بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

علمی ـ ترویجی

ISSN 1022-6443

سال ۳۳، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۳

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۹۳)

شمارهٔ پیاپی: ۵۴

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسئول: سید منصور واعظ‌پور
سردبیر: احمد صفاپور
ویراستار ارشد: ابوالفضل رفیع پور
مدیر اجرایی: شیوا زمانی

حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
تهیه و تنظیم: فریده صمدیان

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ ـ ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir
نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir
سامانهٔ نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- مقالات تحت ادیتور «فارسی تک» تهیه شده و نسخهٔ پی دی اف آن از طریق سامانهٔ نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

عکس روی جلد: شولز (Myron Samuel Scholes) **مربوط به مقالهٔ «ریاضیات و علوم مالی»**

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۱ تا ۱۱

واکنش‌های پس از جنبش «ریاضی جدید»

ابوالفضل رفیع پور

چکیده

پس از پرواز قمر مصنوعی شوروی سابق، دوره جدیدی با عنوان «جنبش ریاضی جدید[1]» در آموزش ریاضی شروع شد. در این دوران، پروژه‌های مختلفی برای تولید و توسعه برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در آمریکا مطرح شدند که در آن، مفاهیم مجرد ریاضی بدون زمینه‌سازی برای درک معنادار آن‌ها، به دانش‌آموزان معرفی شدند. پس از دو دهه، اعتراض‌های فراوانی به این جنبش شد که نتیجه آن، شکل گیری «نهضت رجعت به اصول» در ایالات متحده و برخی کشورهای دیگر بود. اما در کشور هلند، اتفاق دیگری افتاد و به عنوان واکنشی به دوران ریاضی جدید، «پروژه ویسکوباس» به اجرا در آمد که خروجی آن، تولید نظریه آموزش ریاضی واقعیت مداربود؛ پروژه‌ای که هنوز هم در حال توسعه است و همچنان به حیات خود ادامه می‌دهد. مقاله حاضر، به طور خلاصه به بررسی روند تغییرات برنامه درسی ریاضی در دنیا پرداخته است، تا به وسیله نور حاصل از آن، بتوان ریشه‌های تغییرات برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران را بهتر مطالعه کرد.

کلمات کلیدی: ریاضی جدید، رجعت به اصول، آموزش ریاضی واقعیت مدار، تغییرات برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای.

۱. جنبش ریاضی جدید

جنبش ریاضی جدید، در واقع تلاشی برای اصلاحات آموزش ریاضی در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ بود که در آن، رهبران آموزشی قصد داشتند فرآیند یاددهی ــ یادگیری ریاضی را بهبود بخشند. به گفته کلمنتس و الرتون[2] (۱۹۹۶)، ردپای این جنبش را می‌توان در کشورهای دیگر

1) New Math 2) Clements & Elerton

جهان نیز مشاهده کرد [۴]، جنبشی که به زعم والمزلی[1] (۲۰۰۳)، غالباً به صورت پروژه‌های دانشگاهی یا دولتی و به قصد توسعه برنامه‌های درسی ریاضی جدید انجام می‌شدند و هدف اصلی طراحان و تولیدکنندگان آنها، معرفی ریاضی به صورت یک ساختار منطقی به دانش آموزان بود [۱۹].

اما این جنبش، از کجا و چگونه آغاز شد؟ بررسی تاریخی تحولات برنامه درسی ریاضی در جهان نشان می‌دهد که در حقیقت، همه چیز پس از پرتاب اولین قمر مصنوعی (اسپاتنیک[2]) به فضا در ۴ اکتبر ۱۹۵۷ توسط شوروی سابق، آغاز شد. به گفته والمزمی (۲۰۰۳)، این واقعه که از آن تحت عنوان «شوک اسپاتنیک» نیز یاد می‌شود، به مثابه خطری بود که امنیت ملی آمریکا را به چالش می‌کشید [۱۹] و به این ترتیب بود که پروژه‌های آموزش ریاضی که در اوایل دهه ۱۹۵۰ در آمریکا شروع شده بودند، بیشتر روی برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای متمرکز شدند. «بنیاد ملی علوم[3]» که در سال ۱۹۵۰ شروع به کار کرده بود، با حمایت از این طرح‌های پژوهشی، راه را برای توسعهٔ برنامه درسی ریاضی جدید در دهه ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، هموارتر نمود. البته در برخی دیگر از نقاط جهان نیز، فعالیت‌هایی همسو با جنبش ریاضی جدید در جریان بود که از جمله، می‌توان به فعالیت‌های گروه بورباکی[4] در فرانسه و تلاش‌های ماتیو[5] و تیوتز[6] در انگلستان اشاره کرد [۴].

در برنامه‌های درسی ریاضی جدید، مفاهیم ریاضی به صورت مجردتر و بدون زمینه‌سازی برای درک معنادار آن‌ها، به دانش‌آموزان معرفی شدند و تمرکز اصلی بر روی نظریه مجموعه‌ها بود، در حالی که تمرکز اصلی در برنامه‌های درسی ریاضی قبل از جنبش ریاضی جدید، بر حساب بود. به همین دلیل، گاهی «نظریه مجموعه‌ها» مترادف با «ریاضی جدید» در نظر گرفته می‌شد [۴] و [۱۹]. به طور خاص، تدریس ریاضی جدید، با تأکید ویژه‌ای بر نمادگذاری و اصول موضوع انجام می‌شد و همان طور که کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶) خاطرنشان کرده‌اند، جنبش ریاضی جدید به دنبال پیوند هر چه بهتر ریاضی مدرسه‌ای با ریاضی دانشگاهی بود [۴].

گویا (۱۳۷۵) توضیح می‌دهد که نتیجه نهایی برنامه درسی ریاضی جدید این شد که اگرچه دانش‌آموزان به هر شکل، با مفاهیم مجرد آشنا شدند، ولی حتی مهارت‌های پایه‌ای را به خوبی نیاموخته بودند. به این ترتیب، عموم مردم نیز اعتماد خود را به جنبش ریاضی جدید از دست دادند، چرا که انتظار آن‌ها از این برنامه برآورده نشده بود. وی معتقد است که وقتی جنبش ریاضی جدید، وجاهت عمومی خود را هم از دست داد، در حقیقت شکست خورد و در اوایل دهه ۱۹۷۰، کنار گذاشته شد [۳].

۲. نقد جنبش ریاضی جدید

در واکنش به جنبش ریاضی جدید، نقدهایی بسیار جدی مطرح گردید که یکی از مهم‌ترین

1) Walmsley 2) Sputnik 3) National Science Foundation: NSF 4) Bourbaki Group
5) Geffrey Mattews 6) Bryan Thwaites

آنها بیانیه ۷۵ نفر از معروف‌ترین ریاضیدانان ساکن آمریکای شمالی در دهه شصت میلادی بود (آلفورس و همکاران، ۱۹۶۲). آنان با تهیه و امضای بیانیه‌ای، خواستار توقف برنامه‌های درسی مبتنی بر ریاضی جدید شدند. این ریاضیدانان معتقد بودند که چنین رویکرد انتزاعی و رسمی زودهنگام به ریاضی مدرسه‌ای، روحیه پرسشگری را در دانش‌آموزان از بین می‌برد و آموزش ریاضی آنان را عقیم می‌کند [۱] در این بیانیه که نام ریاضیدان‌های بزرگی چون جورج پولیا[1]، هنری پولاک[2] و موریس کلاین[3] در بین امضاکنندگان آن دیده می‌شود، از رویکرد صرفاً مجرد جنبش ریاضی جدید نسبت به آموزش ریاضی مدرسه‌ای، انتقاد شد. همچنین هانس فرودنتال، ریاضیدان و آموزشگر معروف ریاضی هلندی که یکی از منتقدان سرسخت جنبش ریاضی جدید بود، معتقد بود که در اغلب موارد چیزی که به عنوان ریاضی جدید در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای وجود داشت، **خزعبلات جدید** بود که غیر قابل تدریس، نیاموختنی و غیر ریاضی بودند [۲].

بالاخره پس از دو دهه اثرگذاری بر برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، جنبش ریاضی جدید در اوایل دهه ۱۹۷۰ متوقف شد. بسیاری از منتقدان این جنبش، مدعی بودند که معلمان ریاضی، به جای تأکید بر مفاهیم و مهارت‌های اساسی ریاضی، مجبور شده‌اند مشتی قواعد مربوط به خواص میدان نظیر جابه‌جایی و شرکت پذیری را بیاموزند [۴]. کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶)، روح این انتقاد را در ترانه مشهور تام لهرر[4]، به این گونه خلاصه شده می‌بینند که دانش‌آموزان نمی‌دانند که حاصل جمع ۲ + ۳ مساوی چند می‌شود، ولی می‌دانند که این جمع، خاصیت جابه‌جایی دارد [۳] (ص. ۶۳).

۳. جنبش رجعت به اصول: طرحی نو!

در دهه ۱۹۷۰، کشورهای غربی «ریاضی جدید» را کنار گذاشتند و جنبش جدیدی با عنوان «رجعت به اصول[5]» آغاز شد. در روش‌های تدریس دوران رجعت به اصول، بر تکرار و تمرین از طریق حل تعداد زیادی از مثال‌های کتاب‌های درسی و کار در کلاس‌ها، تأکید می‌شد. حامیان اصلی این جنبش، نظریه‌پردازان برنامه درسی و روان‌شناسانی بودند که پشتوانه نظری آنها، فلسفه تحصل گرایی یا پوزیتیویسم[6] بود.

تحصل گرایی، برگردانی از مکانیک گالیله‌ای و نیوتونی، برای تشریح روابط بین رخدادها و فعالیت‌های ذهنی بشر است و روان شناسی رفتاری اسکینر در حوزه یادگیری، بازتاب همین دیدگاه فلسفی در آموزش است. از جمله مؤثرترین نظریه‌پردازان رفتاری در آموزش، اسکینر۷، بلوم[8] و گانیه[9] هستند که همچنان، آموزش‌های جهانی به طور ضمنی، تحت تأثیر دیدگاه‌های آنهاست [۴]. طبق نظریه یادگیری اسکینر، جریان یاددهی ـ یادگیری بر حسب محرک ـ پاسخ به گونه‌ای است که

1) G. Polya 2) H. Pollak 3) M. Kline 4) Tom Lehrer 5) Back to Basic 6) Positivism
7) Skinner 8) Benjamin Bloom 9) Robert Gagne

برای بروز هر رفتار مطلوب ــ یا همان پاسخ مورد نظر، محرک‌های خاصی ــ بخوانید آموزش ــ برای نهادینه کردن رفتار مطلوب در دانش‌آموزان، طراحی می‌شوند. از نظر رفتارگرایان، آموزش و یادگیری از طریق زنجیره‌های محرک ــ پاسخ سازماندهی می‌شود و هر پاسخی که نتیجه یک محرک باشد، تغییری در رفتار یادگیرنده ایجاد می‌کند که یادگیری نامیده می‌شود. علاوه بر این، معلم با استفاده از تقویت کننده‌های مثبت، به ایجاد و تداوم یادگیری کمک می‌کند.

از جمله دیدگاه‌های غالب رفتاری، تبیین «اهداف آموزشی[۱۰]»، «طبقه‌بندی هدف‌های آموزشی[۱۱]» و «یادگیری در حد تسلط[۱۲]» است که توسط بلوم معرفی شدند. مثلاً این دیدگاه توصیه می‌کند که هرچه هدف‌های رفتاری عینی‌تر تبیین شوند، محرک‌ها دقیق‌تر طراحی می‌شوند و در نتیجه، پاسخ‌ها قطعی‌تر خواهند بود. بنابراین، طبقه‌بندی هدف‌های آموزشی، اندازه‌گیری میزان یادگیری را که در این دیدگاه، همان تغییر رفتار پس از وارد کردن محرک است، امکان‌پذیرتر می‌کند. بدین سبب، معمولاً در کتاب‌های درسی ریاضی که با رویکرد رفتاری نوشته شده‌اند، هر فصل با جملاتی مانند این که «در انتهای این فصل، شما قادر خواهید بود که موارد ... را بیان کنید» یا «در انتهای این فصل، شما قادر خواهید بود که موارد ... را درک کنید»، شروع می‌شود. بالاخره، برای ایجاد یادگیری در حد تسلط در دانش‌آموزان، اهداف رفتاری مربوط به هر قسمت بدون ابهام تعریف می‌شوند و میزان مهارت مورد نظر نیز مشخص می‌شود. در یادگیری در حد تسلط، زمان و نه توانایی، عمده‌ترین متغیر آموزشی محسوب می‌شود و اعتقاد بر این است که با زمان کافی، هر دانش‌آموزی قادر به یادگیری یک مهارت مفروض است [۴]. آنگاه از طریق ساختن پیش‌آزمون‌ها[۴] و پس‌آزمون‌های[۵] دقیق، میزان مهارت کسب شده به دقت مورد سنجش قرار می‌گیرد. پس از اطمینان از کسب مهارت مفروض از طریق پس‌آزمون، آموزش واحدِ بعدی شروع می‌شود و در غیر این صورت، آموزش قبلی تکرار می‌شود[۶]. در این نوع آموزش، از انواع تمرین‌های از ساده به مشکل و به تعداد زیاد، هم در کلاس درس به عنوان «کار در کلاس» و هم در منزل به عنوان «تکلیف» و نظایر آن، برای ایجاد این «تسلط» تلاش می‌شود. در همه این موارد، نکته اصلی و راهنما این است که، ریاضی به صورت علمی قطعی نگریسته می‌شود که معلم از طریق تدریس، میراث تمام شده گذشتگان و محصول تولید شده توسط خبرگان را در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهد.

---

1) Educational Objectives 2) Taxonomy of Educational Objectives 3) Mastery Learning
4) Pre-Test 5) Post-test

۶) نقدهای بسیاری در مورد استفاده از این روش در ادبیات پژوهشی آموزش ریاضی یافت می‌شود که به عنوان یکی از شاخص‌ترین نقدها می‌توان به مقالهٔ زیر اشاره کرد:

Erlwanger, S.H. (1973). Benny's Conception of rules and answers in IPI Mathematics. Journal of Children's mathematical behavior 1: 7-26.

۴. آموزش ریاضی واقعیت مدار: واکنش هلند به جنبش ریاضی جدید

هانس فرودنتال[1]، ریاضیدان و آموزشگر ریاضی هلندی، ضمن نقد همه‌جانبه جنبش ریاضی جدید، جنبش رجعت به اصول را دیدگاه اشتباه دیگری دانست که پیش بینی می‌کرد پیامدهای ناگوار آموزشی زیادی داشته باشد [۲]. او معتقد بود که مشکلی که در دوران ریاضی جدید پیش آمد، بیش از آن که به روش‌های آموزش مربوط باشد، ریشه در نگاه افلاطونی و رویکرد تحصلی نسبت به چیستی ریاضی و علاوه بر آن، محدودیت‌های دیدگاهی رفتارگرایان نسبت به یادگیری دارد. بدین جهت، فرودنتال معتقد بود که استفاده از «طبقه‌بندی اهداف آموزشی» بلوم، چاره مشکلات به وجود آمده در آموزش ریاضی بر اثر «دوران ریاضی جدید» نبود [۹]. در عوض، فرودنتال (۱۹۷۳، ۱۹۸۲ و ۱۹۹۱)، راه درست را «پیش به سوی اصول» دانسته و برای ترسیم این راه، آموزش ریاضی واقعیت مدار[2] را پایه‌گذاری کرد. البته قبل از وی، مقدمات این توسط پروژه ویسکوباس[3] فراهم شده بود که به عنوان واکنشی به دوران ریاضی جدید، در هلند به اجرا در آمد ([۸] و [۱۰] و [۱۱]). به گفته گرامیجر (۱۹۹۷)، واژه واقعیت مدار از طبقه‌بندی تریفرز[4] گرفته شده است که چهار رویکرد کلی مکانیکی[5]، ساختاری[6]، تجربی (عملی)[7] و واقعیت مدار[8] را در آموزش ریاضی شناسایی کرد [۱۳]. به گفته پنهیوزن (۲۰۰۱)، شکل امروزی آموزش ریاضی واقعیت مدار، بیشتر تحت تأثیر دیدگاه فرودنتال درباره ریاضی است [۱۵] که معتقد است ریاضی باید با واقعیت‌های زندگی مرتبط بوده و برای دانش‌آموزان قابل درک باشد. در واقع، آموزش ریاضی واقعیت مدار بر اساس این ایده بنا شده است که «ریاضی یک فعالیت انسانی است[9]» [۸] و [۱۳] و [۱۴] و [۱۵]. هرگز نمی‌توان ریاضی را به عنوان یک نظریه ثابت و تمام شده، در نظر گرفت. فرودنتال معتقد است که وظیفه آموزش ریاضی این است که دانش‌آموزان را به گونه‌هایی راهنمایی کند تا آنها، فرصت دوباره سازی ریاضی را از طریق انجام دادن آن پیدا کنند [۹]، یعنی بتوانند ریاضی را تحت راهنمایی معلمِ خود، دوباره و توسط خودشان بسازند. این نشان می‌دهد که در این رویکرد به آموزش ریاضی، تمرکز اصلی بر ریاضی به عنوان یک نظام بسته نیست، بلکه تأکید بر فعالیت‌های چالش برانگیز و فرآیند ریاضی وار کردن[10] است [۶].

در واقع، دانش رسمیِ ریاضی می‌تواند به وسیله دانش غیررسمی و عقل سلیم دانش آموزان توسعه یابد [۷]. این بدان معنی است که دانش‌آموزان، حین درگیرشدن با انواع مختلف فعالیت‌های هدفمند شامل حل مسائل زمینه‌مدار و انجامشان، می‌توانند از دانش غیررسمی خویش، برای بازآفرینی و خلق دوباره ریاضیات رسمی، استفاده نمایند. در رویکرد آموزش ریاضی واقعیت مدار، «یادگیری ریاضی»، به نوعی مترادف با «انجام دادن ریاضی» است که حل مسائل زندگی روزانه

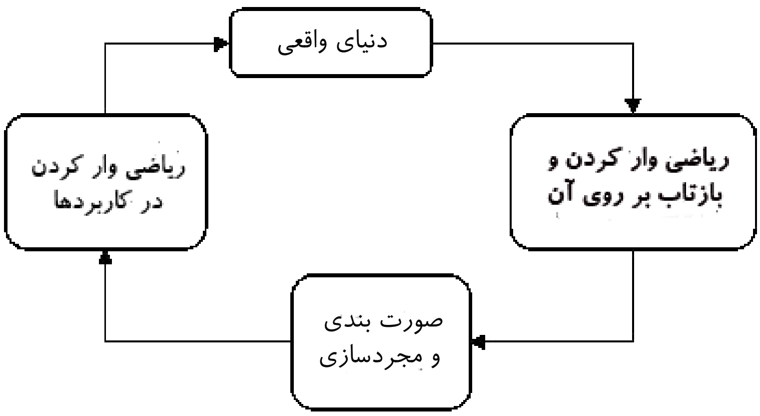
1) Hans Fredenthal 2) Realistic Mathematics Education (RME) 3) Wiskobas 4) Treffers 5) Mechanistic 6) Structuralistic 7) Empiristic 8) Realistic 9) Mathematics as a Human Activity 10) Mathematization

و مسائل زمینه مدار، بخش ضروری آن است [۱۴]. به عقیده فرودنتال، فعالیت‌های ریاضی در آموزش ریاضی واقعیت مدار، هم در دنیای واقعی و هم در دنیای ریاضی مطرح می‌شوند. فعالیت‌های دنیای واقعی بر اساس الگوهای ریاضی سازماندهی می‌شوند و فعالیت‌های دنیای ریاضی برای بهتر فهمیده شدن، مبتنی بر ایده‌های جدید سازماندهی می‌شوند [۱۴].

گراوِمیجر [۱۲]، به فعالیت‌های نوع اول یا همان فعالیت‌های سازماندهی شده، «فعالیت‌های ریاضی‌وار شده[1]» می‌گوید و فرودنتال (۱۹۹۱)، این نوع فعالیت‌ها را به دو دلیل زیر، فرآیندی کلیدی در آموزش ریاضی یادگیرنده می‌داند [۱۱].

- فرآیندِ ریاضی‌وار شده، همان فعالیتی است که ریاضیدان‌ها انجام می‌دهند.
- گام آخر در علمِ ریاضی، صورت‌بندیِ مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطهٔ پایانی، نباید به عنوان نقطه آغازینِ تدریس ریاضی به حساب آید.

علت این امر این است که به باور فرودنتال (۱۹۸۲)، نسل جدید نیازی به تکرار تاریخ بشری ندارد و نمی‌توان توقع داشت که دانش‌آموزان، از همان نقطه‌ای شروع کنند که تاریخ متوقف شده است [۱۰]. بنا به گفتهٔ فرودنتال، شروع از اصول موضوع در آموزش ریاضی، یک «وارون‌سازیِ ضد آموزشی[2]» است، چرا که فرآیند تحقیق ریاضیدان‌ها برای رسیدن به نتایج، کاملاً برعکس است [۱۱]. بر این اساس، او پیشنهاد می‌کند که برای حرکت «به سوی اصول»، لازم است که فرایند آموزش ریاضی، به صورت یک «بازآفرینیِ راهنمایی شده[3]»، سازماندهی شود تا دانش‌آموزان بتوانند درگیر فرآیندی مشابه آنچه که یک ریاضیدان در هنگام خلقِ ریاضی انجام داده است، بشوند.



