کدیرا است. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید X یک رویهٔ کی‌لری باشد. به این رویه، یک کلاف برداری $K_X = \bigwedge^{2,0} T^*X$ موسوم به کلاف کانونیک و عدد $Kod(X) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ موسوم به بُعد کدیرا نظیر می‌شود:

$$Kod(X) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))}{\log m}$$

که در اینجا $\mathcal{O}_X(mK_X)$، شیف مقاطع هلومورف کلاف $K_X^{\otimes m}$ و $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ فضای مقاطع هلومورف سرتاسری $K_X^{\otimes m}$ را نشان می‌دهد.

رویهٔ کی‌لری X را

- مینیمال گویند هرگاه نتوان هیچ کرهٔ هلومورف با عدد تقاطعی -1 در آن نشاند.
- خط‌کشی شده گویند هرگاه فضای تام یک S^2 ـ کلاف اصلی روی یک رویهٔ ریمانی باشد.
- بیضوی گویند هرگاه نگاشت هلومورف $f : X \to \mathbb{CP}^1$ با تارهای چنبره‌ای موجود باشد.

حال می‌توان رده‌بندی کدیرا و انریکو از رویه‌های کی‌لری را بیان کرد: اگر X یک رویه کی‌لری مینیمال باشد، آن‌گاه $Kod(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$. علاوه بر این

- $Kod(X) = -\infty$ اگر و تنها اگر $X = \mathbb{CP}^2$ یا X یک رویه خط‌کشی شده باشد.
- $Kod(X) = 0$ اگر و تنها اگر X توسط T^4 یا K_3 به‌طور متناهی پوشیده شود. در این حالت $c_1(K_X)$ تابدار است.
- اگر $Kod(X) = 1$، آن‌گاه X بیضوی است. همچنین $c_1(K_X)$ تابدار نیست و داریم $c_1(K_X).c_1(K_X) = 0$.
- اگر $Kod(X) = 2$، آن‌گاه $c_1(K_X) \cdot c_1(K_X) > 0$. چنین رویه‌هایی را از نوع کلی می‌نامند.

وان دون عقیده داشت که بُعد کدیرا برای رویه‌های کی‌لری ناوردایی است هموار، یعنی بُعد کدیرای دو رویهٔ کی‌لریِ وابرریخت، یکی است. این انگاره، سرانجام توسط فرایدمن و کین[2] با استفاه از معادلات اینستانتون اثبات گردید [11]. کمی بعد نیز کرونهایمر به‌کمک نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن اثبات ساده‌تری ارائه داد.

ویتن در [62] به بررسی معادلات زایبرگ ـ ویتن روی رویه‌های کی‌لری پرداخته و نشان داده است که در این حالت، معادلات همواره دارای جواب می‌باشند.

قضیه (ویتن): اگر X یک رویهٔ کی‌لری با شرط $b^+(X) > 1$ باشد، آن‌گاه ناوردای زایبرگ ـ ویتن X متناظر با ساختار $Spin^c$ ذاتی برابر ± 1 می‌باشد.

---

1) Enriques   2) Z. Qin

لازم به ذکر است که ویتن حالت $b^+(X) = 1$ را نیز به‌کمک فرمول‌های گذار از دیوار بررسی کرده است. علاوه بر این، ویتن نشان داده است که ناوردای زایبرگ ــ ویتن رویه‌های کی‌لری در حالتی که بُعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، متحد با صفر می‌باشد و این مطلب را در حالت کلی به‌صورت انگاره‌ای بیان کرده است. وی همچنین نشان داد که وجود جواب برای معادلات زایبرگ ــ ویتن، مانعی برای وجود متریک‌های ریمانی با خمیدگی عددی مثبت است.

همچنین لی برون در [26] با توجه به ارتباط بین معادلات زایبرگ ــ ویتن و خمیدگی عددی مثبت و همچنین با استفاده از رده‌بندی انریکو و کدیرا، قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه: فرض کنید X یک رویه کی‌لری می‌نیمال باشد. در این صورت سه گزاره زیر هم ارزند:

الف. X با $\mathbb{C}P^2$ یا یک رویه خط‌کشی شده وابرریخت است.

ب. X دارای یک متریک کی‌لری با خمیدگی عددی مثبت است.

ج. X دارای متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت است.

۹. انگارهٔ ویتن

ویتن با توجه به شواهد و قرائن فیزیکی عقیده دارد که نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن و نظریهٔ دانلدسن با یکدیگر هم‌ارز هستند. بیان این هم‌ارزی علاوه بر نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن به پیش‌نیازهایی تکنیکی از نظریهٔ دانلدسن نیز احتیاج دارد و خارج از حوصلهٔ این بحث است. بدیهی است که تلاش برای اثبات این هم‌ارزی نیازمند تسلط کافی به هر دو نظریه است. پیسریجاچ[1] و تیورین[2] برنامه‌ای را برای اثبات این هم‌ارزی ترتیب داده‌اند [45]. پس از مدتی به ریاضیاتی بسیار سنگین نیاز پیدا شد. بنابراین پاول فیهان[3] و توماس لنز[4] نیز به این برنامه پیوستند و برنامه‌ای جدید را ترتیب دادند. در این برنامه، ایده‌هایی از جمله تعمیم نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن به گروه‌های پیمانه‌ای ناآبلی و بررسی عمیق‌تر ارتباط بین نظریهٔ یانگ ــ میلز و توپولوژی لحاظ شده است. پس از یک دهه کارهای سنگین انجام گرفته در راستای اهداف این برنامه، انگارهٔ ویتن توسط فیهان و لنز اثبات شد. توضیحات بیشتر راجع به این برنامه‌ها در [16] و [32] آمده است. همچنین واجیاک[5] رویکرد دیگری را در راستای اثبات این انگاره در پیش گرفته است.

۱۰. انگارهٔ نوع ساده

تمام کارهای انجام شده در زمینهٔ محاسبهٔ ناوردای زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های ۴ ــ بعدی مؤید این مطلب است که در حالتی که بعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، ناوردای زایبرگ ــ ویتن صفر است. به‌عنوان نمونه، این مطلب روی خمینه‌های کی‌لری توسط ویتن و روی خمینه‌های همتافته توسط تاوبز تأیید گردیده است. این‌که این مطلب در حالت کلی درست است یا نه به انگارهٔ

1) V. Pidstrigatch 2) A. Tyurin 3) Paul M. N. Feehan 4) Thomas G. Leness
5) A. Vajiac

نوع ساده[1] شهرت یافته است. به جرأت می‌توان گفت که این انگاره در حال حاضر مهم‌ترین و البته سخت‌ترین انگاره در نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن است.

۱۱. انگارهٔ مینیمال

یک خمینهٔ هموار را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه نتوان آن را به‌صورت جمع همبند تعدادی خمینهٔ هموار نوشت مگر این‌که یکی از جمعوندها یک کره هموتوپی[2] باشد. منظور از کرهٔ هموتوپی خمینه‌ای است هم‌ارز هموتوپیک با کره. یک رویکرد طبیعی برای مطالعهٔ بهتر خمینه‌های ۴ ــ بعدی این است که در ابتدا به مطالعهٔ خمینه‌های تحویل‌ناپذیر بپردازیم. انگاره‌ای در این زمینه وجود داشت که به توم نسبت داده می‌شد، اگرچه وی خود را از این انگاره مبری می‌دانست:

هر خمینهٔ ۴ ــ بعدی هموار و همبند ساده را می‌توان به‌صورت جمع همبند تعدادی رویهٔ مختلط نوشت.

این انگاره توسط گامف و مروکا نقض شد. مثال‌های نقض آن‌ها و مثال‌های نقض دیگر، دارای ساختار همتافته بودند. این نکته و همچنین این مطلب که خمینه‌های تحویل‌پذیر دارای ناوردای زایبرگ ــ ویتن صفر می‌باشند، با توجه به ناصفر بودن ناوردای زایبرگ ــ ویتن برای خمینه‌های همتافته این انگاره را به تاوبز القا کرد که خمینه‌های همتافته عناصر ساختمانی خمینه‌های ۴ ــ بعدی همبند ساده هستند. این انگاره به انگارهٔ مینیمال شهرت یافت:

انگاره مینیمال: هر خمینهٔ ۴ ــ بعدی هموار همبند ساده را می‌توان به‌صورت جمع همبند تعدادی خمینهٔ همتافته نوشت.

چندی بعد سابو با ساختن یک خمینهٔ تحویل‌ناپذیر و غیرهمتافته، این انگاره را رد کرد [53]. کمی بعد از سابو، خانواده‌ای از این مثال‌های نقض توسط فینتاشل و استرن ارایه شد [8]. توضیحات بیشتر راجع به انگارهٔ مینیمال در مقالهٔ توصیفی [19] آمده است. برخلاف انگارهٔ هندسی‌سازی ترستن که توسط پرلمان اثبات شد و تجزیه‌ای از خمینه‌های ۳ ــ بعدی فشرده به اجزای شناخته شده‌تر را پیش روی ما می‌نهد، تاکنون هیچ انگاره‌ای در راستای شناسایی خمینه‌های ۴ ــ بعدی فشرده و هموار دوام نیافته است؛ به‌جز عقیده‌ای مبهم مبتنی بر این‌که چنین خمینه‌ای دارای تعداد نامتناهی ساختار هموار غیروابرریخت است. این عقیده به انگارهٔ وحشی[3] شهرت یافته است.

۱۲. کاربردها در هندسهٔ ریمانی

کاربردهای نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن در هندسهٔ ریمانی بسیار وسیع‌تر از آن است که بتوان در این نوشتار به آن پرداخت. درخشان‌ترین دستاوردها در این حوزه از آنِ لی برون است. شرح این ماجراها در مراجع [26]، [27]، [28]، [29]، [30] و [48] آمده است.

1) Simple Type 2) Homotopy Sphere 3) Wild Conjecture

یکی از موضوعات مورد علاقه در هندسهٔ ریمان بررسی ارتباط بین خمیدگی و توپولوژی یک خمینهٔ ریمانی است. خمینهٔ ریمانی (X, g) را در نظر بگیرید. شاید ساده‌ترین خمیدگی، خمیدگی عددی وابسته به متریک ریمانی g، یعنی $S_g : M \to \mathbb{R}$ باشد. طبیعی است که این سؤال را مطرح کنیم: کدام خمینه‌های فشرده و همبند ساده دارای متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت هستند؟ لیشنروویچ [1] یک مانع ساده برای این مطلب پیدا کرد: اگر X اگر یک خمینهٔ اسپینی ۴ ــ بعدی، فشرده، جهت‌دار و مجهز به متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه $\tau(X) = \circ$.

گروموف [2] و لاوسن [3] با استفاده از کارهای لیشنروویچ، نظریهٔ جراحی و هم‌مرزی اسپینی، موفق به ارائهٔ توصیفی کامل از خمینه‌های فشرده و همبند ساده با خمیدگی عددی مثبت در ابعاد بزرگتر یا مساوی ۵ شدند [15]. در واقع ایشان این امر مهم را نشان دادند که در بعدهای بالا، وجود متریک با خمیدگی عددی مثبت بیشتر به توپولوژی خمینه مربوط است تا هندسهٔ آن. ولی در بعد چهارم، اوضاع وارونه است. به‌عنوان نمونه، ویتن [62] نشان داد اگر X یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی فشرده با خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه ناورداهای زایبرگ ــ ویتن آن صفرند، یعنی $SW_X \equiv \circ$. این، یک مانع برای وجود متریک‌های با خمیدگی عددی مثبت ارائه می‌دهد که به ساختار هموار X بستگی دارد و نه فقط به توپولوژی آن. با توجه به این مطلب، می‌توان نشان داد که تعداد زیادی از خمینه‌های ۴ ــ بعدی فشرده شامل همهٔ رویه‌های جبری فشرده، متریک با خمیدگی عددی مثبت نمی‌پذیرند. بنابراین با توجه به نتایج ویتن در هندسهٔ کی‌لری و در حالت کلی‌تر نتایج تاوبز در هندسهٔ همتافته، می‌توان نشان داد که خمینه‌های همتافته دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت نیستند.

مراجع

[1] A. Akhmedov and D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds*, preprint(2007), math.GT/0701664.

[2] S. Baldridge and P. Kirk, *A symplectic manifold homeomorphic but not diffeomorphic to* $\mathbb{CP}^{2}\#_{3}\overline{\mathbb{CP}^{2}}$, preprint(2007), math.GT/0702211.

[3] J. Cheeger, "Finiteness theorems for Riemannian manifolds", *Amer. J. Math*, **92**(1970), 61-74.

[4] S. K. Donaldson, "An application of gauge theory to four-dimensional topology", *J. differential Geom.*, **18**(1983), no. 2, 279-315.

[5] S. K. Donaldson, "The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology", *Bull. AMS*, **33**(1996), no. 1, 45-70.

1) A. Lichnerowicz 2) Michael Gromov 3) H. B. Lawson

[6] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Science Publications, NewYork, 1990.

[7] R. Fintushel and R. Stern, "Immersed spheres in 4-manifolds and the immersed Thom conjecture", *Turkish J. of Math.*, **19**(1995), 145-157.

[8] R. Fintushel and R. Stern, "Knots, links, and 4-manifolds". *Invent. Math.*, **134**(1998), 363-400.

[9] R. Fintushel and R. Stern, *Six lectures on four 4-manifolds*, preprint(2007), math.GT/0610700.

[10] M. Freedman, "On the topology of 4-manifolds", *J. differential Geom.*, **17**(1982), 357-454.

[11] R. Friedman and Z. Qin, "The smooth invariance of the Kodaira dimension of a complex surface", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 369-376.

[12] M. Furuta, "The Monopole Equations and the 11/8 conjecture", *Math. Res. Letters*, **8**(2001), 279-291.

[13] R. E. Gompf, "A new construction of symplectic manifolds", *Ann. of Math.*, **142** (1995), 527-595.

[14] R. E. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics (20), Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[15] M. Gromov and H. B. Lawson, "The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature", *Ann. of Math.*, **111**(1980), 423-434.

[16] K. Iga, "What do topologists want from Seiberg-Witten theory?" *International Journal of Modern Physics, A.*, **17**(2002), no. 30, 4463-4514.

[17] M. Kervaire and J. Milnor, "On 2-spheres in 4-manifolds", *Proc. Nat. Acad. Science, USA.*, **47**(1961), 1651-1657.

[18] D. Kotschick, "On manifolds homeomorphic to $\mathbb{CP}^۲ \#_۸ \overline{\mathbb{CP}^۲}$", *Invent. Math.*, **95**(1989), 591-600.

[19] D. Kotschick. *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifold (after C. H. Taubes)*, Seminaire Bourbaki, No. 812, 4, 195-220, 1997 .

[20] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.

[21] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Gauge theory for embedded surfaces I", *Topology*, 32(1993), no. 4, 773-826.

[22] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Gauge theory for embedded surfaces II", *Topology*, **34**(1995), no. 1, 37-97.

[23] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "The genus of embedded surfaces in the projective plane", *Math. Res. Lett.*, **1**(1994), 797-808.

[24] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Embedded surfaces and the structurer of Donaldson's polynomial invariants", *J. differential Geom.*, **41**(1995), 573-.

[25] B. Lawson and M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton University Press, 1989.

[26] C. LeBrun, "On the scalar curvature of complex surfaces", *Geom. Funct. Anal.*, **5**(1995), 619-628.

[27] C. LeBrun, "Einstein metrics and Mostow rigidity", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 1-8.

[28] C. LeBrun, "Polarized 4-manifolds, extremal kahler metrics, and Seiberg-Witten theory", *Math. Res. Lett.*, 2(1995), 653-662.

[29] C. LeBrun, "Four-manifolds without Einstein metrics", *Math. Res. Lett.*, **2** (1996), 133-147.

[30] C. LeBrun, "Yambe constants and the Seiberg-witten perturbed equations", *Comm. An. Geom.*, **5**(1997), 535-553.

[31] T. J. Li and A. Liu, "General wall crossing formula", *Math. Res. Lett.*, **2** (1995),797-810.

[32] M. Marcolli, *Seiberg-Witten gauge theory*, Texts and Readings in Mathem vol. 17, Hindustan Book Agency, New Delhi, 1999.

[33] Y. Matsumoto, "On the bounding genus of homology 3-spheres", *J. Fac Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **29**(1982), 287-318.

[34] J. W. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[35] J. W. Morgan, Z. Szabo and C. H. Taubes, "A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture", *J. differential Geom.*, **44**(1996), 706-788.

[36] L. I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2000.

[37] C. Okonek and A. Teleman, "Seiberg-Witten invariants for manifolds with $b_+ =$ ۱, and the universal wall crossing formula", *Int. J. Math.*, **7**(1996), 811-832.

[38] C. Okonek and A. Van deVen, "Stable bundles and differentiable structures on certain elliptic surfaces", *Invent. Math.*, **86**(1986), 357-370.

[39] C. Okonek and A. Van de Ven, " -type-invariants associated to PU(2)- bundles and the differentiable structure of Barlow's surface", *Invent. Math.*, **95**(1989), 601-614.

[40] P. Ozsvath and Z. Szabo, "The symplectic Thom conjecture",*Ann. of Math.*, **151**(2000), 93-124.

[41] J. Park, "Non-complex symplectic 4-manifolds with $b_۲^+ =$ ۱", *Bull. London Math. Soc.*, **36**(2004), 231-240.

[42] J. Park, "Simply connected symplectic 4-manifolds with $b_۲^+ =$ ۱ and $c_۱^۲ =$ ۲", *Invent. Math.*, **159**(2005), 657-667.

[43] J. Park, A. Stipsicz and Z. Szabo, "Exotic smooth structures on $\mathbb{CP}^۲ \#_۵ \overline{\mathbb{CP}^۲}$", *Math. Res. Lett.*, **12**(2005), 701-712.

[44] U. Persson, "Chern invariants of surfaces of general type", *Compositio Mathematica*, **43**(1981) 3-58.

[45] V. Pidstrigatch and A. Tyurin, *Localisation of the Doanldson's invariants along Seiberg-Witten classes*, dg-ga/9507004.

[46] P. Safari, *A gluing theorem for Seiberg-Witten moduli spaces.* Ph.D thesis, Columbia Univerity, 2000.

[47] D. A. Salamon, *Spin Geometry and Seiberg-Witten invariants*, to appear in Birkhauser-Verlag.

[48] A. Sambusetti, *Einstein manifolds, volume rigidity and Seiberg Witten theory*, Seminaire de theorie spectrale et geometrie, Grenoble, **17**(1999), 163-184.

[49] N. Seiberg and E. Witten, "Electro-magnetic duality, monopole condensation and connementin N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory", *Nucl. Phys. B*, **426**(1994), 19-52.

[50] N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N = 2 supersymmetric QCD", *Nucl. Phys. B*, **431**(1994), 485-550.

[51] A. Stipsicz, "The geography problem of 4-manifolds with various structures", *Acta Math. Hungar.*, **7**(2000), 267-278.

[52] A. Stipsicz and Z. Szabo, "An exotic smooth structure on $\mathbb{CP}^2\#_6\overline{\mathbb{CP}^2}$", *Geom. Topol.*, **9**(2005), 813-832.

[53] Z. Szabo, "Simply connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structures", *Invent. Math.*, **132**(1998), 457-466.

[54] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 809-822.

[55] C. H. Taubes, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten in variants", *Math. Res. Letters*, **2**(1995), 9-13.

[57] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten and the Gromov invariants", *Math. Res. Letters*, 221(1995).

[58] C. H. Taubes, "SW $\Rightarrow$ Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo holomorphic curves", *J. Amer. Math. Soc.*, **9**(1996), 845-918.

[59] C. H. Taubes, "Gr $\Rightarrow$ SW: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions", *J. Diff. Geom.*, 51(1999) 203-334.

[60] C. H. Taubes, "Gr = SW : Counting curves and connections", *J. Diff. Geom.*, **52**(1999), 453-609.

[61] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture", *Geometry and Topology*, **11**(2007), 2117-2202.

[62] C. H. Taubes. *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture II: More closed integral curves for the Reeb vector field*, Preprint(2007), arxiv. Math/0702366 V2.

[63] E. Witten, "Monopoles and four-manifolds", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 769-796.

[٦۴] پدرام صفری، نظریه زایبرگ ـ ویتن چیست؟ نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲، صفحه ۱۱ـ۴.

[٦۵] سید محمد باقر کاشانی، خمینه های چهاربعدی، نشر ریاضی، سال ٦، شماره ۱ و ۲، صص ۸ ـ ۱۲.

حامد فرهادپور
پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات
hfarhadpour@ipm.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ۲۳ تا ۳۸

استنباط‌های شرطی: چرا؟ چه موقع؟ چگونه؟

علی‌رضا نعمت‌اللهی، مرجان کمالی سروستانی

چکیده

در این مقاله، به بیان اهمیت استفاده از آماره‌های فرعی و نقش آن‌ها در استنباط‌های شرطی می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه شرطی‌کردن روی آمارهٔ فرعی می‌تواند به بهبود استنباط‌ها منجر شود. همچنین به برخی ایرادها، انتقادات و کمبودهای استنباط‌های شرطی اشاره خواهیم کرد. در ادامه، چگونگی محاسبهٔ برآوردهای مکان ــ مقیاس بهینه که با نظریهٔ شرطی ارتباط دارند، را شرح داده و توضیح می‌دهیم که چگونه شرطی‌کردن منجر به برآوردهای نقطه‌ای بهینه در بیشتر مسائل ساده و اساسی آماری می‌شود.

۱. مقدمه و تاریخچه

دو روش معمول در استنباط آماری عبارتند از این که، یا همهٔ مقادیر فضای نمونه‌ای در نظر گرفته شود و یا فقط به مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی توجه شود. موضوع استنباط شرطی بر اساس آماره‌های فرعی[1] برای ایجاد رابطه بین این دو روش پایه‌ریزی شده است.

ایدهٔ اساسی شرطی‌کردن دیدگاه‌های فیشر در سال ۱۹۳۴ برمی‌گردد. او معتقد است در حالت‌هایی که بعد آمارهٔ بسنده با بعد پارامتر یکسان نیست، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، MLE، مقداری از اطلاعات را از دست می‌دهد. از این‌رو، برای نشان دادن این‌که شرطی‌کردن می‌تواند تمامی این اطلاعات از دست‌رفته را بازیابی کند، حالت مکان ـ مقیاس را به‌عنوان نمونه مورد بررسی قرار می‌دهد و مثالی از خانوادهٔ مکان ــ متقارن (نمایی دوگانه[2]) ارائه می‌دهد و ثابت می‌کند که

1) ancillary 2) Laplace

با شرطی‌کردن روی پیکربندی[1] (آماره‌های فرعی)، هیچ اطلاعی از بین نمی‌رود. همچنین وی توزیع شرطی MLE به‌شرط پیکربندی را در حالت کلی به‌دست می‌آورد و علاوه بر آن، بیان می‌کند در حالت‌هایی که آمارهٔ بسنده (با بعد کمتر) وجود ندارد، ممکن است بتوان با استفاده از آماره‌های فرعی، دقت برآورد را افزایش داد. تعمیم نظریهٔ فیشر در برآوردیابی نقطه‌ای، توسط پیتمن (۱۹۳۹) صورت پذیرفت. او نشان داد که چگونه می‌توان برآوردهای مکان ــ مقیاس بهینه را که با نظریهٔ شرطی ارتباط دارند، محاسبه نمود. برآوردگرهای پیتمن به‌جای مینیمم کردن خطای معمول انتگرال‌گیری شده روی کل فضای نمونه‌ای، میانگین مربع خطای شرطی را مینیمم می‌کنند. ایدهٔ شرطی‌کردن روی جنبه‌های فرعی داده‌ها، تأثیر قابل توجهی بر حل مسائل آزمون‌های معنی‌داری و برآورد فاصلهٔ اطمینان دارد. فیشر ادعا کرد که مجموعه‌های اطمینان لزوماً از تمامی اطلاعات موجود استفاده نمی‌کنند و برای اثبات این ادعا مفهوم زیرمجموعه‌های مربوطه را معرفی کرد که بعدها توسط بوهلر (۱۹۵۹) فرمول‌بندی شد. این مفهوم بدین صورت است: فرض کنید می‌خواهیم استنباطی در مورد پارامتر مجهول θ براساس متغیر تصادفی Y انجام دهیم و در این رابطه برای مجموعهٔ $C_\alpha(Y)$، ادعا می‌شود که $P_\theta(\theta \in C_\alpha(Y)) = ۱ - \alpha$. در این صورت زیرمجموعهٔ $S(Y)$ از فضای نمونه‌ای Y یک زیرمجموعهٔ مربوطه[2] است اگر برای حداقل یک $\varepsilon > ۰$ و همهٔ مقادیر پارامتر، یکی از دو رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$P_\theta\{\theta \in C_\alpha(Y)|S(Y)\} \geq ۱ - \alpha + \varepsilon \qquad \text{(اریبی مثبت)}$$

$$P_\theta\{\theta \in C_\alpha(Y)|S(Y)\} \leq ۱ - \alpha - \varepsilon \qquad \text{(اریبی منفی)}$$

در رابطهٔ اول، شرطی‌کردن روی زیرمجموعه‌های مربوطه باعث می‌شود که استنباط در سطحی بالاتر از مقدار تعیین‌شده باشد، بنابراین با استفاده از اطلاعات موجود در زیرمجموعه‌های مربوطه در اصل می‌توانیم عبارت شرطی دقیق‌تری بسازیم؛ به عبارت دیگر از تمامی اطلاعات موجود استفاده نکرده بودیم. مجموعهٔ

$$S(Y) = \{Y : \bar{Y}_۱^۲ + \bar{Y}_۲^۲ < n^{-۱}\Phi^{-۱}(۱ - \alpha/۲)^۲\}$$

مجموعه‌ای است با اریبی مثبت برای فاصلهٔ اطمینان پارامتر در مسألهٔ فیلر ــ کریزی[3] (که آزمونی برای نسبت دو میانگین بر اساس نمونه‌های برگرفته شده از جامعه‌های نرمال مستقل با واریانس‌های معلوم یک است)، زیرا هنگامی که داده‌ها در این مجموعه قرار می‌گیرند، فاصلهٔ اطمینان $۱۰۰(۱ - \alpha)$ درصدی $(-\infty, \infty)$ در حقیقت یک فاصلهٔ ۱۰۰% است.