شکل ۱: ریاضی وار کردن

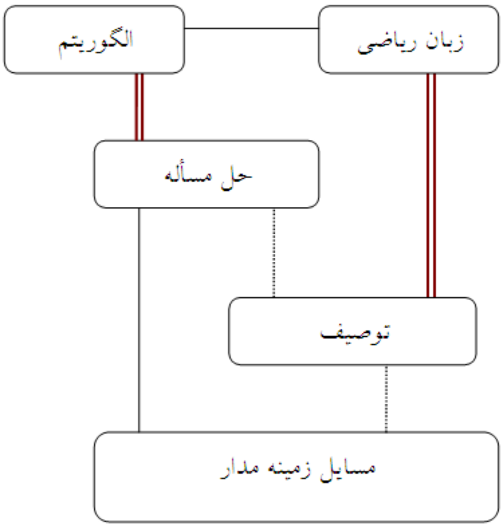
1) Mathematizing 2) Anti-didactical 3) Process of Guided Reinvention

دی لنگه (۱۹۹۶) در شکل ۱، فرآیند ریاضی‌وار کردن را در آموزش ریاضی واقعیت مدار، توصیف کرده است [٦]. از نظر وی، توسعه ایده‌ها و مفاهیم ریاضی، از دنیای واقعی شروع می‌شود. بعداً «مسألهٔ» دنیای واقعی به زبان ریاضی برگردانده می‌شود و مسأله حل شده در دنیای ریاضی، در دنیای واقعی تفسیر می‌شود. دی لنگه توصیه می‌کند که با توجه به نقشی که درگیر شدن با فرآیند ریاضی‌وار کردن در بازآفرینی ریاضی توسط دانش‌آموزان دارد، ضروری است که این فرآیند، از یک مسأله زمینه‌مدار که ریشه در واقعیت‌های زندگی روزانه آنان دارد شروع شده و به تدریج ریاضی‌وار می‌شود [۷] و [۸]. با طی این فرآیند، دانش‌آموزان فرصت پیدا می‌کنند که مسائل زمینه‌مدار ریاضی را با زبان غیر رسمی حل نمایند که تریفِرز (۱۹۹۱ و ۱۹۸۷)، این فرآیند را «ریاضی‌وار کردن افقی» می‌نامد [۱۷] و [۱۸]. پس از آن که دانش‌آموزان فرآیندهای مشابهی را از طریق ساده کردن و صوری کردن تجربه کردند، به تدریج، این زبان غیررسمی به یک زبان رسمی ریاضی، نزدیک و نزدیک‌تر خواهد شد تا جایی که دانش آموزان، قادر می‌شوند که یا الگوریتم‌های موجود را بیابند یا در صورت لزوم، الگوریتم‌های جدیدی را ابداع کنند؛ فرآیندی که تریفِرز، آن را «ریاضی وار کردن عمودی» می‌نامد. به عبارت دیگر، ریاضی‌وار کردن افقی زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان با استفاده از ابزار ریاضی، مسائل دنیای واقعی را حل می‌کنند، درحالی که ریاضی‌وار کردن عمودی زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان، در حوزه ریاضی، مطلبی را بازآفرینی یا دوباره سازماندهی می‌کنند [۱۷]. به تعبیر فرودنتال (۱۹۹۱)، ریاضی وار کردن افقی مستلزم حرکت از دنیای واقعی به دنیای نمادهای ریاضی است [۱۱]. در حالی که ریاضی وار کردن عمودی، به معنای حرکت در دنیای نمادهای ریاضی است که از نظر وی، هر دو نوع ریاضی وار کردن، برای آموزش و یادگیری ریاضی به یک اندازه مهم هستند[۱].

دی‌لنگه (۱۹۸۷) بر اساس انواع فعالیت‌ها برای یادگیری ریاضی، تمایز بین این دو نوع ریاضی‌وار کردن را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار داده است [۵]. به گفته وی، فعالیت‌هایی که به قصد ریاضی‌وار کردن افقی طراحی می‌شوند، ابتدا مستلزم شناسایی ریاضیات مورد نیاز برای حل مسأله‌ای است که فرد درگیر حل آن است. سپس، صورت بندی آن مسأله به روشی دیگر، کشف روابط بین معلوم‌ها و مجهول‌ها، فهمیدن قواعد، درک جنبه‌های معادل در مسأله، انتقال مسأله از دنیای واقعی به دنیای ریاضی و ترجمه جواب مسأله از دنیای واقعی به یک مدل ریاضیِ شناخته شده است. در حالی که در ریاضی‌وار کردن عمودی، فعالیت‌ها شامل برقراری رابطه بین فرمول‌ها، تبیین قواعد، تصدیق کردن و بهبود مدل‌های ریاضی موجود، استفاده از مدل‌های مختلف ریاضی، ترکیب کردن و تلفیق کردن مدل‌ها، صورت بندی مفاهیم جدید ریاضی و بالأخره، تعمیم دادن

۱) نام‌های مختلفی برای این دو فرآیند ریاضی وار کردن افقی و عمودی در ادبیات پژوهشی حوزه مدلسازی و کاربرد وجود دارد، که تعریفشان با تعریف ارائه شده در آموزش ریاضی واقعیت مدار کمی متفاوت است و بر اساس چارچوب نظری متفاوتی توسعه پیدا کرده‌اند. برای دسترسی به این تعاریف می‌توان به کتاب چهاردهمین مطالعه ICMI در مورد مدل‌سازی و کاربرد مراجعه کرد.

آن‌هاست. در شکل زیر، که فرآیند ریاضی وار کردن افقی و عمودی، توصیف شده است، خطوط نقطه‌چین نمایشگر فرآیند ریاضی وار کردن افقی و خطوط دوتایی، نشانگر فرآیند ریاضی وار کردن عمودی هستند.



شکل ۲: ریاضی‌وار کردن افقی و عمودی (برگرفته از پنهویزن، ۱۹۹۶)

پنهویزن (۲۰۰۱) اظهار می‌دارد که معمولاً آموزش ریاضی واقعیت مدار در خارج هلند، با عنوان «آموزش ریاضی دنیای واقعی[1]» شناخته می‌شود که از نظر وی، معادل کردن این دو، می‌تواند یک بدفهمی در مورد آموزش ریاضی واقعیت مدار ایجاد کند [۱۵]. او دلیل اصلی این بدفهمی را، واژهٔ «واقعیت مدار» می‌داند که در اصطلاحات آموزش ریاضی هلند، تنها به معنی ارتباط با دنیای واقعی نیست، بلکه معناهای دیگری نیز دارد. در حقیقت، تأکید اصلی آموزش ریاضی واقعیت مدار، بر تصور کردنِ موقعیت یک مسألهٔ توسط دانش‌آموزان در ذهن‌شان و معنادار ساختن آن مسأله است. در حقیقت، واقعیت مدار بودن، به این معناست که مسأله‌ای که در اختیار دانش‌آموزان قرار داده می‌شود، می‌تواند دارای زمینه دنیای واقعی باشد، اگرچه این ویژگی ضروری نیست و می‌توان مسأله را در زمینه ریاضی نیز مطرح نمود. برای مثال، یک زمینه داستانی یا یک زمینه ریاضی رسمی، هر دو به یک اندازه زمینه‌های مناسبی برای طرح مسائل ریاضی هستند، به شرطی که هر دو زمینه، برای دانش‌آموزان واقعی به نظر بیایند و معنادار باشند. در این باره، گرامیجر (۱۹۹۷) توضیح می‌دهد که زمینه مسأله‌ها در آموزش ریاضی واقعیت مدار، الزاماً موقعیت‌های زندگی روزانه نیستند

1) Real World Mathematics Education

بلکه آنچه که در این نوع آموزش نقش محوری دارد، این است که زمینه مسأله، برای دانش‌آموزان از دید تجربی، واقعی باشد، به گونه‌ای که آنها بتوانند به صورت هوشمندانه و فوری، در موقعیت مسأله، دست به کار شوند و اقدام به حل مسأله کنند.

۵. سخن پایانی

واکنش هلندی‌ها به «جنبش ریاضی جدید»، رویکرد «آموزش ریاضی واقعیت مدار» بود که در نوع خود، ویژه است و از مقبولیت جهانی برخوردار است و همان طور که پنهویزن (۲۰۰۱) اظهار نموده، یک کارِ در حال انجام است که از سی سال پیش شروع شده و هنوز هم ادامه دارد [۱۵]. تریفرز (۱۹۸۷)، ویژگی‌های اصلی آموزش ریاضی واقعیت مدار را در پنج مورد زیر خلاصه کرده است [۱۷]:

- استفاده از زمینه برای طرح سؤال؛
- استفاده از مدل برای برقراری ارتباط بین سطح مجرد و سطح غیر مجرد؛
- استفاده از تولیدات و ساخته‌های خودِ دانش آموزان؛
- تدریس تعاملی؛
- تلفیق شاخه‌های مختلف ریاضی.

مقاله حاضر، به منظور آشنایی با روند تاریخی اصلاحات برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در جهان، چند جریان یا جنبش را مورد بررسی قرار داد. پس از معرفی و نقد جنبش ریاضی جدید، به جنبش رجعت به اصول پرداخت و در نهایت، مروری داشت بر آموزش ریاضی واقعیت مدار که به وسیله هانس فرودنتال ریاضیدان و آموزشگر ریاضی هلندی، به عنوان واکنش مناسبی به جنبش ریاضی جدید معرفی شد. هدف این مقاله، آگاه کردن ریاضیدانان ایرانی با ریشه‌های تاریخی اصلاحات برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در دنیا بود تا به این ترتیب با شناخت گذشته، بتوان الگوهای احتمالی برای اصلاحات برنامه‌های درسی ریاضی در ایران را تبیین نمود. شونفیلد (۲۰۰۷ به نقل از سانتایانا) هشدار می‌دهد که «آنهایی که از گذشته درس نمی‌گیرند، محکوم به تکرار آن هستند» [۱۶] مراقب باشیم که گاهی این تکرارها، باعث می‌شود که یک ملت نتواند از گذشته خویش درس بگیرد.

منابع

[۱] آلفورس، ا. و همکاران (۱۹۶۲). ص در باب برنامه درسی ریاضی دبیرستانی ترجمه جواد حاجی بابایی (۱۳۷۵). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۶، ص ۷—۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲] فرودنتال، اچ. (۱۹۷۹). ریاضی جدید یا آموزش جدید. ترجمه سحر ظهوری زنگنه و زهرا گویا. (۱۳۸۱). مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۷۰، صص ۲۸ تا ۳۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۳] گویا، ز. (۱۳۷۵). روند تغییر محتوای برنامه درسی ریاضیات مدرسه. مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۶ دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش. صص ۱۲—۸.

[4] Clements, M. A; Ellerton, N. F. (1996). Mathematics education Research: past, present and future. UNESCD Principal Regional Office for Asia and the Pacific.

[5] De Lange, Jan. (1996) Mathematics, Insight, and Meaning. The Netherlands, Utrecht: OW & OC.

[6] De Lange, Jan. (1996) Using and applying mathematics in education. In A. J. Bishop et al. Eds., International Handbook of Mathematics Education, 49-97. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[7] Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. Educational Studies in Mathematics,1, 3-8.

[8] Freudenthal, H. (1973) Mathematics as an educational task. The Netherlands, Dordrecht: Reidel .

[9] Freudental, H. (1978) Weeding and Sowing: Preface to a Science of mathematical education. Dordrecht: Reidel.

[10] Freudenthal, H. (1982). Major Problems of Mathematics education. Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhauser.

[11] Freudenthal, H. (1991) Revisiting mathematics education. The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic.

[12] Gravemeijer, K. P. E. (1994). Developing realistic mathematics education. The Nederlands, Utrecht: Freudenthal Institute.

[13] Gravemeijer, K. P. E. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer, & E. C. D. M. van Lieshout (Eds). The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures. Utrecht: Freudenthal Institute, 1997.

[14] Panhuizen, M. van den (1996). Assessment and Realistic Mathematics Education. Netherlands, Utrecht: Freudenthal Institute.

[15] Panhuizen, M. van den. (2001). Realistic Mathematics Education As work in progress. F. L. Lin (Ed). Common Sense in Mathematics Education, 1-43. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 19-23 November 2001.

[16] Schoenfeld, A. H. (2007) Problem solving in the United States, 1970-2008 research and theory, 551 practice and politics. ZDM Mathematics Education. 39:537-551.

[17] Treffers,A. (1987). Three dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. Dordrecht: Reidel.

[18] Treffers, A. (1991) Didactical background of a mathematics program for Primary Education. In Leen Streefland (Ed.), Realistic Mathematics Education in Primary Schools. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

[19] Walmsley, A. L. E. (2203) A History of the "New Mathematics" Movement and its Relation with Current Mathematical Reform. University Press of America: Maryland, USA.

ابوالفضل رفیع پور
دانشگاه شهید باهنر کرمان و مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی
Drfaiepour@gmail.com و Rafiepour@uk.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۱۳ تا ۲۹

ریاضیات و علوم مالی*

امانوئل گوبت، ژیه پگه و مارک یور

مترجمین: زانیار احمدی، شیوا زمانی

چکیده

از ابتدای دهه ۱۹۹۰، ریاضیات و به طور خاص‌تر نظریه احتمالات، نقش فزاینده‌ای در صنعت بانکداری و بیمه ایفا کرده‌اند. این موضوع نویسندگان را بر آن داشت که در این‌جا بعضی از تعامل‌های بین ریاضیات و مالی و نتایج آن‌ها را در سطح تحقیقات و آموزش این حوزه‌ها در فرانسه ارائه دهند.

۱ تاریخچه موضوع

مبدأ پایه‌های ریاضی مالی نوین به رسالهٔ لویی بشلیه[۱] با عنوان نظریهٔ سفته‌بازی[۲] [۲] برمی‌گردد که در ۱۹۹۰ در دانشگاه سوربن دفاع شد. این کارها، در حقیقت، تولد فرآیندهای تصادفی زمان ـ پیوسته، و از طرف دیگر استراتژی‌های زمان ـ پیوسته برای پوشش ریسک[۳] در مالی بود. از وجه ریاضی، رسالهٔ بشلیه تأثیر شگرفی بر تحقیقات کلموگروف[۴] در مورد فرآیندهای زمان ـ پیوسته در دهه ۲۰ و نیز تحقیقات ایتو[۵] مخترع حسابان تصادفی در دهه ۵۰ داشت. در نقطهٔ مقابل، در مورد مالی، رویکرد بشلیه برای سه ربع قرن، دقیقاً تا ۱۹۷۳، زمانی که کار بلک[۶]، شولز[۷] و مرتون[۸] پدید آمد[۹] [۳]، [۲۳] فراموش شده بود.

---

*) Gobet, E., Pagés, G. and Yor, M. *Mathematics and Finance*,
Aspects of Mathematical Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, pp: 63-76

1) Louis Bachelier 2) Theorié de la apéculation 3) Risk Hedging 4) Kolmogorov
5) Itô 6) Black 7) Scholes 8) Merton

۹) برای همین کار، شولز و مرتون جایزه نوبل اقتصاد را در سال ۱۹۹۷ دریافت کردند (بلک در سال ۱۹۹۵ درگذشت).

برای درک بهتر بستر آن زمان، بیایید به دهه ۷۰ برگردیم. در آن زمان است که خواست‌های سیاسی برای کم کردن قوائد بازارهای مالی شکل می‌گیرد و باعث می‌شود نرخ‌های بهره متلاطم‌تر و نرخ‌های تبدیل ارز ناپایدار شود. در چنین محیط عاری از قوائدی، شرکت‌های صنعتی و تجاری در معرض خطر فزاینده‌ای قرار می‌گیرند که برای مثال با تغییرپذیری فرین نرخ‌های تغییر مرتبط است. این موفقیت دلپذیر نیست، به‌ویژه وقتی که درآمدها و هزینه‌ها با ارزهای متفاوتی دریافت و پرداخت می‌شوند (مثلاً دلار و یورو). برای ایجاد بنگاه‌هایی با ابزارهایی سازگار با این مسائل، و به طور کلی‌تر برای این که شرکت‌های بیمه و بانک‌ها بتوانند این انواع جدید ریسک‌ها را پوشش دهند، بازارهای سازمان‌یافته جدیدی ایجاد شدند که به گروه‌های مختلف اجازه می‌دادند محصولات بیمه‌ای را در حجم زیاد معامله کنند. این بازارها منجر به ظهور ابزارهای مالی جدیدی شدند که محصولات مشتقه[1] خوانده می‌شوند. اختیار خرید[2]، نمونه اولیه این مشتقات است که هنوز یکی از پرکاربردترین این ابزارهاست.

در مثال قبل، چنین اختیاری بنگاه را در مقابل افزایش نرخ تبدیل[3] یورو/دلار محافظت می‌کند. همین که یک بنگاه این اختیار را صاحب شود، اختیار به آن بنگاه این حق[4] اما نه اجبار، را می‌دهد که یک دلار را در عوض K یورو (قیمت اجرا[5] یا قیمت توافق‌شده[6] که مشخصه ثابتی از قرارداد است) در زمان معین T در آینده (که زمان انقضا یا سررسید[7] خوانده می‌شود) خریداری کند. اگر نرخ تبدیل ارز در زمان t، S_t باشد (یعنی ۱ دلار $= S_t$ یورو)، این بیمه برای شرکت به معنی دریافت مقدار $\max(S_T - K, \circ)$ یورو در سررسید T است: اگر $S_T \leq K$، نرخ خرید دلار به صرفه‌تر از نرخی است که در قرارداد قید شده است و بنابراین شرکت چیزی دریافت نمی‌کند (و یوروهای خود را در صورت لزوم در بازار یورو/دلار به یورو تبدیل می‌کند)؛ از طرف دیگر، اگر $S_T > K$، شرکت از حقش استفاده می‌کند و دلار را با نرخی بهتری که اختیار تضمین کرده است: ۱ دلار $= K$ یورو خریداری می‌کند (این که چه مقدار دلار را به این ترتیب می‌توان خرید بخشی از قرارداد اختیار است).

برای گروه‌های مداخله‌گر در بازار دو سؤال پیش می‌آید: قیمت (که حق بیمه[8] خوانده می‌شود) چنین قراردادهای اختیاری چقدر است، و بعداز فروختن چنین محصولی با قبول ریسک بالا رفتن دلار در مقابل یورو در زمان سررسید قرارداد ــ به‌عنوان خریدار چه رفتاری باید در پیش گرفت؟ اگرچه بشلیه در همان سال ۱۹۰۰ در رساله‌اش [2] ارتباط بین قیمت این نوع ابزارهای مالی و برخی محاسبات احتمالی وابسته به فرآیندهای تصادفی مشخصی را ارائه کرد، اما مسأله پوشش ریسک قرارداد، تنها با کارهای بلک، شولز و مرتون در ۱۹۷۳ حل شد. در آن زمان، ایدهٔ متنوع سازی ریسک، به دلیل کارهای اولیهٔ مارکوویتز[9] در ۱۹۵۲ در مورد بهینه‌سازی سبد مالی هنوز مد روز بود: مارکوویتز یک تنوع‌بخشی برای ریسک ایستا مطرح می‌کند، که بر بخش‌بندی مجدد دارایی‌ها در یک سبد مالی استوار است.

---

1) Drivative Product 2) Call Option 3) Exchange Rate 4) Right 5) Exercise Price 6) Strike Price 7) Maturity 8) Premium 9) Markowitz

اما در مورد بیمه خسارت مسأله باز فرق می‌کند: در این مورد، تنوع‌بخشی به تعداد افراد بیمه‌شده بستگی دارد. رویکرد جدید بلک، شولز و مرتون که هنوز سنگ‌بنای مالی نوین است، عبارت است از پخش ریسک در طول زمان (زمان امروز تا سررسید)، با اجرای یک استراتژی سرمایه‌گذاری پویا. در مورد اختیار خرید نرخ ارز، این استراتژی عبارت است از خرید یا فروش دلار در هر لحظه. این معجزه وقتی کامل می‌شود که بلک، شولز و مرتون نشان می‌دهند یک استراتژی پویای بهینه وجود دارد که به طور صریح قابل محاسبه است و تمام ریسک‌های ممکن در همه سناریوهای بازار را از بین می‌برد.

این گام این امکان را به‌وجود آورد که این بازارهای جدید به سرعت به صورت سازمان‌یافته‌ای توسعه پیدا کنند. اولین این بازارها: بازار معاملات شیکاگو (CBOT[1]) در ۱۹۷۳ در شیکاگو باز شد و به سرعت بازارهای دیگری در پی آن باز شدند، ابتدا در ایالات متحده (فیلادلفیا) و سپس در هر جای دیگر از جهان. فرانسه گام به گام پیش رفت و در ۱۹۸۵ MATIF[2] را تأسیس کرد، به معنای: بازار بین‌المللی فرانسه، (و پس از چندین تغییر در معنای این کلمه مخفف) MONEP[3] به معنای: بازار اختیارهای قابل مذاکره در پاریس در ۱۹۸۷. همان‌طور که نشان خواهیم داد، پیشرفت‌های تکنولوژیکی (در کامپیوترها، ارتباطات و ...) همپای پیشرفت‌های نظری (در ریاضیات) نیز به این توسعهٔ تماشایی کمک بسیاری کرد.

دنیای بلک، شولز و مرتون

به منظور صورت‌بندی مفهوم پوشش ریسک پویا، بیایید ملزومات مثال نرخ تبدیل ارز قبل را در نظر بگیریم. در زمان صفر، فروشنده حق بیمه $C_\circ$ را از خریدار دریافت می‌کند (قیمت اختیار). در این موقع، او این حق بیمه را در دلار (آمریکا) سرمایه‌گذاری می‌کند. به طور دقیق‌تر، او مقدار (جبری) δ_t از دلارها را در هر لحظه t خریداری می‌کند و بقیه پول را سرمایه‌گذاری نمی‌کند (برای ساده کردن استدلال در این‌جا فرض می‌کنیم که نرخ بهره که واحد تبدیل پول‌های سرمایه‌گذاری نشده است؛ که در این‌جا نقد شوندگی یورو است، صفر است). هیچ پولی از خارج نمی‌تواند در مدیریت پویای این فرد تزریق شود: که می‌گوییم خود تأمین[4]. اگر ارزش آن را در زمان با $(V_t)_{t\in[\circ,T]}$ نشان دهیم، آن‌گاه تغییرات بی‌نهایت خرد[5] آن در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t(S_{t+dt} - S_t), \qquad (۱)$$

با این قید که در زمان سررسید T به مبلغی که به خریدار تعهد شده است، دست یابد، یعنی:

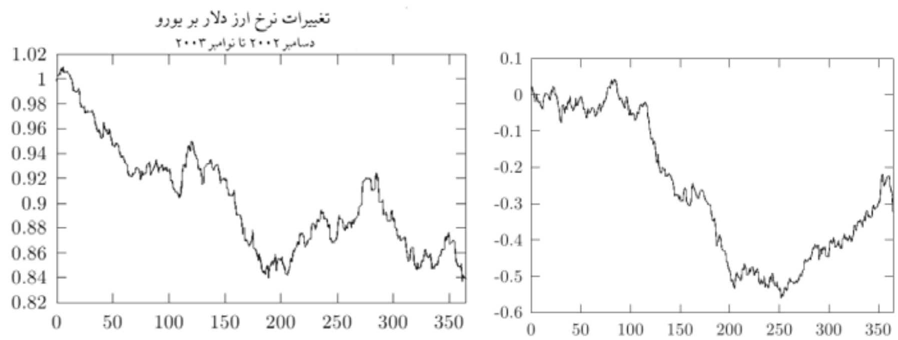
$$V_T = \max(S_T - K, \circ). \qquad (۲)$$

1) Chicago Board of Trade 2) Marché Terme International de France 3) Marché à des Options Négociables de Paris 4) Self-financed Portfolio 5) Infinitesimal

در این نقطه از تحلیل، لازم است مدل (تصادفی) تحول نرخ تبدیل ارز $(S_t)_{t\geq 0}$ را صراحتاً ارائه دهیم. بدون از دست دادن کلّیت مطلب، طبیعی است که بازده لحظه‌ای آن را ترکیب یک روند موضعی و یک نوفه در نظر بگیریم. ساموئلسون[1] (۱۹۶۰) و سپس بلک، شولز و مرتون (۱۹۷۳)، نوفه را به کمک حرکت براونی $(W_t)_{t\geq 0}$ مدل‌سازی کردند که به دینامیک بی‌نهایت خردی از نوع زیر منتهی شد:

$$\frac{S_{t+dt}-S_t}{S_t}=\mu_t dt+\sigma(W_{t+dt}-W_t). \qquad (۳)$$

نوسان موضعی نوفه توسط پارامتر σ (که غیر صفر فرض می‌شود) داده می‌شود و تلاطم[2] خوانده می‌شود.



شبیه‌سازی مسیر یک حرکت براونی (سمت چپ) و تحول نرخ تبدیل ارز دلار/یورو (سمت راست): چیزی بیش از شباهت وجود دارد تقریباً یک شباهت خانوادگی ...

مورد ۱.

تعریف حرکت براونی: حرکت براونی یک فرآیند گاوسی با نموهای مانا و مستقل است. برای $0 \leq s < t$، نمو $W_t - W_s$ آن از یک توزیع گاوسی مرکزی با واریانس $(t-s)$ پیروی می‌کند.

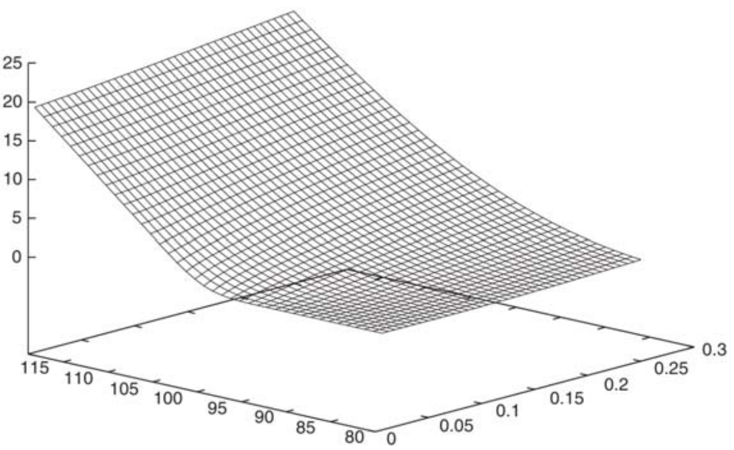
روند تاریخی: در ۱۸۲۷، رابرت براون[3] گیاه‌شناس (اسکاتلندی) آن‌چه که بعدها حرکت براونی نامیده شد به مسیرهای بسیار بی‌قاعدهٔ (در واقع به عنوان تابعی مشتق از زمان) در ذرات ریز در یک سیال ثبت داد. در سال ۱۹۰۰، لویی بشلیه از آن به‌عنوان مدلی برای نرخ‌های بازار استفاده کرد، و سپس اینشتین[4] در ۱۹۰۵ انتشار یک ذره را با آن توضیح داد. تازه در ۱۹۲۳ بود که وینر[5] ساخت ریاضی آن را صورت‌بندی کرد. این تاریخ، نقطهٔ شروع تحقیقات ریاضی فشرده‌ای است که تا به امروز ادامه دارند و بخش بزرگی از نظریه احتمال نوین را تغذیه کرده است.

---

1) Samuelson 2) Volatility 3) Robert Brown 4) Enistein 5) Wiener

در واقع، ایدهٔ معرفی حرکت براونی به عنوان مدلی بر تصادفی بودن نرخ‌های بازار سهام، به بشلیه در سال ۱۹۰۰ برمی‌گردد. این ایده با پیدایش اولیه حرکت براونی ارتباط تنگاتنگی دارد. با این فرآیند می‌توان بعضی از خواص مورد انتظار، مانند: استقلال نموها، یا ناوردایی مقیاس را به راحتی در نظر گرفت. در نهایت، رفتار مسیری آن کاملاً شبیه چیزی است که در عمل مشاهده می‌شود (شکل ۱ را ببینید). اما نکتهٔ آخر هنوز جای بحث دارد و موجب بررسی‌های در رده‌های بزرگتری از فرآیندها، مانند حرکت براونی کسری شده‌اند.
در واقع توجیه عبارت‌های بی‌نهایت خرد (۱) و (۳) آسان نیست، چون $(W_t)_{t\geq ۰}$ دارای تغییرات نامتناهی اما تغییرات مرتبه دوم متناهی است. حسابان تصادفی که در دهه ۱۹۵۰ توسط ایتو توسعه پیدا کرد، به ما اجازه می‌دهد که این مسائل تکنیکی را حل کنیم. یک حسابان تصادفی نیز می‌توان به دست آورد، طبق فرمول ایتو؛ برای هر تابع به اندازهٔ کافی منظم f داریم:

$$\begin{aligned} f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt \quad &+ \quad \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) \\ &+ \quad \frac{۱}{۲}\sigma^۲ (S_t)^۲ \partial^۲_{xx} f(t, S_t)dt. \end{aligned} \qquad (۴)$$



شکل ۲. رویه قیمت به عنوان تابعی از x و $T-t$

وجود جمله اضافی $\frac{۱}{۲}\sigma^۲(S_t)^۲\partial^۲_{xx}f(t,S_t)$، با ظاهر مشتق دوم f نسبت به متغیر دوم با تغییرات مرتبه دوم متناهی حرکت براونی توضیح داده می‌شود. این جمله، به یک معنا، حساب دیفرانسیل تصادفی است، چون در حساب دیفرانسیل معمولی، هیچ جملهٔ مرتبه دومی وجود ندارد (شکل (۱) را ببینید).
به کمک این ابزارهای ریاضی، بلک، شولز و مرتون مسئله پوشش ریسک را برای اختیار خرید حل می‌کنند. در واقع، اگر ارزش متناظر سبد $V_t = C(t, S_t)$ باشد، آنگاه با در دست داشتن معادلات (۱)، (۲) و (۴)، از یک طرف لزوماً داریم $\delta_t = \partial_x C(t, S_t)$ و از طرف دیگر

$\partial_t C(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{xx} C(t,S_t) = 0$ و $C(T,x) = \max(x-K,0)$. این معادله دیفرانسیل پاره‌ای آخر با تغییر متغیر به یک معادله گرما تقلیل می‌یابد که جواب آن، که مدت‌هاست شناخته شده و صریح است. بنابراین فرمول معروف بلک و شولز، که در تمام بازارهای جهانی از آن استفاده می‌شود به دست می‌آید و $V_0 = C(0,S_0)$، ارزش امروز اختیار را به دست می‌دهد. قابل ذکر است که با استراتژی بالا، فروشنده اختیار قادر است در همهٔ سناریوهای بازار به هدف تصادفی $\max(S_T - K, 0)$ دست یابد. به همان اندازه عجیب است که دقت کنیم قیمت V_0 فقط به واسطهٔ تلاطم σ به مدل (۳) بستگی دارد؛ به‌ویژه بازده موضعی $(\mu_t)_t$ در فرمول ظاهر نمی‌شود.

مورد ۲.

فرمول بلک و شولز: قیمت (یا حق بیمه) (شکل (۲)) اختیار خرید با زمان سررسید T و قیمت توافقی K با تابع زیر داده می‌شود:

$$\begin{cases} C(t,x) = x\mathcal{N}[d_1(x/K,t)] - K\mathcal{N}[d_0(x/K,t)], \\ d_0(y,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} log(y) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(y,t) = d_0(y,t) + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases} \tag{۵}$$

که $\mathcal{N}$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را نشان می‌دهد.

استراتژی پوشش ریسک متناظر در لحظهٔ t از $\delta_t = C'_x(t,S_t) = \mathcal{N}[d_1(S_t/K,t)]$ قسمت از دارایی ریسکی داده می‌شود.

تنها چیزی که باقی‌مانده، فهمیدن این است که چرا قیمت اختیار یکتاست. فرض نبود فرصت آربیتراژ[1] که در مالی بنیادین است، جواب این مسئله را می‌دهد. این فرض بیان می‌کند که به دست آوردن پول با اطمینان کامل بدون هیچ سرمایه‌گذاری ممکن نیست. بنابراین در مورد اختیار خرید ذکر شده، فرض کنید قیمت آن $V'_0 > V_0$ باشد، کافی است چنین قراردادی را بفروشیم، سپس، با حق بیمهٔ دریافت شده، استراتژی $\delta_t = C'(t,S_t)_{0 \le t \ge T}$ را دنبال کنیم تا با اطمینان کامل و با شروع از هیچ، سودی برابر $V'_0 - V_0 > 0$ به دست آوریم. استدلالی مشابه برای $V'_0 < V_0$ معتبر است، کافی است عکس استراتژی قبل را به معنای ریاضی آن اجرا کنیم. این استدلال در نهایت نشان می‌دهد که تنها یک قیمت منصفانه وجود دارد که از فرمول بالا به دست می‌آید. به همین علت است که استراتژی δ_t، استراتژی δ ـ خنثی خوانده می‌شود.

در پایان این مطلب خاطر نشان می‌کنیم که قیمت V_0 را می‌توان با استفاده از فرمول فایمن ـ کاتس[2]

1) Absense of arbitrage opportunity 2) Feynman-Kac

که جواب معادله گرما و حرکت براونی را ارتباط می‌دهد، به صورت یک امید ریاضی نیز نوشت. این نوشتن ارزش اختیار به صورت یک امید ریاضی مسیر بسیاری از محاسبات صریح قیمت‌های اختیار در چارچوب مدل بلک ـ شولز را هموار کرد و کارایی حسابان تصادفی را به نمایش گذاشت.

تجربه بازار

در بخش پیش، ساختن یک سبد پویای $(\delta_t)_{t\in[0,T]}$ که ارزش اختیار را در زمان سررسید آن، یعنی $\max(S_T-K,0)$ شبیه‌سازی یا بازسازی می‌کرد شرح دادیم. این قسمت در قلب مدل‌سازی مالی است. چنین موقعیت‌هایی در کلاس کلی‌تری از مدل‌ها، که بازارهای کامل نامیده می‌شوند، یافت می‌شود. با این حال، در وهله اول، ممکن است اصلاً اهمیت این فرآیند را زیر سؤال ببریم: چرا این همه تلاش کنیم تا رابطه‌ای را به‌دست بیاوریم که ارزش یک اختیار را در هر نقطه از وجودش به ما می‌دهد، در حالی که بازارهای معاملاتی‌ای وجود دارد که علت وجودی آن دقیقاً به دست دادن این ارزش از طریق تعادل عرضه و تقاضاست؟ در واقع، پاسخ، در رویکردی نهفته است که رابطه آن به دست می‌آید. بدون ورود به جزئیات کار چنین بازارهایی، روشن است که در زمان سررسید، مدیرانی (یا طرف‌های قراردادی) برای قراردادهای اختیار وجود دارند که، به‌طور خلاصه، با دارندگان اختیار روبه‌رو می‌شوند و باید به آن‌ها مقدار تصادفی یاد شدهٔ $\max(S_T-K,0)$ یورو را (به وضوح وقتی که $S_T>K$) پرداخت کنند. حال این طرف‌های قرارداد بین تاریخی که در آن حق بیمه را دریافت خواهند کرد (با فروختن یک قرارداد اختیار) و تاریخ سررسید T چه خواهند کرد؟ طبیعتاً، آن‌ها به یک روش δـ خنثی، با گذر زمان، یک سبد مالی خود تأمین را که متشکل از δ_t دارایی پایهٔ S_t در لحظه t است، پوشش ریسک خواهند داد، طوری که با اطمینان کامل (بدون ریسک) مقدار تصادفی $\max(S_T-K,0)$ یورو را در زمان سررسید کسب کنند: به‌طور معادل، می‌توان در مورد سبدهای پوشش دهنده ریسک صحبت کرد (ما در این‌جا هزینه‌های تراکنش را که شامل پرداخت‌هایی به بازیگران بازار است را در نظر نمی‌گیریم). بدین منظور، این طرف‌های قرارداد از رابطهٔ صریحی که در مدل بلک ـ شولز δ_t را می‌دهد استفاده می‌کنند (مورد ۲ را ببینید). رابطهٔ دقیق در این‌جا خیلی مهم نیست. از طرف دیگر، نکتهٔ اساسی، حضور پارامتر تلاطم σ است. این پارامتر را نمی‌توان به طور لحظه‌ای در بازار مشاهده کرد، باید آن را با به کار بردن روشی از بازار استخراج کرد. یکی از این روش‌ها که طبیعی‌ترین روش خواهد بود، اما جامعه مالی اساساً از آن چشم‌پوشی کرده است، برآورد آماری پارامتر σ از مشاهدات است. این رفتارمند آماری بدون شک تا حد زیادی به فرهنگ جامعه مالی ارتباط دارد. اما نه منحصراً: در حقیقت تحلیل‌گران مالی به بازار اعتماد خیلی بیشتری دارند تا به هر مدلی با همین باور، آن‌ها مسئله را معکوس می‌کنند: رابطهٔ بلک ـ شولز که قیمت یک اختیار خرید را می‌دهد (مورد ۲ را ببینید) تابعی از برخی پارامترهای معلوم در زمان t است، یعنی t، S_t، K و T و یک پارامتر مجهول، تلاطم σ. خیلی سخت نیست که ببینیم رابطهٔ بلک ـ شولز تابعی از σ است که اکیداً صعودی و پیوسته است، و نیز روی مجموعه‌ای از

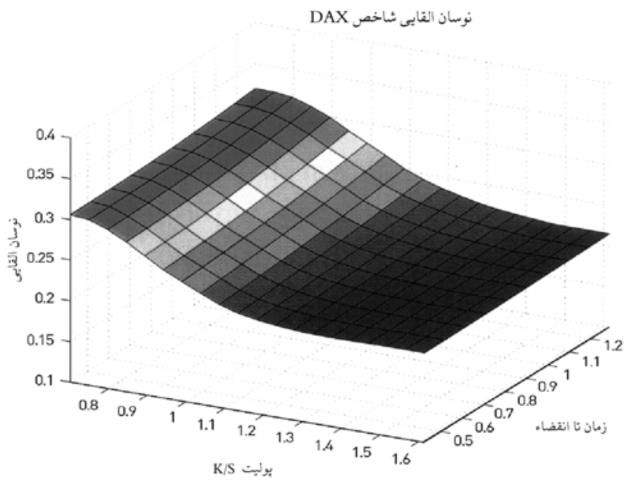
پیش تعیین شدهٔ قیمت‌های ممکن اختیار یک به یک است. مدیران سپس از قیمت‌های بازار استفاده می‌کنند تا تلاطم ضمنی[1] را که جواب یکتای معادله زیر در زمان t است، به دست آورند. (برای قیمت اعلام شده دارایی S_t)

$C(t, S_t, T, K, \sigma_{impl}) =$ قیمت اعلام شده قرارداد (t, K, T).

با فرض این که مدل دینامیک دارایی پایه مناسب باشد، σ_{impl} عیناً برابر σ خواهد بود. با گذر زمان و برای تمام قیمت‌های اعمال K. اما در عمل همه چیز کاملاً متفاوت است: نه تنها تلاطم ضمنی برحسب t تغییر می‌کند، بلکه برحسب K نیز تغییر می‌کند! این پدیده به لبخند تلاطم[2] معروف است، زیرا نمودار تابع

$$K \longmapsto \sigma_{impl}(t, K),$$

برای برخی از اشکال بازار شکل سهموی یک لبخند را دارد (شکل (۳)).



تلاطم ضمنی به عنوان تابعی از K/S_0 و $T - t$ (شبیه‌سازی توسط کنت)

همین که با کمک معکوس کردن عددی رابطهٔ بلک ـ شولز، تلاطم ضمنی $\sigma_{impl}(t, K)$ از قیمت بازار استخراج شد، مدیری که اختیار را فروخته است، سبد پوشش ریسک خود را با کنار گذاشتن $\delta_t(S_t, \sigma_{impl}(t, k))$ دارایی پایه برای هر اختیار با دارایی پایهٔ S، قیمت اعمال K و تاریخ سررسید T که او در آن طرف قرارداد است، تعدیل می‌کند.

از این زاویه بازار برای معاملهٔ اختیارها، بازاری است از تلاطم ضمنی دارایی پایهٔ اختیار. در آن‌جا می‌توان رفتارهای بسیار عملگرانهٔ افراد را مشاهده کرد که با نقص مدلی مواجه هستند، که از طرف دیگر از روز پیدایش آن به خاطر سهولت محاسباتی مورد قبول اکثریت بوده‌اند.

---

1) Implied Volatility 2) Volatility Smile

در وهلهٔ اول، کارهای متنوعی ویژگی استحکام[1] کیفی مدل بلک شولز را تأیید کردند: با فرض این که پارامتر σ دیگر ثابت نباشد بلکه تصادفی باشد، درحالی که از پایین با σ_{min} و از بالا با σ_{max} کراندار است، در این صورت مدل‌های بلک ـ شولز با پارامترهای σ_{min} و σ_{max} قیمت‌های اختیار را در مدل کلی کراندار می‌کنند [۱۰]. اما، چنین ملاحظات کیفی دیگر نمی‌تواند افرادی را که آن‌ها را نسبت به ریسک‌های مدیریت ابزارهای مشتقه حساس‌تر کرده است، راضی کنند. به این ترتیب، این ایده پدیدار شد که مدل‌هایی که با پارامترهای بیشتر توسعه پیدا کنند، اساساً با در نظر گرفتن تلاطم σ به عنوان یک فرآیند تصادفی که خود توسط تعدادی پارامتر مدل می‌شود، نه به عنوان یک پارامتر تعیّنی (شکل ۳ را ببینید). سپس، آن‌ها چنین مدلی را نسبت به پر معامله‌ترین قیمت‌های بازار با بهره بردن از درجه آزادی بیشتر، برازش می‌دهند، تحلیل‌گران مالی ترجیح می‌دهند از واژه تطبیق[2] استفاده کنند.