برعکس، شرطی‌کردن روی زیرمجموعه‌های مربوطه در رابطهٔ دوم نشان می‌دهد که سطح تعیین شده بسیار بالاست. در مسألهٔ بهرنس ــ فیشر[4] که آزمونی برای تساوی میانگین دو جامعه بر اساس نمونه‌های گرفته‌شده از جامعه‌های نرمال مستقل با واریانس‌های مجهول است، فیشر (۱۹۵۶) نشان داد که برای فاصلهٔ اطمینان تقریبی ولش (۱۹۴۷)، سطح شرطی آزمون به‌شرط

1) configuration 2) relevent 3) Feller-Crasy 4) Behrens-Fisher

$S(Y) = \{Y : S_2^2 = S_1^2\}$ از سطح کلی آزمون کمتر است و بنابراین یک زیرمجموعهٔ مربوطه با اریبی منفی است. این گونه مثال‌ها بسیاری از محققان را متقاعد کرد که انتخاب مجموعهٔ مرجع می‌تواند نتایج مهمی دربرداشته باشد. برای دیدن جزئیات بیشتر به مورگن تالر و توکی (۱۹۹۱) مراجعه کنید.

سؤالی که در اینجا می‌توان مطرح کرد در رابطه با نحوهٔ انتخاب مناسب این مجموعه‌های مرجع است. روی چه مجموعه‌هایی بایستی شرطی نمود تا به استنباط‌هایی با نتایج شرطی خوب منجر گردد؟ فیشر در بحث‌های خود ادعا می‌کند که استنباط‌ها بایستی بر اساس آماره‌های فرعی انجام شود. روش شرطی‌کردن روی آماره‌های فرعی علاوه بر این گونه ویژگی‌های خوب، دارای ویژگی‌های مهم زیر نیز هست:

۱) کاهش داده‌ها

۲) حذف پارامترهای مزاحم

۳) بازیابی اطلاعات

در ادامه، ابتدا آمارهٔ فرعی را تعریف می‌کنیم و سپس به‌اختصار این ویژگی‌ها را شرح می‌دهیم.

۲. اهمیت استفاده از آماره‌های فرعی در استنباط شرطی

فرض کنید $\theta = (\psi, \lambda)$ به‌طوری که ψ پارامتر(عدد یا بردار) مورد علاقه و λ پارامتر مزاحم می‌باشد. آمارهٔ بسندهٔ مینیمال S را که به‌صورت $S = (T, A)$ افراز شده است، در نظر بگیرید به‌طوری که

۱. توزیع A تنها به λ بستگی داشته باشد و به ψ بستگی نداشته باشد.

۲. توزیع شرطی T به‌شرط $A = a$ برای هر a تنها به ψ بستگی داشته و به λ بستگی نداشته باشد.

آن‌گاه A را آمارهٔ فرعی برای ψ و T را بسندهٔ شرطی برای ψ، زمانی که a داده شده است، می‌نامند. یادآور می‌شویم که A باید تابعی از آمارهٔ بسندهٔ مینیمال باشد. لازم به‌ذکر است که بسیاری از نویسندگان هر تابعی از Y که توزیعش به θ بستگی ندارد را آمارهٔ فرعی می‌نامند اما در این مقاله، ما چنین آماره‌هایی را توزیع ثابت می‌نامیم. اصل شرطی (در حضور پارامتر مزاحم) بیان می‌کند استنباط دربارهٔ ψ بر اساس توزیع شرطی T به‌شرط $A = a$ صورت می‌گیرد.

همان‌گونه که در بخش ۱ بیان شد، فاصله‌های اطمینان می‌توانند خصوصیات شرطی ضعیفی داشته باشند. در این قسمت، به این سؤال پاسخ می‌دهیم که چگونه می‌توان استنباطی را انجام داد که خصوصیات شرطی خوبی داشته باشد یا به عبارت دیگر در انجام استنباط، باید روی چه کمیت‌هایی

شرطی کنیم تا مطمئن شویم که خصوصیات شرطی خوبی به‌دست می‌آید؟

۱.۲ افزایش دقت

برای افزایش دقت بهتر است روی آماره‌های فرعی شرطی کنیم، زیرا توزیع این آماره‌ها به پارامتر مجهول بستگی ندارد و بنابراین می‌تواند در دقت استنباط تأثیر بگذارد. برای روشن‌تر شدن بحث فیشر، مدل مکان بحث شده توسط پیتمن (۱۹۳۹) را در نظر بگیرید: $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n یافته‌های یک نمونهٔ تصادفی دارای توزیع یکنواخت روی فاصلهٔ $(\mu - \frac{۱}{۲}, \mu + \frac{۱}{۲})$ هستند به‌طوری که μ مجهول است. قرار دهید

$$F = \{f(y\,;\mu) = \prod_{i=۱}^{n} I(-\frac{۱}{۲} \leq y_j - \mu \leq \frac{۱}{۲}); \mu \in R\},$$

فرض کنید علاقه‌مند به انجام استنباط برای μ هستیم. تابع درستنمایی (غیرشرطی) برابر است با

$$L(\mu) = \begin{cases} ۱ & y_{(n)} - \frac{۱}{۲} \leq \mu \leq y_{(۱)} + \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \text{واگرنه} \end{cases}$$

که به‌ازای هر نقطه‌ای در بازهٔ $t \in (y_{(n)} - \frac{۱}{۲}, y_{(۱)} + \frac{۱}{۲})$ ماکسیمم می‌شود. به‌طور خاص، میان‌برد $t = (y_{(۱)} + y_{(n)})/۲$ را به‌عنوان مقداری که تابع درستنمایی در آن ماکسیمم شده در نظر می‌گیریم. همچنین آمارهٔ $(Y_{(۱)}, Y_{(n)})$ و در نتیجه $((Y_{(۱)} + Y_{(n)})/۲, Y_{(n)} - Y_{(۱)})$ آمارهٔ بسندهٔ مینیمال می‌باشد. بنابراین طبق تعریف، $T = (Y_{(۱)} + Y_{(n)})/۲$ آمارهٔ بسنده شرطی و $A = Y_{(n)} - Y_{(۱)}$ آمارهٔ فرعی است.

می‌توان نشان داد که تابع چگالی میان‌برد برابر است با

$$f_T(t) = n(۱ - ۲|t - \mu|)^{n-۱}, \qquad \mu - \frac{۱}{۲} \leq t \leq \mu + \frac{۱}{۲},$$

$(t - u, t - l)$ یک فاصلهٔ اطمینان $۱۰۰(۱ - \alpha)\%$ برای μ است به‌طوری که برای هر $l \leq u$، رابطهٔ

$$۱ - \alpha = P(l \leq T - \mu \leq u) = F_T(u + \mu) - F_T(l + \mu)$$

برقرار باشد که در آن، F_T تابع توزیع T است. با کمی محاسبه، فاصلهٔ اطمینان با دم‌های برابر این گونه به‌دست می‌آید:

$$\left(t - \frac{۱ - \alpha^{\frac{۱}{۲}}}{۲}, t - \frac{\alpha^{\frac{۱}{۲}} - ۱}{۲}\right)$$

به‌طور خاص، فاصلهٔ اطمینان (غیرشرطی) ۱۰۰% برابر است با

$$\left(t - \frac{۱}{۲}, t + \frac{۱}{۲}\right)$$

واضح است که برد نمونه‌ای یعنی $A = Y_{(n)} - Y_{(۱)}$، حاوی اطلاعاتی است که در ساختن این فاصلهٔ اطمینان از آن استفاده نشده است. اگر برد، برابر ماکسیمم مقدار ممکن خود یعنی ۱ باشد، آن‌گاه $y_{(۱)}$ و $y_{(n)}$ دقیقاً نقاط ابتدایی و انتهایی توزیع هستند. در نتیجه μ دقیقاً نقطهٔ وسط توزیع خواهد شد. بنابراین اگر A به ۱ نزدیک باشد، تحت مدل فرض‌شده، μ به t نزدیک خواهد بود و باید یک فاصلهٔ اطمینان کوچک داشته باشیم.اگر A به صفر نزدیک باشد، μ بین $t - ۱/۲$ و $t + ۱/۲$ خواهد بود و باید فاصلهٔ اطمینان بزرگتری داشته باشیم. بنابراین به‌طور شهودی مناسب است به‌جای میانگین گرفتن از تمام مقادیر A، روی مقدار مشاهده شده A شرطی کنیم.

می‌توان نشان داد که توزیع کناری برد نمونه‌ای، یعنی A به μ بستگی ندارد و بنابراین A یک آمارهٔ فرعی است. بنابر توصیهٔ فیشر، استنباط بایستی بر مبنای توزیع شرطی $T|A$ صورت پذیرد. بر این اساس، یک فاصلهٔ اطمینان شرطی $۱۰۰(۱ - \alpha)\%$ برای پارامتر مجهول μ برابر می‌شود با

$$\left(t - (۱ - a)\frac{\alpha}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲}, t - (۱ - a)\frac{\alpha}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{a}{۲}\right)$$

و تابع درستنمایی شرطی عبارت است از

$$L(\mu|a) = \begin{cases} \frac{۱}{۱-a} & t - \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲} \leq \mu \leq t + \frac{۱}{۲} - \frac{a}{۲} \\ ۰ & \text{واگرنه} \end{cases}$$

بنابراین همان‌گونه که مشاهده می‌شود، حالت $a = ۰$ اطلاعات کمی را در مورد μ انتقال می‌دهد و μ بین $t - ۱/۲$ و $t + ۱/۲$ قرار می‌گیرد در حالی که در حالت $a = ۱$، μ برابر با مقدار t می‌شود.

تابع درستنمایی غیرشرطی برابر است با

$$L(\mu) = \begin{cases} ۱ & t - \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲} \leq \mu \leq t + \frac{۱}{۲} - \frac{a}{۲} \\ ۰ & \text{واگرنه} \end{cases}$$

بنابراین تنها فاصله برای μ بر اساس تابع درستنمایی، برابر است با فاصلهٔ اطمینان ۱۰۰٪:

$$(t - \frac{۱}{۲} + \frac{a}{۲}, t + \frac{۱}{۲} - \frac{a}{۲})$$

فاصلهٔ اطمینان ۱۰۰٪ غیرشرطی را تنها زمانی می‌توان از فاصلهٔ اطمینان فوق به‌دست آورد که $a = ۰$ باشد! بنابراین فاصلهٔ اطمینان غیرشرطی به گونه‌ای است که به نظر می‌آید همیشه در بدترین حالت هستیم.

مثلاً نمونه‌ای به اندازهٔ $n = ۲$ با $y_{(۱)} = -۰/۲۵, y_{(n)} = ۰/۴۵$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $t = ۰/۱, a = ۰/۷$. فاصلهٔ اطمینان ۹۰ درصدی غیرشرطی برای μ برابر است با $(-۰/۲۴۲, ۰/۴۴۲)$ در حالی که فاصلهٔ شرطی ۹۰ درصدی برابر است با $(-۰/۰۳۵, ۰/۲۳۵)$ که طول‌هایشان به‌ترتیب برابر ۰/۶۸ و ۰/۲۷ است. فاصلهٔ اطمینان غیرشرطی با داده‌ها سازگار

نیست، زیرا شامل مقادیری مانند $\mu = ۰/۳$ است که برای آن $y_{(۱)} = -۰/۲۵$ قابل مشاهده نیست، زیرا

$$Y_j \sim U(۰/۳ - \frac{۱}{۲}, ۰/۳ + \frac{۱}{۲}) \qquad \Rightarrow \qquad Y_j \sim U(-۰/۲, ۰/۸)$$

ولی فاصلهٔ اطمینان شرطی، مقدار مشاهده شدهٔ آمارهٔ فرعی را در نظر می‌گیرد و چنین حالت‌های محالی را حذف می‌کند.

۲.۲. کاهش داده‌ها

یک مدل آماری برای دادهٔ Y در نظر بگیرید به‌طوری که به θ بستگی نداشته باشد و فرض کنید که $S = s(y)$ آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای θ باشد. قضیهٔ فاکتورگیری نشان می‌دهد که استنباط برای θ باید بر اساس چگالی S باشد. اگر بتوانیم S را به‌شکل $S = (T, A)$ بنویسیم به‌طوری که توزیع A به θ بستگی نداشته باشد، داریم

$$f_Y(y;\theta) = f_S(s;\theta) f_{Y|S}(y|s) = f_{T|A}(t|a;\theta) f_A(a) f_{Y|S}(y|s)$$

با توجه به این‌که استنباط در مورد θ بر اساس Y با استنباط در مورد θ بر اساس $T|A$ یکسان است، پس استفاده از آمارهٔ فرعی در استنباط های شرطی باعث کاهش داده‌ها می‌گردد.

$$Y \to (T, A) \to T|A$$

در صورت وجود پارامتر مزاحم λ، در بسیاری از حالت‌های مهم، چگالی داده Y را می‌توان به صورت زیر فاکتورگیری کرد:

$$f(y\,;\psi,\lambda) \propto f(t_۱|a;\psi) f(t_۲|t_۱, a;\psi,\lambda)$$
$$f(y\,;\psi,\lambda) \propto f(t_۱|t_۲, a;\psi) f(t_۲|a;\psi,\lambda)$$

که جمله‌های مستقل از پارامتر آن نادیده گرفته شده‌اند. گاهی اوقات ممکن است کمیت a وجود نداشته باشد، اما اگر موجود باشد معمولاً آن را به‌عنوان آمارهٔ فرعی در نظر می‌گیرند. اگر چنین تجزیه‌ای برقرار باشد، طبیعی است که استنباط برای ψ باید بر مبنای عبارت مقدم سمت راست باشد و آن‌گاه استنباط در مورد ψ می‌تواند بدون نیاز به برآورد λ، استنتاج شود.

۳.۲. حذف پارامتر مزاحم

گاهی اوقات می‌توان پارامتر مزاحم را با چگالی شرطی یا حاشیه‌ای که درستنمایی شرطی یا درستنمایی حاشیه‌ای نیز نامیده می شود، حذف کرد.

$$f(y\,;\psi,\lambda) = \begin{cases} f_c(y\,|a\,;\psi,\lambda) f_m(a\,;\psi) & \text{کناری} \\ f_m(a\,;\psi,\lambda) f_c(y\,|a\,;\psi) & \text{شرطی} \end{cases}$$

رابطهٔ اول در مدل‌هـای خانوادهٔ نمایی و رابطهٔ دوم در مدل‌های گروه تبدیلات REML، رگرسیون مقیاس و آمارهٔ فرعی پیکربندی به چشم می‌خورند و در چنین مدل‌هایی کاربرد زیادی دارند. در بسیاری از موارد، ساختن دقیقِ چنین درستنمایی‌هایی مشکل است.

۴.۲. نقش آماره‌های فرعی در بازیابی اطلاعات

فرض کنید T_1 یک آمارهٔ غیربسنده برای θ و T_2 آمارهٔ فرعی برای θ باشد. به عبارت دیگر، اطلاع فیشر T_1 بدین گونه باشد که برای هر $\theta \in \Theta$، $I_{T_1}(\theta) < I_Y(\theta)$ که Y تمامی داده‌هاست. آیامی‌توان تمامی اطلاعات موجود در Y را با استفاده از T_1 زمانی که روی مقدار مشاهده شدهٔ T_2 شرطی کنیم، بازیابی کرد؟ جواب، مثبت و روش کار، نسبتاً ساده است. این روشِ شرطی‌کردن توسط فیشر (۱۹۳۴ ـ ۱۹۵۶) در مثال معروف (Nile) مطرح شده است و بدین صورت انجام می گیرد: ابتدا چگالی شرطی T_1 را در نقطهٔ $T_1 = u$ زمانی که مقدار $T_2 = v$ داده شده است، می‌یابیم و آن را با $g_{T_1|v}(u;\theta)$ نشان می‌دهیم. اطلاع فیشر به‌دست آمده از این تابع چگالی شرطی، برابر است با

$$I_{T_1|v}(\theta) = E_\theta[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log\{g_{T_1|v}(T_1;\theta)\}\}^2]$$

در حالت کلی $I_{T_1|v}(\theta)$ بـه ν، یعنی مقدار آمارهٔ فرعی T_2 بستگی دارد. بنابراین از $I_{T_1|T_2}(\theta)$ حول تمامی مقادیر ممکن ν امید ریاضی می گیریم؛ به عبارت دیگر $E_{T_2}[I_{T_1|T_2}(\theta)]$ را حساب می‌کنیم که با اطلاع فیشر آمارهٔ توأم (T_1, T_2) یعنـی $I_{T_1,T_2}(\theta) = E_{T_2}[I_{T_1|T_2}(\theta)]$ برابر خواهـد شد. این روش راهی برای بازگردانی اطلاعات گمشده فراهم می‌آورد. مثال زیر به این مطلب می‌پردازد:

فرض کنید Y_1 و Y_2 نمونهٔ تصادفی از $N(\theta, 1)$ باشد که $\theta \in (-\infty, \infty)$ پارامتر مجهول است. می‌دانیم که $\bar{Y}$ آمارهٔ بسنده برای θ و دارای توزیع $N(\theta, \frac{1}{2})$ است، بنابراین $I_{\bar{Y}}(\theta) = \frac{1}{V(\bar{Y})} = 2$. از آنجا که $I_{Y_1}(\theta) = 1 < I_{\bar{Y}}(\theta)$، پس $T_1 = Y_1$ آمارهٔ بسنده برای θ نمی‌باشد، یعنی اگر ما تنها Y_1 را در نظر بگیریم، مقداری از اطلاعات را از دست خواهیم داد. حال آمارهٔ فرعی $T_2 = Y_2 - Y_1$ و توزیع توأم (T_1, T_2) یعنی $N_2(\theta, 0, 1, 2, \rho = \frac{1}{\sqrt{2}})$ را در نظر بگیرید. توزیع شرطی T_1 به‌شرط $T_2 = v$ برابر با $N(\theta + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2})$ برای $v \in (-\infty, \infty)$ است. بنابراین

$$I_{T_1|v}(\theta) = E_{T_1|v}[4(T_1 - \theta - \frac{1}{2}v)^2] = 2$$

چون این عبارت به v بستگی ندارد، $E_{T_2}[I_{T_1|T_2}(\theta)] = 2$ که با $I_{\bar{Y}}(\theta)$ برابر است. به عبارت دیگر، با شرطی‌کردن روی آمارهٔ فرعی T_2، تمامی اطلاعات که برابر $I_{\bar{Y}}(\theta)$ است بازیابی می‌گردد.

به‌وضوح شرطی‌کردن روی آمارهٔ فرعی می‌تواند به استنباط‌های بهبود یافته منجر شود هرچند باسو (۱۹۶۴) نشان داد که آماره‌های فرعی یکتا نیستند و انتخاب‌های متفاوت آماره‌های فرعی می‌تواند به نتایج متفاوتی منجر شود. خوشبختانه این حالت برای روش‌های گروه تبدیلات

مکان ـ مقیاس و مدل‌های رگرسیونی اتفاق نمی‌افتد و هر پیکربندی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و نهایتاً به نتایج یکسان برسد.

۳. انتقاداتی بر شرطی‌کردن روی آماره‌های فرعی

یکی از مشکلات استنباط شرطی این است که بسیاری از مدل‌های آماری، آمارهٔ فرعی ندارند یا قادر به یافتن آمارهٔ فرعی نیستیم، مثل خانواده نمایی که آمارهٔ فرعی ندارند. همچنین ممکن است در بسیاری از مدل‌ها چندین آمارهٔ فرعی وجود داشته باشد که یک نمونه از آن‌ها مدل مکان است که هر زیرمجموعه از پیکربندی، فرعی است. در ادامه، به‌اختصار به بیان این مشکلات و راه حل‌های پیشنهادی می‌پردازیم.

۱.۳. فقدان یکتایی

همان‌گونه که می‌دانیم آمارهٔ بسندهٔ مینیمال یکتا نیست اما می‌توانیم آن را به گونه‌ای تعریف کنیم که تحت تبدیلات یک به یک، یکتا باشد که این نشان می دهد آماره‌های فرعی نیز یکتا نیستند. از طرفی، ممکن است آمارهٔ فرعی $A_۱$ و $A_۲$ وجود داشته باشد، اما آمارهٔ ترکیبی $(A_۱, A_۲)$ فرعی نباشد. به زبان دیگر، توزیع حاشیه‌ای دو متغیر تصادفی، توزیع توأم آن‌ها را مشخص نمی‌کند. در این حالت، روش یکتای مشخصی برای این کار وجود ندارد. استفاده از اصل شرطی نتیجه می‌دهد که شرطی‌کردن روی یکی از آماره‌های $A_۱$ یا $A_۲$ بهتر از شرطی نکردن است، اما حداقل با دو روش موجه رو به‌رو خواهیم شد که هیچ دلیلی بر رجحان یکی بر دیگری وجود ندارد.

بدین منظور، تعریف آمارهٔ فرعی ماکسیمال، جذاب به نظر می‌رسد. علاقه‌مند به پیدا کردن آمارهٔ بسنده‌ای بودیم که تا حد امکان کوچک باشد و تمامی اطلاعات نامناسب را حذف کند. در مقابل، به دنبال آمارهٔ فرعی‌ای هستیم که تا حد امکان بزرگ باشد؛ بنابراین تمامی متغیرهای شرطی مربوط را به حساب می‌آوریم.

در بعضی حالت‌ها آمارهٔ کمکی ماکسیمال منحصر به‌فرد نیست و همین امر موجبات معرفی استنباط شرطی را پدید آورده است. هرچند در بعضی از حالت‌ها، آماره‌های فرعی ماکسیمال وجود ندارد.

۲.۳. عدم وجود

فقدان یکتایی آمارهٔ فرعی هرچند قابل ذکر است ولی در کاربردها اهمیت چندانی ندارد. مشکلات بیشتر زمانی به‌وجود می‌آیند که آمارهٔ دقیق فرعی وجود ندارد. در حالت کلی، شناسایی آمارهٔ فرعی مناسب، مهم‌تر از انتخاب بین آماره‌های فرعی متفاوت است. بدین منظور دو راه‌حل زیر ارائه شده است:

۱) سعی شود آماره‌های فرعی مجانبی ساخته شود که چندین روش برای این کار پیشنهاد شده

است. یک حالت ساده و قابل درک این است که یک مدل با چگالی $f(y;\theta,\lambda)$ ($\lambda=\lambda_0$ متناظر با مدل مورد مطالعه) در نظر گرفته شود. فرض کنید درستنمایی برای مدل بزرگتر به‌صورت تابعی از داده‌ها از طریق $(\hat{\theta},\hat{\lambda},a)$ بیان شود به‌طوری که $\hat{\theta}$, $\hat{\lambda}$ برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم هستند و a_0 یک آمارهٔ فرعی برای (θ,λ) است. $\hat{\theta}_0$ را به‌عنوان برآورد درستنمایی ماکسیمم θ هنگامی که $\lambda=\lambda_0$، در نظر بگیرید. اگر مدل مورد مطالعه صحیح باشد، آمارهٔ نسبت درستنمایی $2\{l(\hat{\theta},\hat{\lambda},a_0)-l(\hat{\theta}_0,\lambda_0,a_0)\}$ دارای توزیع مجانبی خی ـ دو می‌باشد و بنابراین به‌صورت مجانبی فرعی است.

۲) بیشتر نظریه‌های آماری جدید بر اساس استنباط‌هایی پایه‌گذاری شده‌اند که اصل شرطی بدون نیاز به تعیین دقیق و صریح آمارهٔ فرعی شرطی، مورد استفاده قرار بگیرد.

۴. برآورد نقطه‌ای از دیدگاه استنباط شرطی

در این بخش، توضیح می‌دهیم که چگونه شرطی‌کردن منجر به برآوردهای نقطه‌ای بهینه در بیشتر مسائل ساده و اساسی آماری می‌شود. یکی از مفاهیم مهم، مفهوم فرعی بودنِ پیکربندی مکان ـ مقیاس است که در حالت‌هایی که خانوادهٔ توزیع توسط گروه تبدیلات تولید شده‌اند، همیشه قادر به یافتن آماره‌های فرعی هستیم. در ابتدا به حالت مکان با مقیاس مجهول می‌پردازیم و فرمول کلی برای چگالی شرطی به‌شرط پیکربندی مکان ـ مقیاس را به‌دست می‌آوریم. این کار، شناسایی برآوردگرهای پایا را که میانگین توان دوم خطا را مینیمم می‌کنند ممکن می‌سازد. سپس حالت مقیاس با مکان مجهول را بحث می‌کنیم. بعد از آن، با کمک بحث شرطی‌کردن، برآوردهای بهینه را ارائه می‌دهیم.

۱.۴. چگالی شرطی در مدل مکان ـ مقیاس

یک ویژگی جالب استنباط شرطی روی آماره‌های فرعی مطرح شده توسط فیشر (۱۹۳۴) و پیتمن (۱۹۳۹)، جامعیت آن است به گونه‌ای که می‌توان یک فرم کلی برای چگالی شرطی و برآوردگرهای بهینه برای پارامتر مکان و مقیاس در خانوادهٔ مدل‌های مکان ـ مقیاس ارائه نمود.