این کار عموماً از طریق رویهٔ تلاطم ضمنی حاصل از $(K,T) \longmapsto \sigma impl(t,K,T)$ انجام می‌شود (که نمودار یک بعد بالاتر لبخندهای تلاطم برای سررسیدهایی است که در سبد حضور دارند). این کار همیشه با معکوس کردن رابطهٔ بلک ـ شولز انجام می‌شود: به این ترتیب پارامترهای مدل غنی شده تعیین می‌شود که اجازه می‌دهد این رویه به بهترین وضع ممکن بازتولید شود. این روشی برای برازش پارامترها از قیمت‌های اختیارهایی است که در بازار اعلام می‌شوند، در دنیایی که با شهود و شیوه‌ی حرفه‌ای‌های بازار سازگار است که هر دو بر پایهٔ تلاطم هستند. به محض این‌که این پارامترها تعیین شدند، تنها چیزی که می‌ماند محاسبه پوشش ریسکی است که مربوط به اختیارهای مشمول در سبد، و در صورت لزوم، قیمت‌های اعلان‌نشده‌ی اختیارهایی است که عموماً اختیارهای نامتعارف[3] هستند. همچنین می‌توانیم خود را در آینده ببینیم با شبیه‌سازی کامپیوتری یا روش‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ساختار احتمالاتی سبد را در یک هفته یا یک ماه آینده ترسیم کنیم، مشخصاً احتمال از پیش تعیین‌شده‌ی خارج شدن از یک محدودهٔ داده شده را تعیین کنیم. این هدف ارزش در معرض ریسک[4] است که نماد مالی بازه اطمینان می‌باشد [۱].

به منظور غنی کردن مدل پویای دارایی، تمام تجهیزات احتمالاتی به کمک فراخوانده شده‌اند. این کار با اضافه کردن یک مؤلفه پرش به دینامیک دارایی پایه، با وابسته کردن تلاطم به ارزش سهم ($\sigma = \sigma(S_t)$) با مدل‌سازی دینامیک تلاطم با یک فرآیند پخشی که با حرکت براونی W که تحول دارایی پایه را هدایت می‌کند کم و بیش ناهمبسته است با اضافه کردن پرش به فرآیند تلاطم و به همین ترتیب. به نظر می‌رسد این فرآیند نردبانی بی‌پایان است، اما می‌تواند با توجه به این مطلب تعدیل شود: اگرچه برازش مدل وقتی تعداد پارامترها افزایش می‌یابد آسان‌تر می‌شود، پایداری آن با این تعداد نسبت معکوس دارد. این قانونی است که بسیاری از بازیگران بازار آن را با خرج خودشان یاد می‌گیرند، وقتی از یک روز به روز دیگر، پارامترهای برازش رویه‌ی تلاطم کاملاً تغییر می‌کنند و به این ترتیب اعتماد آن‌ها را نسبت به مدل از بین می‌برند.

---

1) Robust 2) Calibrate 3) Exotic 4) Value at Risk

تا به حال برای سادگی، فقط در مورد خاص اختیار خرید بحث کردیم. اگر از نقطه نظر تاریخی، این چارچوب، اولین چارچوبی است که نظریه برای آن پدید آمده است. (در [۳]، با دارایی پایه‌ای که سهام بدون سود تقسیمی[۱] است) و امروز تنها مثالی بسیار ساده از میان سایر مثال‌های ابزارهای مشتق است. همراه با(فروش) اختیارهای خرید، (خرید) اختیارهای فروش[۲]، و به دنبال آن، آن‌چه: اختیارهای دامنک[۳]، دو منظوره[۴]، زینی[۵]، پروانه‌ای[۶] و ... نامیده می‌شوند، گسترش یافتند، و باز خیلی زود حق‌های مشروطی[۷] عرضه شدند که نه تنها به قیمت سهام در زمان سررسید بلکه به تمام مسیر قیمت‌های اعلان‌شده‌ی آن از زمان ۰ تا T بستگی دارد. از این نوع اختیارها می‌توان به اختیار (خرید) آسیایی[۸] اشاره کرد که چیزی نیست غیر از یک اختیار خرید روی میانگین $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ از قیمت‌های اعلان‌شده بین ۰ تا T، اختیارهای با مانع[۹]، اختیارهای بدون پشیمانی[۱۰]، کلیکت[۱۱]، اختیارهای دیجیتال و از این قبیل. پس از سال‌ها نشاط فن‌آوری که رضایت استادان حرکت براونی و شاگردان آن‌ها را به همراه داشت، به نظر می‌رسد که این موج شادمانی اختیارهای نامتعارف باید از اوایل دهه ۱۹۹۰ به نظر آرام می‌شد. با برآورد و مدیریت ریسک (ارزش در معرض ریسک و موارد مشابه آن) که اولین مشارکت پربار و کاملاً غیرمنتظره احتمال‌دانان و فروشندگان ابزارهای مشتق بود. باید تأکید کنیم که این اختیارهای نامتعارف عموماً در بازار معاملات منعقد نمی‌شوند، بلکه بیشتر متناظر با تراکنش‌های فرابورسی[۱۲] هستند، حتی برای افرادی که جزئی از شبکه‌ی بزرگ بانکی هستند.

اگرچه انواع ابزارهای مشتق (تقریباً) نامتناهی به نظر می‌رسد، تعداد دارایی‌های پایهٔ آن‌ها چنین نیست، هرکدام از آن‌ها کم وبیش ویژگی مهمی را در رویکرد کلی معرفی می‌کنند. در کنار سهامی سود تقسیمی پرداخت نمی‌کنند (در واقع شاخص‌های سهام)، بعضی از انواع جدید اختیارها روی نرخ‌های ارز، روی قراردادهای آتی[۱۳] و روی کالاها وارد بازار شده‌اند. این فهرست را با اشاره خاصی به ابزارهای مشتق اوراق قرضه و نرخ‌های بهره خاتمه می‌دهیم که دارایی پایهٔ مشترک آن به یک معنا منحنی نرخ‌های بهره بر حسب زمان‌های سررسید است. این حوزه به دلیل حجم زیاد مبادلات آن اهمیت اقتصادی بنیادینی دارد؛ همچنین، این حوزه به لحاظ مدل‌سازی، پیچیدگی زیادی دارد، زیرا نه تنها باید تغییرات یک سهم، یا یک سبد از آن‌ها را در نظر بگیریم، بلکه یک (شبه-) پیوستار از نرخ‌ها (تا ۱ روز، ۱ ماه، ۳ ماه، ۱ سال، ۳ سال، ... و ۳۰ سال) را که به‌طور تصادفی بین آن‌ها و در طول زمان با رفتاری کم و بیش همبسته تغییر می‌کند؛ و به این ترتیب نوعی از فرآیندهای تصادفی را توصیف می‌کنند که در یک فضای توابع مقدار می‌گیرند. از میان حوزه‌هایی که پدید آمده‌اند و همچنان گسترش می‌یابد، بگذارید به پرسش‌هایی مربوط به بهینه‌سازی سبد مالی، هزینه‌های تراکنش، صندوق‌های پوششی[۱۴]، ... اشاره کنیم.

---

1) Dividend 2) Put Option 3) Spread Options 4) Straddle 5) Saddle 6) Butterfly 7) Conditional Rights 8) Asian Options 9) Barrier Options 10) Options Without Regret 11) Cliquets 12) Over-the-Counter 13) Futures 14) Hedge Funds

اخیراً ریسک اعتباری[1] یا ریسک نکول[2] و محصولات گوناگون مرتبط با آن‌ها اهمیت اساسی پیدا کرده است: هدف محافظت در برابر ریسک‌های متناظر با اوراق قرضه ـ کوپن‌های پرداخت نشده، از دست دادن کل یا جزئی از سرمایه ـ منتشر شده توسط بنگاهی است که ممکن است ورشکسته شود.
حال متغیر کیفی دیگری را که در دنیای اختیارها خاص است، معرفی می‌کنیم: محدودهٔ حق اجرا[3]؛ تاکنون به‌طور ضمنی در مورد قراردادهایی که اروپایی نامیده می‌شوند، بررسی کردیم که به دارندهٔ خود این حق را می‌دهند که در تاریخ T یک جریان پولی برابر $\max(S_T - K, ۰)$ را دریافت کنند. اگر این حق دریافت به کل بازهٔ زمانی $[۰, T]$ بسط داده شود، یعنی بتوان آن را به انتخاب فرد در یک تاریخ t یک‌بار و فقط یک‌بار اجرا کرد و مبلغ $\max(S_t - K, ۰)$ را دریافت کرد، صحبت از یک اختیار آمریکایی است. اینجاست که فرد با یک مسأله توقف بهینه[4] روبرو است که موجب می‌شود، دارندهٔ قرارداد، در یک محیط تصادفی تصمیم بگیرد. اغلب بازارهای اختیار سازمان‌یافتهٔ سهام یا شاخص، با قراردادهای آمریکایی سروکار دارند.

پیشرفت‌های ریاضی

توسعه بازارهایی که مختص ابزارهای مشتقه بود در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ و همین‌طور بحران‌هایی که چندین بار این بازارها را زیر و رو کردند، در شکوفایی و توسعه چندین شاخه از ریاضیات کاربردی و در مرحله‌ی اول نظریه احتمال و حسابان تصادفی نقش مؤثری ایفا کرده‌اند؛ در این رابطه، شگفت‌انگیزترین اتفاقی که رخ داد انتقال حرکت براونی، فرمول ایتو و معادلات دیفرانسیل تصادفی از دایره‌ی بسته‌ی محض‌ترین احتمال‌دانان به مدارس کسب و کار بود. تا جایی که به ریاضیات مربوط است، مثال‌هایی از این نوع کم نیستند، اما در مورد اخیر مخصوصاً تماشایی است.
یکی دیگر از ویژگی‌های قابل توجه به خود طبیعت بازارهای مالی برمی‌گردد: یک فعالیت انسانی که در یک اضطرار ثابت تحول پیدا می‌کند و در یک تحول همیشگی است؛ هستند، و آن‌جا مدل‌سازی هم‌زمان موقعیتی مرکزی و متلاطم دارد: چیزی که امروز درست است ممکن است فردا درست نباشد. ریاضیدانی که طبیعتاً به دنبال حل مسائل است، می‌تواند آن‌جا پرسش‌های جذابی بیابد در حالی که از طرف دیگر، هر تحلیل‌گر مالی مشتاق به دست آوردن جواب‌هاست! به هر حال، هر دو گروه ممکن است به نقطه‌ی مشترکی برسند، وقتی‌که ریاضیدان باید اول از همه به یافتن یک حل سخت و خسته‌کننده برای مسئله‌ای که مأمور آن است بچسبد، تحلیل‌گر تغییرپذیری مدل‌ها و پارامترهای آن‌ها را ترجیح می‌دهد (تا به یک نمایش ذهنی برای دنیای تصمیمات ممکن دست پیدا کند) و اول از همه به راحتی به کارگیری آن‌ها (فرمول‌های صریح، اجراهای عددی و ...) که تنها راه برای حفظ واکنش به‌موقع او در میانه‌ی تراکنش‌های ظریف است (جایی که واحد زمان ثانیه است).
حوزه‌ای از ریاضی که تعامل آن با مالی قوی‌ترین تعامل بوده است به وضوح نظریه احتمال

1) Credit Risk 2) Default Risk 3) Range of exercise rights 4) Optimal Stopping Time

است: حسابان تصادفی و حرکت براونی در اولین دوره به‌ویژه با ظهور اختیارهای نامتعارف. پس پیچیدگی بیش از بیش محصولات، تعداد بیشتر مدل‌ها، ضرب کردن شاخص‌هایی که برای محدود کردن منابع ریسک لازم بودند، منجربه شرایطی شده‌اند که محاسبات صریح، حداقل برخی مواقع، نیاز به روش‌های عددی دارند. دو خانوادهٔ بزرگ از روش‌ها در دسترس هستند، آن‌هایی که از آنالیز عددی نشأت می‌گیرند و آن‌هایی که از احتمال عددی نشأت می‌گیرند. هر کدام از این دو دیسیپلین را می‌توان تقریباً در یک کلمه خلاصه کرد: معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای یکی، روش مونت کارلو برای دیگری (یعنی، محاسبهٔ یک میانگین با استفاده از شبیه‌سازی‌های کامپیوتری سناریوهای تصادفی بسیار زیاد).

آنالیز عددی پایهٔ تاریخی ریاضیات کاربردی در فرانسه منبع جدیدی از مسائل را یافت که روش‌هایش با کارایی آزمون‌شده، می‌تواند در آن‌ها به کار رود. از طرف دیگر، احتمال عددی، تحت انگیزش مالی کمّی [1]، رشد بی‌سابقه‌ای پشت سر گذاشت، به‌ویژه در روش‌های گسسته‌سازی فرآیندها به‌ویژه با نقش دنی تله [2] در اینریا [3]). بسیاری از حوزه‌های اساسی نظریه‌ی احتمال، از جمله حسابان مالیوان [4] (حسابان تغییرات تصادفی) اخیراً با نقش مهم و از بعضی لحاظ غیرمنتظره‌ای که ایفا کرده‌اند وارد این عرصه شده‌اند. حوزه‌های دیگر نظریهٔ احتمال به‌ویژه، نظریهٔ توقف بهینه در اختیارهای آمریکایی، یا نظریهٔ بهینه‌سازی که نقش اساسی از نظریه‌ی پوشش ریسک میانگین ــ واریانس [5] فولمر ـ ساندرمن [6] تا بسیاری از الگوریتم‌های تطبیق بازی می‌کند، واقعاً در دوره‌ی جوانی مجدد خود هستند. اما توسعه‌ی احتمال و شبیه‌سازی برای سایر جنبه‌هایی که بیشتر نظری هستند زیان‌آور نبوده است زیرا، در طول سالیان اخیر، فرآیندهای پرش، که معمولاً متناظر با مسائل شبکه‌ها و صف بوده‌اند، امروزه در مدل‌سازی مالی به طور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، به‌خصوص در زمینه‌هایی که بیشترین پیچیده‌گی را دارند (فرآیندهای لوی [7]، برای مثال [۴] را ببینید).

در نهایت، همان‌طور که در چنین تعامل‌هایی دیده می‌شود، مدل‌سازی مالی منجربه ظهور مسائل جدیدی شد که اساساً به شیوه‌ای خودگردان در نظریهٔ احتمال توسعه یافتند: این موضوع به‌ویژه در پرسش‌هایی که از تعمیم مفهوم آربیتراژ برخاستند، چه در فضای فرآیندهای بیش از پیش کلی، و چه در مدل‌سازی‌های واقعی‌تر برای فعالیت‌های بازارها (در نظر گرفتن دامنک خرید و فروش [8] در اعلان‌ها، و بحث در مورد کران‌های متنوع برای درجهٔ آزادی مدیران و از این قبیل) دیده می‌شود.

آموزش

توسعهٔ ریاضیات مالی در دههٔ ۱۹۸۰ از نظر آموزش ریاضیات کاربردی، بیشتر در نظریهٔ

1) Quantitative Finance 2) Denis Taley 3) Inria 4) Malliavan Calculus
5) Mean-Variance 6) Föllmer-Sanderman 7) Lévy Processes 8) Bid-Ask Spread

احتمال، با انگیزش اولیهٔ نیکولاس بولو[۱]، نیکول ال کاروی[۲]، لور الی[۳]، هیلت گمان[۴]، ژان ژاکود[۵]، مونیک ژان بلان[۶]، دمین لامبرتون[۷] و برنارد لاپیر[۸] تأثیر قوی داشته است. از اواخر دههٔ ۱۹۸۰، اولین درس‌های حسابان تصادفی با هدف‌گذاری مالی ظاهر شدند، به‌ویژه در اکول ناسیونال دِپونت شوسه[۹] سپس به سرعت در اکول پلی‌تکنیک[۱۰]. قابل توجه است که دانشگاه‌ها هم نقش مهمی در این توسعه برعهده گرفتند، به‌ویژه در مجتمع دانشگاهی ژوسیو[۱۱]، که همزمان درس‌هایی ویژه‌ی مالی در DEA (= درس‌های تحصیلات تکمیلی) احتمال هم در دانشگاه‌های پاریس شش و هم پاریس هفت تدریس می‌شد. موفقیت بلافصل بود، و در طول سال‌ها هم همین‌طور باقی‌ماند؛ در حالی که اولین دوره‌ی تخصصی احتمال و مالی در DEAی احتمال و کاربردهای آن در دانشگاه پاریس شش (با همکاری اکول پلی‌تکنیک در زمینه‌ی مالی) در ۱۹۹۱ تنها ۵ فارغ التحصیل داشت، بعد از ۲۰۰۳ هر دوره مجموعاً بیش از ۸۰ فارغ التحصیل داشته است. حرکت مشابهی در دانشگاه پاریس هفت هم مشاهده شده است. در همین مدت، اصطلاحات قدیمی DEA و $DESS$ به $M2$ (= سال دوم تحصیلات تکمیلی) تغییر یافت، با کیفیت خوبی در تحقیقات و حرفه‌ای بودن. امروزه، اگر تنها منطقه‌ی پاریس و حومهٔ آن (ایل ـ دِـ فرانس[۱۲]) را در نظر بگیریم و تنها این آموزش‌ها را، سه کارشناسی ارشد دیگر نیز با ریاضیات مالی هدف‌گذاری و با موفقیت توسعه یافتند: DEAی ریاضیات کاربردی در علوم اقتصادی پاریس نه (که به کارشناسی ارشد ۲ $MASEF$ تبدیل شده است) و کارشناسی ارشد ۲ تحلیل و سیستم‌های تصادفی (با گردش مالی) در دانشگاه مارن ـ لا ـ وکه[۱۳]، $DESS$ مهندسی مالی در اِوری‌ـوَل ـ دِسون[۱۴]. دانشجویانی که در این آموزش‌های متفاوت درگیر می‌شوند از نقاط قوت تیم‌های تحقیقاتی محلی مختلف بهره می‌برند (مدل‌سازی، حسابان تصادفی، احتمال عددی، اقتصادسنجی، آمار و ...). چیزی بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ دانشجو هر ساله از این آموزش‌های «منطقه‌ی پاریس» (که اغلب به‌طور مشترک با مدارس مهندسی با کسب و کار برگزار می‌شوند و مورد استقبال بسیاری از دانشجویان این مؤسسات، که به‌دنبال آموزش‌های سطح بالای ریاضیات مالی هستند، قرار می‌گیرند) فارغ التحصیل می‌شوند. می‌توان برآورد کرد که حدود ۱۵٪ از دانشجویان اکول پلی‌تکنیک، بسیاری از آموزش‌های تخصصی در ریاضیات مالی در مدارس مهندسی شکوفا شده‌اند، مانند $ENPC$، $ENSAE$، $Sup'Aero$، در تولوز[۱۵] یا انسی‌ماگ[۱۶] در گرونوبل[۱۷]، در این حوزه بسیار پیشرو هستند.

صرفنظر از ویژگی‌ها، تخصص و یا جهت‌گیری، این آموزش‌ها برای کوانت‌ها[۱۸] (متخصصین مالی کمّی)، هستند. این آموزش‌ها حول سه جهت اصلی سازماندهی شده‌اند: مدل‌سازی (که اساساً

1) Nicolas Bouleau 2) Nicole El Karoui 3) Laure Élie 4) Hélyette Geman 5) Jean Jacod 6) Monique Jeanblanc 7) Damien Lamberton 8) Bernard Lapeyre 9) École nationale des Ponts et Chaussées 10) École Polytechnique 11) Jussieu 12) Ile-de-France 13) Marne-la-Vallée 14) Evry-Val-d'Essonne 15) Toulouse 16) Ensimag 17) Grenoble 18) Quant

بر پایهٔ حسابان تصادفی است)، احتمال و آنالیز عددی، بهینه‌سازی، برنامه نویسی الگوریتمی و کامپیوتری ([۱۰] را برای جزئیات بیشتر ببینید). باید در نظر داشت که واحدهای تحقیقاتی بانک‌ها که بسیاری از کوانت‌ها کار خود را از آن‌جا آغاز می‌کنند عموماً به‌عنوان ارائه کنندهٔ خدمات به سایر بخش‌های مؤسسهٔ خود هستند (اتفاق‌های معاملات، مدیران، ...). بنابراین آن‌ها مانند ساختارهای کوچک PME (مخفف فرانسه برای کسب و کارهای کوچک) کار می‌کنند. این موضوع در مؤسسات با اندازه‌های نسبتاً کوچک درست‌تر است (انجمن‌های مدیریت، صندوق‌ها و غیره). بنابراین یک نیاز واقعی برای برنامه‌های متنوع وجود دارد.

تأثیر ریاضیات مالی را می‌توان در زمینه‌هایی که در ابتدا ریاضی‌مدار نبوده‌اند، مشاهده کرد. این موضوع به‌ویژه در برنامه‌های آموزشی قدیمی‌تر که عموماً تحصیلات تکمیلی در اقتصاد یا مدیریت بوده‌اند (DEAی بانکداری و مالی پاریس I، ۲۰۳ در پاریس ۹، آموزش‌های بیمه‌سنجی[1] در لیون II یا $ENSAE$ و ...)، درست است؛ همچنین در مدارس کسب و کاری مانند HEC یا $ESSEC$، ریاضیات برای مالی اغلب جایگاه قابل توجهی دارد. این واقعیت موقعیتی را که فرهنگ ریاضیات کاربردی در حوزه‌های از پیش کم‌تر کمّی به خود اختصاص داده است، نشان می‌دهد، مانند مدیریت یا فروش، معاملات دارایی‌ها یا محصولات مالی. اگر فرانسه موقعیت مهمی در آموزش کوانت‌ها دارد، که عمدتاً به دلیل اهمیتی است که به‌طور سنتی به ریاضیات در آموزش جوانان داده می‌شود، امکانات شغلی در مالیِ بازار به‌وضوح مستقیماً مرتبط با اهمیت مکان‌های مالی است. امروزه اروپای مالی و اشتغالی که همراه آن است اساساً در لندن توسعه می‌یابد، جایی که، هر ساله تعداد بیشتری از فارغ‌التحصیلان جوان آن‌جا، آن‌چه را که به‌طور نظری چگونگی‌اش را آموخته‌اند در ساختمان شش‌گوشه‌اش به کار می‌برند. لندن تنها مقصد آن‌ها نیست: بسیاری از آن‌ها از پاسخ به تقاضای تمام دنیا اجتناب نمی‌کنند و به دنبال بخت خود به نیویورک یا توکیو یا ... می‌روند.