لم فرض کنید Y_1، Y_2، … ، Y_n یک نمونهٔ تصادفی از خانوادهٔ $f(\frac{y-\mu}{\sigma})$ باشد. آن‌گاه شکل کلی چگالی شرطی در این خانواده به‌صورت زیر است:

$$f(t,s|c_1,\dots,c_{n-2})=\frac{s^{n-1}\prod_{i=1}^{n}h(sc_i+st)}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}s^{n-1}\prod_{i=1}^{n}h(sc_i+st)\,ds\,dt}.$$

اثبات. برای خانوادهٔ مدل‌های مکان ـ مقیاس

$$F=\{f(y\,;\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}h(\frac{y_i-\mu}{\sigma}),-\infty<y_i<\infty,\mu\in R,\sigma>0\}. \qquad (۱.۴)$$

برآوردگرهای پایای $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ را که دو خاصیت زیر برای آن‌ها برقرار است، در نظر بگیرید:

$$\hat{\mu}(ay+b) = a\hat{\mu}(y) + b \qquad , \qquad \hat{\sigma}(ay+b) = a\hat{\sigma}(y). \qquad (۲.۴)$$

بنابراین، پیکربندی مکان ـ مقیاس $\{C_i = (Y_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}, i = ۱, \ldots, n\}$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\hat{\mu}(C) = ۰ \quad , \quad \hat{\sigma}(C) = ۱$$

و در نتیجه $C_{n-۱}$ و C_n را می‌توان برحسب $C_۱$، ...، $C_{n-۲}$ بیان نمود، یعنی فضای تمام پیکربندی‌ها دقیقاً $(n-۲)$ ـ بعدی است. همچنین از رابطهٔ (۲.۴) برای $a > ۰$ به‌دست می‌آید که

$$C_i(aY+b) = \frac{aY_i + b - \hat{\mu}(aY+b)}{\hat{\sigma}(aY+b)} = \frac{Y_i - \hat{\mu}(Y)}{\hat{\sigma}(Y)} = C_i(Y)$$

یعنی پیکربندی نسبت به تبدیلات خطی پایا است و دارای توزیعی است که به (μ, σ) بستگی ندارد. به عبارت دیگر، پیکربندی، یک آمارهٔ فرعی است و مطابق با توصیهٔ فیشر باید استنباط‌مان را بر اساس توزیع شرطی $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ به‌شرط پیکربندی انجام دهیم.

بر این اساس، چگالی توأم $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, C_۱, \ldots, C_{n-۲})$ برابر است با

$$f(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, c_۱, \ldots, c_{n-۲}) = k(c,n)\frac{\hat{\sigma}^{n-۲}}{\hat{\sigma}} \prod_{i=۱}^{n} h(\frac{\hat{\sigma}c_i + \hat{\mu} - \mu}{\sigma}).$$

حال تبدیلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{\mu} = \sigma s t + \mu, \quad \hat{\sigma} = \sigma s, \quad c_i = c_i$$

که $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, C_۱, \ldots, C_{n-۲})$ را به $(T, S, C_۱, \ldots, C_{n-۲})$ می‌نگارد. توجه کنید که $S = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ & $T = \frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}$ کمیت‌های محوری هستند. ژاکوبین این تبدیلات عبارت است از $\sigma^۲ s$. بنابراین چگالی توأم $(T, S, C_۱, \ldots, C_{n-۲})$ برابر است با

$$f(t, s, c_۱, \ldots, c_{n-۲}) = k(c,n) s^{n-۱} \prod_{i=۱}^{n} h(sc_i + st)$$

اگر تعریف کنیم $\hat{\mu} = \sigma r + \mu$، $\hat{\sigma} = \sigma s$ و $c_i = c_i$، آن‌گاه ژاکوبین برابر با $\sigma^۲$ می‌شود و چگالی توأم به‌شکل

$$f(r, s, c_۱, \ldots, c_{n-۲}) = k(c,n) s^{n-۲} \prod_{i=۱}^{n} h(sc_i + r)$$

خواهد بود. این دو تابع چگالی توأم در دو دستگاه مختصات زیر هستند:

$$\begin{aligned} &y_i = sc_i + r \\ &y_i = s(c_i + t), \quad r = st \end{aligned}$$

همان‌گونه در ادامه خواهیم دید، هر یک از این دو دستگاه برحسب مورد، به سادگی محاسبات کمک می‌کنند. بنابراین چگالی شرطی (S,T) به‌شرط پیکربندی، عبارت است از

$$f(t,s|c_۱,\ldots,c_{n-۲}) = \frac{s^{n-۱}\prod_{i=۱}^{n} h(sc_i+st)}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} s^{n-۱}\prod_{i=۱}^{n} h(sc_i+st)\,ds\,dt} \qquad (۳.۴)$$

و تابع توزیع شرطی محوری $S=\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ & $T=\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{\sigma}}$ برابر است با

$$K(t_۰,s_۰|c_۱,\ldots,c_{n-۲}) = \frac{\int_{\hat{\mu}-\hat{\sigma}t_۰}^{\infty}\int_{\hat{\sigma}s_۰}^{\infty}\frac{۱}{v^{n+۱}}\prod_{i=۱}^{n} h(\frac{y_i-t}{v})\,dv\,du}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{v^{n+۱}}\prod_{i=۱}^{n} h(\frac{y_i-t}{v})\,dv\,du} = ۱-G(\hat{\mu}-\hat{\sigma}t_۰,\frac{\hat{\sigma}}{s_۰};y) \qquad (۴.۴)$$

که در آن

$$G(t,s;y) = ۱ - \frac{\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{\infty}\frac{۱}{v^{n+۱}}\prod_{i=۱}^{n} h(\frac{y_i-t}{v})\,dv\,du}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{v^{n+۱}}\prod_{i=۱}^{n} h(\frac{y_i-t}{v})\,dv\,du} \qquad (۵.۴)$$

اگرچه تابع توزیع شرطی توأم (۴.۴) به انتخاب $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ (و بنابراین به پیکربندی) بستگی دارد، اما فاصله‌های اطمینان شرطی به انتخاب $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ بستگی ندارند. یک فاصلهٔ اطمینان شرطی $\%(۱-\alpha)۱۰۰$ برای μ در (۱.۴) عبارت است از

$$[\hat{\mu}-\hat{\sigma}K^{-۱}(q_۲,\infty;c),\hat{\mu}-\hat{\sigma}K^{-۱}(q_۱,\infty;c)] = [G^{-۱}(۱-q_۲,\infty;y),G^{-۱}(۱-q_۱,\infty;y)]$$

این فاصلهٔ اطمینان نسبت به انتخاب $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ (و در نتیجه انتخاب پیکربندی) پایا است، بنابراین برای هر جفت از برآوردگرهای پایای $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ یکسان خواهد بود، زیرا G تعریف شده در (۵.۴) نسبت به انتخاب $(\hat{\mu},\hat{\sigma})$ پایا می‌باشد.

۲.۴. برآوردگرهای مکان پیتمن

لم در مدل مکان با مقیاس مجهول، تحت تابع زیان درجه دو، برآوردگر پایا با کمترین میانگین توان دوم خطا:

الف) در دستگاه $y_i = r + sc_i$ عبارت است از

$$T_F(c) = \frac{-E_F(rs|c)}{E_F(s^۲|c)}.$$

ب) در دستگاه $y_i = s(c_i+t)$ عبارت است از

$$T_F(c) = \frac{-E_F(ts^۲|c)}{E_F(s^۲|c)}.$$

اثبات. اگر T برآوردگر پایای مکان باشد، همان‌گونه که دیدیم، به‌وسیلهٔ پیکربندی $\{C_i = (Y_i - \hat{\mu})/\hat{\sigma}, i = 1, \dots, n\}$ بایستی در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$T(y_1, \dots, y_n) = \hat{\mu}(y_1, \dots, y_n) + \hat{\sigma}(y_1, \dots, y_n) T(c_1, \dots, c_n)$$

یعنی اطلاع از $T(c_1, \dots, c_n)$ برای محاسبهٔ $T(y_1, \dots, y_n)$ کافی است. بنابراین مسأله به تعیین $T(c_1, \dots, c_n)$ برای تمام $c = (c_1, \dots, c_n)$ تبدیل می‌شود به‌طوری که میانگین توان دوم خطای برآوردگر به‌دست آمده $T(y_1, \dots, y_n)$ مینیمم باشد. این نکته نقش تعیین کنندهٔ استفاده از خاصیت پایایی را در استنباط‌های شرطی بیان می‌کند. لازم است که یک دستگاه مختصات برای تمام نمونه‌هایی که پیکربندی یکسانی دارند، معرفی کنیم و چنان‌که در بخش قبلی دیدیم، می‌تواند به دو روش ساده زیر به‌دست آید:

برای r حقیقی و s حقیقی مثبت، داشته باشیم

$$y_i = r + sc_i \quad ; \ (i = 1, \dots, n)$$

یا برای t حقیقی و s حقیقی مثبت، داشته باشیم

$$y_i = s(c_i + t) \ ; \ (i = 1, \dots, n)$$

این دو انتخاب به‌وسیلهٔ تبدیل $r = st$ با هم مرتبط هستند. میانگین توان دوم خطا تحت نمونه‌گیری از توزیع $F(y)$ برابر است با

$$MSE_F(T) = E_F((T(y_1, \dots, y_n) - \mu(F))^2)$$

که $\mu(F)$ مرکزتقارن $F(y)$ یا هدف از پیش مشخص شدهٔ دیگری است. با شرطی‌کردن روی پیکربندی C، داریم

$$MSE_F(T) = E_{F^*}(E_F((T(y_1, \dots, y_n) - \mu(F))^2 | c_1, \dots, c_n))$$

که در آن $F^*(c)$ توزیع روی فضای پیکربندی‌های استنتاج شده توسط نمونه‌گیری از $F(y)$ است. این فرمول، محاسبهٔ میانگین مربع خطا را به دو قسمت تقسیم می‌کند. امید ریاضی داخلی، یک امید شرطی است و امید ریاضی خارجی، وابسته به توزیع حاشیه‌ای F^* است. این عبارت را می‌توان به‌صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$MSE_F(T) = E_{F^*}(cMSE_F(T(y_1, \dots, y_n) | c_1, \dots, c_n)$$

که در آن $cMSE_F(.|c)$ نشان دهندهٔ میانگین توان دوم خطای شرطی برآوردگر به‌شرط پیکربندی c است. از آنجا که تمام این کمیت‌ها، مثبت هستند و می‌توانیم برای هر $c = (c_1, \dots, c_n)$ به‌طور

جداگانه $T(c)$ انتخاب کنیم، برآوردگر T_F که $MSE_F(T)$ را مینیمم می‌کند می‌تواند این کار را فقط با مینیمم کردن همزمان تمام میانگین توان دوم خطاهای شرطی انجام دهد.

اگر شکل مرجع $F(y)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که حول صفر متقارن باشد یا در حالت کلی‌تر $\mu(F) = ۰$، آن‌گاه فرمول میانگین توان دوم خطای T به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$cMSE_F(T|c) = E_F(r^۲|c) + ۲T(c)E_F(rs|c) + (T(c))^۲ E_F(s^۲|c)$$

اندیس F نشان می‌دهد که امید شرطی، تحت این فرض که نمونه از F می‌باشد، محاسبه شده است. برای پیکربندی c، $cMSE_F(T|c)$ توسط کمیت

$$T_F(c) = \frac{-E_F(rs|c)}{E_F(s^۲|c)}$$

مینیمم می‌شود که با جانشینی $T_F(c)$ خواهیم داشت

$$cMSE_F(T_F|c) = E_F(r^۲|c) + T_F(c)E_F(rs|c).$$

اثبات قسمت (ب) مانند قبل است. در این حالت، برآوردگر بهینه برابر می‌شود با

$$T_F(c) = \frac{-E_F(ts^۲|c)}{E_F(s^۲|c)}.$$

این برآوردگرهای پایا با کمترین میانگین توان دوم خطا(MRE) را برآوردگرهای پیتمن می‌نامند، زیرا برای اولین بار پیتمن آن‌ها را با استفاده از تکنیک استنباط شرطی به‌دست آورد. روش دیگر و متداول‌تر برای محاسبهٔ برآوردگر پیتمن را می‌توان در فصل سوم از لهمن (۱۹۸۳) یافت.

در عمل، یافتن فرم‌های بسته برای برآوردگرهای T_F پیتمن تقریباً مشکل است. فقط در موارد محدودی، می‌توان حاصل انتگرال دوگانه را به‌صورت تحلیلی به‌دست آورد و در اکثر موارد باید از روش‌های عددی استفاده کرد.

۳.۴. برآوردگرهای مقیاس پیتمن

در برخی موارد، در برآورد پارامتر مقیاس بهتر است تابع زیان را تغییر دهیم. توزیع نمونه‌ای برآوردگرهای مقیاس معمولاً چوله به راست هستند و میانگین مربع خطا، لزوماً تابع زیان مناسبی نیست.

تعریف برآوردگر $S(y_۱, \ldots, y_n)$ برای σ بهینه است اگر $E_F((\log S - \tau(F))^۲)$ را مینیمم کند هنگامی که $\tau(F) = \log \sigma(F)$ یک هدف از پیش مشخص شده باشد (به یاد داشته باشید که $\sigma(F)$ لزوماً گشتاور دوم حول میانگین نیست).

لم تحت گروه مقیاس در خانوادهٔ توزیع‌های مقیاس، برآوردگر بهینهٔ پیتمن برای پارامتر مقیاس عبارت است از

$$S_F(c_1,\ldots,c_n)=\exp E_F(\log\frac{\sigma(F)}{s}|c)=\exp(\int_0^\infty -\log(s)k_F(s,r|c)\,ds).$$

اثبات. مایل به پیداکردن برآوردگری بهینه مانند برآوردگر S در میان برآوردگرهای مکان پایا و مقیاس پایا هستیم. با شرطی‌کردن روی پیکربندی $(c_1,\ldots,c_n)$، باید داشته باشیم $S(r+sc_1,\ldots,r+sc_n)=sS(c_1,\ldots,c_n)$. میانگین توان دوم خطای برآوردگر S برابراست با

$$\begin{aligned}MSE_F(S)&=E_{F^*}(E_F((\log S(y_1,\ldots,y_n)-\tau(F))^2|c))\\&=E_{F^*}(E_F((\log s-\tau(F)+\log S(c_1,\ldots,c_n))^2|c)).\end{aligned}$$

انتخاب بهینهٔ S_F از $S(c_1,\ldots,c_n)$ کمیتی است که عبارت زیر را مینیمم کند:

$$E_F((\log s-\tau(F)+\log S(c_1,\ldots,c_n))^2|c)$$

و این اتفاق وقتی رخ می‌دهد که

$$\log S(c_1,\ldots,c_n)=\tau(F)-E_F(\log(s)|c)=E_F(\log\tfrac{\sigma(F)}{s}|c)=-E_F(\log\tfrac{s}{\sigma(F)}|c)$$

اگر فرض کنیم $F(y)$ استاندارد شده است، یعنی در دو شرط زیر صدق می‌کند:

$$\mu(F)=0,\sigma(F)=1$$

آن‌گاه برآوردگر پیتمن برای پارامتر مقیاس σ عبارت است از

$$S_F(c_1,\ldots,c_n)=\exp E_F(\log\frac{\sigma(F)}{s}|c)=\exp\Big(\int_0^\infty -\log(s)k_F(s,r|c)\,ds\Big).$$

۴.۴. موارد خاص (دارای فرم بسته)

در معرفی برآوردگرهای مکان پیتمن، دیدیم که امیدهای شرطی مورد نیاز برای تعیین برآوردهای بهینه برای پیکربندی c، یعنی $T_F(c)$ و میانگین توان دوم خطای این برآوردها عبارتند از

$$E_F(t^2s^2|c),E_F(rs|c)=E_F(ts^2|c),E_F(s^2|c)$$

در وضعیت‌های بسیاری، این سه امید شرطی باید با استفاده از روش هـای عددی تقریب زده شوند. هرچند برای موارد محدودی، انتگرال‌ها به‌صورت تحلیلی و به فرم بسته به‌دست می‌آیند. در این بخش، مثالی از حالتی که در آن، مقدار انتگرال را می‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه گردد، ارائه می‌گردد.

مثال (حالت گوسی) در حالت گوسی، چگالی شرطی متناسب است با

$$s^{n-1}\exp(\frac{-s^2}{2}(\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2+n(t+\bar{c})^2))$$

به‌طوری که $\bar{c}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i$. مقدار ثابت نرمال این چگالی شرطی برابر است با

$$k=(\frac{2\pi}{n})^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty s^{n-2}\exp(\frac{-s^2}{2}(\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2)ds.$$

برای تعیین $T_F(c)=\frac{-E_F(ts^2|C)}{E_F(s^2|C)}$ با محاسباتی ساده، داریم

$$E_F(s^2|c)=\frac{(n-1)}{\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2}$$

و

$$E_F(rs|c)=E_F(ts^2|c)=(-\bar{c})E_F(s^2|)=(-\bar{c})(n-1)/\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2$$

که در نتیجه $T_F(c)$ برابر می‌شود با

$$T_F(c)=\frac{-E_F(ts^2|c)}{E_F(s^2|c)}=\bar{c}$$

به‌طوری که $F(x)$ تابع توزیع نرمال است. برای محاسبهٔ $cMSE_F(T_F|c)$ نیاز به محاسبهٔ $E_F(t^2s^2|c)$ داریم که برابر است با

$$E_F(r^2|c)=E_F(t^2s^2|c)=\frac{1}{n}+(\bar{c})^2E_F(s^2|c)=\frac{1}{n}+\frac{(\bar{c})^2(n-1)}{\sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c})^2}$$

بنابراین

$$cMSE_F(T_F|c)=E_F(ts^2|c)T_F(c)+E_F(t^2s^2|c)=\frac{1}{n}$$

که این مقدار برای هر پیکربندی c یکسان است.

این مثال یک ساختار ساده را نمایش می دهد. در این حالت توانستیم پیکربندی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که در روابط زیر صدق کند:

$$c_1+\cdots+c_n=0 \quad \& \quad c_1^2+\cdots+c_n^2=n-1$$

برای این انتخاب، همهٔ پیکربندی‌ها دقیقاً یکسان و مشابه رفتار می‌کنند. بهینگی گوسی پیشنهاد می‌کند که از میانگین حسابی استفاده کنیم. علاوه بر آن، دقت ما به پیکربندی c بستگی ندارد. در این صورت انتگرال بند قبل، به‌آسانی قابل محاسبه است و خواهیم داشت $MSE_F(T_F)=\frac{1}{n}$.

مراجع

[1] Basu, D., "Recovery of Ancillary Information", *Sankhya*, **26**(1984), 3-16.

[2] Buehler, R. J., "Some Validity Criteria for Statistical inference", *Ann. Math. Statist.*, **30**(1959), 845-863.

[3] Fisher, R. F., "Two New Properties of Mathematical Likelihood", *Proc. Roy. Soc. A*, **144**(1934) , 285-307

[4] Casella, G. and Berger, R. L., *Statistical Inference*, Duxbury, Pasific Grove, CA, 2002.

[5] Davison, A. C., *Likelihood Theory*, Brisbane, 2007.

[6] Fisher, R. F., "On a Test of Significance in Pearson's Biometrika Tables", *J. Roy. Statist. Soc. B*, **18**(1939), 56-60.

[7] Fraser, D. A. S., "Ancillaries and Conditional Inference", *Statistical Science*, **19**(2004) , No. 2, 333-369.

[8] Lehmanne, E. L., *Testing Statistical Hypotheses*, Chapman and Hall, New York, Londonm 1991.

[9] Lehmanne, E. L., *Theory of Piont Estimation*, John Wiley, New York, 1983.

[10] Morgenthaler, S. and Tukey, J. W., *Configural Polysampling: A Route to Practical Robustness*, John Wiley, New York, 1991.

[11] Pitman, E. J. G., "The Estimation of the Location and Scale Parameters of a Continuous Population of any Given Form", Biometrika, **30**(1939), 391-421.

[12] Welsh, A. H., *Aspect of Statistical Inference*, John Wiley, New York, 1996.

[13] Young, G. A. and Smith, R. L., *Essentials of Statistical Inference*, Cambridge University Press, New York, 2005.

علی‌رضا نعمت‌اللهی، nematollahi@susc.ac.ir
مرجان کمالی سروستانی، mks_82000@yahoo.com
دانشگاه شیراز، بخش آمار

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ۳۹ تا ۶۵

نظریهٔ گره

سید محمدباقر کاشانی

چکیده

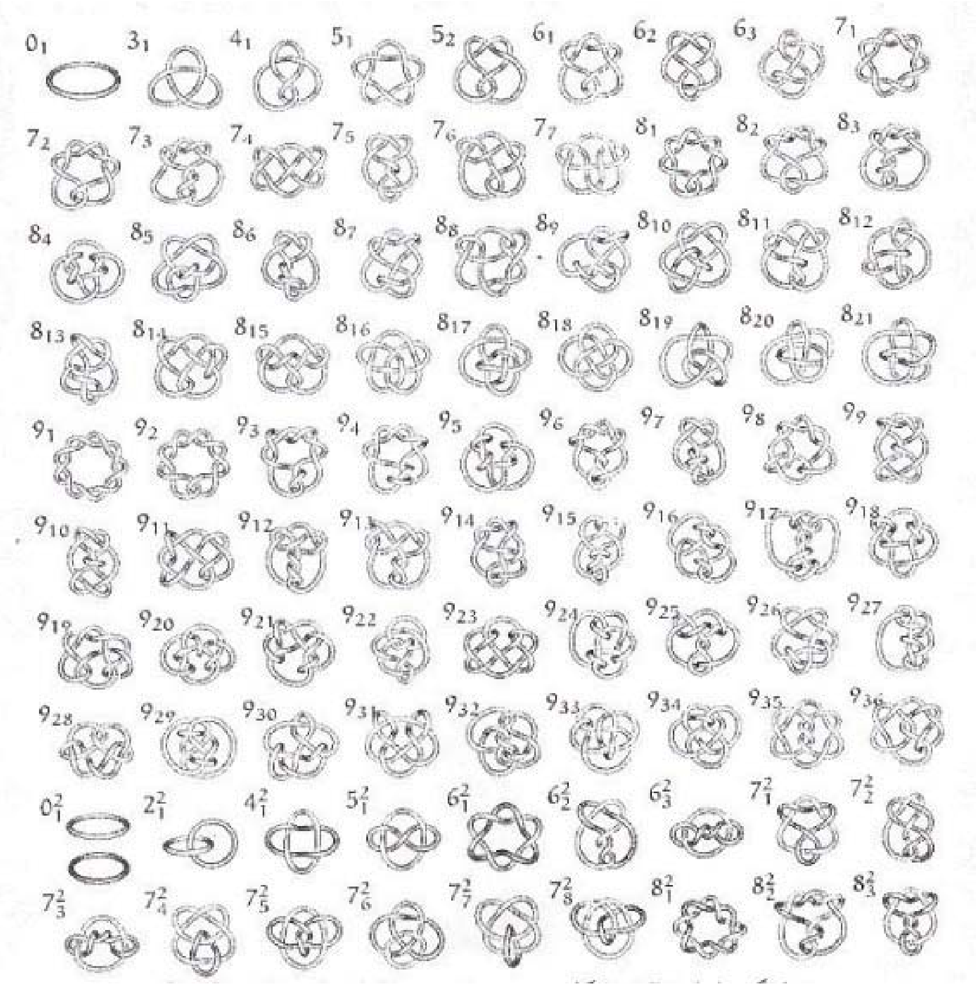
در این مقالهٔ توصیفی، «نظریهٔ گره» به‌طور ساده معرفی و به برخی از کاربردها و ارتباط‌های آن در (با) شاخه‌های دیگر ریاضی و علوم (مانند فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی) اشاره می‌شود.

۱. مقدمه

نظریهٔ گره شاخه‌ای از ریاضیات (در واقع توپولوژی) است که بیش از صد سال قدمت دارد و برخی از هیجان‌انگیزترین نتیجه‌های آن در پنجاه سال اخیر بیان و اثبات شده است. نظریهٔ گره امروزه یکی از فعال‌ترین شاخه‌های ریاضی است. این نظریه، ارتباط دوسویه‌ای با شاخه‌های دیگر ریاضی مانند توپولوژی جبری، خمینه‌های سه‌بعدی، نظریهٔ گراف و ... دارد. همچنین دارای کاربردهای مهمی در زیست‌شناسی، شیمی، فیزیک و سایر زمینه‌ها است؛ به ویژه در پژوهش‌های DNA و سنتز مولکولی جدید از این نظریه استفاده می‌شود. این نظریه، اثرگذاری مهمی بر مکانیک آماری و نظریهٔ میدان کوانتمی داشته است. یک مزیت بزرگ این نظریه این است که بسیاری از بخش‌های آن را می‌توان به زبان ساده و بدون استفاده از ریاضیات پیچیده بیان کرد، مسائل باز زیادی در این نظریه وجود دارد که به‌آسانی قابل بیان هستند و برای کار تحقیقاتی سریع می‌توان سراغ آن‌ها رفت. در حالی که این نظریه ملهَم از گره‌هایی است که در زندگی روزمره با آن‌ها برخورد می‌کنیم مانند گره ریسمان و ... . فرق گره ریاضی با گره معمولی این است که دو سر گره ریاضی به هم چسبیده‌اند که از باز شدن آن جلوگیری می‌کند. به بیان دقیق ریاضی، یک گره عبارت است از یک نشانندهٔ (هموار) از دایرهٔ S^1 به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ (یا معادلاً کرهٔ سه‌بعدی S^3). دو گره ریاضی هم‌ارزند اگر به‌وسیلهٔ یک تغییر شکل $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) (دقیقاً یعنی وابرسانی جهت‌نگه‌دار فضا ($\mathbb{R}^3$ یا S^3)) بتوان یکی را بر دیگری منطبق (تصویر) کرد.

گره‌ها به روش‌های گوناگون توصیف می‌شوند. یک توصیف غالب عبارت است از به‌کار بردن

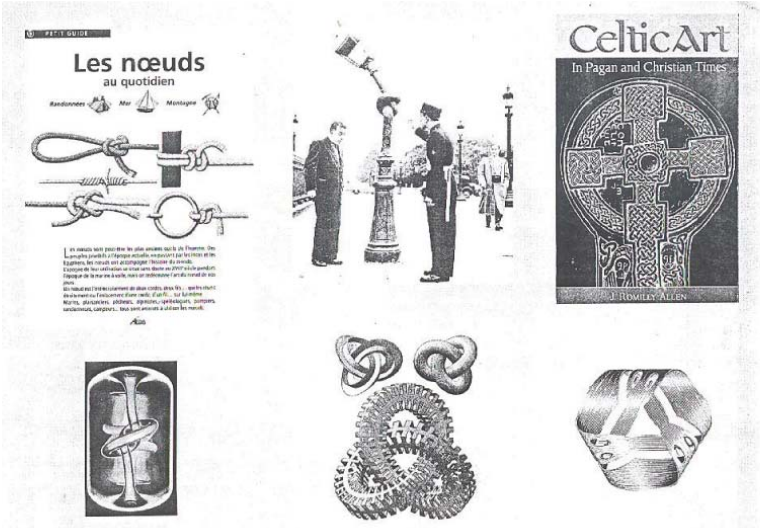
نمودار صفحه‌ای[1] که دیاگرام گرهی[2] نامیده می‌شود. با توجه به وجود توصیف‌های گوناگون برای یک گره، یک مسألهٔ بنیادی در نظریهٔ گره عبارت است از تعیین این که چه موقع دو توصیف، یک گره را نشان می‌دهند. در عمل، گره‌ها با به‌کار بردن ناوردای گره[3] از هم تمیز داده می‌شوند.

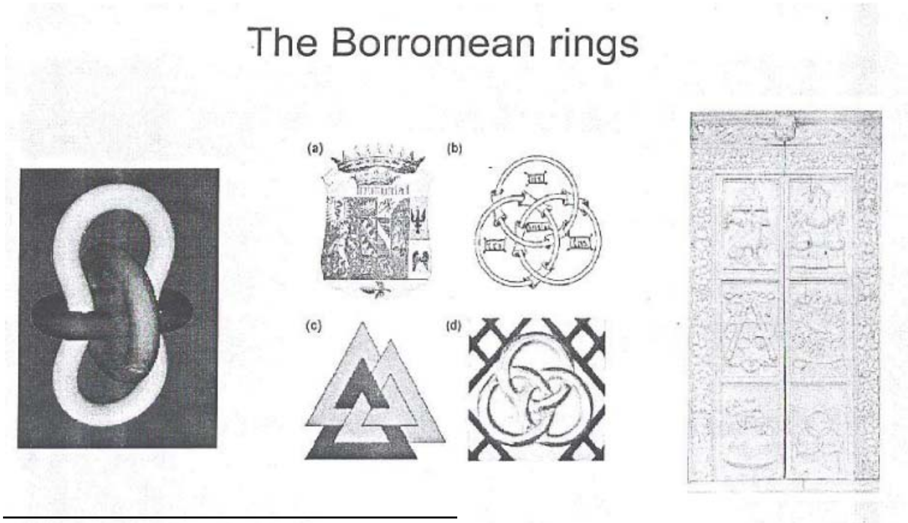


جدول گره‌ها با حداکثر ۹ گذر و پیوندهای دو مؤلفه‌ای با حداکثر ۸ گذر،
تهیه شده به‌وسیلهٔ Publishor Perish Press, 1976, D. Rolfsen

1) plane diagram 2) knot diagram 3) knot invariant

ناوردای گره، یک شیء ریاضی (عدد،...) است که مستقل از توصیف‌های مختلف گره است. ناورداهای مهم شامل عدد بی‌گرهی[۲]، عدد پُل،.....، چندجمله‌ای‌های گره، گروه‌های گره، ناورداهای هذلولوی و ... هستند. محرک اصلی برای پایه‌گذاران نظریهٔ گره این بوده‌است که جدولی از گره‌ها و پیوندها (پیوند عبارت است از اجتماع مجزای چند گره که با هم درگیرند) تهیه کنند.





1) unknotting

از آغاز ظهور نظریهٔ گره در قرن نوزدهم تاکنون بیش از شش میلیون گره و پیوند شناسایی و در جدول گره‌ها ظاهر شده‌است. از مفهوم (اولیه) گره گسترش‌های گوناگونی توسط توپولوژی‌دان‌ها معرفی و مطالعه شده است. مثلاً گره‌ها را می‌توان در فضاهای سه‌بعدی دیگر (به جز $\mathbb{R}^3$ و S^3) در نظر گرفت. همچنین می‌توان اشیاء دیگری به جز دایره را در نظر گرفت.

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
  "Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen", Werke Koenigl. Gessell. Wiss. Goettingen, Vol. 5, p. 605 (1833).
  Handwritten catalogue of 13 knots.
- Listing – student of Gauss
- Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907)
  "On vortex atoms", Philosophical Magazine, Vol. 34, pp. 15-24 (1867).
  «Atoms are knotted tubes of ether».
- Kirkman: *By a knot of n crossings, I understand a reticulation of any number of meshes of two or more edges, whose summits, all tessaraces, are each a single crossing, as when you cross your forefinges straight or slightly curved, so as not to link them, and such meshes that every thread is either seen, when the projection of the knot with its n crossings and no more is drawn in double lines, or conceived by the reader of its course,*
- Peter Guthrie Tait (1839-1901), Scotch physicist
  Catalogue up to 10 crossings (work of 20 years).
- Little: same catalogue almost at the same time.

گره‌های با بعد بالاتر عبارت است از نشاندن کره‌های n ـ بعدی S^n $(n \geq 2)$ در فضای اقلیدسی m ـ بعدی (یاکرهٔ m ـ بعدی S^m)، $m \geq n + 2$. در این مقالهٔ توصیفی که اقتباس و تلخیصی است از مرجع‌های [2، 5، 7] و نیز الگوگرفته از مرجع [1] می‌باشد، سعی می‌شود به بیان سادهٔ مفاهیم اولیهٔ این نظریه پرداخته شود، چنان‌که خوانندهٔ علاقه‌مند ضمن آشنا شدن با این نظریه، بتواند به انجام تحقیق در این زمینه و حل مسأله‌های باز بپردازد. فهرست مرجع‌های مقاله و مرجع‌های آن‌ها نیز نیاز خوانندگان علاقه‌مند برای پژوهش در این زمینه را تا اندازهٔ زیادی برطرف می‌کند.

۲. تاریخچه

باستان‌شناسان کشف کرده‌اند که گره‌زدن به دوران قبل از تاریخ باز می‌گردد. علاوه بر کاربردهای آن برای ثبت اطلاعات و گره‌زدن اشیاء به یکدیگر، گره به‌خاطر رمزهای معنوی و زیبایی‌شناسی نیز مورد علاقه بشر بوده‌است. گره‌ها به صورت‌های گوناگون در کارهای هنری چینی با قدمت چند قرن قبل از میلاد ظاهر شده‌است. مثالی از کاربرد گره به‌مثابهٔ یک رمز معنوی عبارت است از گره بی‌پایان در بودیسم. حلقه‌های برومییَن [1] در فرهنگ‌های مختلف ظاهر شده و غالباً نمایانگر قدرت

1) Borromean rings

در اثر وحدت بوده است.
مطالعهٔ ریاضی گره‌ها با کارهای گاوس در قرن نوزدهم آغاز شد که انتگرال ارتباط را تعریف کرد. در دههٔ ۱۸۶۰ نظریهٔ لُرد کِلوین مبنی بر این که اتم‌ها گره‌هایی در اِتِر هستند، منجر به ابداع اولین جدول گرهی توسط T. P. Tait شد. تهیهٔ جدول گره‌ها، اولین نظریه‌پردازان گره را ترغیب می‌کرد ولی سرانجام نظریهٔ گره بخشی از شاخهٔ نوظهور توپولوژی شد. این توپولوژی‌دان‌ها در اوایل قرن بیستم، ماکس دن، و. جی. الکساندر و دیگران گره‌ها را از دیدگاه گروه گرهی و ناورداهایی از نظریهٔ مانَستگی مانند چندجمله‌ای الکساندر مطالعه می‌کردند. این رویکردِ غالب به نظریهٔ گره بود تا این که عبور از موانع متعدد، موضوع را بسیار دگرگون کرد.

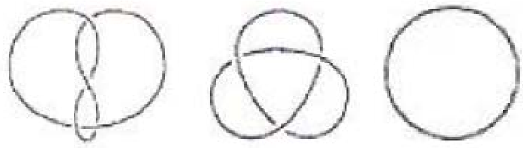
در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، ویلیام تِرستُن با ارئهٔ قضیهٔ هذلولوی‌سازی، هندسهٔ هذلولوی را برای مطالعهٔ گره‌ها معرفی کرد: در این زمینه نشان داده شد که بسیاری از گره‌ها، گره‌های هذلولوی هستند (یعنی فضای مکملشان در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) یک ساختار هندسی (متریک ریمانی) با خمیدگی برشی ثابت منفی می‌پذیرد) که به این ترتیب، کاربرد هندسه را در تعریف ناورداهای قوی و جدید گره ممکن ساخت. کشف چندجمله‌ای جونز در سال ۱۹۸۴ و متعاقب تحقیقات ادوارد ویتن و ماکسیم کونتسویچ و دیگران، ارتباط بین نظریهٔ گره و روش‌های ریاضی در مکانیک آماری و نظریهٔ میدان کوانتمی کشف و آشکار شد. از آن زمان با به‌کاربردن ابزارهای پیچیده‌ای مانند گروه‌های کوانتمی و نظریهٔ مانستگی (همولوژی) فلور[1]، ناورداهای زیادی برای گره‌ها ابداع شده است. در آخرین دهه‌های قرن بیستم، دانشمندان به مطالعهٔ گره‌های فیزیکی برای شناخت پدیده‌های گره‌دار در DNA و پلیمرها علاقه‌مند شدند. نظریهٔ گره را می‌توان برای تعیین این که یک ملکول تقارن آینه‌ای دارد یا نه، به‌کار برد. گیره‌ها[2] (رشته‌هایی با دو سر تثبیت شده در فضا) به‌طور مؤثر در مطالعهٔ عمل توپوایزومراس[3] بر DNA به‌کار رفته است. نظریهٔ گره از طریق محاسبهٔ توپولوژیکی کوانتمی، نقشی مهم در ساخت کامپیوترهای کوانتمی داشته است.

اکنون با اقتباس و استفاده (از) و تلخیص مرجع‌های [1، 2، 5، 7] به ارائهٔ مفهوم‌های اولیهٔ نظریهٔ گره به زبان ساده می‌پردازیم. شکل‌های مقاله از مرجع‌های [1، 2، 5] برداشته شده است.

۳. گره و کاربردهایش

گره عبارت است از یک نشانندهٔ (هموار) از دایرهٔ S^1 به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ (یا کرهٔ سه‌بعدی S^3).

1) Floer homology 2) tangles 3) topoisomeras



شکل ۱: گره بدیهی   گره سه‌پره   گره شکل 8

ساده‌ترین گره، عبارت است از نشاندن استاندارد S^1 در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) که به آن گره بدیهی یا بی‌گره[1] می‌گویند. گره بعدی ساده عبارت است از گره سه‌پرّه[2] (تصویر میانی از شکل ۱). چگونه می‌توان دریافت که این‌ها گره‌های متفاوت‌اند؟ به این سؤال در تعریف ۳ می‌پردازیم. از یک گره تصویرهای متفاوتی وجود دارد، در شکل ۲، تصویر نااستاندارد گره سه‌پرّه آورده شده است.

شکل نااستاندارد گره سه‌پره

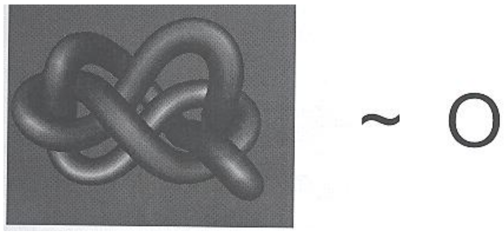
یک **پیوند**[3] با k مؤلفه عبارت است از یک نشانندهٔ هموار از k نسخهٔ مجزای S^1 در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3).

شکل ۲: پیوند بدیهی   پیوند نابدیهی

بنابراین گره عبارت است از پیوند یک مؤلفه‌ای.

دو گره از **یک نوع** یا **هم‌ارز**[4] نامیده می‌شوند اگر یک همانسانی جهت‌نگه‌دار h از فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) به خودش موجود باشد که یکی را به روی دیگری تصویر کند.

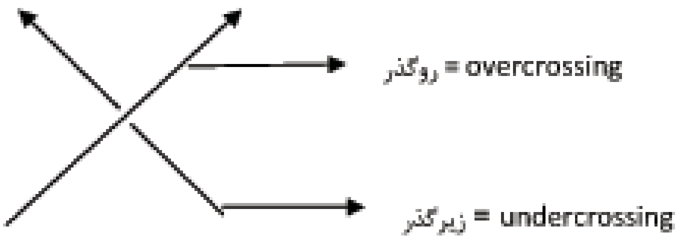
1) unknot 2) trefoil 3) Link 4) isotopic



شکل ۳: دو گرهٔ هم‌ارز

هم‌ارزی پیوندها نیز مشابه هم‌ارزی گره‌ها تعریف می‌شود.
یک سؤال باز در این زمینه این است که برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید که قادر باشد تشخیص دهد یک گره داده شده گره بدیهی است یا نه.

نمودار یک گره عبارت است از افکنشی از گره بر صفحه، با تعداد باپایان نقطه‌های دوگانه (گذر)= crossing، با اطلاعات اضافی زیر=under یا رو=over ، مطابق شکل ۴.



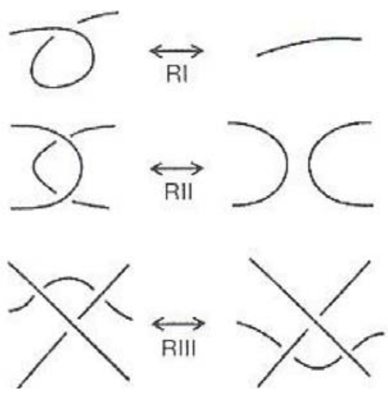
شکل ۴

در واقع، مکان‌هایی که گره در تصویر (افکنش) خودش را قطع می‌کند، گذر نامیده می‌شود. مثلاً گره شکل ۸ یک گره ۴ ـ گذر است، زیرا یک افکنش با چهار گذر برای آن وجود دارد و هیچ افکنشی با کمتر از چهار گذر، وجود ندارد.

در سال ۱۹۲۷، در حالی که J. W. الکساندر و G. B. بریگز و به‌طور مستقل کورت راید مایستر بر صورت نموداری گره‌ها مطالعه می‌کردند، نشان دادند که دو نمودار متعلق به یک گره می‌توانند به‌وسیلهٔ دنباله‌ای باپایان از حرکت‌های سه‌گانهٔ ذیل به هم تبدیل شوند. این عمل‌ها اکنون **حرکت‌های راید مایستر**[1] نامیده می‌شود. در واقع قضیهٔ ذیل توسط آن‌ها به اثبات رسیده است.

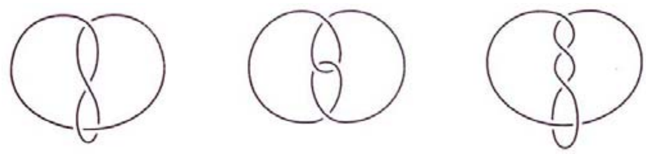
۵. قضیه (راید مایستر) دو گره هم‌ارزند اگر و تنها اگر هر دو نمودار آنها توسط تعدادی باپایان از حرکت‌های شکل ٦ به هم تبدیل شوند.

1) Reidemeister moves



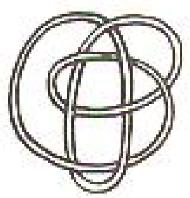
شکل ۵: حرکت‌های سه‌گانهٔ رایدمایستر (RI,RII,RIII)

یک گره جهت‌دار k، **وارون‌پذیر** (یا achiral) نامیده می‌شود اگر با خودش همراه با جهت مخالف (یعنی تصویر آینه‌ای آن) k- هم‌ارز باشد. در غیر این صورت، chiral نامیده می‌شود.



در شکل ۱.۵ سه افکنش هم ارز از گره شکل 8 دیده می‌شود.

برای مثال، گره $8_{۱۷}$ وارون‌پذیر نیست، گره سه‌پره وارون‌پذیر نیست. گره شکل 8 وارون‌پذیر است.



شکل ٦: گرهٔ $8_{۱۷}$

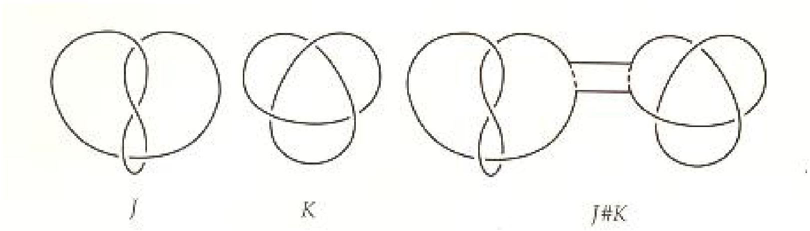
گره **متناوب** گرهی است با افکنشی که اگر گره را در یک جهت تثبیت شده طی کنیم، گذرهای افکنش یک در میان روگذر و زیرگذر باشند. برای مثال، گره سه‌پره در شکل (۷. b) متناوب است.

شکل ۷: گره سه‌پره (b) بی‌گره (a)

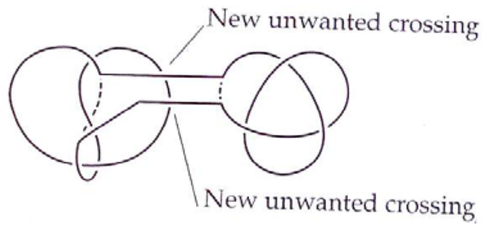
۴. عمل جمع (ترکیب) گره‌ها

دو گره را می‌توان با برش دادنِ هر دو و وصل کردن قسمت‌های باقیمانده از دو گره به یکدیگر، با هم جمع کرد. این عمل، **جمع گره‌ها)** (knot sum) نام دارد که جمع همبند یا ترکیب دو گره نیز نامیده می‌شود. عمل (جمع) به‌صورت دقیق چنین تعریف می‌شود:

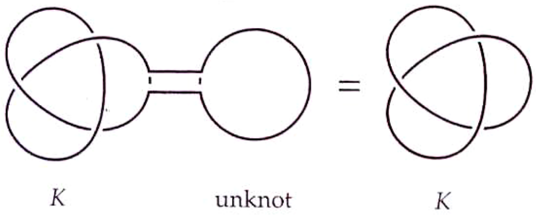
دیاگرام مسطح هریک از دو گره را در نظر گیرید و فرض کنید این دیاگرام‌ها متمایزند. مستطیلی در صفحه بیابید که یک زوج از ضلع‌های روبرو(ی آن) کمان‌هایی در امتداد هر گره باشد، در حالی‌که بقیهٔ مستطیل از گره‌ها مجزاست. گرهٔ جدیدی با حذف اولین زوج از ضلع‌های روبرو و چسباندن زوج دیگر از ضلع‌های روبرو به گره‌ها بسازید. گره حاصل جمع دو گره اولیه است.



شکل ۸. ترکیب دو گرهٔ K و J



شکل ۹: ترکیب دو گره K و J نیست.

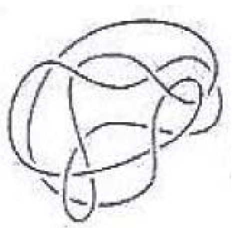


شکل ۱۰: ترکیب گره K با بی‌گره برابراست با K

بسته به این که چگونه این کار انجام شود، دو گره مختلف (ولی نه بیشتر) به‌دست می‌آید. این ابهام در (تعریف) جمع دو گره با فرض جهت بر گره‌ها، برطرف می‌شود، یعنی داشتن یک جهت مرجح حرکت در امتداد گره و الزام به این که جهت خم‌های گره‌ها در جمع با جهت مرزی مستطیل سازگار باشد.

عمل جمع گره‌های جهت‌دار، **جابه‌جایی و انجمنی** است. همچنین هر گره را می‌توان با در نظر گرفتن این عمل به عامل‌های اول آن تجزیه کرد که به این ترتیب، گره اول یا مرکب (مانند عددهای اول یا مرکب) قابل تعریف است.

اگر یک گره به‌صورت جمع (ترکیب) دو گره نابدیهی قابل بیان نباشد، آن را **گره اول** نامند. یک گره **مرکب** نامیده می‌شود اگر بتوان آن را به‌صورت جمع (ترکیب) دو گره نابدیهی بیان کرد. گره‌های موجود در ترکیب یک گره، **گره‌های عامل** آن نامیده می‌شوند. برای مثال، گره‌های (نابدیهی) سه‌پره و شکل 8، اول‌اند و گره شکل ۱۱ مرکب است اگرچه این مطلب بدیهی نیست.



شکل ۱۱: یک گره مرکب

۵. به جدول درآوردن گره‌ها

نظریهٔ گره در اواخر قرن نوزدهم مطرح شد. قبل از این تاریخ گاوس (۱۷۷۷ — ۱۸۵۵) به مطالعهٔ آن‌ها پرداخته بود، ولی نظریهٔ لُرد کلوین مبنی بر این که اتم‌ها حلقه‌هایی گره خورده در اتر هستند باعث ایجاد علاقه جدی به مشخص کردن گره‌ها شد.

اولین تلاش برای به جدول درآوردن گره‌ها در دههٔ ۱۸۸۰ به‌وسیلهٔ کرکمن[1] انجام شد. بعداً ایده‌های او توسط تِیت[2]، فیزیکدان اسکاتلندی، برای فهرست کردن همهٔ گره‌های متناوب با حداکثر ۱۰ گذر به‌کار رفت. در سال ۱۸۹۹، سی. ان. لیتل[3] جدول شامل ۴۳ گره نامتناوب با حداکثر ۱۰ گذر را منتشر کرد. از نقطه‌نظر تاریخی، به جدول درآوردن گره‌ها (بدون توجه به (و اثبات) این که آیا گره‌های حاضر در یک جدول واقعاً متفاوتند یا نه) از آغاز مطرح شدن نظریه به‌طور پیوسته ادامه داشته است تا این‌که در سال ۱۹۳۲، رایدمایستر[4] رده‌بندی دقیقی از گره‌ها با حداکثر ۹ گذر را ارائه داد. در سال ۱۹۶۹، کانوی[5] همهٔ گره‌های اول با حداکثر ۱۱ گذر و همهٔ پیوندهای اول تجزیه‌ناپذیر[6] با حداکثر ۱۰ گذر را مشخص کرد. جدول تعداد گره‌های اول با حداکثر ۱۶ گذر به شرح ذیل است (c =تعداد گذر و k =تعداد گره).

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	c
1,388,705	253293	46972	9988	2176	552	165	49	21	7	3	2	1	1	k

اگرچه برای دنبالهٔ ردیف 2 (تعداد گره‌ها) کران بالایی و پایینی شناخته شده است ولی ثابت نشده است که این دنباله اکیداً صعودی است.

جدول گره‌های با حداکثر ۹ گذر و پیوندهای ۲ ـ مؤلفه‌ای با حداکثر ۸ گذر و پیوندهای ۳ ـ مؤلفه‌ای با حداکثر ۷ گذر را با استفاده از مرجع [1] در ابتدای مقاله (ص ۲) آورده‌ایم. سنت است که گره‌ها برحسب تعداد نقطه‌های تقاطع (گذر) دسته‌بندی می‌شوند. جدول گره‌ها عموماً شامل گره‌های اول است و فقط یک نمونه از گره و تصویر آینه‌ای آن در جدول ظاهر می‌شود (حتی اگر آن دو (گره و تصویر آینه‌ای‌شان) متفاوت باشند).

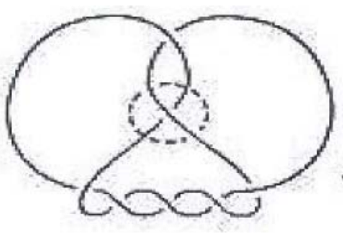
همچنان که از جدول گره‌ها دیده می‌شود، تعداد گره‌های نابدیهی با افزایش عدد گذر سریعاً افزایش می‌یابد که جدول‌بندی را از نظر محاسباتی مشکل می‌کند. تاکنون تلاش‌ها برای به جدول درآوردن بیش از شش میلیون گره و حلقه به ثمر رسیده است.

۶. ناورداهای گره‌ها

در این بخش، ناورداهای چندی برای گره‌ها معرفی می‌شود. مبحث را ابتدا با یک ناوردای خیلی شهودی به نام **عدد بی‌گرهی** آغاز می‌کنیم.

گوییم گره k دارای عدد **بی‌گرهی** n است اگر افکنشی از گره موجود باشد چنان‌که تغییر n گذر (از روگذر به زیرگذر)، گره را به گره بدیهی تبدیل کند و هیچ افکنشی از گره موجود نباشد که با کمتر از n تغییر در گذرهایش بتوان آن را به گره بدیهی تبدیل کرد. این عدد را با $u(k)$ نمایش می‌دهند.

1) Kirkman 2) Tait 3) C. N. Little 4) Reidemeister 5) J. H. Conway 6) nonsplitable



شکل ۱۲: گرهٔ ۷۲ بی‌گره می‌شود.

برای مثال، ۰ =(گره بدیهی)u و گره بدیهی تنها گرهی است که عدد بی‌گرهی آن برابر صفر است، ۱ = $u(۷_۲)$، ۱ =(گره سه پره)u، ۲ = $u(۷_۴)$.

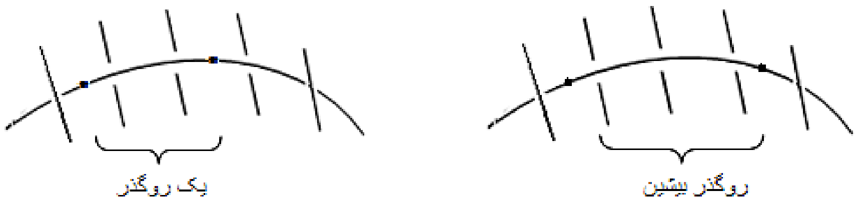
تمرین: عدد بی‌گرهی را برای گره شکل 8 بیابید.