ظرفیت جذب این آموزش‌ها با توجه به متن حاضر، برای دانشجویان خارجی با استعداد، کاملاً واضح است. اماً این جذابیت ممکن است به دلیل سدّ زبانی و برخی سازگاری‌ها به سیستم فرانسوی کاهش یابد، به‌ویژه در روش ارزشیابی، که تقریباً به‌طور منحصر به فرد، حل کردن مسائل در یک زمان محدود است، محکی که همه جا در باقی دنیا به کار گرفته نمی‌شود، و برای آن دانشجویان خارجی آمادگی خوبی ندارند. برعکس، سیستم دانشگاهی تقریباً مجانی فرانسه، اگر دوام داشته باشد، یک امتیاز بزرگ است. این یک ویژگی فرانسوی است، که در مقایسه با آموزش‌های مشابه در ایالات متحده و بریتانیا که هزینهٔ آن بالغ بر چندین ده هزار یورو است شگفت‌انگیز است.

به‌عنوان نتیجه‌گیری، توجه کنیم که این پیام در میان نسل آینده انتشار یافته است و می‌توان دانشجویان کارشناسی و دانشجویان مدارس مهندسی بیشتر و بیشتری را دید که ــ بعضی اوقات با دشواری ــ تحصیلات ریاضی پیشرفته‌ای را دنبال می‌کنند با هدف یکتای دست‌یابی به شغل‌هایی در مالی بازار.

1) Actuaries

چه از این موضوع به وجد آییم و چه به رقّت درآییم، حسابان تصادفی و توسیع آن احتمال و ریاضیات کاربردی، طی ۱۵ سال اخیر به جادهٔ دسترسی حوزهٔ علم به شغل‌های مالی بازار تبدیل شده‌اند. در این لحظه، این رشته یک «بزرگراه» است، آینده خواهد گفت ....

مراجع

[1] Artzner, P., Delbean, F., Elber, J. M., Heath, D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, **9**(3): 203-228, 1900.

[2] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, Série 3, janvier, **17**: 21-86, 1900.

[3] Black, F., Schoels, M., *The Pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economiy, **81**: 637-654, 1973 (May-June).

[4] Cont, R., Tonkov, P., *Financial modelling with jump processes*, Financial Mathematics Series, Chapman & HallCRC, Boca Raton, FL, 2004.

[5] Cox, J.C, Ross, M.Rubinstein, *Option Pricing: a Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, **7**: 259-261, 1979.

[6] Dana, R. A., Jeanblanc, M., *Financial Markets in Continuous Time*, Springer Finance. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2003. Secound Edition (2007).

[7] Delbean, F., Schachermayer, W., *The Fundamental Theory of Asset Prricing for Bounded Stochastics Processes*, Mathematische Annalen, **312**(2): 215-250, 1998.

[8] Duffie, D., *Modéles dynamiques d'évaluation*, P.U.F., Paris, 1974.

[9] El Karoui, N, *Mesures et Couverture de Risques dans les Marchés Financiers*, MATAPLI, **69**: 43-66, 2002.

[10] El Karoui, N., Jeanblanc, M., Shreve, S. E., *Robustness of the Black and Scholes formula*, Mathematical Finance, **8**(2): 93-126, 1998.

[11] El Karoui, N., Pagés G., *Comment Devenir Quant?*, http://www.maths-fi.com/devenirquant.asp, 2004.

[12] Follmer, H., *Probabilistic Aspects of Financial Risk*, Plenary Lecture at the Third European Congress of Mathematics, Proceeding of the European Congress of Mathemaics, Barcelona, 2000, Barkhauser, 2001.

[13] Follmer, H., Schied A., *Stochastic Finance*, Vol. 27, de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004, 2end Edition. An Introduction in Discrete Time.

[14] Garman, M., Kohlhagen, S.,*Foreign Currency Option Values*, Journal of Internatinal Money and Finance, **2**: 231-237, 1983.

[15] Geman, H., Madan, D., Pliska, S. R., Vorst, T., *Mathematical Finance Bachelier Congress 2000*, Springer Finance. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2002. Selected papers from the1st World Congress of the Bachelier Finance Society held in Paris, June 29-July 1, 2000.

[16] Gobet, E., Pagés, G. and Yor, M.,*Mathematics and Finance*, Aspects of Mathematical finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, pp: 63-76.

[17] Harrison, M., Kreps D., *Martingales and Arbitrages in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economics Theory, **29**(3): 381-408, 1979.

[18] Harrison, M., Pliska, S.,*Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, Stochastic Processes and Their Applications, **11**(3): 215-260, 1981.

[19] Hull, J. C.,*Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International, Editions. Upper Saddle River, Prentice Hall, NJ, 2003.

[20] Karatzas, I., Shreve, S.H.,*Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin Heidelberg New Yorg, 1998.

[21] Lamberton, D., Lapeyre, B.,*Introduction to stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall. Boca Raton, FL, 1996. Second Edition (2007).

[22] Lamberton, D., Priaulet, P.,*Produits de taux d'intéret: Méthodes dunamiques d'évaluation et de couverture*, Économica, 2000.

[23] Merton, R. C., *Theory or rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Managment Science, **4**: 141-183, 1973.

[24] Merton, R. C., *Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3**: 125-144, 1976.

[25] Pagés, G., Bouzitat, C.,*En passant par hasard, les probabilités dans la vie quotidienne*, 3é édition, Vuibert, Paris, 2003.Partie IV, La Bourse et la vie: 185-258.

[26] ROGERS, L.C.G., TALAY, D.,*Numerical Methods in Finance*, Publications of the Isaac Newton Institute series, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[27] RONCALLI, T.,*La gestion des riques financiers*, Économica, Paris, 2004.

مترجمین: زانیار احمدی، zaniara3@gmail.com
شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت اقتصاد، zamani@sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۳۱ تا ۶۰

سی سال حدس L^p و مسائل وابسته به آن

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرح نسبتاً مفصلی از حدسِ مشهور به حدس L^p را بازگو خواهیم کرد. این حدس مشهور در سال ۱۹۶۱ مطرح شد و تنها در سال ۱۹۹۰ پس از سعی و تلاش بسیاری از ریاضیدانان جواب نهایی یافت. همچنین، نتایجی را دربارهٔ عمل پیچش روی فضاهای لبگ وابسته به گروه موضعاً فشرده، که به خودی خود اهمیت دارند، و نامساوی معروف یانگ، که پیوند مستقیمی با حدس مذکور دارد، عرضه خواهیم کرد. در پایان نیز به برخی مسائل حل نشده اشاره می‌کنیم.

۱ مقدمه

پ. هالموس زمانی گفته بود: «مسائل قلب ریاضیات هستند». این گفته نه فقط در ریاضیات که در دیگر معارف بشری نیز صادق است. در این مقاله به شرح و تفصیل یکی از مسائل جالب در آنالیز هارمونیک، معروف به حدس L^p، خواهیم پرداخت. حدس L^p پس از ۳۰ سال تلاش مداوم سرانجام در سال ۱۹۹۰ به‌دست ساِکی حل شد. اما این پایان داستان نبود چرا که بعد از آن، حدس L^p برای فضاهای وزندار مطرح شد، مسئله‌ای که هنوز هم به‌طور کامل حل نشده است و در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است.

در این مقاله، پس از این مقدمه، در بخش ۲، اندکی آنالیز هارمونیک و نظریهٔ جبرهای باناخ را که برای فهم مقاله ضروری است بیان خواهیم کرد. در بخش ۳، فضاهای لبگ L^p را معرفی و برخی خواص جزئیت بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. همچنین، در این بخش بسته بودن فضاهای L^p تحت ضرب نقطه‌ای را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۴ به نامساوی معروف یانگ که یکی از مهم‌ترین نامساوی‌ها در آنالیز فوریه است می‌پردازیم، و گسترش‌های مخلتف این نامساوی و صورت‌های بهینه آن را معرفی‌می‌کنیم. این نامساوی نقطهٔ شروع بسیاری از نتایج مهم در آنالیز فوریه و آنالیز هارمونیک مجرد بوده است و ربط وثیقی با حدس مورد بررسی ما دارد. عملگرهایی که برحسب

پیچش تعریف می‌شوند و همچنین برخی مسائل وابسته به تجزیهٔ جبرهای گروهی را در بخش ۵ بررسی خواهیم کرد. پیش‌زمینه‌های حدس L^p و اهم نتایج مربوط را با برخی ایده‌هایِ اثبات آن‌ها در بخش ٦ خواهیم آورد. سرانجام در بخش ۷، به برخی مسائل و تعمیم‌های مربوط به حدس L^p که تا این زمان حل نشده‌اند و می‌توانند پرسش‌هایی برای تحقیقات دیگر باشند اشاره خواهیم کرد.

۲ اندکی آنالیز هارمونیک و جبرهای باناخ

برای فهم این مقاله پیش‌نیازهای کمی از آنالیز هارمونیک مورد نیاز است که آن‌ها را می‌توان در هر کتاب مقدماتیِ آنالیز هارمونیک یا آنالیز تابعی یافت؛ مثلاً به [۲۱] ، [۳۱] یا [۷٦] مراجعه کنید. همچنین، در این باره مقالهٔ روشن‌گر [۷۷]، که شامل مثال‌های متنوعی نیز هست، مفید است.

منظور از یک گروه توپولوژیک عبارت است از یک گروه که مجهز به یک توپولوژی موضعاً فشرده هاسدورف است به طوری که اعمال ضرب و وارون تحت آن توپولوژی پیوسته‌اند. فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع و توپولوژی معمولی و همچنین، هر گروه جبری با توپولوژی گسسته، مثال‌هایی از یک گروه توپولوژیک هستند. یکی از بنیادی‌ترین حقیقت‌ها در آنالیز هارمونیک، که آن را اساساً آ. هار[1] ثابت کرد، این است که هر گروه توپولوژیک موضعاً فشرده دارای یک اندازه بورل منظم انتقال پایای چپ است که تا حد یک مضرب ثابت یکتاست. اندازه مذکور را با λ نشان می‌دهیم و آن را اندازه هار چپ می‌نامیم. پس λ یک اندازه بورل است که روی مجموعه‌های باز، منظم درونی و روی هر مجموعه بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های فشرده دارای مقداری متناهی است و همچنین، اندازه هر مجموعهٔ باز اکیداً مثبت است. و مهم‌تر این که برای هر مجموعه بورل E و هر $x \in G$ داریم $\lambda(xE) = \lambda(E)$. به طریق مشابه می‌توان اندازه هار راست را تعریف کرد. اندازه لبگ n بعدی روی گروه جمعی $\mathbb{R}^n$ در واقع همان اندازه هار چپ و راست روی $\mathbb{R}^n$ است. چنانچه اندازه‌های هار چپ و راست یکی باشند گروه مذکور را تک پیمانه‌ای می‌نامیم. به طریق دیگری می‌توانیم تفاوت اندازه هار چپ و راست را بسنجیم: برای مجموعه بورل با اندازه اکیداً مثبت A تابع $\Delta(x) = \frac{\lambda(Ax)}{\lambda(A)}$ را روی G تعریف می‌کنیم. تابع Δ یک تابع اکیداً مثبت و پیوسته روی G است و آن را تابع پیمانه‌ای می‌نامند. چنانچه $\Delta = ۱$ گوییم G تک‌پیمانه‌ای است؛ البته این با تعریف بالا معادل است. گروه‌های آبلی و فشرده دو نمونه از گروه‌های تک پیمانه‌ای هستند. همچنین، برای آن‌هایی که از گروه‌های لی وحشتی ندارند، یادآوری می‌کنیم که گروه‌های لی پوچ‌توان همبند و نیم‌ساده همبند هردو تک پیمانه‌ای هستند. درباره گروه‌های میانگین‌پذیر و لی می‌توانید، به‌ترتیب، در [۴٦] و [۳۵] اطلاعات بسیاری بیابید.

فضای اندازه‌های رادون کراندار روی گروه موضعاً فشرده G را با $M(G)$ نشان می‌دهیم و آن را با نرم تغییرات کلی $\|\cdot\|$ مجهز می‌کنیم. اگر f, g دو تابع اندازه‌پذیر بورل و $\mu \in M(G)$، عمل

1) A. Haar

پیچش بین آن‌ها را (به‌شرط وجود) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})\,d\lambda(y), \quad \mu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x)\,d\mu(y) \quad (y \in G).$$

فرض کنید A یک فضای برداری (روی میدان اعداد مختلط یا حقیقی) باشد. همچنین فرض کنید A مجهز به یک عمل ضرب باشد که با آن تشکیل یک جبر به مفهوم معمول بدهد. گوییم A یک جبر نرم‌دار است اگر A مجهز به یک نرم $\|.\|$ باشد به‌طوری‌که برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. توجه کنید شرط اخیر می‌تواند با $\|ab\| \leq k\|a\|\,\|b\|$ که در آن k عدد ثابت مثبتی است، جایگزین شود و در این حالت به لحاظ توپولوژیکی و جبری چیزی از دست نخواهد رفت. اگر جبر نرم‌دار A نسبت به نرم داده شده کامل باشد آن را جبر باناخ می‌نامند. برای نمونه، اگر فضای توابع پیوسته کراندار مختلط مقدار روی G را با $C_b(G)$ نشان دهیم، $C_b(G)$ با اعمال معمولی جمع و ضرب توابع به همراه نرم یکنواخت تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد. مجموعهٔ تمام توابع پیوسته روی G که در بی‌نهایت صفر شوند را با $C_\circ(G)$ نشان می‌دهیم، $C_\circ(G)$ یک زیر جبر باناخ از $C_b(G)$ است. زیرمجموعه متشکل از توابع در $C_\circ(G)$ با محمل فشرده را با $C_{\circ\circ}(G)$ نشان می‌دهیم.

فضای نرمدار $\mathcal{L}$ را که مجهز به یک رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشد به‌طوری که اعمال جمع و ضرب عددی با رابطه ترتیب داده‌شده سازگار باشد؛ یعنی برای هر $a,b,c \in \mathcal{L}$ و هر عدد حقیقی مثبت k، اگر $a \leq b$ آن‌گاه $a+c \leq b+c$، $ka \leq kb$ و برای $\circ \leq c$، $ac \leq bc$ و به‌علاوه، هر زیرمجموعهٔ دو عضوی از $\mathcal{L}$ دارای سوپریمم و اینفیمم (به معنای معمول در مجموعه‌های مرتب) باشد را یک شبکه نرمدار و اگر $\mathcal{L}$ فضای باناخ باشد شبکهٔ باناخ می‌نامند. اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{V}$ دو شبکه نرمدار باشند عملگر خطی $T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}$ را مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر $v \geq \circ$، $T(v) \geq \circ$.

اثبات قضیه مقدماتی زیر را می‌توان در هر کتاب مقدماتی درباره شبکه‌های برداری یافت؛ مثلاً به [۶] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲ اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{V}$ دو شبکه باناخ و T یک عمگر خطی مثبت از $\mathcal{L}$ به $\mathcal{V}$ باشد، آن‌گاه T پیوسته است.

۳ فضاهای لبگ L^p: جزئیت و حاصل ضرب نقطه‌ای

آنچه را از نظریه اندازه و انتگرال نیاز داریم در هر کتاب آنالیز حقیقی می‌توانید بیابید؛ مثلاً به [۷۴] یا [۷۶] مراجعه کنید. فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. برای $\circ < p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$L^p(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_p := \int_X |f|^p\,d\mu < +\infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

و برای $p = \circ, \infty$ به‌ترتیب تعریف می‌کنیم

$$L^\circ(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \mu(\{x \in X : f(x) \neq \circ\}) < \infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

$$L^\infty(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_X |f| < +\infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

گاهی اوقات به‌جای $L^p(X,\mu)$ می‌نویسیم $L^p(\mu)$. نکته‌ای را که همگان می‌دانند ولی هیچ‌گاه آن را درنظر نمی‌گیرند و البته در موارد نادری هم به خطاهای عجیبی می‌انجامد، متذکر می‌شویم و آن اینکه اعضای $L^p(\mu)$ توابع نیستند بلکه ردهٔ هم‌ارزی از توابع هستند؛ توابعی را که تقریباً همه‌جا برابرند یکی می‌گیریم. اگر $1 \leq p < \infty$، می‌دانیم $L^p(\mu)$ با اعمال نقطه‌ایِ جمع و ضرب اسکالر و نرم $\|.\|_p$ فضای باناخ است.

برای $0 < p < 1$، تابع $\|\cdot\|_p$ نرم تعریف نمی‌کند. در واقع دراین حالت

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \|f+g\|_p \leq 2^{(1/p)-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

اما اگر برای $0 < p < 1$، تعریف کنیم $d(f,g) = \int_X |f-g|^p\, d\mu$ و برای $p = 0$، $d(f,g) = \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\})$، در این صورت یک متریک کامل روی $L^p(\mu)$ برای $0 \leq p < 1$ به‌دست می‌آید. نکتهٔ دانستنی دربارهٔ $L^p(\mu)$ برای $0 < p < 1$ این است که دوگان توپولوژیک آن فقط از صفر تشکیل می‌شود اگر و تنها اگر μ غیر اتمی باشد؛ یعنی، مجموعهٔ اندازه‌پذیر E موجود نباشد به طوری که $\mu(E) > 0$ و اگر $F \subseteq E$ اندازه‌پذیر باشد آن‌گاه $\mu(F) = 0$ یا $\mu(E \setminus F) = 0$.

پس از این مقدمات به مسئلهٔ ارتباط بین فضاهای L^p می‌پردازیم. این نتایج اساساً به ب. سابرامانیان[1] [۶۰] متعلق‌اند. اثبات‌های دیگری در [۶۲] ارائه شده است. همچنین تعمیم آن‌ها در [۷،۱۸،۴۱] آمده است؛ [۴۳] را نیز ببینید.

در قضیهٔ زیر بستار زیر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی گسترش یافته را با $\mathrm{cl}(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۳ [**آلوارز ــ ۱۹۸۸**] فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p,q \in [0,+\infty]$.

۱ــ فرض کنید $p \neq \infty$. در این صورت $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ اگر و تنها اگر $p = q$ یا $p < q$ و $0 \notin \mathrm{cl}(\{\mu(A) : A \in \Sigma, 0 < \mu(A) < \infty\})$ یا $p > q$ و $\infty \notin \mathrm{cl}(\{\mu(A) : A \in \Sigma, 0 < \mu(A) < \infty\})$.

۲ــ $L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ اگر و تنها اگر $q = \infty$ یا $\mu(X) < \infty$.

از قضیهٔ بالا به‌راحتی شرایط لازم و کافی برای تساوی فضاهای L^p به‌دست می‌آید که از بیان صریح آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. نتیجهٔ زیر حالت خاصی از قضیهٔ بالا است که شاید صورت آن آشناتر و برای استفاده راحت‌تر باشد.

قضیه ۲.۳ [**سابرامانیان ــ ۱۹۷۸**] فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p,q \in (0,+\infty)$. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱) به‌ازای برخی $p < q$ها داریم $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

۲) به‌ازای هر $p < q$ داریم $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

---

1) B. Subramanian

۳) $\sup\{\mu(A) : A \in \Sigma, \mu(A) < \infty\} < \infty$.

اکنون به بسته بودن $L^p(\mathrm{X}, \mu)$ تحت عمل ضرب نقطه‌ای توابع می‌پردازیم. بد نیست بدانیم س. آلوارز[1] در [۸] چیزی موسوم به حساب فضاهای L^p را بسط داده است. در اینجا ما فقط یک نمونه از آن قضیه‌ها را ذکر می‌کنیم. اثبات این قضیه کاربرد سرراستی از نامساوی هلدر است.

گزاره ۳.۳ [آلوارز ـ ۱۹۹۲] فرض کنید (X, Σ, μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p, q \in [0, \infty]$. در این صورت

$$L^p(\mu).L^q(\mu) := \{fg : f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)\} = L^{\frac{pq}{p+q}}(\mu).$$

با این قرارداد که اگر مثلاً $q = \infty$ قرار می‌دهیم $pq/(p+q) = p$ و برای $q = 0$، $pq/(p+q) = 0$.

حکم زیر نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۱.۳ و گزارهٔ ۳.۳ است.

نتیجه ۴.۳ فرض کنید (X, Σ, μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p \in (0, \infty)$. در این صورت $L^p(\mu)$ تحت ضرب نقطه‌ای بسته است اگر و تنها اگر $\inf\{\mu(A) : A \in \Sigma, \mu(A) > 0\} > 0$.