سؤال (باز): حدسیهٔ قدیمی $u(k_۱\sharp k_۲) = u(k_۱) + u(k_۲)$ را اثبات یا نقض کنید. توجه کنید که همواره داریم $u(k_۱\sharp k_۲) \leq u(k_۱) + u(k_۲)$. یک نتیجه از شارلمان بیان می‌کند که حدسیه در حالت ۱ = $u(k_۱\sharp k_۲)$ درست است. شاید شما بتوانید آن را برای حالت ۲ = $u(k_۱\sharp k_۲)$ ثابت کنید. همچنین ثابت شده است که هر گره با عدد گرهی ۱ اول است، به عبارت دیگر ۲ ≤ $u(k_۱\sharp k_۲)$ برای گره‌های نابدیهی $k_۱$ و $k_۲$.

اگرچه نتیجه‌های کمی دربارهٔ عدد بی‌گرهی به دست آمده است. تحقیقات اخیر دربارهٔ همولوژی فلوئر[1] منجر به موفقیت‌هایی در این زمینه شده است؛ از جمله رده‌بندی همهٔ گره‌ها با حداکثر ۹ گذر و با عدد بی‌گرهی ۱ و همهٔ گره‌های متناوب با حداکثر ۱۰ گذر و عدد بی‌گرهی ۱.

۱.۶. عدد پُل[2]

فرض کنید افکنش یک گره بر صفحه داده شده است. مقصود از یک **روگذر**[3] (شکل ۱۴ سمت چپ) زیرقطعه‌ای از گره است که شامل حداقل یک روگذر باشد و شامل هیچ زیرگذری نباشد. **روگذر بیشین** عبارت است از روگذری که نمی‌تواند طولانی‌تر شود و همچنان روگذر باقی بماند (شکل ۱۳ سمت راست).



1) Floer homology 2) Bridge number 3) overpass

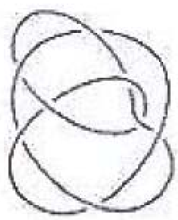
عدد پل برای یک **افکنش** داده شدهٔ گره k عبارت است از تعداد روگذرهای بیشین درآن افکنش. **عدد پل گره** k که با$b(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کمترین عدد پل نسبت به همهٔ افکنش‌های k.

تمرین: نشان دهید اگر یک گره دارای عدد پُل برابر ۱، باشد، آن گره بدیهی است.

رابطهٔ عدد پل ترکیب (جمع) دو گره k_1 و k_2 با عددهای پل k_1 و k_2 عبارت است از:

قضیه. $b(k_1\sharp k_2)=b(k_1)+b(k_2)-1$.

گره‌های با عدد پل برابر ۲، گره‌های ۲ ــ پل (۲ ــ پلی) نامیده می‌شوند. این گره‌ها، گره‌های گویا نیز نام دارند. گره‌های سه‌پره و شکل 8 از جملهٔ این گره‌هایند. این خانواده از گره‌ها (گره‌های ۲ ــ پلی) بسیار شناخته‌اند. آن‌ها زیرکلاسی از گره‌های متناوب‌اند و غالباً هر ویژگی گره‌ها که مورد سؤال باشد، ابتدا برای این خانواده بررسی می‌شود. گره‌های ۲ ــ پل توسط زایفر[1] رده‌بندی شده است. ثابت شده است تعداد گره‌های با ۲ پل و n گذر دست کم $\frac{2^{n-2}-1}{3}$ است. چون گره‌های با ۲ پل اول‌اند، در نتیجه تعداد گره‌های اول متمایز با n گذر دست کم $\frac{2^{n-2}-1}{3}$ است. شکل ۱۴ (گره 8_{10}) عبارت است از یک گره با سه پل.



شکل ۱۴: گره 8_{10} یک گرهٔ سه پل است.

۲.۶. عدد گذر[2]

عدد گذر گره k که با $c(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کوچکترین تعداد گذرها نسبت به همهٔ افکنش‌های گره k. در حالت کلی تعیین عدد گذر بسیار سخت است.

تمرین: نشان دهید اگر گره‌های k_1 و k_2 متناوب باشند، $k_1\sharp k_2$ نیز چنین است و بنابراین $c(k_1\sharp k_2)=c(k_1)+c(k_2)$.

سؤال (باز): نشان دهید (یا مثال نقض ارائه دهید) که عدد گذر یک گره مرکب، برابر جمع عددهای گذر گره‌های عامل آن است، یعنی $c(k_1\sharp k_2)=c(k_1)+c(k_2)$.

1) H. Seifert 2) crossing number

این سؤال مدت ۱۲۵ سال (تا سال ۲۰۰۸) است همچنان حل نشده باقی مانده است. البته برای رسته‌هایی از گره‌ها فرمول به‌صورت مثبت ثابت شده است. در حالت کلی برای گره‌های نابدیهی $k_۱$ و $k_۲$ فرمول ذیل برقرار است:

$$\frac{c(k_۱)+c(k_۲)}{۱۵۲} \leq c(k_۱\sharp k_۲) \leq c(k_۱)+c(k_۲).$$

دیگر ناوردای عددی گره‌ها عبارت است از طول ریسمان[1]. فرض کنید k یک گره نشانده‌شده در فضا باشد. برای هر $x \in k$، فرض کنید $D(x,R)$ قرص مسطح با شعاع R به مرکز x در صفحهٔ عمود بر k باشد. قرار دهید

$$\bar{R} = \sup\{R : D(x,R) \cap D(y,R) = \emptyset, \quad \forall x,y \in k(x \neq y)\}$$

طول ریسمان k که با $L(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از (طول کمان k) $\times(۱/\bar{R}) = L(k)$. طول ریسمان $[k]$ (کلاس هم‌ارزی k متشکل از همهٔ صورت‌های نشانده شدهٔ k در فضا) که با $L[k]$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کمینهٔ $L(k)$ نسبت به همهٔ عضوهای $[k]$). عدد میله‌ای[2] (یالی) کمترین تعداد یال‌ها برای تشکیل یک مثلث‌بندی نشانده شده از گره در فضای سه‌بعدی است. این عدد به‌ویژه مورد علاقهٔ زیست‌شیمی‌دان‌هاست که به ساختن مولکول گره‌دار از اتم‌ها یا چند مولکول دیگر علاقه‌مند هستند. عدد میله‌ای برای گره بدیهی برابر سه است، زیرا یک مثلث، مثلث‌بندی مطلوب را به‌دست می‌دهد.

۳.۶. ناورداهای چندجمله‌ای

اولین چندجمله‌ای که به گره‌ها و پیوندها متناظر شد، منسوب به جی. الکساندر است که در حدود سال ۱۹۲۸ معرفی شد. این ناوردای چندجمله‌ای برای تمایز بین گره‌ها و پیوندها بسیار مفید بود. ریاضیدانان برای مدت ۵۸ سال بعد از الکساندر، همچنان از چندجمله‌ای او در تمایز گره‌ها استفاده می‌کردند. در سال ۱۹۶۹، کانوی، روشی موسوم به رابطهٔ skein برای محاسبهٔ چندجمله‌ای الکساندر برای یک پیوند یافت.

در سال ۱۹۸۴، و. جونز[3] ریاضیدان نیوزلندی، چندجمله‌ای جدیدی برای گره‌ها و پیوندها یافت. چندجمله‌ای او حاصل تلاش‌هایش بر جبرهای عملگرها بود، شاخه‌ای که تا آن زمان با نظریهٔ گره‌ها بی‌ارتباط بود. کشف جونز هیجان عظیمی در بین نظریه‌دان‌های گره ایجاد کرد. درست چهار ماه پس از این که جونز چندجمله‌ای جدیدش را معرفی کرد، کشف چندجمله‌ای Homfly اعلام شد. Homfly حرف‌های ابتدای نام ریاضیدان‌هایی است که این چندجمله‌ای را کشف کرده‌اند. این چندجمله‌ای توسط این ریاضی‌دانان در حالی‌که در چهار گروه مختلف مستقلاً کار می‌کردند، کشف شد.

1) rope length 2) stick 3) V. Jones

توصیف چندجمله‌ای جونز: برای این کار ابتدا چندجمله‌ای موسوم به چندجمله‌ای کروشه وابسته به گره‌ها توصیف می‌شود. اگر $< K >$ نمایانگر چندجمله‌ای گره باشد، آن‌گاه

قانون ۱: $< O > = ۱$ ، $O =$ گره بدیهی

قانون ۲: $< \quad > = A <)(> + B < \asymp >$

$< \quad > = A < \asymp > + B <)(>$

قانون ۳: $< L \cup O > = C < L >$

برای این که چندجمله‌ای برای گره‌ها (پیوندها) ناوردا باشد یعنی بستگی به افکنش خاص نداشته باشد، چندجمله‌ای باید با اعمال حرکت‌های رایدمایستر بر گره بدون تغییر باقی بماند بنابراین باید داشته باشیم:

قانون ۱: $< O > = ۱$

قانون ۲: $< \quad > = A <)(> + A^{-۱} < \asymp >$

$< \quad > = A < \asymp > + A^{-۱} <)(>$

قانون ۳: $< L \cup O > = (-A^{۲} - A^{-۲}) < L >$

اکنون چندجمله‌ای دارای تنها متغیر A می‌باشد.

حال فرض کنید افکنش گره یا پیوند L را جهت‌دار کنیم، در هر گذر حسب قرارداد علامت ۱+ (برای روگذر) و علامت ۱− را (برای زیرگذر) در نظر گیرید، جمع جبری این ۱± ها را پیچ[1] نامند و آن را با w(L) نمایش می‌دهند. حال قرار دهید $X(L) = (-A^{۳})^{-w(L)} < L >$ چندجمله‌ای جونز L از X(L) با قرار دادن $t^{-\frac{۱}{۴}}$ به جای A به دست می‌آید.

تمرین: چندجمله‌ای جونز را برای گره سه پره پیدا کنید.

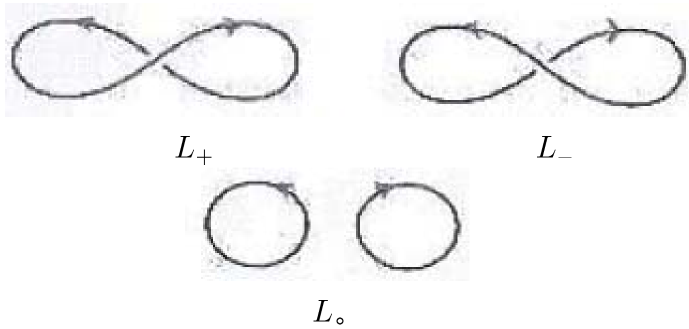
سؤال (حل نشده): آیا یک گره نابدیهی وجود دارد که چندجمله‌ای جونز آن برابر ۱ باشد؟

قانون‌های محاسبه چندجمله‌ای Homfly:

قانون ۱: $P(O) = ۱$

قانون ۲: اگر L_+، L_- و $L_\circ$ سه پیوند جهت‌دار باشند که با هم برابرند، مگر در نقطهٔ گذر مطابق شکل ۱۵، آن‌گاه $\ell P(L_+) + \ell^{-۱} P(L_-) + m P(L_\circ) = \circ$.

1) writhe



شکل ۱۵: سه پیوند جهت دار

تمرین: چندجمله‌ای جونز و Homfly برای گره سه پره (شکل ۱۶) را بیابید.

شکل ۱۶: گرهٔ سه پره

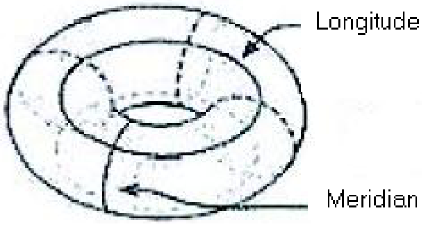
در حالت کلی چندجمله‌ای Homfly مانند چندجمله‌ای الکساندر قابل محاسبه است. آنچه برای محاسبه نیاز است یک درخت تحلیل‌برنده[1] است ولی محاسبه عملاً زیاد و کند است. بیشتر کامپیوترهای موجود فقط برای محاسبه چندجمله‌ای‌های گره‌ها و پیوندهای ساده کافی‌اند.

۷. انواع گره‌ها

۱.۷. گره چنبره‌ای

خمی (گرهی) که یک بار دایرهٔ کوچکتر یک چنبره را دور می‌زند، خم نصف‌النهاری[2] نامیده می‌شود.
خمی (گرهی) که یک بار دایرهٔ بزرگتر یک چنبره را دور می‌زند، خم طولی[3] نامیده می‌شود.
گره چنبره‌ای عبارت است از گرهی نابدیهی که بر یک چنبرهٔ بی‌گره (بدون داشتن روگذر یا زیرگذر) واقع شده باشد.

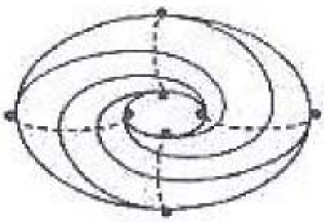
1) resolving 2) meridian 3) longitudinal



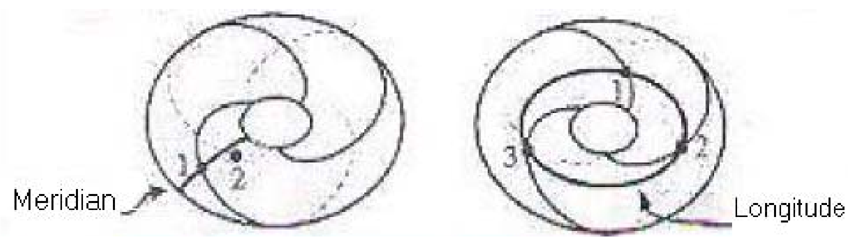
شکل ۱۷: مدار و نصف‌النهار بر چنبره

گره سه‌پره در شکل ۱۷ سمت چپ، سه بار دایره کوچکتر (به‌صورت نصف‌النهاری) و دو بار دایرهٔ بزرگتر چنبره را (به‌طور طولی) دور می‌زند، بنابراین گره سه‌پره یک (۳,۲)–گره چنبره‌ای نامیده می‌شود.

هر گره چنبره‌ای، یعنی گرهی نابدیهی که بر یک چنبره بی‌گره (بدون داشتن روگذر یا زیرگذر) واقع شده است، یک (p,q)– گره چنبره‌ای است برای عددهای صحیح و مثبت و نسبت به هم اول p و q. هر (p,q) ـ گره چنبره‌ای یک (q,p) ـ گره چنبره‌ای نیز هست. (p,q) ـ گره چنبره‌ای را با $T_{p,q}$ نشان می‌دهند. گره‌های چنبره‌ای نسبتاً ساده‌اند و اطلاعات زیادی دربارهٔ آن‌ها وجود دارد، مثلاً قضیهٔ ذیل.



شکل ۱۸: (۴,۳)– گره چنبره‌ای



شکل ۱۹: (۳,۲)– گره چنبره‌ای سه پره

قضیه. برای $p < q$ داریم

1- $c(T_{p,q}) = (p-1)q$

2- $b(T_{p,q}) = p$

3- $u(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)/2$

4- $s(T_{p,q}) = 2q \quad for \quad 2 \leq p < q < 2p \ , \ s = stick\ number$

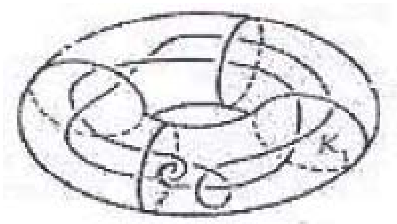
5- $s(T_{p,2p+1}) = 4p \ , \ for\ p \geq 2$

6- $c(K_1 \sharp K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ K_1 و K_2 گره‌های چنبره‌ای باشند

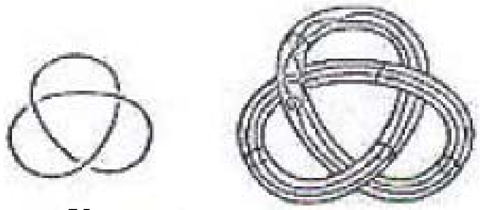
قابل ذکر است که **عدد** stick برای تعداد زیادی از گره‌های چنبره‌ای شناخته شده است. مفهوم گره چنبره‌ای را می‌توان چنین گسترش داد. چنان‌که گفته شد، گره چنبره‌ای عبارت است از یک گره نابدیهی که می‌تواند بر سطح یک چنبره استاندارد نشانده شده در $\mathbb{R}^3$ (چنبرهٔ بدون گره) بدون روگذر یا زیرگذر قرار گیرد. مسلماً گره‌هایی وجود دارد که بر سطح چنبرهٔ بدون گره قرار نمی‌گیرد ولی بر سطح یک رویه با گوناهای بالاتر (بیشتر از) (گونهٔ چنبره=۱) قرار می‌گیرند. به‌طور کلی یک گره K گره n ـ **نشاندنی** نامیده می‌شود اگر بتوان آن را بر یک رویهٔ با گونای n که در $\mathbb{R}^3$ استاندارد نشانده شده است بدون هیچ گذر قرار داد ولی K را نتوان بر هیچ رویهٔ با گونای کمتر از n (بدون گذر) قرار داد.

۲.۷. گره ماهواره‌ای

نوع دیگری از گره که اخیراً بسیار اهمیت یافته است، گره ماهواره‌ای است. فرض کنید K_1 یک گره در درون چنبرهٔ توپر بی‌گره باشد (شکل ۲۰). چنبرهٔ توپر را به‌شکل یک گره دیگر K_2 گره می‌زنیم (شکل ۲۱). این عمل گره K_1 را به گره دیگر K_3 درون چنبرهٔ توپر گره خورده شده تبدیل می‌کند. گره K_3 را**ماهواره‌ای** نامند. گره K_2 گره همکار برای گره K_3 نامیده می‌شود. همیشه فرض می‌شود K_2 نابدیهی است. همچنین همواره فرض می‌شود گره K_1 هر قرص نصف‌النهاری در چنبرهٔ توپر را قطع می‌کند. شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ را نیز ببینید.



شکل ۲۰: یک گرهٔ K_1 توی یک چنبرهٔ صلب

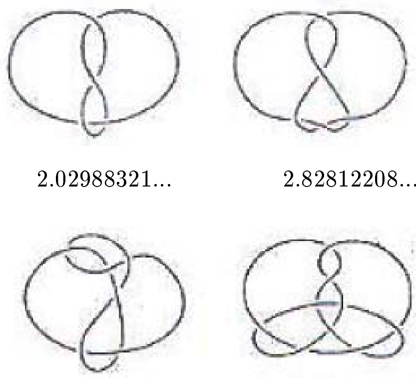


$K_۲$

شکل ۲۱: گره چنبرهٔ صلب شبیه $K_۲$

۳.۷. گره هذلولوی

تا سال ۱۹۷۷ هنوز گره موسوم به «گره هذلولوی» شناخته شده نبود، ولی امروزه مشخص شده است که بیشتر (تقریباً همهٔ) گره‌های اول، گره‌های هذلولوی‌اند. تا این سال هیچ‌کس نمی‌دانست که فضای مکمل یک گره می‌تواند یک فضای هذلولوی باشد. تا آن که ویلیام ترستن که دربارهٔ خمینه‌های سه‌بعدی تحقیق می‌کرد، پس از ملاقات و مذاکره با رابرت ریلی[۱] که در انگلستان دربارهٔ رسالهٔ دکتریش تحقیق می‌کرد، این مفهوم را ابداع و ارائه نمود. بنابر تعریف، **گره هذلولوی** گرهی است که فضای مکملش یک متریک ریمانی با خمیدگی برشی ثابت ۱ − می‌پذیرد.**حجم هذلولوی** یک گره هذلولوی عبارت است از**حجم (با متریک هذلولوی) فضای هذلولوی مکمل گره** توجه کنید که این حجم یک عدد متناهی و یک ناوردای گره(های) هذلولوی است. در شکل ۲۲ حجم چند گره هذلولوی ثبت شده است. **یک گره، یا چنبره‌ای است یا ماهواره‌ای یا هذلولوی.**



2.02988321...   2.82812208...

5.69302109...   12.81031000...

شکل ۲۲: حجم گره‌های هذلولوی

1) R. Riley

۴.۷. گره‌های متناوب و تقریباً متناوب

گره متناوب گرهی است با افکنشی که اگر آن را در یک جهت طی کنیم، گذرهای آن یک در میان روگذر و زیرگذر باشد. برای مثال، گره‌های شکل 8 و سه‌پره و گره‌های اول با حداکثر ۷ گذر و گره‌های با ۲ ـ پُل متناوب‌اند. اطلاعات پایین دربارهٔ گره‌های متناوب قابل ذکر است.

نشان داده شده است که با افزایش تعداد گذر (در گره)، نسبت گره‌هایی که متناوب‌اند (به گره‌های نامتناوب) به صفر میل می‌کند. مثلاً همین که به گره‌های با ۱۳ گذر می‌رسیم، تعداد گره‌های اول نامتناوب (با ۱۳ گذر) بیشتر از تعداد گره‌های اول متناوب با ۱۳ گذر است.

افکنش یک گره یا پیوند، تحویلی[1] است اگر تعداد گذرهای آن قابل تقلیل نباشد.
یکی از مهمترین نتیجه‌ها دربارهٔ گره‌ها و پیوندهای متناوب که در سال ۱۹۸۸ ثابت شده، این است که

قضیه. عدد گذر یک گره یا پیوند متناوب در هر افکنش تحویلی آن تحقق می‌یابد. هر افکنش نامتناوب آن گره یا پیوند دارای تعداد گذرهای بیشتری است.

این قضیه، گزاره‌ای بسیار قوی است به این معنی که به‌آسانی می‌توان عدد گذر گره‌های متناوب را به‌دست آورد. نتیجه‌ای از این قضیه این است که اگر $k_۱$ و $k_۲$ گره‌های متناوب باشند، آن‌گاه

$$C(K_۱ \sharp K_۲) = C(k_۱) + C(k_۲).$$

نتیجهٔ اخیر به این صورت از قضیه به‌دست می‌آید که به‌آسانی دیده می‌شود ترکیب دو گره متناوب، خود یک گره متناوب است. هر دو افکنش متناوب تحویلی یک گره با هم مرتبط‌اند. با به‌کار بردن این حقیقت، تعداد گره‌های اول متناوب با حداکثر ۲۲ گذر محاسبه شده است. این عدد عبارت است از ۴,۹۷۶,۰۱۶,۴۸۵ !

یک افکنش یک گره یا پیوند،**افکنش تقریباً متناوب** نامیده می‌شود اگر یک تغییر در گذر(های) آن افکنش، افکنش را به یک افکنش متناوب تبدیل کند. این نوع گره نسبت به نوع‌های قبلی خیلی جدیدتر است (فقط از سال ۱۹۹۱ معرفی و شناخته شده است). پیشرفت، زمان مفید بودن این مفهوم (نوع جدید گره) را نشان می‌دهد.

یک پیوند، **تقریباً متناوب** نامیده می‌شود اگر دارای یک افکنش تقریباً متناوب باشد و دارای افکنش متناوب نباشد. مثلاً گره $8_{۱۹}$ در شکل ۲۳ یک گره تقریباً متناوب است.

در سال ۱۹۹۰، آدامز و شش دانشجویش ثابت کردند که هر گره اول، تقریباً متناوب یا چنبره‌ای یا هذلولوی است.

---

1) reductive

شکل ۲۳: گرهٔ 8_{19}، تقریباً متناوب است.

۸. کاربردها: زیست‌شناسی، شیمی و فیزیک

چنان‌که قبلاً بیان شد، بسیاری از انگیزه‌های اولیه در نظریهٔ گره به‌خاطر کاربردهایش در شیمی بوده است. با وجود این، تا دههٔ ۱۹۸۰، کاربردها در شیمی به‌درستی ظاهر نشد. در این بخش می‌خواهیم به کاربردهایی از نظریهٔ گره در مبحث DNA اشاره کنیم.

DNA، ملکولی (یا گروهی از ملکول‌ها) است که مسئول کددار کردن[1] همهٔ اطلاعات ژنتیکی و توارث[2] در موجودات جاندار می‌باشد. اطلاعات ذخیره شده در DNA همهٔ ویژگی‌های[3] موروثی را مشخص می‌کند، مانند رنگ چشم و استعداد انتقال بیماری‌های موروثی. به این دلیل DNA غالباً برنامهٔ کار (یا دقیق‌تر، کتاب دستورالعمل برای حیات نامیده می‌شود.