حال اجازه دهید به ساختار فضای اندازهٔ مورد بحث اندکی توپولوژی و جبر اضافه کنیم و ببینیم چه نتایج جالبی حاصل می‌شود. یعنی اجازه دهید برگردیم به آنالیز هارمونیک!

اگر G گروه موضعاً فشرده و λ اندازهٔ هار چپ روی آن باشد، فضای لبگ $L^p(G, \lambda)$ را با $L^p(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین به تفاوتِ تعریف فضای $L^\infty(G)$ در آنالیز هارمونیک و حقیقی توجه کنید: $L^\infty(G)$ فضای باناخ توابع مختلط ـ مقدار و بورل اندازه‌پذیر است که موضعاً تقریباً همه جا روی G کراندار هستند. به عبارت دیگر، اعضای $L^\infty(G)$ خارج از یک مجموعه موضعاً پوچ، کراندار هستند.

به یاد بیاورید که گروه موضعا فشرده، گسسته است اگر و تنها اگر اندازهٔ هر مجموعهٔ تک نقطه‌ای اکیداً مثبت باشد. این نکته و نتیجهٔ ۴.۳ گزارهٔ جالب زیر را نتیجه می‌دهد.

گزاره ۵.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $p \in (0, \infty)$. در این صورت $L^p(G)$ نسبت به عمل ضرب نقطه‌ای توابع بسته است اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

حقیقت‌هایی مثل گزارهٔ بالا نشان می‌دهند چرا ضرب نقطه‌ای خیلی بر سر زبان آنالیز هارمونیک‌دان‌ها نمی‌آید. حقیقت این است که ضرب نقطه‌ای توابع نقش ساختار گروه را به‌شدت کم‌رنگ می‌کند و اجازه نمی‌دهد جبرهای جذابی روی گروه‌ها بنا کنیم؛ البته گاهی اوقات هم چاره‌ای نیست و ضرب نقطه‌ای تنها عمل دردسترس است. بنابراین، این عمل، عملِ مناسبی برای ساخت جبرهای توابع نیست و نمی‌توان آنالیز هارمونیک را روی آن بنا کرد. عمل مناسب برای آنالیز هارمونیک همان عمل پیچش است (حداقل تا این هنگام که این مقاله نوشته می‌شود!) که در

1) Sergio Andres Alvarez

بخش بعد دربارهٔ گسترهٔ وسیعی از مسائلی که به آن مربوط می‌شوند صحبت خواهیم کرد؛ دراین‌باره [۷۵] را ببینید. بازهم نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۱.۳:

گزاره ۶.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $p, q \in (0, \infty)$. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند.

۱− برای $p < q$، $L^p(G) \subseteq L^q(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۲− برای $p < q$، $L^q(G) \subseteq L^p(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۳− برای $p \neq q$، $L^q(G) = L^p(G)$ اگر و تنها اگر G متناهی باشد.

بی‌مناسبت نیست که به روابط فضاهای $L^p(G)$ با فضای توابع پیوسته اشاره کنیم. مقایسهٔ این فضاها در برخی موارد آسان و در برخی دیگر بسیار دشوار است. بازهم خاطر نشان می‌کنیم که فضاهای L^p فضای رده‌های هم‌ارزی از توابع هستند. بنابراین توابعی که تقریباً همه جا (یا در $L^\infty(G)$، موضعاً تقریباً همه‌جا) با هم برابرند را یکی می‌گیریم.

قضیهٔ زیر حالت‌های پر کاربرد را شامل می‌شود و قضیهٔ جالبی به‌نظر می‌رسد.

قضیه ۷.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. احکام زیر برقرارند.

۱− اگر $C_b(G) = L^\infty(G)$؛ یعنی هر تابع در $L^\infty(G)$ موضعاً تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته برابر باشد، در این صورت G گسسته است.

۲− اگر همسایگی U از عضو همانی G موجود باشد به‌طوری‌که هر تابع در $L^\infty(G)\chi_U := \{f\chi_U : f \in L^\infty(G)\}$، موضعاً تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته روی G برابر باشد در این صورت G فشرده است.

۳− $C_0(G) \subseteq L^1(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۴− $L^1(G) \subseteq C_0(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۵− برای $1 \leq p < q \leq \infty$، $L^1(G) \cap L^p(G) \subseteq L^q(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۶− برای $1 \leq p \leq \infty$، $L^1(G) \cap L^p(G) \subseteq C_b(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

برهان. اثبات (۱) را در [۳۲]، قضیهٔ ۲۰.۳۷، می‌توانید ببینید؛ اثبات آن مبتنی بر استفاده ظریف و البته معمول از قضیهٔ کاکوتانی ـ کدیرا است. قسمت (۲) تعمیمی از (۱) است با اثباتی نه‌چندان ساده که ایدهٔ آن تحویل به حالت (۱) است؛ برای اثبات به [۵۸] مراجعه کنید.

دیگر قسمت‌ها می‌توانند تمرین‌های آموزنده (و شاید قدری دشوار) باشند؛ اثباتی از آن‌ها را

می‌توانید در [۲۵،۵۸] بیابید.

۴ صورت بهینهٔ نامساوی یانگ و مسائل وابسته به آن

نابرابری‌ها یکی از ابزارهای پایه‌ای در آنالیز فوریه هستند. قضیه هاسدورف ــ یانگ نتیجه‌ای کلاسیک است که تقریبی برای تابع و تبدیل فوریهٔ آن در نرم$\|.\|_p$ به‌دست می‌دهد. به یاد بیاورید که اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ باشد تبدیل فوریهٔ آن با دستور

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi xy} f(y)dy$$

برای $x \in \mathbb{R}^n$ داده می‌شود. تبدیل فوریه برای $1 \leq p \leq 2$ در نامساوی $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ صدق می‌کند؛ که در اینجا و در سراسر این بخش p' مزدوج نمایی p را نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان با قضیهٔ تحدب ریس به‌دست آورد. نامساوی فوق را اولین بار و. هـ. یانگ[1] درسال ۱۹۱۲ به‌منظور تعمیم قضیهٔ پارسوال برای سری‌های فوریه برای فضاهای L^p روی گروه دایرهٔ یکه $\mathbb{T}$ ، که همان گروه خارج قسمتی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ است، اثبات کرد. از آنجایی که رابطه‌ای اساسی بین تبدیل فوریه و عمل پیچش برقرار است، یانگ مشاهده کرد که می‌توان نامساوی بالا را برای تبدیل فوریه از یک نامساوی برحسب پیچش به‌دست آورد. درواقع، با توجه به این که $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ برای f, g انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$، یانگ با استفاده زیرکانه از نامساوی هلدر ثابت کرد که برای $1 \leq p, q, r \leq \infty$ به طوری که $1/r = 1/p + 1/q - 1$ داریم

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \qquad (g \in L^q(\mathbb{T}), f \in L^p(\mathbb{T})).$$

این نامساوی دراین حالت دقیق است یعنی می‌توان توابعی یافت که تساوی برای آن‌ها برقرار باشد.

تیچمارش[2] در ۱۹۳۷ برای $1 < p \leq 2$ نامساوی $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ را برای توابع در $L^p(\mathbb{R})$ اثبات می‌کند. بابنکو[3][۹] در ۱۹۶۱ نشان می‌دهد این نامساوی بهترین حالت ممکن نیست و نامساوی را بهبود می‌بخشد و آن را برای pهایی که مزدوج نمایی آن‌ها عددی زوج است، با بهترین ضریب ممکن اثبات می‌کند. پس از او ویلیام بکنر[4] در ۱۹۷۵ نتیجه را با الهام از کار بابنکو برای $1 \leq p \leq 2$ و توابع در $L^p(\mathbb{R}^n)$ اثبات می کند [۱۲]. وی همچنین برای توابع $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ که $1 \leq p, q, r \leq \infty$، $1 + 1/r = 1/p + 1/q$ نشان می‌دهد

$$\|f * g\|_r \leq (A_p \, A_q \, A_{p'})^n \, \|f\|_p \|g\|_q$$

که در آن

$$A_m = \sqrt{\frac{m^{1/m}}{m'^{1/m'}}}$$

1) William Henry Young (1863-1942) 2) E. C. Titchmarsh(1899-1963) 3) K. I. Babenko

4) William Eugene Beckner(1941-)

و m' مزدوج نمایی m است. وی نشان می‌دهد این نامساوی بهترین حالت ممکن است و تساوی در آن اتفاق می‌افتد. بکنر در همان مقاله اشاره می‌کند که این نتایج برای تبدیل فوریه روی یک گروه آبلی موضعاً فشرده دلخواه با توجه به قضیهٔ ساختاری گروه‌های آبلی برقرار است. مقاله بکنر به گفتهٔ ی. ی. هیرشمن[1] مقاله‌ای دوران‌ساز است؛ زیرا برای اولین بار صورت بهینهٔ دو نامساوی مهم درآنالیز هارمونیک روی $\mathbb{R}^n$ را به‌دست می‌دهد. مقاله بکنر مستخرج از رسالهٔ دکتری او بود که در دانشگاه پرینستون تحت راهنمایی ا. م. اشتاین[2] گذرانده بود و به خاطر آن به دریافت جایزه سِیلم[3] نائل گردید.

نامساوی یانگ روی $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت معادل زیر بیان کرد:

$$\left|\int\int f(x)g(y-x)h(y)dy\,dx\right| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,\|h\|_t$$

که در آن $1/p + 1/q + 1/t = 2$ و $p, q, t \geq 1$. درسال ۱۹۷۶، هـ. ج. براسکمپ[4] و ی. هـ. لیب[5] نامساوی یانگ را به‌صورت بالا برای بیش از سه تابع تعمیم دادند [۱۴]، همچنین بهترین تقریب ممکن را برای آن به‌دست دادند. به‌علاوه، آن‌ها جهت عکس نامساوی فوق را که برای $0 < p, q < 1$ و $t < 0$ اتفاق می‌افتد، بررسی کردند. تعمیم آن‌ها از نامساوی یانگ به نامساوی براسکمپ ـ لیب معروف شد که تعمیم‌های بسیاری برای آن ارائه شده است؛ به [۱۶] و مراجع آن نگاه کنید. در ۱۹۹۸، بارت[6] اثباتی بسیار ساده‌تر برای نامساوی یانگ و عکس آن درحالت بهینه ارائه کرد [۱۱].

قضیه ۱.۴ [بارت ــ ۱۹۹۸] فرض کنید $p, q, r > 0$، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$، $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ نامنفی باشند. در این صورت اگر $p, q, r \geq 1$،

$$\|f * g\|_r \leq \left(\frac{c_q\,c_p}{c_r}\right)^n \|f\|_p\|g\|_q$$

و اگر $p, q, r \leq 1$،

$$\|f * g\|_r \geq \left(\frac{c_q\,c_p}{c_r}\right)^n \|f\|_p\|g\|_q$$

که در آن $c_t = \sqrt{\frac{t^{1/t}}{|t'|^{1/t'}}}$.

---

1) I. I. Hirschman, Jr.

۲) Elias Menachem Stein(1931-) ریاضیدان برجستهٔ بلژیکی که سال‌هاست استاد دانشگاه پرینستون است. وی شاگرد آنتونی زیگموند(۱۹۰۰–۱۹۹۲)، ریاضیدان لهستانی و یکی از بزرگترین آنالیزدان‌های قرن بیستم، بوده است. ترنس تائو و استیون ج. کرانتس از جمله شاگردان معروف وی هستند.

۳) جایزه‌ای که به افتخار رافائل سِیلم R. Salem، ریاضیدان یونانی، هر سال به ریاضیدانی که در حوزهٔ مورد علاقهٔ وی یعنی آنالیز فوریه کار برجسته انجام داده باشد تعلق می‌گیرد.

4) Herm J. Brascamp 5) Elliot H. Lieb 6) Franck Barthe

اما برای گروه موضعاً فشرده نامساوی یانگ را اولین بار آندره وی[۱] درکتاب معروفش [۶۳] اثبات کرد: اگر G گروه موضعاً فشرده و تک پیمانه‌ای باشد و $p,q \geq ۱$، $۱/r = ۱/p+۱/q-۱ \geq ۰$، $f \in L^p(G)$، و $g \in L^q(G)$ در این صورت $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

مسئلهٔ بهینه بودن نامساوی یانگ و همچنین هاسدورف ــ یانگ برای گروه موضعاً فشرده را هیوئیت و هیرشمن در ۱۹۵۴ مطرح کردند [۳۰]. ابتدا اجازه دهید تعریفی بیاوریم. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده (نه لزوماً آبلی) باشد. برای $p \geq ۱$ و $f \in L^p(G)$ عملگر L_f از $L^۲(G)$ با دستور $L_f(g) = f * g$ را در نظر بگیرید. اگر L_f روی $L^۲(G)$ کراندار باشد دراین صورت $\|L_f\|_\infty$ را برابر نرم عملگر L_f و در غیر این‌صورت تعریف می‌کنیم $\|L_f\|_\infty = \infty$. اگر L_f تصویر باشد $m(L_f)$ را برابر عدد حقیقی گسترش یافته $\|f\|_۲^۲$ تعریف می‌کنیم. تابعک m را می‌توان به یک پیمانهٔ مناسب به مفهوم سگال روی مجموعهٔ مناسبی از عملگرهای مثبت چنان گسترش داد که $m(|L_f|^۲) = \|f\|_۲^۲$؛ برای جزئیات بیشتر [۵۹] را ببینید. و بالاخره، برای هر $۱ \leq q < \infty$، تعریف می‌کنیم $\|L_f\|_q = m(|L_f|^q)^{۱/q}$. از تعریف، برای هر f، به دست می‌آید $\|L_f\|_\infty \leq \|f\|_۱$ و $\|L_f\|_۲ = \|f\|_۲$. آلدن ری کنزی[۲] در ۱۹۵۸ در [۳۶] نشان داد که اگر $۱ \leq p \leq ۲$ در این صورت $\|L_f\|_{p'} \leq \|f\|_p$. اگر G گروه آبلی باشد این نامساوی همان نامساوی معروف هاسدورف—یانگ است؛ یعنی $\|\hat{f}\|_p \leq \|f\|_p$، که $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است. این نامساوی را هیوئیت و هیرشمن در [۳۰] اثبات و شرط تساوی را نیز ارائه کرده‌اند. نامساوی مذکور در بالا برای گروه غیرآبلی و فشرده در [۳۲] و برای حالت کلی یعنی گروه تک‌پیمانه‌ای در [۵۶] اثبات شده است. راسو[۳] در [۵۶] توابعی را که برای آن‌ها نامساوی هاسدورف ــ یانگ به تساوی تبدیل می‌شود بررسی کرده و نشان داده است برای برخی گروه‌ها این نامساوی بهینه نیست. تابع یا توابعی را که نامساوی هاسدورف ــ یانگ و یانگ به تساوی تبدیل می‌شود توابع ماکسیمال می‌نامند. در [۳۲] و [۵۶] شرایطی را که توابع ماکسیمال می‌شوند بررسی کرده‌اند؛ برای اثبات‌های دیگر به [۲۲] مراجعه شود. اگر گروه تک‌پیمانه‌ای و بدون زیرگروه باز و فشرده باشد نامساوی‌های مذکور بهینه نیستند. همچنین، توابع ماکسیمال هستند اگر با یک زیرمشخصه معادل باشند؛ به [۳۲] و [۲۲] مراجعه شود. در [۴۴] نیز برخی نتایج برای دستهٔ خاصی از گروه‌های موضعا فشرده ارائه شده است.

آ. ر. کنزی و ا. م. اشتاین در ۱۹۶۰ آنالیز هارمونیک روی گروه $SL(۲, \mathbb{R})$، گروه ضربی

---

۱) André Weil (1906-1998) یکی از تاثیرگذارترین ریاضیدانان فرانسوی قرن بیستم بود که در نظریه اعداد و هندسه جبری کارهای بنیادی انجام داد. او همچنین از بنیان‌گذاران و اعضای فعال گروه بورباکی بود. کتاب مشهور او درباره گروه‌های توپولوژیک اولین کتابی است که در آن مفاهیم و نتایج بنیادی آنالیز هارمونیک مجرد گردآوری و اثبات شده است.

۲) Ray Alden Kunze(1928-) استاد بازنشسته دانشگاه جورجیا است. وی شاگرد ریاضیدان معروف اروینگ ایزرا سگال (۱۹۱۸—۱۹۹۸) بوده است. کتاب جبر خطی وی به فارسی ترجمه شده است.

۳) Bernard Russo(1939-) استاد بازنشسته دانشگاه کالیفرنیا، ایرواین.

ماتریس‌های حقیقی وارون پذیر ۲ × ۲، را به‌طور مفصل بررسی می‌کنند. این گروه یک گروه تک‌پیمانه‌ای و غیرفشرده است. نمایش یکانی این گروه را قبلاً گلفاند[۱] و نایمارک[۲] در ۱۹۴۷ و مستقل از آن‌ها بارگمان در ۱۹۴۷ بررسی کرده بودند. کنزی و اشتاین با تکنیک‌های تحلیلی، نمایش‌های این گروه را بررسی کردند و مشابه نامساوی هاسدورف ــ یانگ را برای آن اثبات کردند. یکی از نتایج این نامساوی این است که برای $1 \leq p < 2$، $f \in L^2(G)$ و $g \in L^p(G)$ داریم $f * g \in L^2(G)$ و $\|f * g\|_2 \leq C_p\|f\|_2\,\|g\|_p$. البته توجه می‌کنیم که با توجه به نامساوی یانگ در این حالت داریم $f * g \in L^r(G)$ که در آن $r = 2p/(2-p) > 2$. آن‌ها همچنین نشان دادند که اگر $f, g \in L^2(G)$، برای هر $q \in (2, \infty]$، $f * g \in L^q(G)$ و $\|f * g\|_q \leq C_q\|f\|_2\|g\|_2$. در اینجا C_p و C_q اعداد ثابتی هستند که به f و g وابسته نیستند. به‌وضوح این نامساوی‌ها برای گروه‌های فشرده برقرارند؛ درحقیقت، برای گروه فشرده G و هر $1 \leq p, q \leq \infty$ داریم $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^q(G)$. اما مثلاً برای گروه آبلی غیرفشرده‌ای مثل $\mathbb{R}$ برقرار نیستند؛ دلیل این مطلب را در صفحه ٦١ از [٣٦] می‌توانید بیابید، گزاره ۱.۵ را نیز ببینید. بنابراین، این سؤال مطرح می‌شود که برای چه گروه‌هایی یا چه وقت رابطهٔ $L^2(G) * L^p(G) \subseteq L^2(G)$ برقرار است. لیپسمن[۳] در ۱۹٦۹ این قضیه را برای $SL(n, \mathbb{C})$ تعمیم داد. به‌تدریج این مسئله به پدیده کنزی ــ اشتاین و گروه‌هایی که این خاصیت را دارند به گروه‌های کنزی ــ اشتاین معروف شد. پدیدهٔ کنزی ــ اشتاین برای گروه‌های خاص و اغلب با روش‌های تحلیلی بررسی شده است. اما کار اساسی و تأثیرگذار را م. کاولینگ[۴] در ۱۹۷۸ انجام داد [۱۷]. وی ثابت کرد اگر G گروه لی همبند نیم‌ساده با مرکز متناهی باشد و $1 \leq p < 2$ دراین صورت $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$. اثبات کاولینگ مبتنی بر کارهای دیگران و استفاده زیرکانه از نمایش کراندار یکنواخت و برخی قضایای آنالیز مختلط و همچنین تحلیل سری‌های اساسی به عنوان نمایش طولپا روی فضاهای مناسب L^p است.

اشاره کردیم که نامساوی یانگ یکی از پایه‌ای‌ترین قضایا در آنالیز هارمونیک است. اجازه دهید صورتی از آن را برای گروه موضعا فشردهٔ دلخواه (نه لزوماً تک‌پیمانه‌ای) بیان کنیم. اگر G گروه موضعاً فشرده و $1 \leq p, q, r \leq \infty$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1$ در این صورت

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \max(\|g\|_q, \|g^*\|_q)$$

---

۱) Israil Moiseevic Gelfand(1913-2009) ریاضیدان مشهور روس. وی یکی از خلاق‌ترین ریاضیدانان عصر ما بود. گلفاند شاگرد آندره کولموگوروف (۱۹۰۳—۱۹۸۷) بوده است.

۲)Mark Aronovich Naimark (1909-1978) شاگرد ریاضیدان معروف روسی مارک گریگورپویچ کرین (۱۹۰۷—۱۹۸۹) و همکار گلفاند بود. وی نقش مؤثری در تکامل نظریه جبرهای باناخ داشت. الکساندر هلمسکی ازجمله شاگردان معروف او است.

۳) Ronald Leslie Lipsman

۴) Michael George Cowling (1942-) استاد دانشگاه سوث ولز استرالیا

که در آن $g^*(x) = g(x^{-1})$ برای هر $x \in G$. از این‌رو $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*) \subseteq L^r(G)$.
توجه می‌کنیم اگر G تک پیمانه‌ای باشد در این صورت نامساوی یانگ به

$$L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G) \quad (*), \qquad ||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q \quad (**)$$

تبدیل می‌شود.

در اینجا به‌طور طبیعی چند سؤال مطرح می‌شود:

۱ــ چه وقت در $(*)$ تساوی به‌دست می‌آید؟

۲ــ آیا در $(*)$ اندیس r بهینه است؟

۳ــ آیا در $(**)$ ضریب ۱ در طرف راست بهترین ضریب ممکن است؟

هیوئیت[1] در ۱۹۶۴ تعمیمی از قضیهٔ معروف تجزیه کوئین[2] را برای مدول‌های باناخ اثبات می‌کند و به عنوان یک نتیجه ثابت می‌کند اگر $p \geq 1$ و G گروه موضعاً فشرده باشد آن‌گاه $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$ [۲۹]. البته پیش از این لومیس[3] در [۴۰] ثابت کرده بود که $L^1(G) * L^p(G) \subseteq L^p(G)$. اما در حالت کلی پاسخ پرسش اول: هیچ‌گاه جز در حالت بدیهی. از کارهای قابل توجه در این باره نتایج لئونارد ی. ه. یاپ[4] در ۱۹۷۰ و ۱۹۸۳ است [۶۵،۶۶].

قضیه ۲.۴ [یاپ ــ ۱۹۷۰] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده نامتناهی باشد و $p, q > 1$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1 > 0$. در این صورت زیرفضای تولید شده توسط $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ زیرفضای چگال و از ردهٔ اول در $L^r(G)$ است. همچنین، توابعی که در $L^r(G)$ به عواملی در $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ تجزیه نمی‌شوند زیرمجموعه‌ای چگال از ردهٔ دوم در $L^r(G)$ تشکیل می‌دهند.

---

۱) Edwin Hewitt(1920-1999) ریاضیدان برجستهٔ آمریکایی که کارهای اساسی در آنالیز تابعی و به‌ویژه آنالیز هارمونیک انجام داده است. وی شاگرد مارشال هاروی استون (۱۹۰۳ــ۱۹۸۹) ریاضیدان معروف بوده است. کتاب دوجلدی هیوئیت که با همکاری دانشجویش راس نوشته است کتاب مقدس آنالیز هارمونیک‌دان‌ها به‌شمار می‌آید. وی بر اثرسکته مغزی شدید و از دست دادن قدرت تکلم در اواخر عمر پس از مدتی تحمل شرایط دشوار فوت کرد.

۲) Paul J. Cohen(1934-2007) ریاضیدان معروف آمریکایی که در ۱۹۶۶ به‌خاطر کارهایش در نظریه مجموعه‌ها به دریافت جایزه فیلدز نائل آمد. وی شاگرد آنتونی زیگموند بود از دانشگاه استانفورد بازنشسته شده بود.

۳) Lynn Harold Loomis (1915-1994) ریاضیدان آمریکایی. وی شاگرد ریاضیدان معروف س. بوخنر بود. از شاگردان معروف او می‌توان از ت. پالمر نام برد.

۴) Leonard Yau-Hock Yap (?-2005) ریاضیدان سنگاپوری. وی شاگرد هیوئیت در دانشگاه واشنگتن بوده است.

اثبات قضیهٔ بالا مبتنی بر روش‌های ریچارد اونیل[1] در [۴۵] است و به نوعی می‌توان گفت اثبات مقدماتی است.
از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت:

نتیجه ۳.۴ فرض کنید G گروه فشرده نامتناهی باشد و $1 < r < \infty$. در این صورت

۱ــ $L^r(G) * L^r(G)$ زیرمجموعه‌ای چگال از رستهٔ اول در $L^r(G)$ است.

۲ــ $L^r(G)$ جبر باناخ بدون همانی تقریبی کران‌دار (نسبت به نرم $\|.\|_r$) است.

با توجه به قضیهٔ کنزی ــ اشتاین پاسخ پرسش (۲) در حالت کلی منفی، ولی در حالت آبلی مثبت است. قضیه بعد این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۴[یاپ ــ ۱۹۸۳] فرض کنید G گروه موضعاً فشردهٔ آبلی نامتناهی باشد. فرض کنید $1 < p, q < \infty$، $1/p + 1/q > 1$ و r چنان باشد که $1/r = 1/p + 1/q - 1$. در این صورت

۱ــ اگر G فشرده باشد آن‌گاه $L^p(G) * L^q(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : r < s\}$.

۲ــ اگر G گسسته باشد آن‌گاه $\ell^p(G) * \ell^q(G) \nsubseteq \cup\{\ell^s(G) : s < r\}$.

۳ــ اگر G نه فشرده و نه گسسته باشد آن‌گاه $L^p(G) * L^q(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : s \neq r\}$.

۴ــ اگر G غیرفشرده و آبلی باشد در این صورت $L^p(G) * L^{p'}(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : 1 \leq s < \infty\}$.

توجه کنیم که مثال کنزی ــ اشتاین باز هم نشان می‌دهد قسمت (۳) قضیه بالا برای هر گروه دلخواه برقرار نیست. با این حال قضیه ۸.۴ را ببینید.

اثبات قضیه فوق فقط از طریق ساخت توابع مشخصی روی گروه مورد نظر با استفاده از دستورهای آنالیز فوریه روی گروه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ و برخی خواص ابتدایی ساختار گروه‌های موضعا فشرده انجام می‌گیرد. اما باید افزود که اثبات به این معنا مقدماتی است که از ابزارهای پیچده استفاده نمی‌کند؛ لیکن اثبات مفصل است و از کارهای اونیل بسیار ایده می‌گیرد. با استفاده از قضیه بالا و قضیه ن. و. ریکرت[2] [۵۲]، که در زیر می‌آوریم و در بخش بعد به آن بازخواهیم گشت، چند نتیجه جالب به‌دست می‌آید. قضیه ریکرت به‌نوعی مکمل نامساوی یانگ است. برای اثبات مشروح‌تری از این قضیه، بند ۲۶.۳۸ از [۳۲] را ببینید.

قضیه ۵.۴ [ریکرت ــ ۱۹۶۷] فرض کنید $1 < p, q < \infty$، $1/p + 1/q < 1$ و G گروه غیرفشرده‌ای باشد. در این صورت برای هر همسایگی با بستار فشردهٔ U از عضو همانی G، توابع $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $f * g(x) = \infty$ برای هر $x \in U$.

نتیجه‌ها از این قرارند:

---

1) Richard O'Neil   2) Neil W. Rickert

نتیجه ۶.۴ [پاپ—۱۹۸۳] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و آبلی باشد. اگر $1 < p, q < \infty$، در این صورت $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^p(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

برای بیان نتیجه بعدی تعریفی لازم داریم : سه‌تایی $(p, q : s)$ از اعداد حقیقی با شرط $1 \leq p, q, s < \infty$ را برای گروه موضعاً فشرده G پذیرفتنی گوییم اگر عدد ثابت $C_{pq}(G)$ موجود باشد که $\|f * g\|_s \leq C_{pq}(G)\|f\|_p \, \|g\|_q$ برای هر $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$.

نتیجه ۷.۴ [پاپ ــ ۱۹۸۳] فرض کنیدG گروه آبلی نامتناهی باشد و $1 < p, q, s < \infty$. در این صورت احکام زیر برقرارند.

۱− اگرG فشرده باشد دراین صورت $(p, q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 \leq 1/s$.

۲− اگر G گسسته باشد، در این صورت $(p, q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 \geq 1/s$.

۳− اگر G نه گسسته و نه فشرده باشد در این صورت $(p, q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 = 1/s$.

بالاخره به پرسش (۳) می‌رسیم. پاسخ این پرسش نیز منفی است، زیرا همان‌طور که اشاره کردیم بکنر برای گروه $\mathbb{R}^n$ نشان داده است که ۱ بهترین ضریب ممکن نیست. قضیه زیر نتایج بکنر و [۲۲] را گسترش می‌دهد و گسترشی برای قسمت (۳) قضیه ۴.۴ است؛ برای اثبات [۴۴] را ببینید.

قضیه ۸.۴ [نیلسن ــ ۱۹۹۴] فرض کنید $1 < p, q, r < \infty$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1$. در این صورت

۱− عدد $c_{p,q} < 1$ یافت می‌شود به‌طوری‌که اگر G گروه موضعاً فشرده‌ای باشد که شامل هیچ زیرگروه فشردهٔ بازی نیست دراین‌صورت $C_{p,q}(G) \leq c_{p,q}$. در اینجا $C_{p,q}(G)$ کوچک‌ترین عدد ثابتی است که در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$\|f * \Delta^{1/p'} g\|_r \leq C_{p,q}(G)\|f\|_p\|g\|_q \quad (f \in L^p(G), g \in L^q(G)).$$

۲− اگرG گروه لی همبند ساده و حل‌پذیر باشد آن‌گاه $C_{p,q}(G) = (A_p A_q A_{r'})^{\dim(G)}$، ثابت‌های A_p در ابتدای این بخش تعریف شدند.

۳− اگر G گروه لی پوچ‌توان یا همبند ساده و حل‌پذیر باشد آن‌گاه $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : r < s < \infty\}$.

۴− اگر G گروه لی پوچ‌توان و غیرفشرده باشد، در این صورت $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : 1 \leq s < \infty, \, s \neq r\}$.

ساایکی[1] در [۵۷] ضمن اثبات حدس L^p، که در بخش بعد به آن می‌پردازیم، دو پرسش طبیعی زیر را مطرح می‌کند:

(الف) اگر $1/r < 1/p + 1/q - 1$، $1 \le p,q$ و $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)$، آیا G گسسته است؟

(ب) اگر $1/r > 1/p + 1/q - 1$، $1 \le p,q \le \infty$ و $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)$، آیا G فشرده است؟

باتوجه به مثال کنزی ـ اشتاین (!) پاسخ (ب) منفی، ولی، با توجه به نتیجه ۷.۴ پاسخ هر دو پرسش برای گروه‌های آبلی مثبت است. از قضیه زیر می‌توان نتیجهٔ یاپ را با اثباتی به مراتب کوتاه‌تر به‌دست آورد.

قضیه ۹.۴ [**ساایکی ـ ۱۹۹۰**] فرض کنید G گروه غیرفشرده‌ای با این خاصیت باشد که برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه فشرده $K \subseteq G$ موجود باشد به طوری که اندازه K به‌قدر کافی بزرگ باشد و $\liminf_{n\to\infty} \ln\ln(\lambda(A^{2^n}))/n < \epsilon$. در این صورت تابع $f \in L^1_s(G) \cap C_0(G)^+$ موجود است به طوری که $f^{1/p} * L^q_s(G) \nsubseteq L^r(G)$ برای هر $1 \le r,p,q$ به شرطی که $1/r < 1/p + 1/q - 1$. در اینجا $L^q_s(G)$ توابع متقارن در $L^q(G)$ را نشان می‌دهد.

اجازه دهید این بخش را با چند پرسش جالب (شاید هم قدری دشوار) به پایان ببریم. نتیجه شناخته شده‌ای بیان می‌کند که اگر G فشرده و آبلی باشد در این صورت مجموعه $L^2(G) * L^2(G)$ فضای توابع با سری فوریه مطلقاً همگرا و در حالت کلی اگر G فشرده باشد برابر فضای ترکیبات خطی مختلط توابع معین‌مثبت روی G است؛ برای اثبات [۳۲] را ببینید. اکنون این پرسش‌ها مطرح می‌شوند:

(الف) برای چه گروه‌هایی $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : 1 \le s < \infty,\ s \ne r\}$ و یا $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$؟

(ب) چه توصیف دقیقی برای مجموعه‌های $L^p(G) * L^q(G)$، $L^p(G) * L^q(G)^*$ و یا $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ وجود دارد؟

(ج) آیا مجموعه‌های $L^p(G) * L^q(G)$، $L^p(G) * L^q(G)^*$ و یا $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ فضای برداری هستند؟

از قضیه ۱.۳ در [۵] نتیجه می‌شود اگر G غیر فشرده باشد در این صورت مجموعه $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ خطی‌پذیر است؛ یعنی شامل یک زیرفضای بی‌نهایت بعدی است.

---

۱) Sadahiro Saeki ریاضیدان ژاپنی که در زمینه آنالیز هارمونیک کارهایی انجام داده است. وی در سال ۱۹۸۸ از دانشگاه دولتی کانزاس بازنشسته شد.

۵ عملگرهای پیچشی و تجزیهٔ جبرهای گروهی

دو مسئلهٔ مهم دیگر به مفهوم پیچش و فضاهای توابع روی گروه‌ها گره می‌خورند. یکی، مسئلهٔ تجزیه جبرهای باناخ گروهی است. اولین نتیجه را ر. سِیلم در ۱۹۴۵ به‌دست آورد. وی ثابت کرد $L^1(\mathbb{T}) * L^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})$. والتر رودین در ۱۹۵۷ این نتیجه را به گروه جمعی $\mathbb{R}$ گسترش داد [۵۴،۵۵]. وی برای این کار از تبدیل فوریه استفاده اساسی می‌کند. اما گام اساسی را پ. ج. کوئین برداشت. وی قضیه‌ای را که امروزه به قضیه تجزیه کوئین معروف است، در سال ۱۹۵۹ اثبات کرد. از کار وی نتایج بسیاری به دست می‌آید. قضیه تجزیه کوئین به صورت‌های مختلفی تعمیم داده شده است. هیوئیت نتیجه کوئین را در سال ۱۹۶۴ به مدول‌های باناخ تعمیم داد.

در ۱۹۴۸، روژه گودمان[۱] به بررسی توابع معین مثبت روی گروه موضعاً فشرده و مسئلهٔ نمایش گروه‌ها می‌پردازد. نتایج حاصل تعمیم نتایج مشابه برای گروه اعداد حقیقی هستند. از جملهٔ این نتایج این است که هر تابع معین مثبت حد یکنواخت ترکیب خطی توابع مقدماتی روی مجموعه‌های فشرده است. این نتیجه برای گروه فشرده G، همان قضیه معروف پیتر[۲] ــ ویل[۳] است. همچنین، گودمان اندازه‌های معین مثبت روی گروه موضعاً فشرده را تعریف می کند. نتایج و تکنیک‌های اثبات بسیار شبیه روش‌های گلفاند و رایکف[۴] است که در ۱۹۴۳ در [۲۴] منتشر کرده‌اند.

در ۱۹۵۲، رایتر[۵] در [۴۳] به بررسی مسائل مختلفی درباره جبر گروهی $L^1(G)$ روی گروه موضعاً فشرده آبلی می‌پردازد. به‌خصوص، وی تبدیل فوریه توابع و خواص آن‌ها و بسیاری از نتایجی را که برای خط حقیقی اثبات شده است را به گروه G با اثبات‌هایی که اساسا ماهیت جبری دارند و نه آنالیز تابعی، تعمیم می‌دهد. در این مقاله وی خاصیتی موسوم به P_1 مطرح می‌کند. این خاصیت را ژان دیودونه[۶] در مقاله مشهورش [۱۹] در سال ۱۹۶۰ تعمیم می‌دهد. خاصیت P_p برای $1 \leq p < \infty$ روی گروه G عبارت است از این که برای هر مجموعهٔ فشرده $K \subset G$ و هر $\epsilon > 0$

---

۱) (-Roger Godement(1912 ریاضیدان فرانسوی. وی شاگرد هانری کارتان و یکی از اعضای فعال گروه بورباکی بوده است.

۲) (Fritz Peter(1899-1949 وی شاگرد هرمان ویل بود که البته ریاضیات را ادامه نداد.

۳) (Hermann Klaus Hugo Weyl(1885-1955 ریاضیدان و فیزیکدان معروف آلمانی. وی یکی از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن بیستم بود. آنالیز هارمونیک روی گروه‌های فشرده حاصل کار او در دوره ۱۹۲۳ تا ۱۹۳۸ است.

۴) (Dmitrii Abramovich Raikov(1905-1981

۵) (Hans Jakob Reiter(1921-1992 ریاضیدان مشهور اتریشی که در آنالیز هارمونیک کارهای مهمی انجام داده است. کتاب درسی وی در آنالیز هارمونیک بسیار مشهور است.

۶) (Jean Alexandre Eugène Dieudonné(1906-1992 یکی از ریاضیدانان برجسته فرانسه که از اعضای فعال گروه بورباکی بود.

تابع $f \in L^p(G)$ موجود باشد به طوری که $f \geq 0$، $\|f\|_p = 1$ و $\|L_y f - f\|_p \leq \epsilon$ برای هر $y \in K$ که در آن $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$. دیودونه نشان می‌دهد که خاصیت P_1 خاصیت P_p برای $p > 1$ را ایجاب می‌کند. رایتر در [۵۱] خاصیت P' را نیز که عبارت است از اینکه بتوان تابع ثابت ۱ را به طور یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده با توابع معین مثبت در $C_{00}(G) * \tilde{C_{00}(G)}$ تقریب زد مطرح می‌کند. دیودونه، رایتر، اشتگمن و برخی ریاضی‌دانان ارتباط بین خواص P و P' را بررسی کرده‌اند. این خواص به میانگین‌پذیری گروه G نیز مربوط می‌شود.

دیودونه در سال ۱۹۶۰ عملگر $\gamma_{\mu,p}$ را برای اندازهٔ کراندار μ و $1 \leq p \leq \infty$ به‌صورت $\gamma_{\mu,p}(f) = \mu * f$ تعریف می‌کند. قبلاً وندل[1] در ۱۹۵۲ نشان داده بود که $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ برای $p = 1$. دیودونه این پرسش را که تحت چه شرایطی $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ مطرح می‌کند و نشان می‌دهد اگر G خاصیت P_p داشته باشد در این صورت تساوی مذکور برای $\mu \geq 0$ برقرار است. کارهای ج. ای. گیلبرت[2] [۲۶] و ه. لپتین[3] [۳۸] از جمله کارهایی قابل توجه درباره عملگر پیچش $\gamma_{\mu,p}$ است. گیلبرت همچنین خاصیت P' را بررسی کرده است. لپتین اندازه مثبت بورل منظم μ روی گروه موضعاً فشرده G را p—دسترس‌پذیر می‌نامد اگر $\mu * f \in L^p(G)$ برای هر $f \in L^p(G)$؛ و گروه G را K_p—گروه می‌نامد اگر هر اندازهٔ p—دسترس‌پذیر روی G کران‌دار باشد. اگر گروه G برای هر $p \geq 1$، K_p—گروه باشد آن را K—گروه می‌نامد. لپتین حدس می‌زند که هر گروه موضعاً فشرده یک K—گروه است و آن را برای گروه آبلی اثبات می‌کند. همچنین نشان می‌دهد برای هر $\mu \in L^1(G)^+$، $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. با استفاده از این مطلب می‌توان گزاره زیر را که پیوند نزدیکی با پدیده کنزی ـ اشتاین دارد اثبات کرد؛ گزاره ۲۱.۲۳ از [۴۶] را ببینید.

گزاره ۱.۵ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده میانگین‌پذیر باشد و برای $1 < p < 2$، $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$. دراین‌صورت G فشرده است.

دیودونه در ۱۹۶۰ نشان می‌دهد اگر G گروه آبلی غیر گسسته باشد در این صورت، برای هر $p \geq 1$، هیچ تابع $f \in L^1(G)$ وجود ندارد به‌طوری‌که $f * L^p(G) = L^p(G)$. اثبات وی مبتنی بر ساختن پیچیدهٔ توابعی خاص روی گروه G است. این قضیه را به صورت‌های مختلف تعمیم داده‌اند و اثبات‌های ساده‌ای برای آن ارائه کرده‌اند؛ مثلاً به [۶۴،۱۵، ۱۳] نگاه کنید. اثبات یاپ در [۶۴] از همه ساده‌تر است.

قضیه ۲.۵ [بکیز ـ ۱۹۷۶] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد و $1 \leq p \leq \infty$. اگر M زیرمجموعه‌ای شمارا از $L^1(G)$ باشد، در این صورت فضای خطی تولید شده توسط $M * L^p(G)$ زیرمجموعهٔ سره‌ای از $L^p(G)$ است.

اثبات برنهام[4] و کولدبرگ[5] برای قضیه بالا مبتنی بر قضیه‌ای جالب برای مقسوم علیه صفر

1) J. W. Wendel 2) John E. Gilbert 3) Horst Leptin 4) J. T. Burnham 5) R. R. Goldberg

تعمیم‌یافته در یک مدول باناخ است؛ برای جزئیات به [۱۵] مراجعه کنید. قابل ذکر است که ژلازک[۱] در ۱۹۵۷ نشان داد جبر گروهی $L^1(G)$ هر گروه موضعاً فشرده غیربدیهی دارای مقسوم علیه صفر است.

قضیه ۳.۵ [یاپ ــ ۱۹۷۶] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده آبلی و غیرگسسته باشد و $1 \le p \le \infty$. دراین صورت برای هر $g \in L^p(G)$، $L^1(G) * g \neq L^p(G)$.