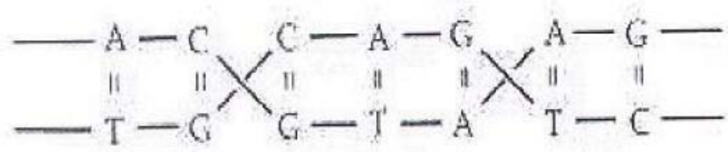
در دههٔ ۱۹۵۰، تشخیص داده شد که کد ژنتیکی در ساختمان حلزون دوگانهٔ DNA ظاهر می‌شود. ساختار DNA توسط کریک[4] و واتسن[5] مبتنی بر تصویرهای زیبای اشعهٔ ایکس (X-Ray) شناخته شد. اسید دی‌اکسی‌ریبونوکلیک[6] که به‌طور مخفف DNA خوانده می‌شود، گروهی از ملکول‌هاست متشکل از زوج‌هایی از رشته‌هایی طولانی از ملکول‌ها که رشته‌ها همانند نردبان تابدار[7] با «پله‌هایی» به هم محکم متصل شده است. همچنین رشته‌ها، مارپیچ‌وار دور یکدیگر پیچیده و حلزون دوگانه‌ای را تشکیل داده‌اند. رشته‌های ملکولی، متناوباً از ملکول‌های شکر و فسفات تشکیل شده است. هر مولکول شکر به یکی از چهار پایهٔ ذیل مطابق شکل ۲۵ بسته شده است. پایه‌ها عبارت است از:

A= آدنین =Adenine و T= تیامین =Thyamine

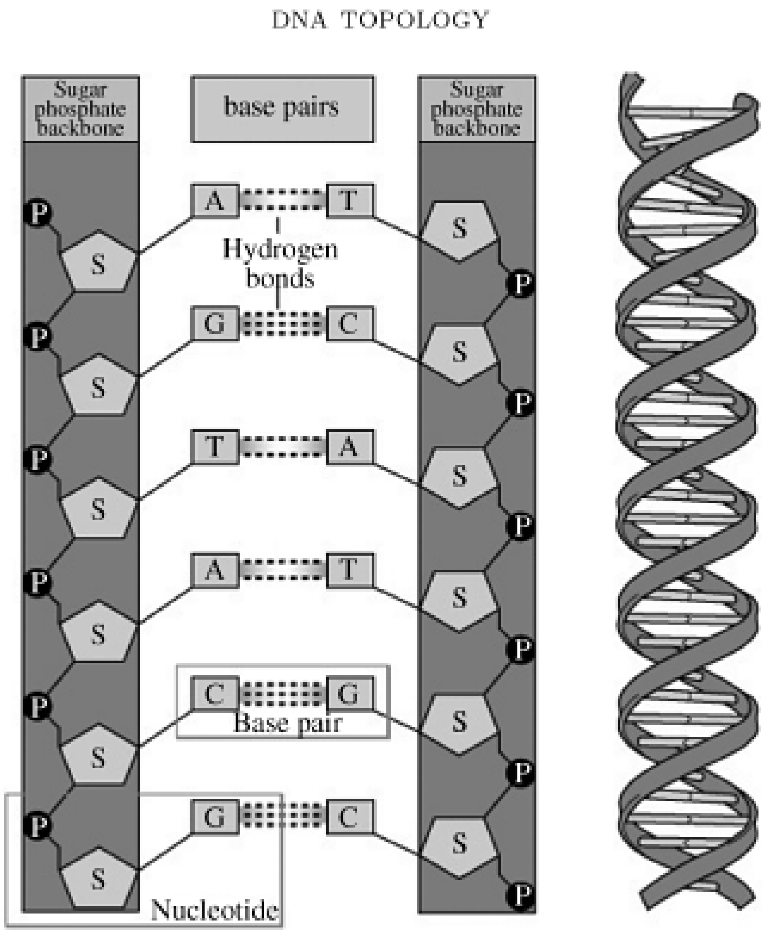
C= سیتوزین =Cytosine و G= گوامین =Guamine

---

1) encoding 2) instructions 3) traits 4) F. Crick 5) J. Watson 6) Deoxiribonucleic
7) twisted



شکل ۲۴. حلزون دوگانهٔ DNA



شکل ۲۵. ساختار اولیه و ثانویه DNA

طول DNA برحسب این زوج پایه‌ها (bp) اندازه‌گیری می‌شود. مثلاً DNA ژنوم انسان تقریباً دارای سه میلیون زوج پایه است، در حالی‌که ژنوم معمول‌ترین باکتری‌ها (E.cobi)، تقریباً دارای ۴٫۴ میلیون زوج پایه است.

پله‌های نردبان DNA متشکل از اتم‌های هیدروژن است که پایه‌ها را (دو به دو) به هم وصل می‌کنند (شکل قبلی را ببینید). A به T و C به G وصل می‌شود. توجه کنید که وقتی از رشتهٔ بالایی به رشتهٔ پایینی می‌آییم پایه‌ها مشابهاً تکرار می‌شود، با این قاعده که همواره A به T و C به G تبدیل می‌شود. دنبالهٔ Aها، Tها، Cها و Gها همچنان که در امتداد یک رشته به پایین حرکت می‌کنیم، عبارت است از کد ژنتیکی که نقشهٔ حیات را به‌دست می‌دهد، یعنی همهٔ اطلاعات موروثی و دستورالعمل‌های کدداده شده برای همهٔ فرآیندهای سلولی. ساختار حلزونی DNA نیز متضمن نتیجه‌های حیاتی عمیقی است. مثلاً باز کردن حلزون دوگانه بسیار مشکل‌تر از باز کردن یک نردبان مستقیم می‌باشد. این مشکل در رسیدن به زوج پایهٔ اتصال‌ها[1] منجر به تغییرات تصادفی کمتری در دنبالهٔ DNA می‌شود. بنابراین کد ژنتیکی را نگهداری می‌کند.

ملکول DNA شامل میلیون‌ها اتم مرتب شده است که همگی در هستهٔ (بسیار کوچک) یک سلول جای گرفته‌اند. در حقیقت اگر هستهٔ یک سلول را به اندازهٔ یک توپ بسکتبال فرض کنیم، DNA موجود در آن به اندازهٔ ۲۰۰ کیلومتر تور ماهیگیری است و این تور، مانند یک رشتهٔ به دقت گلوله شده در درون توپ بسکتبال (هستهٔ سلول) جای نگرفته است، بلکه مانند توده‌ای در هم تنیده (پیچیده) است.

برای انجام عملیات مختلف حیاتی مانند تکثیر[2]، نسخه‌برداری[3] و ترکیب مجدد، DNA باید مورد استفاده قرار گیرد. این‌ها فرآیندهایی به‌ترتیب برای تولید مجدد یک ملکول DNA، تکثیر[4] قطعه‌هایی از DNA و تغییر دادن (اصلاح کردن) ملکول‌های DNA می‌باشد. هر سه فرآیند مذکور برای حیات ضروری است. گره (خوردن‌ها) و در هم تنیدن‌ها در ملکول‌های DNA انجام این فرآیندها را مشکل می‌سازد. برای انجام این مکانیسم‌های حیاتی باید نوعی تشکیل ماهرانه توده‌های در هم تنیدهٔ ملکول‌های DNA صورت گیرد.

طبیعت برای حل این مسأله آنزیم‌هایی به نام توپوایزومراس[5] آماده کرده و به‌کار می‌برد. این آنزیم‌ها به‌صورت توپولوژیکی، DNA را ماهرانه دستکاری می‌کنند. به‌صورت بسیار فشرده به زبان ریاضی می‌توان گفت DNA (و فرآیندهای مذکور دربارهٔ آن) چیزی جز پیوندها (و عمل‌های ریاضی بر آن‌ها) نیست. از این روست که برای مطالعهٔ DNA و اعمال حیاتی آن‌ها، نظریهٔ گره و پیوند قویاً به‌کار می‌رود، برای اطلاعات بیشتر مرجع‌های [2 و 5] را ببینید.

---

1) rungs 2) replication 3) transcription 4) coping 5) topoisomerase

۹. مکانیک آماری و نظریهٔ گره

تا سال‌های اخیر، مکانیک آماری و نظریهٔ گره با هم ارتباطی نداشتند تا این که جونز در خلال کشف ناوردای جدیدش برای گره‌ها به‌نام چندجمله‌ای جونز، ارتباط این دو شاخه از علم را آشکار و برقرار نمود. امروزه این ارتباط یک موضوع پژوهشی بسیار فعال است.

در مکانیک آماری، با سیستم‌هایی متشکل از ذرات بسیار ریز سروکار داریم و به‌جای مطالعهٔ مشخصه‌های هر ذره به‌طور جداگانه، رفتار جمعی را مطالعه می‌کنیم. مثلاً می‌توانیم انرژی میانگین سیستم (موسوم به حرارت) را اندازه‌گیری کنیم. در این مطالعه، به کمیت‌هایی علاقه‌مندیم که به تعداد ذرات (با فرض این‌که تعداد ذرات به اندازهٔ کافی زیاد است) بستگی ندارند، مثلاً با نصف کردن یک قطعه مکعب یخ به دو نیمه، دمای دو قطعهٔ حاصل تغییر نمی‌کند.

با وجود این، حتی هنگامی که فقط رفتار میانگین سیستم را بررسی می‌کنیم، پدیده‌های عجیبی می‌تواند اتفاق افتد. یک مثال، تغییر فازاست هنگامی که یک سیستم متشکل از ذرات گاز به مایع تبدیل می‌شود یااز مایع به جامد تبدیل می‌شود یا برعکس. چنین تغییری برای یک ملکول در یک زمان اتفاق نمی‌افتد، بلکه برای همهٔ سیستم در یک فاصلهٔ زمانی کوتاه صورت می‌گیرد. مثلاً هنگامی که دمای مناسب فراهم می‌شود، ناگهان مایع یخ می‌بندد. یک مثال دیگر، عبارت است از آهن‌ربا شدن (کردن). هنگامی که یک قطعهٔ فلزی در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، محورهای مغناطیسی ملکول‌ها در یک امتداد قرار می‌گیرد و این باعث آهن‌ربا شدن قطعه فلزی می‌شود، حتی هنگامی که میدان مغناطیسی از بین رود، قطعه فلز آهن‌ربا باقی می‌ماند.

از نظر ریاضی، مدل‌بندی این سیستم‌ها یکی از مشکل‌ترین مسائل در فیزیک (بوده) است. مدل‌های ریاضی گوناگونی (از جمله مدل آیزینگ که توسط ای. آیزینگ در سال ۱۹۲۵ ابداع شد) برای مطالعه این سیستم‌ها به‌کار می‌رود. این مدل برای سیستم‌هایی که در آن‌ها، فقط ذره‌های نزدیک به هم با هم اندرکنش دارند، به‌خوبی به‌کار می‌رود. در این مدل، برای توصیف سیستم از یک گراف استفاده می‌شود. هر ذرهٔ سیستم یک رأس گراف است و ضلع‌های گراف اندرکنش بین دو ذرهٔ مجاور را نشان می‌دهد. فقط دو ذره‌ای که با یک ضلع به هم وصل شده‌اند، با هم اندرکنش دارند. یک گراف خاص، یعنی مشبکه که در آن رأس‌ها و ضلع‌ها نمونه‌ای منظم و تکراری در فضا تولید می‌کنند، زیاد به کار می‌رود. گراف دیگری که زیاد استفاده می‌شود گراف تخت است، یعنی گرافی که در یک صفحه واقع می‌شود بدون این‌که اضلاع همدیگر را قطع کنند. در مدل آیزینگ، هر ذره دارای دو حالت ± 1 است (در مثال مغناطیسی شدن حالت $+1$ زمانی به ذره نسبت داده می‌شود که محور مغناطیس وابسته به آن ذره به سمت بالا باشد و حالت -1 زمانی است که آن محور به سمت پایین باشد). هر حالت سیستم عبارت است از انتخابی از حالت برای هر یک از ذره‌های سیستم. بنابراین بیان سیستم با یک گراف علامتدار (هر رأس دارای علامت ± 1 است) آغاز می‌شود. به هر حالت سیستم یک عدد نسبت داده می‌شود و به این ترتیب، تابع افراز برای هر سیستم

مطرح می‌شود. آشکار است که هرچه تعداد ذره‌های سیستم بیشتر باشد، تعداد حالت‌های ممکن سیستم بیشتر می‌شود.

یک روش برای آسان (عملی) کردن مدل‌بندی سیستم‌های با تعداد ذرات زیاد، عبارت است از به‌کار بردن معادلهٔ یانگ ـ باکستر[1] یا رابطهٔ ستاره ـ مثلث. این رابطه به‌صورت استقرایی، رأس‌های گراف را تقلیل می‌دهد و در نتیجه باعث ساده‌شدن مسأله می‌شود. ورود مبحث گره در این نظریه از آن روست که هر افکنش گره، یک گراف تخت علامتدار است.

همچنان که در مدل آیزینگ از مطرح شدن نگاشت تابع افراز سخن به میان آمد، در هریک از مدل‌های به‌کار رفته، یک نگاشت افراز ظاهر می‌شود که نسبت به حرکت‌های رایدمایستر ناورداست و این نگاشت افراز یک ناوردای گره یا پیوند متناظر با سیستم (و مدل به‌کار رفته) می‌باشد. بنابراین همان‌گونه که در بالا نیز اشاره شد، از این طریق نظریهٔ گره در مکانیک آماری ظاهر و به‌کار برده می‌شود.

۱۰. گره‌ها و خمینه‌های سه‌بعدی

در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ دو ریاضیدان به نام‌های ریموند لیکوریش[2] و اندرو والاس[3] به‌طور مستقل و با روش‌های کاملاً متفاوت ثابت کردند **هر خمینهٔ سه‌بعدی همبند و فشرده از اعمال «جراحی دِن»[4] بر یک پیوند در S^3 به‌دست می‌آید.** این مطلب رابط اساسی بین گره‌ها و پیوندها و خمینه‌های سه‌بعدی است. بنابراین اگر بتوانیم گره‌ها و پیوندها و جراحی‌های دن بر آن‌ها را درک کنیم، می‌توانیم همهٔ خمینه‌های سه‌بعدی فشرده را شناسایی کنیم.

فرض کنید $k \subset S^3$ یک گره باشد، **بیرون گره** k [5] عبارت است از مکمل (در S^3) یک چنبرهٔ توپر (صلب) باز (در S^3) حول k (مانند k گره زده شده). این چنبرهٔ صلب باز دقیقاً عبارت است از همسایگی تیوبی k در S^3.

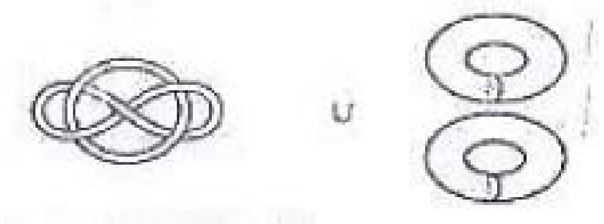
حال گره $k \subset S^3$ را در نظر بگیرید و یک همسایگی تیوبی آن را از S^3 خارج کنید (باقیمانده در واقع بیرون گره است). آن‌گاه یک چنبرهٔ صلب (گره زده شده مانند k) را به بیرون گره بچسبانید (مطابق شکل پایین) بدین صورت که خم نصف‌النهاریش[6] به یک (p,q) ـ خم واقع بر چنبرهٔ مرزی بیرون گره برده شود. این عمل، **جراحی دن** نامیده می‌شود. فضای حاصل از این عمل، یک خمینهٔ سه‌بعدی بدون مرز است. اگر جراحی دن را بر گره بدیهی اعمال کنیم، در واقع دو چنبرهٔ توپر را در امتداد مرزهایشان به هم می‌چسبانیم. آنچه از این عمل در حالت کلی به‌دست می‌آید، عبارت است از فضای عدسی که حالت خاص آن کرهٔ S^3 است. جراحی دن را می‌توان بر یک پیوند در S^3 نیز اعمال کرد. شکل‌های ۲۶ و ۲۷ نمایانگر اعمال جراحی دن بر یک گره و بر یک پیوند است.

---

1) Yang-Baxter equation 2) Raymond Lickorish 3) Andrew Wallace 4) Dehn surgery

5) Knot exterior of k 6) meridian curve

شکل ۲۶. چسباندن خم نصف النهاری چنبرهٔ توپر به $(p,q)-$ خم

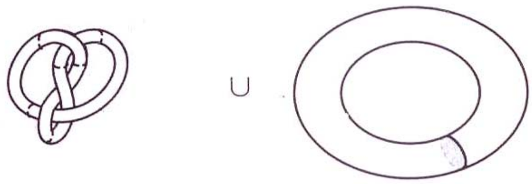


شکل ۲۷. جراحی دن بر یک پیوند در $S^{۳}$

۱۱. گره زدن در بعدهای بالاتر

گسترش طبیعی نظریهٔ گره در فضای سه‌بعدی عبارت است از مطالعهٔ کرهٔ دوبعدی $S^{۲}$ («گره زده شده») در فضای چهاربعدی (یک فضای دو بعدی در فضای چهاربعدی ($S^{۴}$ یا $\mathbb{R}^{۴}$) همانسان با $S^{۲}$). توجه کنید که هر گره (فضای یک‌بعدی همانسان با $S^{۱}$) در فضای چهاربعدی با گره بدیهی هم‌ارز است، از اینروست که در اولین گسترش، گره‌های دوبعدی در فضای چهاربعدی مطالعه می‌شوند. به‌طور استقرایی، می‌توان گره‌های nبعدی را در فضای $(n+۲)$بعدی در نظر گرفت و مطالعه کرد.

تشکر: مؤلّف از آقای فیروز پاشائی به‌خاطر تهیهٔ صورت تایپی اولیهٔ مقاله و ویراستار ارشد مجله برای ویرایش، و سرکار خانم صمدیان برای آماده‌سازی صورت نهایی آن، سپاسگزار است.



شکل ۲۸. چسباندن چنبرهٔ تو پُر به بیرون یک گره

کتابنامه

[1] *Introductory Lectures of Knot Theory*, Eds: L. H. Kauffman et al World Sci, The Abdus Salam ICTP., 2012.

[2] Applications of knot Theory; Proc. Symposia in Applied Math.,Vol. 66, AMS short course, AMS., 2009.

[3] knot plot (Authar R. Scharein), http://www.knotplot.com

[4] Morwen, Thistlewaite's webpage.

[5] C. Adams, The Knot Book, W. H. Freeman, Ny (2004).

[6] L. H. Kauffman, Knots and Physics, World scientific, 2001.

[7] K. Murasugi, Knot Theory & its Applications, Birkhauser, 1996.

[8] E. Flapan, When Topology meets Chemistry, CUP (2000).

[9] J. Baez & J. P. Muniain, Gauge Fields, Knots and Gravity, series on knots and everything, Vol. 4, World scientific, 2008.

گردآوری و تألیف: سید محمدباقر کاشانی،

دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

kashanim@modares.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ٦٧ تا ٨٦

نقد کتاب

سید محمود طاهری

«نظریه‌های فلسفی احتمال»

چکیده
نیاز به شفافیت و وضوح دربارهٔ مفهوم احتمال عمیقاً حس می‌شود. خواه به این دلیل که این مفهوم هم از دیدگاه ریاضی و هم از دیدگاه تجربی بسیار جالب توجه است، یا به این دلیل که مفهوم احتمال در برابر همهٔ کوشش‌ها در جهت دقیق ساختن آن، سرکش است. (برونو دوفینتّی[۱])

۱. درآمد

احتمال چیست؟ چه معنی و مفهومی دارد؟ ماهیت آن چیست؟ آیا احتمال یک مفهوم ذهنی/شخصی است؟ و یا این‌که یک مفهوم عینی/تجربی است؟ اساساً نسبت بین احتمال و تجربه چگونه است؟ آیا تنها نوع عدم اطمینان (نایقینی)، نوع احتمالی آن است؟ چگونه می‌توان (آیا اساساً می‌توان) از احتمال در تأیید/تقویت/تضعیفِ گزاره‌ها/فرضیه‌های علمی استفاده نمود؟ رابطهٔ بین احتمال و استقراء چیست؟ رابطهٔ بین احتمال و منطق چگونه است؟ رابطهٔ بین احتمال و مفاهیمی مانند: علیّت، تصادف، موجبیّت، اختیار و امثال آن چیست؟ گزاره‌های احتمالی چه وجه معرفت‌شناسانه‌ای دارند؟ این پرسش‌ها و برخی پرسش‌های دیگر از این دست، در حوزه‌ای از علم قرار می‌گیرند به نام فلسفهٔ احتمال.

خوانندگان آگاهی دارند که فلسفهٔ احتمال، اصطلاحاً یک فلسفهٔ مضاف است (مانند فلسفهٔ ریاضی، فلسفهٔ فیزیک، فلسفهٔ هنر و فلسفهٔ اخلاق). فلسفهٔ احتمال، فلسفه به‌معنای عام (یعنی علمی که موضوع آن، هستی / وجود است) نیست؛ بلکه علمی است که موضوع آن، خودِ احتمال است. فلسفهٔ احتمال به مطالبی مانند ماهیت احتمال، اصول و مبانی احتمال، شیوه‌ها و ابزارهای علم

احتمال، نوع و اعتبار نتایج به‌دست آمده در این علم و ارزیابی ساختارهای ریاضی و معرفتیِ این علم می‌پردازد. این شاخه از دانش، به‌طور خاص، با پرسش‌هایی که در ابتدای بحث مطرح کردیم سروکار دارد. گفتنی است، در حالی که هم‌رأیی و توافق نسبتاً کاملی دربارهٔ ریاضیات احتمال وجود دارد، تشتّت آرای گسترده‌ای دربارهٔ فلسفه و ماهیت احتمال در میان است. امروزه دست‌کم چهار تفسیر متفاوت از مفهوم و ماهیت احتمال وجود دارد که عبارتند از:

۱) نظریه/تفسیر فراوانی احتمال

۲) نظریه/تفسیر منطقی احتمال

۳) نظریه/تفسیر گرایشی احتمال

۴) نظریه/تفسیر ذهنی احتمال

در ادامه، در بخش ۳، دربارهٔ این تفسیرها بیشتر توضیح خواهیم داد.

متأسفانه، در مجامع علمی ریاضی و آمار اهمیت پرداختن به فلسفهٔ احتمال، کم و بیش ناشناخته مانده است. حتی متون فلسفهٔ ریاضی نیز کمتر به مفهوم احتمال، ماهیت تصادف و وجه معرفت‌شناسانهٔ گزاره‌های احتمالی پرداخته‌اند؛ بلکه باید گفت که تقریباً هیچ‌یک به این موضوع‌ها نپرداخته‌اند (برای نمونه [۸ و ۵۰] را ببینید)، این در حالی است که بسیاری از فلاسفه و فلاسفهٔ علم، به مبانی و ماهیت احتمال توجه داشته‌اند. فلاسفه از آن روی به احتمال نظر دارند که مفاهیمی مانند علیّت، موجبیّت، تصادف (صُدفه) و امکان و ضرورت، در مباحثی از فلسفه مورد توجه است. برای فلاسفهٔ علم نیز تبیین مفهوم احتمال بدین دلیل اهمیت دارد که ابداع و تبیین روش‌های علمی، به‌ویژه شیوهٔ تأیید و تقویت و یا تضعیفِ گزاره‌های علمی توسط مشاهدات تجربی یا برداشت‌های شخصی، مستلزم تبیین مناسب مفهوم احتمال است (شاید: تبیین مناسبی از چیزی معروف به احتمال).

افزون بر این، تعدادی از هر دو گروه فلاسفه و فلاسفهٔ علم، به‌واسطهٔ پرداختن به موضوع استقراء، توجه خاصی به مفهوم احتمال داشته و دارند. گروه نخست به‌خاطر تبیین برهان نظم و گروه دوم به این دلیل که استقراء را الگویی مناسب برای تشریح و توضیح پیشرفت‌های علمی می‌دانند[(۲)(۳)].

با این همه، تاکنون کتابی به زبان فارسی که مستقلاً به موضوع فلسفهٔ احتمال بپردازد نگاشته یا ترجمه نشده بود تا این‌که چندی پیش، کتابی ارزشمند در این موضوع توسط آقای دکتر محمدرضا مشکانی[(۴)] ترجمه شد و با عنوان **نظریه‌های فلسفی احتمال** به چاپ رسید [۱۴ و ۳۴].

در این یادداشت بر آن هستیم تا این کتاب را، به‌کوتاهی، معرفی و بررسی کنیم. در این باره، هم به محتوای کتاب و هم به ترجمهٔ آن می‌پردازیم. پیش از همه، دربارهٔ زندگی و آثار نویسندهٔ کتاب مطالبی ارائه می‌کنیم.

۲. دربارهٔ نویسندهٔ کتاب

نویسندهٔ کتاب، دانلد گیلیز[1] است. گیلیز پس از پایان تحصیلات خود در ریاضیات و فلسفه در مقطع کارشناسی در دانشگاه کمبریج، دورهٔ دکترا را در سال ۱۹۶۶ در دانشکدهٔ اقتصاد لندن و در گروهی که کارل پوپر[1] (۵) در آنجا فعالیت می‌کرد، آغاز نمود. استاد راهنمای وی آیمری لاکاتوش[2] (۶)، از برجسته‌ترین شاگردان و پشتیبانان پرشور پوپر بود. لاکاتوش بعدها خود از فلاسفهٔ نامدار علم می‌شود. موضوع رسالهٔ گیلیز، مبانی احتمال بود. موضوعی که در آن روزگار و در آن محیط، ذهن بسیاری را از جمله پوپر و لاکاتوش به خود مشغول کرده بود. وی دورهٔ دکترا را در سال ۱۹۷۰ به پایان برد و سپس در گروه تاریخ و فلسفهٔ علم در کالج چلسی دانشگاه لندن مشغول فعالیت شد. وی از سال ۱۹۹۲ تا سال ۲۰۰۴ استاد فلسفهٔ علم در گروه فلسفه، کالج رویال دانشگاه لندن[3] و از سال ۲۰۰۴ تاکنون عضو هیأت علمی گروه مطالعات علم و فناوری در کالج یونیورسیتی دانشگاه لندن[4] است. گفتنی است که گیلیز مدتی رئیس انجمن فلسفهٔ علم انگلستان[5] و نیز چند سال عضو شورای سردبیری مجلهٔ فلسفهٔ علم انگلستان[6] بوده است.

تحقیقات گیلیز در طول فعالیت علمی‌اش موضوعات مختلفی بوده است مانند مبانی احتمال، فلسفهٔ منطق، تاریخ ریاضیات، هوش مصنوعی (به‌ویژه ارتباط آن با منطق، روش‌شناسی علمی، احتمال و علیّت) و شبکه‌های بیزی[7]. تمایلات و توجهات جدید گیلیز به کاربردها و تأثیرات فلسفهٔ علم بر دانش پزشکی معطوف شده است (۷). وی تاکنون بیش از ۶۵ مقاله در موضوع‌های بالا به رشتهٔ تحریر در آورده است. گیلیز تا به حال، چندین کتاب هم نوشته است. از میان آن‌ها، کتاب وی در زمینهٔ فلسفهٔ علم:

Philosophy of Science in the Twentieth Century: Four Central Themes

با عنوان **فلسفهٔ علم در قرن بیستم** توسط دکتر حسن میانداری (پزشک و پژوهش‌گر در فلسفهٔ علم) به فارسی ترجمه شده است [۱۳ و ۳۲].

اشاره‌ای به روند فکری گیلیز دربارهٔ احتمال جالب است. بنا به گفتهٔ خود وی در آغاز کتابش، نخست بسیار شیفتهٔ عینی‌گرایی در فلسفهٔ احتمال بوده است (رویکردی که استادان اولیهٔ او یعنی پوپر و لاکاتوش به آن تمایل داشتند). ولی تماس‌های بعدی او با مکتب ذهنی، دیدگاه او را تا حدودی تغییر می‌دهد. داستان از آنجا آغاز می‌شود که گیلیز از طریق همسر خود، که یک اقتصاددان ایتالیایی و از شاگردان برونو دوفینتّی بود، با دوفینتّی آشنا می‌شود. در این میان، دیدارها و بحث‌های علمی فراوانی با دوفینتّی و نیز با چند تن از دیگر پیشتازان مکتب ذهنی، دربارهٔ رویکردهای مختلف در فلسفهٔ احتمال، انجام می‌دهد. همچنین دو تن از شاگردهای دورهٔ دکترای او، کالین هاوسن

1) Donald Gillies 2) K. R. Popper 3) I. Lakatos 3) Royal College, London 4) University College, London (UCL) 5) British Society of the Philosophy of Science 6) British Journal for the Philosophy of Science 7) Bayesian Networks

و پیتر اورباخ بودند که بعدها از هواداران و مبلغان رویکرد بیزی[۸] (در واقع رویکرد بیزی ذهنی) شدند[۹]. همهٔ این‌ها او را به سمت موضعی دیگر رهنمون شدند. به گفتهٔ خودش: «در نتیجهٔ همهٔ این بحث‌ها و ارتباط‌ها، موضع من از عینی‌گرایی افراطی به دیدگاه چندگرایی[۱] از احتمال تغییر یافته است.» تا این‌که سرانجام خودِ گیلیز رویکردی را که در چارچوب رویکردهای ذهنی است، و آن را احتمال میان‌ذهنی می‌نامد، ابداع می‌کند. در واقع نظریهٔ گیلیز گسترشی از رویکرد ذهنی مبتنی بر فرد به رویکرد ذهنی مبتنی بر جمع/گروه است.

دست بر قضا، مترجم کتاب نیز سرنوشتی مشابه با نویسندهٔ کتاب داشته است. بر پایهٔ سخن مترجم در ابتدای کتاب، وی نخست تحت تأثیر الگوی فکری مرحوم دکتر خواجه‌نوری بوده که عمل‌گرا و منتقد دیدگاه بیزی بوده است، ولی پس از آن، به‌سوی دیدگاه ذهنی جلب می‌شود و به این دیدگاه پای‌بند می‌گردد و پای‌بند می‌ماند.

۳. مروری کوتاه بر محتوای کتاب

کتاب «نظریه‌های فلسفی احتمال» در ۹ فصل تألیف و تدوین شده است. در فصل نخست، مروری بر پیدایش و تکوین مقدماتی نظریهٔ احتمال در دورهٔ زمانی ۱۶۵۰ تا حدود ۱۸۰۰ میلادی انجام شده است. این فصل شامل مطالبی است از جمله: مروری کوتاه بر نامه‌نگاری‌های پاسکال و فرما در مورد برخی بازی‌های شانسی، مطالعات برنولی و نخستین قضیهٔ حدّی راجع به احتمال، شرطیهٔ پاسکال[۲] در مورد وجود خداوند، و قضیهٔ بیز (به‌عنوان واکنشی به بدبینی هیوم نسبت به استقراء). در فصل دوم، نظریهٔ کلاسیک احتمال (رویکرد لاپلاسی مبتنی بر اصل بی‌تفاوتی[۳] / اصل برهان ناکافی[۴]) مرور شده است. این بررسی، در فصل سوم با مطالعهٔ روند شکل‌گیری نظریهٔ منطقی احتمال که شبیه‌ترین نظریه به دیدگاه کلاسیک احتمال است، ادامه می‌یابد. در رویکرد منطقی، احتمال به‌مثابهٔ شاخه‌ای از منطق و همچون گسترشی از منطق قیاسی به منطق استقرایی دیده می‌شود. گفتنی است که عمده‌ترین نظریه‌های منطقی احتمال، از آنِ کارناپ[۵](۱۰) و کینز[۶] است و گیلیز بحث دربارهٔ نظریهٔ منطقی احتمال را بر اساس رویکرد کینز تشریح و بررسی نموده است. گیلیز، نخست محیط علمی ــ روشنفکری‌ای را توصیف می‌کند که در آن، اندیشه‌های کینز شکل گرفت و سپس رویکرد منطقی کینز به احتمال را تشریح و بررسی می‌کند. این بررسی با مروری بر انتقادها بر اصل بی‌تفاوتی و جواب انتقادها همراه است. بررسی نظریهٔ ذهنی (شخصی) احتمال و رویکرد دانشمندانی مانند رمزی[۷] و دوفینتّی و نیز بررسی مفهوم تبادل‌پذیری[۸] موضوع‌های فصل چهارم هستند. این فصل با بیان انتقادهای رمزی از کینز آغاز می‌شود. در واقع، گیلیز تشریح می‌کند که رمزی چگونه از طریق نقد نظریهٔ منطقی کینز به نظریهٔ ذهنی احتمال رهنمون شد. به‌علاوه، دیدگاه دوفینتّی را در مورد جبرگرایی و همچنین دیدگاه وی را در ردِ کامل احتمال‌های عینی به‌نفع

1) Pluralism 2) Pascal's Wager 3) The Principle of Indifference 4) The Principle of Insufficient Reason 5) R. Carnap 6) J. M. Keynes 7) F. P. Ramsey 8) Exchangeability

احتمال‌های ذهنی توضیح می‌دهد. شایان یادآوری است که در مکتب ذهنی احتمال دو رویکرد کلّی وجود دارد: رویکرد معتدلانه که بر اساس آن، مفهوم عینی احتمال همچون وجهی دیگر از احتمال، پذیرفته می‌شود؛ و رویکرد تندروانه که بر اساس آن، همهٔ احتمال‌ها ذهنی‌اند و حتی احتمال‌های به‌ظاهر عینی و تجربی را هم می‌توان برحسب درجهٔ باور ذهنی تشریح و تبیین نمود. رمزی از جمله کسانی بود که موضع اول را داشت و از سوی دیگر دوفینتّی طرفدار و مبلغ موضع دوم بود (گفتنی است که کارناپ نیز از موضع دوگانگی احتمال حمایت می‌کرد، ولی او دو مفهوم منطقی احتمال و مفهوم فراوانی احتمال را در نظر داشت [۱۰ و ۲۴]). در فصل پنجم، نظریهٔ فراوانی (بسامدی / تواتری) احتمال، بر اساس نظریهٔ فون میزس (۱۱)، بررسی گردیده است (نمایندهٔ برجستهٔ دیگر در این رویکرد، رایشن‌باخ[1] است). در ابتدای این فصل تشریح می‌شود که چگونه تجربه‌گرایی که رویکرد غالب در بسیاری از مجامع علمی اواخر سدهٔ ۱۹ و اوائل سدهٔ ۲۰ میلادی بود، در نظریهٔ فون میزس نمایان شد. سپس مؤلفه‌های اصلی نظریهٔ فون میزس بیان و تشریح و نقد می‌شود. فصل‌های ششم و هفتم اختصاص به نظریه‌های گرایشی[2] (تمایلی) احتمال دارد. گفتنی است که نظریه‌های گرایشی احتمال عمدتاً با این هدف ابداع شدند که بتوانند تفسیری از احتمال به‌دست دهند که در عین‌حال که عینی/تجربی باشند لزوماً مبتنی بر فراوانی نباشند. به سخن دیگر، هدف ارائهٔ نظریه‌های عینی بود که بتوانند پیشامدهای یکتا را هم تبیین کنند. در واقع، یکی از پرسش‌های اساسی که نظریه‌های گرایشی احتمال سعی دارند به آن پاسخ دهند (حتی‌الامکان پاسخ مثبت) این است: آیا احتمال‌های عینیِ پیشامدهای یگانه می‌توانند وجود داشته باشند؟ در این زمینه، در فصل‌های ششم و هفتم، نظریه‌های گرایشی پوپر متقدم، فتزر[3]، میلر[4] و پوپر متأخر به گستردگی بررسی شده‌اند. به‌علاوه ارتباط بین نظریه‌های گرایشی و برخی مسائل در فلسفهٔ علم و روش‌شناسی علوم تجربی مورد توجه قرار گرفته است. بجاست اشاره کنیم که نظریه‌های گرایشی احتمال خود به دو شاخهٔ کلی تقسیم می‌شوند: نظریه‌های گرایشی مبتنی بر فراوانی نسبی (مانند رویکرد پوپر [۴۹]) و نظریه‌های گرایشی تک‌حالتی (مانند رویکردهای فتزر [۲۹] و میلر [۴۴]). در رویکرد نخست، گرایش‌ها به شرایط تکرارشدنی ارتباط می‌یابند و به‌مثابهٔ گرایش‌هایی به تولید فراوانی‌ها در یک سلسلهٔ طولانی از تکرارهای این شرایط، در نظر گرفته می‌شوند که این فراوانی‌ها تقریباً با احتمال‌ها برابرند. در حالی که در رویکرد دوم، گرایش‌ها به‌مثابهٔ گرایش‌هایی به تولید نتیجه‌ای ویژه در یک موقعیت خاص تلقی می‌شوند (واژهٔ گرایش، نوعی توصیف/تبیینِ تمایلی است، و این امر تفاوت با دیدگاه فراوانی‌گرا را نشان می‌دهد). گفتنی است که گیلیز، در مقاله‌ای مستقل، انواع نظریه‌های گرایشی احتمال را به‌تفصیل شرح داده و بررسی نموده است [۳۵] (نیز ر. ک. به [۱۸ و ۳۸]).

در فصل هشتم، دانلد گیلیز رویکرد نوینی را به مفهوم احتمال که احتمال میان‌ذهنی (نوعی گسترش احتمال ذهنی از افراد به گروه‌ها) نامیده است، معرفی و تشریح می‌کند. رویکرد نوین گیلیز این مزیت را دارد که از وابستگی احتمال ذهنی به دیدگاه‌های شخصی می‌کاهد. او در این فصل

1) H. Reichenbach 2) Propensity Theories 3) J. H. Fetzer 4) D. W. Miller

می‌کوشد نشان دهد که تعبیر و تفسیری (مفهومی؟) یکتا و تک از احتمال وجود ندارد. به عقیدهٔ وی، تفسیرها و تعبیرهای (مفاهیم؟) مختلف احتمال در طیفی از موضع‌ها بین کاملاً ذهنی و کاملاً عینی قرار دارند که هر کدام در زمینه‌ای متفاوت با دیگری کاربرد دارند. در فصل نهم و پایانی، دیدگاه چندگرای احتمال را با بیان این نکته تشریح می‌کند که نظریه‌های عینی احتمال (شامل نظریه‌های بسامدی و گرایشی) برای کاربرد در علوم طبیعی مناسب هستند و از سوی دیگر، نظریه‌های ذهنی، میان‌ذهنی و منطقی احتمال مناسب تحقیق در علوم اجتماعی و اقتصادی می‌باشند.

۴. دربارهٔ مترجم و ترجمهٔ کتاب

الف) انصاف آن است که ترجمهٔ کتابی مانند کتاب نظریه‌های فلسفی احتمال بسیار دشوار است و مترجم باید بر شاخه‌های گوناگونی همچون احتمال، آمار، فلسفه، فلسفهٔ علم، تاریخ علم و منطق تسلط و یا دست‌کم با آن‌ها آشنایی داشته باشد. این کار سترگ و ارزشمند به‌خوبی توسط آقای دکتر مشکانی انجام پذیرفته است. بجاست اشاره شود که ایشان سابقهٔ برجسته‌ای در ترجمهٔ کتاب‌های تخصصی آمار و احتمال دارند. به‌ویژه ترجمهٔ روان، دقیق و شیوای ایشان از کتاب **آمار مقدماتی** نوشتهٔ ووناکات و ووناکات [۲۰ و ۵۴]، همچون یک ترجمهٔ الگو و ماندگار، مثال‌زدنی است.

ب) مترجم محترم بخشی را در پایان کتاب در معرفی کوتاه برخی از دانشمندان که در کتاب به آن‌ها اشاره شده، تنظیم و تدوین نموده است. این برای خوانندهٔ کتاب سودمند است و او را، دست‌کم در سطحی مقدماتی، از مراجعه به کتاب‌ها یا دایرةالمعارف‌ها بی‌نیاز می‌کند. در این زمینه چند نکته کوچک را یادآوری می‌کنیم. در صفحهٔ ۳۱۹ به پوپر به‌عنوان «فیلسوف انگلیسی اتریشی‌تبار» اشاره شده است. در واقع پوپر یک فیلسوف علم بوده است و نه یک فیلسوف به‌معنای رایج و مصطلح. در صفحهٔ ۳۲۲ مطرح شده است که: «رایشن‌باخ از پایه‌گذاران حلقهٔ برلن بوده است.» که درستِ آن حلقهٔ وین است. در صفحهٔ ۳۲۵ در مورد کارناپ نیز گفته شده است: «فیلسوف» آلمانی، در حالی که کارناپ هم بیشتر یک فیلسوف علم بوده است تا یک فیلسوف به معنی عام.

پ) کتاب پر از اصطلاح‌های تخصصی است که برخی از آن‌ها در متون فارسی ریاضی (تألیفی یا ترجمه‌ای) تاکنون به‌کار نرفته یا به‌ندرت به‌کار رفته است. در این باره کار مترجم محترم در انتخاب و ابداع و برابرنهی واژه‌های مناسب، جالب توجه و بعضاً شایستهٔ الگوبرداری است. برای نمونه به چند اصطلاح و برابرنهاده‌های آن‌ها اشاره می‌کنیم: «برنهاد» برای Thesis، «الگوی فکری» برای Paradigm، «شرطیدن» برای Conditionalization، «چندگرایی» برای Pluralism (به‌جای اصطلاح رایج تکثّرگرایی)، «راژمند» برای Systematic، و «دانشواژه» برای Term.

واژه‌نامهٔ انتهای کتاب نیز در یافتن اصل اصطلاحات ترجمه شده، به خواننده کمک می‌کند. البته بجا بود که فهرست واژه‌نامه، کامل‌تر می‌بود و برخی واژه‌ها را که تاکنون در متون فارسی، به‌ویژه متون فارسی ریاضی، چندان گسترده نیافته‌اند، شامل می‌شد. از جمله، واژه‌ها و اصطلاح‌هایی مانند آزمایه، نظریهٔ برقاطیسی، آغازینه و بافتار.

ث) متن ترجمه در بیشتر موارد روان و شیوا است. البته، گاهی با جملات مبهم نیز رو به‌رو می‌شویم. در این موارد، شاید ابهام به متن کتاب باز گردد. تنها به یک مورد اشاره می‌کنیم:

رویکرد پوپر از سوی کار حرفه‌ای آماری استاندارد قویاً پشتیبانی شده است. آمارشناسان حرفه‌ای مدام در حال به‌کار بستن یکی از اعضای مجموعه‌ای از آزمون‌های آماری‌اند. (ص. ۲۱۳)

بررسی متن کتاب از نظر ترجمه، منظور و هدف این یادداشت نیست. ولی به این نکته اشاره می‌کنیم که در برخی موارد می‌شد از عبارت‌های روان‌تر و شیواتری استفاده کرد. برای نمونه، تکرار فراوان اصطلاح بگذارید در ابتدای بسیاری از جملات، موجّه نیست. در بسیاری موارد می‌توان آن را حذف کرد و با تغییر اندکی در جمله، متن روان‌تری را به‌دست آورد. به بیان چند مورد بسنده می‌کنیم.

ص ۱۰۰: متن ترجمه: اکنون بگذارید آقای «ب»ی ذهنی‌گرا را در نظر بگیریم.

متن پیشنهادی: اکنون آقای «ب»ی ذهنی‌گرا را در نظر می‌گیریم.

ص ۱۱۰: متن ترجمه: بگذارید به دو احتمال‌دان خودمان برگردیم و ابتدا فرد عینی‌گرا را در نظر بگیریم.

متن پیشنهادی: به دو احتمال‌دان خودمان بر می‌گردیم و ابتدا فرد عینی‌گرا را در نظر می‌گیریم.

ص ۱۷۶: متن ترجمه: بگذارید حال به موردی خاص از این اصل کلی نگاه کنیم.

متن پیشنهادی: حال به موردی خاص از این اصل کلی نگاه (/توجه) می‌کنیم.

ص ۱۹۵: متن ترجمه: بگذارید در پایان ... بررسی کنیم.

متن پیشنهادی: در پایان، ... را بررسی می‌کنیم.

ص ۱۹۵: متن ترجمه: بگذارید مثل قبل این پرسش را مطرح کنیم که ...

متن پیشنهادی: مانند قبل این پرسش را مطرح می‌کنیم که ...

ص ۲۱۲: متن ترجمه: برای درک این‌که چرا گزاره‌های احتمالی را نمی‌توان ابطال کرد، بگذارید ساده‌ترین مثال را اختیار کنیم.

متن پیشنهادی: برای درک این‌که چرا گزاره‌های احتمالی را نمی‌توان ابطال کرد، ساده‌ترین مثال را اختیار می‌کنیم.

ث) ترجمهٔ دقیق و روان دکتر مشکانی از متن انگلیسی کتاب موجب شد که این ترجمه، با شایستگی، یکی از کتاب‌های برگزیده در بخش ترجمه در سال ۱۳۸۷ شود. به همین مناسبت، در مراسم کتاب سال (بهمن ۱۳۸۷) از دکتر مشکانی تقدیر به عمل آمد.

شایان یادآوری است که کتاب هفته (نشریه‌ای هفتگی که در مورد تازه‌های نشر چاپ می‌شود) در شمارهٔ ۱۷۴ (۲۴ اسفند ۱۳۸۷) به‌مناسبت انتخاب کتاب نظریه‌های فلسفی احتمال به‌عنوان

یکی از کتاب‌های برگزیدهٔ سال در بخش ترجمه، گفت‌وگویی را با دکتر مشکانی به چاپ رسانده است. این گفت‌وگو شامل مطالبی در مورد کتاب فوق و نیز در باب احتمال و فلسفهٔ احتمال است. مصاحبه‌گر که گویا آشنایی با موضوع ندارد مقدمه‌ای پر اشتباه دربارهٔ آثار قلمی دکتر مشکانی تنظیم نموده و عنوان نامناسبی هم برای گفت‌وگو برگزیده است. از سوی دیگر، عنوان مؤلف را (به‌جای مترجم) در تیتر گفت‌وگو گنجانده است. گذشته از این‌ها، بیشتر پرسش‌های وی نیز ناشیانه و سطحی است و لذا این گفت‌وگو از محتوای عمیق و پرباری برخوردار نشده است.

۵. بررسی کوتاه محتوای کتاب

مزیت‌ها

۱) کمتر کتاب مستقلی در باب فلسفهٔ احتمال نگاشته شده است که بدین گستردگی به مفهوم و ماهیت احتمال پرداخته باشد (البته جست‌وجوی نگارنده تنها در منابع انگلیسی زبان بوده است). تاکنون حدود ۱۰ کتاب با عنوان فلسفهٔ احتمال یا با عنوانی شبیه به آن به انگلیسی نگاشته شده است. نیز ده‌ها کتاب با عنوان‌هایی (یا با عنوان‌هایی شامل عبارت‌هایی) همچون احتمال و رئالیسم، احتمال و قطعیّت، احتمال و باور، فلسفهٔ آمار، منطق استقرایی و احتمال، علیّت و احتمال، احتمال و فلسفهٔ فیزیک، اپیستمولوژی و احتمال، و مانند این‌ها نوشته شده است. ولی به نظر می‌رسد کتاب گیلیز جامع‌ترین و به‌روزترین کتاب در موضوع فلسفهٔ احتمال است[۱۲].

۲) کتاب از دقت‌ها و بررسی‌های تاریخی کاملی برخوردار است. طبق برخی دیدگاه‌ها، مطالعهٔ فلسفهٔ هر علم باید با مطالعات تاریخی در مورد آن علم همراه باشد (این ضرورت از نظر نگارندهٔ این سطور مورد تردید است). گیلیز از این جهت بسیار موفق عمل نموده و هر بحث را از هر دو جنبهٔ تاریخی و فلسفی بررسی کرده است. در واقع بهتر است بگوییم که گیلیز مباحث تاریخ احتمال و فلسفهٔ احتمال را به‌طور درهم تنیده، طرح و دنبال نموده است[۱۳].

۳) نویسنده خود به‌شدت در تعامل با چند مکتب مختلف احتمال بوده است. محیط تحصیلی وی (با حضور افرادی مانند پوپر و لاکاتوش) و محیط خانوادگی او (داشتن همسری از شاگردان دوفینتّی) این فرصت کمیاب را به وی بخشیده است که در صحنهٔ چندین جریان عمده که در تفسیر و تبیین احتمال فعال و تاثیرگذار بوده‌اند، حاضر باشد. لذا، بررسی‌های وی بررسی‌هایی نیست که در آن تنها به مطالعه‌های کتابخانه‌ای بسنده شده باشد. نکته‌ای که گفته شد باعث شده است که بیشتر مباحث مطروحه در کتاب از ژرفای خوبی برخوردار باشد و به‌علاوه، نویسنده را از جانبداری تعصب‌آمیز از یک تعبیر خاص از احتمال بازداشته است.

۴) کتاب از نوآوری‌هایی در زمینهٔ فلسفهٔ احتمال برخوردار است. به‌جز سبک و ظرافت خاصی که نویسنده در مرور و پیگیری تاریخی مکاتب فلسفی احتمال به‌کار برده است، باید به دو نوآوری وی اشاره نمود. نخست، تقسیم‌بندی جالب توجه وی برای تفسیرهای مختلف احتمال است. او انواع تفسیرهای احتمال را به دو رده: اول تفسیرهای شناخت‌شناسانه (شامل تفسیرهای ذهنی،

میان‌ذهنی و منطقی) و دوم تفسیرهای عینی (شامل تفسیرهای فراوانی و گرایشی) تقسیم می‌کند. سپس تفاوت‌های مکاتب احتمال و نقش متفاوت آن‌ها را در کاربرد، بر اساس این تقسیم‌بندی، توضیح می‌دهد. نوآوری دیگر (و مهم‌تر) نویسنده، ارائهٔ یک دیدگاه/تفسیر جدید دربارهٔ احتمال است، که همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، وی آن‌را دیدگاه میان‌ذهنی نام گذاشته است. به‌زعم نویسندهٔ کتاب، این تفسیر از احتمال، برخی دشواری‌های مربوط به دیدگاه ذهنی را برطرف می‌کند.

کاستی‌ها

۱) در مجامع علمی آمار و ریاضی، رویکرد غالب و بنیادی به احتمال، رویکرد اصل‌موضوعی است. ولی در کتاب نظریه‌های فلسفی احتمال به این رویکرد، به‌طور مستقل و مستوفا، توجه نشده است. حتی پیوندهای رویکرد اصل موضوعی با مکتب‌های مختلف احتمال و تأثیرهای این رویکرد بر مکاتب مختلف به‌طور کامل بررسی نشده است. در این رابطه، مباحث متنوعی مطرح هستند که از دید نویسنده پوشیده مانده‌اند مانند: ریشه‌یابی تاریخی ــ فلسفیِ ابداع دستگاه‌های اصل‌موضوعی، تکوین رویکردهای ذهنی بر اساس دستگاه‌های اصل موضوعی، و دستگاه‌های اصل موضوعیِ مبتنی بر احتمال شرطی.

ممکن است این چشم‌پوشی بدان دلیل بوده که در رویکردهای اصل موضوعی، توجه اصلی به قالب ریاضی احتمال است و نه به مفهوم و معنای احتمال. ولی این هم گفتنی است که در هر رویکرد به احتمال، توجه به ویژگی‌ها و نتایج ریاضی آن رویکرد بسیار حائز اهمیت است. دیگر آن‌که، اگر قرار باشد وحدتی بین تعبیرهای گوناگون احتمال برقرار شود (یا کشف گردد) یا آن‌که، همچون مؤلف کتاب، به مفاهیم احتمال به‌صورت تعبیرهایی که در یک طیف گسترده قرار دارند باور داشته باشیم، آن‌گاه تقریباً بدیهی است که این یگانگی و وحدت را در یک قالب ریاضی و ترجیحاً در یک چارچوب اصل‌موضوعی جست‌وجو کنیم. لذا پرداختن به هر تعبیری از احتمال بدون پرداختن به پیوند آن با دستگاه‌های اصل موضوعی، به‌ویژه دستگاه اصل موضوعی کولموگروف، بسا که ناقص باشد.

۲) در کتاب گیلیز، در مورد رویکردهای منطقی به احتمال نیز به‌طور همه‌جانبه بحث نشده است. از جمله، رابطهٔ بین این رویکردها و تبیین و تفسیر روش‌های علوم تجربی (موضوع مورد توجه در فلسفهٔ فیزیک) شایستهٔ بررسی جامع‌تر است. خوانندهٔ علاقه‌مند به این موضوع می‌تواند مثلاً به [۲ و ۱۵] مراجعه کند.