برهان. فرض کنید تابع $g \in L^p(G)$ چنان موجود باشد که $L^1(G) * g = L^p(G)$، پس تابع $f \in L^1(G)$ موجود است که $f * g = g$. حال اگر $h \in L^p(G)$، در این صورت به‌ازای یک $k \in L^1(G)$، $h = k * g$. پس $f * h = f * k * g = k * f * g = k * g = h$. بنابراین، برای $h \in L^p(G)$، $f * h = h$. حال برای $\varphi \in L^1(G)$ دنبالهٔ (h_n) در $L^1(G) \cap L^p(G)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|h_n - \varphi\|_1 \to 0$. پس

$$\|f * \varphi - \varphi\|_1 \le \|f * \varphi - f * h_n\|_1 + \|f * h_n - \varphi\|_1 \le \|f\|_1 \|\varphi - h_n\|_1 + \|h_n - \varphi\|_1 \to 0$$

بنابراین، f یک همانی برای $L^1(G)$ است، که با گسسته بودن G معادل است.

یکی از کامل‌ترین نتایج دربارهٔ مسئلهٔ دیودونه از آن یاپ در ۱۹۹۳ است [۶۷]. وی یک قضیه کلی اثبات می‌کند: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک Aـ مدول چپ باناخ باشد. فرض کنید Y زیرفضای بسته‌ای از X چنان باشد که $ax \in Y$ برای هر $a \in A, x \in X$. در این صورت (الف) مجموعه $\{a \in A : aX = Y\}$ در A باز است. (ب) مجموعه $\{x \in X : Ax = Y\}$ در X باز است. وی سپس با استفاده از این قضیه، قضیه‌های تجزیه‌ناپذیری مذکور در بالا را به راحتی نتیجه می‌گیرد. مثلاً ثابت می‌کند اگر G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد در این صورت $M(G) * f \neq L^p(G)$ برای هر $f \in L^p(G)$ که $1 < p < \infty$.

بکیز در [۱۳] برای $f \in C_0(G)$ و $f \in L^p(G)$، $1 < p < \infty$، عملگر پیچشی $T_f(g) = g * f$ را روی $L^1(G)$ و $M(G)$ درنظر می‌گیرد و نشان می‌دهد برد چنین عملگری بسته نسیت. همچنین، وی بررسی مشابه‌ای را برای عملگر T_f روی $L^p(G)$ مشروط براین که f یا f^* به $L^q(G)$ متعلق باشد انجام می‌دهد؛ مقادیر عملگر فوق در $L^r(G)$، $1/r = 1/p + 1/q - 1$، قرار می‌گیرد.

قضیه ۴.۵ [بکیز ــ ۱۹۸۴] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیرفشرده باشد. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱) اگر $f \in C_0(G)$، دراین صورت $M(G) * f$ در $C_0(G)$ بسته نیست.

۲) اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^p(G)$ مخالف صفر باشد، در این صورت $M(G) * f$ در $L^p(G)$ بسته نیست.

---

۱) Wiesław Żelazko(1933-) ریاضیدان لهستانی. وی شاگرد استانیسلاوف مازور(۱۹۰۵—۱۹۸۱) ریاضیدان برجسته بوده است. زمینه تحقیقاتی او جبرهای گروهی و توپولوژیک است.

۳) اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^{p'}(G)$ مخالف صفر باشد، در این صورت $L^p(G) * f^*$ در $C_0(G)$ بسته نیست.

۴) فرض کنید $p, q > 1$، $1/r = 1/p + 1/q - 1$ و $f \in L^q(G) \cap L^q(G)^*$ مخالف صفر باشد، در این صورت $L^p(G) * f$ در $L^r(G)$ بسته نیست.

در ۱۹۷۸، ژ. کرومبه[1] و و. گورتس[2] برای گروه تک‌پیمانه‌ای G عملگر T_f از $L^1(G)$ به $L^p(G)$ را برای $1 \leq p < \infty$ و $f \in L^p(G)$ درنظر می‌گیرند. اگر مجموعهٔ انتقال‌های چپ تابع $f \in L^p(G)$ در $L^p(G)$ فشرده نسبی در توپولوژی نرمی باشد آن را تقریباً متناوب چپ می‌نامند. آن‌ها نشان می‌دهند T_f عملگری فشرده است اگر و تنها اگر f تقریبا متناوب چپ باشد. اگر G فشرده باشد در این صورت T_f همواره یک عملگر فشرده است. همچنین، آن‌ها نشان می‌دهند اگر G فشرده نباشد و $f \in L^p(G)$ تقریباً متناوب چپ باشد دراین صورت $f = 0$.

۶ حدس L^p

ژلازکُ در ۱۹۶۱ با اشاره به این نتیجه ساده در کتاب لومیس که اگر G گروه فشرده‌ای باشد، در این صورت $L^2(G)$ با عمل پیچش جبر باناخ است، نشان می‌دهد که این نتیجه برای هر فضای $L^p(G)$ که $p > 1$ برقرار است. برای اثبات، با استفاده از این قضیه در کتاب لومیس که برای هر $f \in L^1(G)$ و $g \in L^p(G)$، $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ و اینکه $L^\infty(G) \cap L^1(G) \subset L^p(G)$ (چون G فشرده است) و چگال بودن $L^\infty(G) \cap L^1(G)$ در$L^p(G)$، حکم به‌راحتی به دست می‌آید. همچنین، عکس این مطلب را برای گروه آبلی G ثابت می‌کند. نتایج وی در مجلهٔ لهستانی کِلُکویوم متیمتیکوم[3] در ۱۹۶۱ چاپ می‌شود[۷۰]. در همان سال، ک. اوربانیک[4] اثبات ساده‌تری برای حالت عکس می‌آورد [۶۱]. اثبات او از این قرار است: اگر V همسایگی متقارن فشرده از عضو همانی باشد و $\psi = \chi_{V^2}$. دراین صورت به‌راحتی دیده می‌شود $\lim_{n\to\infty} \|\psi^n\|^{1/n} > 0$. پس ψ، در رادیکال جبر $L^p(G)$ قرار ندارد. پس یک تابعک خطی ضربی پیوسته غیرصفر مانند h روی $L^p(G)$ موجود است. باتوجه به دوگانگی $L^p(G)$ و $L^{p'}(G)$، تابع $\varphi \in L^{p'}(G)$ موجود است که $h(f) = \int f(x)\varphi(x) d\lambda(x)$. با استفاده از قضییه فوبینی و محاسبه‌ای ساده می‌توان دید $|\varphi(x)| = 1$ تقریباً همه‌جا روی G. پس $1 \in L^{p'}(G)$؛ یعنی G فشرده است.

ژلازکُ در همان سال مسئله را برای $0 < p < 1$ نیز بررسی می‌کند و نشان می‌دهد بسته بودن $L^p(G)$ با عمل پیچش با گسسته بودن G معادل است. در واقع اگر G گسسته نباشد، به‌راحتی می‌توان همسایگی متقارن V از عضو همانی و دنباله (V_n) از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای G را

---

1) G. Crombez 2) W. Govaerts 3) Colloquium Mathematicum

۴) Kazimierz Urbanik(1930-2005) آماردان مشهور لهستانی که در سن ۷۵ سالگی بر اثر سرطان درگذشت.

طوری یافت که $\circ < \lambda(V_n)$، $\infty > (\lambda(V^{۲}) < \infty$ و $\circ < \lambda(V^{۲})$ و $V_n \subseteq V$. حالا کافی است تعریف کنیم

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{V_n}}{(\lambda(V_n)n^{2})^p}, \qquad g = \chi_{V^2}.$$

به‌راحتی می‌توان دید که روی V، $f * g = \infty$؛ برای جزئیات بیشتر به [۷۱] مراجعه کنید. مستقل از او م. راجاگوپلان [1] در رساله دکتری خود تحت نظر ریکارت [2] در دانشگاه ییل در سال ۱۹۶۳ حدس $L^{r,p}$ را به‌صورت زیرمطرح می‌کند:

حدس $L^{r,p}$: فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $1 \le p, r < \infty$. اگر $f \in L^r(G)$ و $g \in L^p(G)$، در این صورت $f * g \in L^p(G)$ اگر و فقط اگر G فشرده باشد.

حدس L^p: همان حدس $L^{r,p}$ است برای $r = p$.

قبل از آن که جلوتر برویم اجازه دهید خاطر نشان کنیم که اگر $p > 1$، بسته بودن $L^p(G)$ با عمل پیچش با جبر باناخ بودن آن معادل است. در واقع، به‌طور کلی‌تر، با توجه به گزاره ۱.۲، اگر نگاشت $(f, g) \mapsto f * g$ روی $L^p(G) \times L^q(G)$ به $L^r(G)$ خوش تعریف باشد، در این صورت این نگاشت پیوسته است. حال کاربرد ساده‌ای از اصل کرانداری یکنواخت نشان می‌دهد این نگاشت به طور همزمان پیوسته [3] است؛ یعنی $\|f * g\|_r \le K\|f\|_p\|g\|_q$ به‌ازای $K > 0$. با تغییر ضریب مناسبی در اندازه هار می‌توان K را برابر یک اختیار کرد.

دو حدس بالا را راجاگوپلان در ۱۹۶۳ با همین عنوان بیان کرده است. این دو حدس اساساً از سال ۱۹۶۰ با تحقیقات کنزی و اشتاین، که شرح آن در بخش پیشین آمد، سرچشمه می‌گیرند. مطالعات آن‌ها نشان می‌دهد که حدس $L^{r,p}$ برای ماتریس‌های وارون‌پذیر حقیقی ۲ × ۲ نادرست است. بعد از کارهای ژلازک و اوربانیک در طی سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۶۳، راجاگوپلان نشان می‌دهد که اگر G گسسته و غیرآبلی باشد و $p \ge r$، در این صورت حدس L^p درست است. این نتیجه را وی در مجلهٔ کِلُکویوم متیمتیکوم در ۱۹۶۳ منتشر می‌کند [۴۷]. این اولین کار منتشرشده از راجاگوپلان در این باره است. ژلازک در ۱۹۶۳ در مقاله‌ای دیگر، حدس را برای هر گروه موضعاً فشرده و $p > 2$ اثبات می‌کند [۷۳]؛ اما یکی از لم‌های اساسی آن دارای نقضی بود که راجاگوپلان به آن اشاره می‌کند. بنابراین اثبات‌های آن مقاله فقط برای گروه تک پیمانه‌ای کار می‌کند. سپس درسال ۱۹۶۶، راجاگوپلان حدس را برای گروه دلخواه و $p > r$ و همچنین گروه کلاً ناهمبند با $p = 2$ اثبات می‌کند [۴۸]. درسال ۱۹۶۷ وی حالتی که گروه پوچ‌توان یا حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های آبلی و $1 < p < \infty$ را اثبات می‌کند [۴۹].

ن. و. ریکرت درسال ۱۹۶۷ قضیهٔ ۵.۴ را ثابت می‌کند. بنابراین، وی به حدس L^p برای $p > 2$ و گروه موضعاً فشرده دلخواه پاسخ می‌دهد.

---

۱) Minakshisundaram Rajagopalan وی استاد دانشگاه دولتی تنسی در آمریکا است.

2) Charles E. Rickart (1913-2002) 3) jointly continuous

درسال ۱۹۶۵ راجاگوپلان و ژلازک درمقالهٔ مشترکی نشان دادند که اگر $L^p(G)$ برای $p > ۱$ تحت پیچش بسته باشد آن‌گاه G باید تک‌پیمانه‌ای باشد؛ این اثبات در واقع اشتباهی که در اثبات ژلازک بود را رفع می‌کند. آن‌ها همچنین حدس L^p را برای گروه‌های حل‌پذیر برای $p > ۱$ اثبات کردند [۵۰].

درسال ۱۹۶۶، لیپتین ضمن تلاش برای اثبات حدس L^p، تابع $I(G)$ را به صورت زیر برای گروه مفروض G تعریف می‌کند: $I(G) = \sup_K \inf_U \frac{\lambda(KU)}{\lambda(U)}$، که در آن U و K به‌ترتیب روی مجموعه‌های باز و فشرده تغییر می‌کنند. مثلاً اگر G حل‌پذیر باشد $I(G) = ۱$. وی نشان می‌دهد اگر $I(G) < \infty$ در این صورت حدس L^p برای $p > ۱$ برقرار است.

در سال ۱۹۶۷، راجاگوپلان برای اثبات حدس L^p برای $p > ۱$ و گروه‌های پوچ‌توان و گروه‌هایی که حاصل ضرب نیم مستقیم گروه‌های آبلی هستند، ابتدا نشان می‌دهد اگر $L^p(G)$ برای $p > ۱$ و گروه دلخواه G جبر باناخ باشد باید مرکز G فشرده باشد. از اینجا نتیجه می‌گیرد که برای حل حدس L^p برای گروه لی همبند کافی است آن را برای گروه همبند ماتریس‌های حقیقی اثبات کرد. در همان مقاله، حدس L^p را برای دستهٔ خاصی از گروه‌های تک پیمانه‌ای که در شرط $P_۲$ صدق می‌کنند، اثبات می‌کند. همچنین نشان می‌دهد اگر G گسسته و $l^p(G)$ تحت عمل پیچش بسته باشد G باید شامل یک زیرگروه برنساید[۱] باشد.

ریکرت در ۱۹۶۸ با استفاده از نتایج راجاگوپلان، حدس را برای $p = ۲$ و گروه دلخواه اثبات می‌کند. بنابر نتیجه راجاگوپلان، برای $p = ۲$ کافی است قضیه برای گروه همبند ماتریس‌های حقیقی اثبات شود. ریکرت، با استفاده از نتایج قبلی راجاگوپلان، اثبات را به گروه نیم ساده همبند ماتریس‌های حقیقی تقلیل می‌دهد. برای این حالت نیز از تبدلات فوریه توابع گروهی وسیعاً استفاده می‌کند و قضایای دشواری مثل قضیهٔ هاریش ــ چاندرا[۲] را به‌کار می‌گیرد.

در سال ۱۹۶۹ گرین‌لیف[۳] در کتاب مشهورش درباره میانگین‌ها روی گروه‌های موضعاً فشرده حدس L^p را برای گروه میانگین‌پذیر اثبات می‌کند [۲۸].

درسال ۱۹۷۱، میلنز[۴] صورت قوی‌تری از قضیه ریکرت را برای حالتی که G تک پیمانه‌ای نیست، اثبات می‌کند.

قضیه ۱.۶ **[میلنز ــ ۱۹۷۱]** فرض کنید G گروه غیر تک پیمانه‌ای باشد و $۱ < p < \infty$. در این صورت همسایگی U و توابع $f \in \bigcap_{p\le r\le\infty} L^r(G)$ و $g \in \bigcap_{۱\le q\le\infty} L^q(G)$ یافت می‌شوند

۱) Burnside

۲) Harish Mehrotra Chandra(1923-1983) ریاضیدان هندی که کارهای بنیادی در آنالیز هارمونیک گروه‌های لی نیم ــ ساده انجام داده است. وی شاگرد پل دیراک بوده است.

۳) Frederick Greenleaf استاد بخش ریاضی موسسهٔ ریاضی کورانت در دانشگاه نیویورک است.

۴) Paul Milnes وی استاد دانشگاه اونتاریوی غربی در کانادا است.

به طوری که $f*g(x)=\infty$ برای هر $x\in U$.

در سال ۱۹۷۵ ژلازک در مسیر حل حدس L^p، مسئلهٔ برنساید را برای گروه‌های موضعاً فشرده، که تعمیم مسئلهٔ معروف برنساید در جبر است، مطرح می‌کند. وی گروه موضعاً فشردهٔ G را گروه برنساید می‌نامد اگر عدد $c>0$ موجود باشد به طوری که برای هر دو مجموعهٔ فشردهٔ A, B، $\lambda(AB)\geq c\lambda(A)\lambda(B)$. بدیهی است هر گروه فشرده، گروه برنساید است. سپس نشان می‌دهد اگر $L^p(G)$، $p>1$، با عمل پیچش بسته باشد باید G گروه برنساید باشد. در برهان این گزاره نکته‌ای دربارهٔ اندازهٔ هار حاصل‌ضرب دو مجموعه بیان می‌شود که به خودی خود جالب است و در اثبات سااِکی و همچنین در موارد دیگر نقش اساسی دارد. وی نشان می‌دهد هر گروه برنساید باید تک پیمانه‌ای باشد و حدس L^p را برای گروه‌های میانگین‌پذیر، پوچ‌توان و حل‌پذیر اثبات می‌کند. او نشان می‌دهد برای حدس L^p کافی است مسئله برای گروه‌های کلاً ناهمبند و گروه‌های لی همبند اثبات شود [۷۳].

در سال ۱۹۷۹، ژ. کرومبه نشان می‌دهد اگر G تک پیمانه‌ای باشد و $L^p(G)*L^p(G)\subseteq L^1(G)$ در این صورت باید G فشرده باشد. همچنین اگر G تک پیمانه‌ای و برای یک $1<p<\infty$، $L^p(G)*L^{p'}(G)\subseteq L^1(G)$ (p' مزدوج نمایی p است) در این صورت G فشرده است. اثبات مبتنی است بر این نتیجه که اگر G تک پیمانه‌ای و غیرفشرده باشد، برای $1\leq p<\infty$ عملگر پیچشی $T_f: L^p(G)\to L^p(G)$ ($f\in L^1(G)$) فشرده است اگر و تنها اگر $T_f=0$.

در ۱۹۸۰، ن. لوء[1] ضرایب نمایش یک گروه لی نیم ساده همبند را در نرم L^p تقریب می‌زند [۳۹]. یکی از نتایج آن اثبات حدس L^p برای برخی گروه‌های لی نیم سادهٔ همبند با مرکز متناهی برای $1<p<\infty$ است.

به جز نتایج بالا نتایج دیگری که در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۷۵ تا قبل از ۱۹۹۰ دربارهٔ حدس L^p به‌دست آمده‌اند، مثل کارهای د. جانسون [۳۴]، گوده و گاملن، و دیگران، اغلب اثبات‌های ساده‌تری برای برخی نتایج قبل هستند و نتیجه‌ای به نتایج قبلی نمی‌افزایند.

اثبات گوده و گاملن برای حالتی که $p>2$ بسیار مقدماتی است [۲۳]. درواقع، اگر G فشرده نباشد دنباله (a_n) و همسایگی متقارن U حول عضو همانی را طوری در نظر می‌گیرند که $(Ua_n)_1^\infty \cup (Ua^{-1})_1^\infty$ خانواده‌ای دوبه‌دو مجزا تشکیل بدهند. حال اگر V همسایگی فشرده متقارن چنان باشد که $V^2\subseteq U$. تعریف می‌کنیم

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\Delta(a_n)^{-1/p}\chi_{Ua_n} \quad g(x):=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\chi_{a_n^{-1}V}$$

اکنون به‌راحتی می‌توان دید که $f,g\in L^p(G)$ اما $f*g=\infty$ روی V.

اثبات‌های اولیه، به‌جز اثبات‌های ژلازک و اوربانیک، و به ویژه اثبات‌های کنزی ــ اشتاین،

1) Noël Lohoué

اوربانیک، میلنز و ریکرت برای حالت $\infty > p > ۲$ طبیعی‌تر و ساده‌تر هستند. به‌ویژه کارهای پاپ گرچه به ساختن توابع خاص روی گروه می‌پردازد، در حالت کلی طبیعی‌تر به‌نظر می‌رسند.

سرانجام پس از ۳۰ سال تلاش، ساداهیرو سااِکی، ریاضی‌دانان ژاپنی‌الاصل و استاد دانشگاه کانزاس، حدس L^p را در حالت کلی با اثباتی مقدماتی در «مجلهٔ ریاضی ایلنوی»[1] در کمتر از ۱۵ صفحه حل می‌کند. اثبات وی مقدماتی است. بسیار جالب است که اثبات وی هیچ یک از پیچیدگی‌های اثبات‌های بالا را ندارد و به اثبات‌های ژِلازک و پاپ نزدیک‌تر است. اثبات وی مقدماتی است از این حیث که توابع خاصی روی گروه می‌سازد و از برخی خواص اندازهٔ هار استفاده می‌کند. اثبات فی‌الواقع بسیار طبیعی است.

قضیه ۲.۶ [سااِکی ــ ۱۹۹۰] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $\infty > p > ۱$. اگر برای هر دو تابع متقارن f, g در $L^p(G)$ داشته باشیم $f * g \in L^p(G)$، آن‌گاه G فشرده است.

برهان. نبض برهان مبتنی بر تعمیم ساده‌ای از دو نتیجهٔ ژلازک است. اول این که، اگر $۱ \le p, q, r \le \infty$ و $۱/p + ۱/q - ۱/r \neq ۱$ و $L_s^p(G) * L_s^q(G) \subseteq L^r(G)$، در این صورت G تک پیمانه‌ای است و ثابت $c > ۰$ موجود است که $\|f * g\|_r \le c\|f\|_p \|g\|_q$ برای $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$. و دوم، برای هر مجموعه فشرده $A, B \subseteq G$

$$(\lambda(A)\lambda(B))^{۱/p' + ۱/q'} \le c^۲ \lambda(AB)^{۲/r'}.$$

حال اگر $p = q = r$، پس $\lambda(A)\lambda(B) \le k\lambda(AB)$ برای هر $A, B \subseteq G$. به‌ویژه، $\lambda(A^n)/\lambda(A^{n+۱}) \le c/\lambda(A)$ برای هر مجموعهٔ فشردهٔ A با اندازه مثبت. اکنون اگر G فشرده نباشد، همسایگی فشرده متقارن A حول عضو همانی موجود است که $\lambda(A) > ۱$ و $c/\lambda(A) \le ۲^{-(p+p')}$. اکنون قرار می‌دهیم

$$a_n = (n \ln^