روی دیگر سکهٔ رویکرد منطقی به احتمال، موضوع منطق‌های احتمالاتی[۱] است. مطالعهٔ این نوع منطق‌ها و فحوای احتمالاتی آن‌ها، از بحث‌های مرتبط با فلسفهٔ احتمال است که گیلیز به آن نپرداخته است. شایان یادآوری است که منطق‌های احتمالاتی، افزون بر این که از دیدگاه منطق

1) Probabilistic Logics

ریاضی مورد توجه هستند، کاربردهای گسترده‌ای در سیستم‌های هوشمند دارند. ارتباط با سیستم‌های هوشمند موجب می‌شود که تعبیر و تفسیری که از مفهوم احتمال در منطق‌های احتمالاتی می‌شود، تأثیر بسزایی بر نوع شناخت، تشخیص و تصمیم‌گیری در سیستم‌های هوشمند داشته باشد. دربارهٔ منطق‌های احتمالاتی (در برخی متون: منطق‌های احتمالی) و کاربرد آن‌ها در سیستم‌های هوشمند می‌توانید به [۲۱ و ۳٦ و ۳۹] مراجعه نمایید. در [۲۵] دربارهٔ ارتباط بین احتمال و امکان و منطق‌های چندارزشی و برخی بدفهمی‌ها در این مورد، مطالب ارزشمندی بیان شده است. برای مطالعهٔ مبانی نظریهٔ احتمال بولی ــ مقدار به [۴۱] مراجعه کنید.

۳) اکنون حدود نیم قرن است که آشکار شده است که احتمال (به هر معنا و با هر تعبیری) تنها یک نوع (حداکثر یک رده) از عدم اطمینان (Uncertainty) (عدم قطعیت، نایقینی) را توصیف و تبیین می‌کند. انواع گوناگونی از عدم اطمینان (عدم قطعیت، نایقینی) وجود دارند (و چه بسا در آینده انواع دیگری هم شناخته شوند) که در چارچوب مفهوم احتمال نمی‌گنجند. حتی با پذیرش طیفی بودنِ مفهوم احتمال (از تعبیر کاملاً عینی تا تفسیر کاملاً ذهنی)، باز هم انواع دیگری از عدم اطمینان وجود دارند (/ شناخته شده‌اند / شناسایی شده‌اند) که با هیچ‌یک از تعبیرها و تفسیرهای احتمال تطبیق ندارند. این که ارتباط عدم اطمینان از نوع احتمالی با انواع دیگر عدم اطمینان چیست و چگونه است، موضوعی است که از حدود سه دهه پیش مورد توجه برخی از پژوهش‌گران بوده ولی در کتاب گیلیز به آن اشاره‌ای نشده است. دوستداران این بحث می‌توانند به [۱۱، ۴۰ و ۴۳] مراجعه نمایند.

۴) فلسفهٔ احتمال و فلسفهٔ آمار (به بیان دقیق‌تر: فلسفهٔ استنباط آماری) ارتباط تنگاتنگی با هم دارند. در واقع، تفاوت دیدگاه در مورد چیستی احتمال، منجر به تفاوت دیدگاه در شیوهٔ استنباط آماری می‌شود. فلسفهٔ استنباط آماری نزد آمارданانی که اصول خود را بر پایهٔ دیدگاه ذهنی احتمال بنا می‌نهند و آن‌ها که ایده‌های خود را بر اساس دیدگاه تجربی و عینی استوار می‌کنند، تفاوت دارد. این موضوع به‌کلی از دید نویسندهٔ کتاب پوشیده مانده است. برای خوانندهٔ علاقه‌مند به این موضوع، مطالعهٔ مراجع [۲۲ و ۵۰] سودمند است. یک رویکرد انتقادی نیز به موضوع بالا در [۲۳] مطرح شده است (۱۴).

۵) برخی مباحث فلسفهٔ علم که پیوند تنگاتنگی با احتمال و آمار دارند در این کتاب بررسی نشده‌اند. برای نمونه، یکی از موضوع‌ها و پرسش‌های حساس در فلسفهٔ علم این است که آیا فرضیه بر مشاهده تقدم دارد یا این‌که مشاهده بر فرضیه مقدم است. اساساً یکی از ممیّزات استقراءگرایان و مخالفان آن‌ها به چگونگی تبیین رابطهٔ بین مشاهده و فرضیه باز می‌گردد [۴ و ۵ و ۹] (برای بررسی کوتاهی در مورد استنباط استقرایی از دیدگاه فلسفهٔ آمار، [۱٦] را ببینید).

موضوع دیگر، مطالعهٔ تطبیقی نظریه‌های فلسفی احتمال از منظر واقع‌گرایی و ناواقع‌گرایی (دو رویکرد کلّی به فلسفهٔ علم) است.

دو موضوع بالا، پیوندی بنیادین با مفهوم و ماهیت احتمال دارند، ولی در کتاب گیلیز بدان‌ها پرداخته

نشده است.

در مورد واقع‌گرایی و ناواقع‌گرایی در فلسفهٔ علم، به [۳ و ۱۳] مراجعه کنید. در [۱۷] نیز مطالعه‌ای در باب واقع‌گرایی و ناواقع‌گرایی در نظریه‌های فلسفی احتمال انجام شده است.

۶) به نظر می‌رسد که کتاب، فارغ از جوّ حاکم بر مجامع ریاضی و آماری نگاشته شده است. بهتر می‌بود که گیلیز توجه بیشتری به احتمال، آن‌گونه که در مجامع علمی ریاضی و آماری رایج است، می‌نمود. همچنین برخی مطالعات در مورد مفهوم احتمال که در مجلات آمار و احتمال به چاپ رسیده، مورد توجه قرار نگرفته است. برای نمونه، مقالهٔ شفر در باب یگانگی و چندگانگی احتمال [۵۲] که در آن ارتباط بین رویکردهای کلاسیک و ذهنی و فراوانی‌گرا بررسی شده است، از دید نویسنده پوشیده مانده است. همچنین است آثار دو آماردان نامدار، فیشر [۲۸] و نیمن [۴۷]، که شایسته بود در فصل‌های ۶ و ۷ در مباحث مربوط به نظریه‌های گرایشی احتمال (و ارتباط آن‌ها با روش‌شناسی علوم) مورد توجه قرار گیرند.

۷) پرسش بنیادین همچنان پا برجاست: یگانگی یا چندگانگی احتمال؟ گیلیز در بخش پایانی کتاب، طیفی بودن مفهوم احتمال را مطرح می‌کند و به این نتیجه‌گیری می‌پردازد که احتمال یک تفسیر و تعبیر یکتا ندارد بلکه طیف گسترده‌ای از تعبیرها و تفسیرها از احتمال وجود دارند که در یک سو، تعبیر عینی‌گرایی مطلق و در سوی دیگر، تفسیر ذهنی‌گرایی کامل قرار دارد. اما او تصریح نمی‌کند که آیا این تعبیرهای مختلف اساساً ریشه در یک مفهوم واحد دارند و آیا تعبیرهای ذهنی و عینی و میان‌ذهنی و منطقی و گرایشی، جلوه‌های یک مفهوم / یک حقیقتِ واحد هستند؛ یا این چنین نیست، بلکه این تعبیرها، تعبیرهایی از مفاهیمی اساساً متفاوت می‌باشند که (با مسامحه) با یک واژهٔ احتمال بیان می‌شوند؟ (نیز ر. ک. به [۱۰]). گیلیز در بخش پایانی و نتیجه‌گیری کتاب، با شفافیت به چنین پرسشی پاسخ نداده است. لذا، کتاب پایان می‌پذیرد ولی پرسش بنیادین همچنان پا برجاست.

پی‌نوشت‌ها

(۱) برونو دوفینتّی، احتمال‌دان اتریشی ـ ایتالیایی، از چهره‌های برجسته در مکتب احتمال ذهنی / شخصی است. اثر معروف وی، کتابی است با عنوان: **نظریهٔ احتمال** [۳۰].

(۲) در این باره سخن دوفینتّی هنگام بیان یکی از نقدهایش در مورد نظریهٔ بسامدی فون میزس شایان توجه است: «اگر قرار باشد یک ارزش فلسفی ذاتی به نظریهٔ احتمال نسبت داده شود، آن ارزش تنها می‌تواند با انتساب وظیفهٔ ژرفابخشی، تبیین یا توجیه استدلال از طریق استقراء باشد. این کار با نظریهٔ فون میزس انجام نمی‌گیرد.» (به نقل از [۱۴]، ص. ۱۴۱)

(۳) از دانشمندان برجستهٔ مسلمان که به مفهوم احتمال توجه ویژه‌ای داشته است، سید محمد باقر صدر، منطق‌دان، فیلسوف و فقیه معاصر شیعی است. وی کتابی مستقل دربارهٔ استقراء (با عنوان: «الأُسَسُ المنطقیّه لِلاستقراء») نگاشته است [۹]. در این کتاب، وی یک نظریهٔ معرفت‌شناختی

جدید، موسوم به مکتب توالد ذاتی معرفت، ارائه نموده و از سوی دیگر به ارائه و تشریح یک دستگاه اصل‌موضوعی احتمال پرداخته است. همهٔ این‌ها در جهت و با هدف تبیین استقراء و حلِ معضلات و مشکلات مربوط به استقراء ارائه و تدوین شده‌اند (نیز ر. ک. به [۷]). دربارهٔ یک رویکرد غیرمبتنی بر احتمال به استقراء، [۴۸] را ببینید.

(۴) دکتر محمدرضا مشکانی، استاد بازنشسته گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی تهران.

(۵) کارل ریموند پوپر، فیلسوف علم اتریشی ــ انگلیسی است که دارای آثار و آرای تأثیرگذار در فلسفهٔ سیاسی و فلسفهٔ علوم اجتماعی نیز می‌باشد. پوپر بیشترین سهم را در ارائه و گسترش تعبیر احتمال گرایشی داشته است [۴۹]. برای بررسی جامع انواع رویکردها به احتمال گرایشی، به [۳۵] مراجعه کنید. برای مطالعهٔ یک دیدگاه انتقادی دربارهٔ آنچه به نام احتمال گرایشی شهره است، [۳۸] را ببینید.

(٦) آیمری لاکاتوش، دانشمند مجارستانی، از چهره‌های نامدار در فلسفهٔ علم و به‌ویژه فلسفهٔ ریاضی است. اثر معروف وی، کتابی است با عنوان:**اثبات‌ها و ردیه‌ها(/ تکذیب‌ها): منطق اکتشاف ریاضی** [۴۲].

(۷) از دیگر آثار گیلیز که کم و بیش مرتبط با بحث این یادداشت است، کتابی است با عنوان:**انقلاب‌ها در ریاضیات** [۳۱]. این کتاب که توسط گیلیز ویرایش شده است، شامل ۱۵ مقاله از پژوهش‌گران برجسته، در موضوع‌های تاریخ ریاضی و فلسفهٔ ریاضی می‌باشد.

(۸) تامس بیز[1]، کشیش و احتمال‌دان انگلیسی قرن هجدهم است. شهرت او به‌خاطر قضیه‌ای از وی در احتمال است که به قضیه / قاعده / قانون بیز معروف است. این قضیه بیان می‌کند که چگونه می‌توان احتمال شرطی یک پیشامد (مانند A) را به‌شرط وقوع پیشامد دیگر (مانند B)، به‌طور معکوس و برحسب احتمال شرطی پیشامد B برحسب پیشامد A به‌دست آورد. این قضیه می‌تواند اساس بسیاری از استنتاج‌های «از معلول به علت» باشد (برای نمونه‌ای از استفاده از قضیهٔ بیز در زمینهٔ الهیات، مرجع [۱۲] را ببینید). بیزگرایی، رویکردی در استنباط آماری است که در آن به اطلاعات پیشین[2] توجه خاص می‌شود. چگونگی صورت‌بندی و به‌کارگیری اطلاعات پیشین، از مهم‌ترین چالش‌ها در رویکردهای بیزی است.

(۹) گفتنی است که هاوسن و اورباخ در تشریح و تبیین روش‌شناسی علمی، کتابی نگاشته‌اند با نام: **استنتاج علمی: رویکرد بیزی** [۳۷]. آن‌ها در این کتاب تلاش دارند ثابت کنند که روش‌شناسی علمی و شیوهٔ پیشرفت علوم را می‌توان با رویکرد بیزی به‌نحو شایسته تبیین نمود. برای مطالعهٔ یک دیدگاه انتقادی دربارهٔ رویکرد بیزی [۲۷] را ببینید.

(۱۰) رودلف کارناپ، منطق‌دان، فیلسوف علم و فیلسوف آلمانی، از چهره‌های برجستهٔ حلقهٔ وین

1) T. Bayes 2) A Priori Information

و فلسفهٔ تحلیلی [۴] است. اثر معروف او دربارهٔ احتمال، کتابی است با عنوان «مبانی منطقی احتمال» [۲۴]. وی در این کتاب ساختار منسجم و روش‌مندی را برای احتمال منطقی، در پیوند با مفهوم درجهٔ تأیید[1]، ارائه نموده است. نیز ر. ک. به [۲ و ۱۰].

(۱۱) ریچارد فون میزس، ریاضی‌دان، احتمال‌دان و فیزیک‌دان آلمانی، برجسته‌ترین چهرهٔ مکتب فراوانی‌گرایی در احتمال است. دو اثر معروف وی در باب احتمال، کتاب‌های **نظریهٔ ریاضی احتمال و آمار** [۴۵] و **احتمال، آمار و حقیقت** [۴۶] است.

(۱۲) برای مطالعهٔ جدیدترین پژوهش‌ها در فلسفهٔ احتمال به [۲۶] مراجعه کنید. این کتاب شامل ۳۲ مقاله در موضوع‌های گوناگون فلسفهٔ احتمال است.

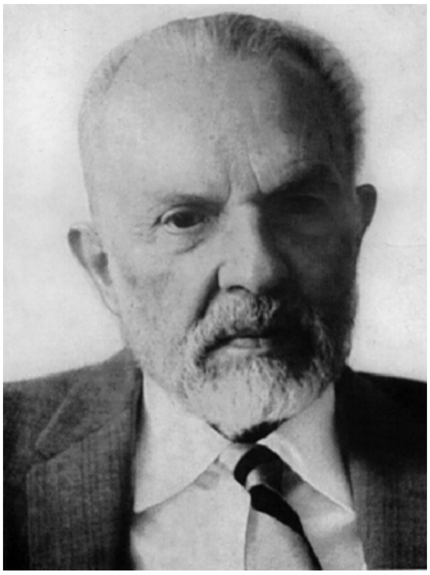
(۱۳) برای مطالعهٔ فلسفهٔ علوم تجربی با رویکردی تاریخی به [۱۵] مراجعه کنید. برای مطالعهٔ دیدگاه‌های مختلف در فلسفهٔ علم مراجع [۵ و ۱۳] ارزشمند و مفید هستند. برای یک مطالعهٔ مقدماتی دربارهٔ آنچه به رویکرد کامپیوتری/محاسباتی به فلسفهٔ علم نامیده شده است، [۱ و ۵۳] را ببینید. این رویکرد تلاش می‌کند تا عناصری از دو رویکرد منطقی (نظام‌مند) و رویکرد تاریخی علم را در یک مدل جدید (که در عین دقت، باورپذیریِ روانشناختی / تاریخی هم داشته باشد) تلفیق نماید.

(۱۴) **در جست‌وجوی اطمینان** [۲۳]. در این کتاب، رویکردی تندروانه (رادیکال) به موضوع‌های فلسفهٔ احتمال و فلسفهٔ آمار مطرح شده است. نویسندهٔ کتاب، برخی برداشت‌های رایج در مورد تعبیر ذهنی احتمال و ارتباط آن با رویکرد بیزی و همچنین تعبیر عینی احتمال و پیوند آن با رویکرد فراوانی‌گرا را به چالش کشیده است.

1) Degree of Confirmation

برخی از دانشمندان دارای نظریه در مورد مفهوم احتمال:

توماس بیز، کشیش و احتمال‌دان قرن هجدهم میلادی

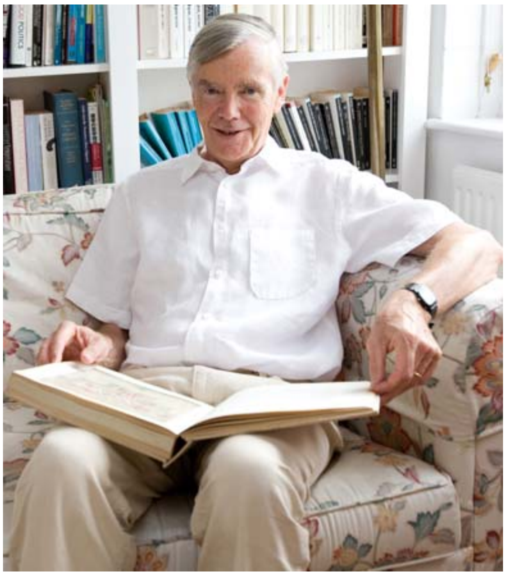


رودلف کارناپ

ریچارد فون میزس

برونو دوفینتّی

سید محمدباقر صدر



دانلد گیلیز، نویسندهٔ کتاب «نظریه‌های فلسفی احتمال»

سپاسگزاری

نویسنده از داوران محترم که پیشنهادها و نظرهای ارزشمندی را در مورد محتوا و ساختار این یادداشت مطرح نمودند، تشکر می‌نماید. همچنین از جناب آقای دکتر ناصر رضا ارقامی که متن پیش از چاپ را مطالعه نموده و نکته‌های سازنده‌ای را گوشزد نمودند، سپاسگزاری می‌نماید. نیز از نویسندهٔ کتاب، پروفسور دانلد گیلیز که ضمن ابراز لطف نسبت به تهیهٔ این یادداشت برای معرفی و بررسی ترجمهٔ کتاب ایشان به زبان فارسی، عکس جدیدی از خود را جهت انضمام به این متن ارسال نمودند، تشکر ویژه می‌نماید.

منابع و مراجع

[۱] آیت‌اللهی، حمیدرضا؛ موسوی، آرش (۱۳۸۴)، تحلیل رویکرد کامپیوتری به فلسفهٔ علم، حکمت و فلسفه، سال اول، شماره دوم، صص ۳۸—۲۳.

[۲] پایا، علی (۱۳۷۴)، کارناپ و فلسفهٔ تحلیلی، ارغنون، شماره‌های ۷ و ۸، صص ۱٦۵—۲۳۰.

[۳] پایا، علی (۱۳۷۸)، رئالیسم علمی چیست؟ در: مهدوی‌نامه (جشن‌نامهٔ استاد دکتر یحیی مهدوی)، به اهتمام: حسن سیدعرب، علی‌اصغر محمدخانی، انتشارات هرمس، صص ۳۰۷—۳۲۸.

[۴] پایا، علی (۱۳۸۴)، فلسفهٔ تحلیلی: مسائل و چشم‌اندازها، انتشارات طرح نو.

[۵] چالمرز، آلن اف (۱۳۸۷)، چیستی علم (درآمدی بر مکاتب علم‌شناسی فلسفی)، ترجمهٔ سعید زیباکلام، انتشارات سمت.

[٦] درافشانی، جواد (۱۳۸۰)، دیدگاه پوپر در مورد استقراء از دو منظر گردآوری و داوری، پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد، گروه فلسفهٔ علم، دانشگاه صنعتی شریف.

[۷] سروش، عبدالکریم (۱۳٦٦)، مبانی منطقی استقراء از نظر شهید آیت‌ا... محمد باقر صدر، در: تفرّج صنع (مجموعهٔ مقالات)، انتشارات سروش.

[۸] صال مصلحیان، محمد (۱۳۸۴)، فلسفهٔ ریاضی، نشر واژگان خرد، مشهد.

[۹] صدر، سید محمدباقر (۱۳٦۰)، مبانی منطقی استقراء، ترجمهٔ سید احمد فهری، انتشارات آزادی.

[۱۰] طاهری، سید محمود (۱۳۸۱)، یگانگی و چندگانگی احتمال،نامهٔ فرهنگستان علوم، شماره ۱۹، صص ۱۲٦—۹۳.

[۱۱] طاهری، سید محمود (۱۳۸۷)، اندازه‌های عدم اطمینان، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۴۱، صص ۲٦—۹.

[۱۲] فتحعلی‌خانی، محمد (۱۳۸۴)، استنتاج علّی و باورهای دینی: بحثی در فلسفهٔ علم دیوید هیوم، فصل‌نامهٔ پژوهش‌های فلسفی ـ کلامی، شماره ۲۶، صص ۱۱۸—۸۷.

[۱۳] گیلیز، دانلد (۱۳۷۸)، فلسفهٔ علم در قرن بیستم، ترجمهٔ حسن میانداری، انتشارات علمی ـ فرهنگی.

[۱۴] گیلیز، دانلد (۱۳۸۶)، نظریه‌های فلسفی احتمال، ترجمهٔ محمدرضا مشکانی، انتشارات علمی، دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۵] لاری، جان (۱۳۸۵)، درآمدی تاریخی به فلسفهٔ علم، ترجمهٔ علی پایا، انتشارات سمت.

[۱٦] مایو، دیبورا جی، کاکس، دیوید آر (۱۳۸۹)، آمار بسامدگرا به مثابهٔ نظریهٔ استنباط استقرایی، ترجمهٔ محمدرضا مشکانی،نشر ریاضی، سال ۱۸، شمارهٔ ۱ (شمارهٔ پیاپی ۳۳)، صص ۲۷—۳۹.

[۱۷] متولیان، امین (۱۳۸٦)، واقع‌گرایی و ناواقع‌گرایی در فلسفهٔ احتمالات، پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد، گروه فلسفهٔ علم، واحد علوم و تحقیقات.

[۱۸] مصباح، مجتبی (۱۳۸٦)، درآمدی بر احتمال معرفت‌شناختی،فصل‌نامهٔ معرفت فلسفی، شماره ۱۵، صص ۱٦٦—۱۳۷.

[۱۹] وحیدی‌اصل، محمدقاسم (۱۳۷۱)، نگاهی گذرا به تاریخچهٔ احتمالات و آمار،گزارش نخستین کنفرانس آمار ایران (مجموعه مقالات مدعوین)، دانشگاه صنعتی اصفهان، صص ۸۳—۹۷.

[۲۰] ووناکات، تامس اچ، ووناکات، رونالد (۱۳۸۴)، آمار مقدماتی (ویرایش دوم)، ترجمهٔ محمدرضا مشکانی، مرکز نشر دانشگاهی (ویرایش اول: ۱۳٦۴).

[21] Adams, E. W., *A Primer of Probability Logic*, Univ. of Chicago Press, 1998.

[22] Bandyopadhyay, P. S., Forster, M. R. (Eds.), *Philosophy of Statistics*, Handbook of Phylosophy of Science, Vol. **7**, Elsevier, 2011.

[23] Burdzy, K., *The Search for Certainty*, World Scientific, 2009.

[24] Carnap, R., *Logical Foundations of Probability*, Univ. of Chicago Press, 1950.

[25] Dubois, D., Prade, H., "Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **32** (2001), 35-66.

[26] Eagle, A. (Ed.), *Philosophy of Probability: Conterporary Readings*, Routledge, 2010.

[27] Earman, J., *Bayes or Bust (A Critical Examination of Bayesian Confirmation Theory)*, Cambridge, MA: Bradford-MIT, 1992.

[28] Fisher, R. A., "The logic of inductive inference", *J. Royal Statistical Society*, **98**(1935), 39-54.

[29] Fetzer, J. H., "Probability and objectivity in deterministic and indeterministic situations", *Synthese*, **57**(1983), 367-386.

[30] de Finetti, B., *Theory of Probability*, Vols. 1, 2, John Wiely, 1974.

[31] Gillies, D. (Ed.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford Univ. Press, 1992.

[32] Gillies, D., *Philosophy of Science in the Twentieth Century: Four Central Themes*, Blackwell, 1993.

[33] Gillies, D., *Artificial Intelligence and Scientific Method*, Oxford Univ. Press, 1996.

[34] Gillies, D., *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, 2000.

[35] Gillies, D., Varieties of probability, *British J. for the Philosophy of Science*, **51**(2000), 807-835.

[36] Goertzel, B., Ikle, M., Goertzel, I. F., Heljakka, A., *Probabilistic Logic Networks*, Springer-Verlag, 2009.

[37] Howson, C., Urbach, P., *Scientific Reasoning: The Bayesian Approach*, Open Court, 1991.

[38] Humphreys, P., "Why propensities cannot be probabilities", *Philosophical Review*, **94** (1985), 557-570.

[39] Josang, A., "A Logic for uncertain probabilities", *International J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **9**(2001): 279-311.

[40] Klir, G. J., *Uncertainty and Information: Foundamentals of Generalized Information Theory*, Wiley-IEEE Press, 2005.

[41] Kramosil, I., "A Boolian-valued probability theory", *Kybernetika*, **14**(1978), 5-17.

[42] Lakatos, I., *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge Univ. Press, 1976.

[43] Liu, B., *Uncertainty Theory*, Springer-Verlag, 2010.

[44] Miller, D. W., *Critical Rationalism: A Restatement and Defence*, Lasalle, II: Open Court, 1994.

[45] von Mises, R., *Mathematical Theory of Probability and Statistics*, Academic Press, 1964.

[46] von Mises, R., *Probability, Statistics and Truth*, Dover, 1981.

[47] Neyman, J., "The problem of inductive inference", *Comm. Pure and Applied Mathematics*, **8**(1955), 13-46.

[48] Norton, J. D. (2007), *Induction without probabilities*, www.pitt.edu/jdnorton.

[49] Popper, K. R., "The propensity interpretation of probability", *British J. of the Philosophy of Science*, **10**(1959), 25-42.

[50] Schirn, M. (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford University Press, 1998.

[51] Seidenfeld, T., *Philosophical Problems of Statistical Inference*, Kluwer, 1979.

[52] Shafer, G., "The unity and diversity of probability", *Statistical Science*, **5**(1990), 435-462.

[53] Thagard, P., *Computational Philosophy of Science*, MIT Press/Bradford Books, 1988.

[54] Wonnacott, T. H., Wonnacott, R. J., *Introductory Statistics*, 5th Ed., John Wiley, 1990.

سید محمود طاهری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
Taheri@cc.iut.ac.ir
و گروه آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 31, No. 1, Spring 2012

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir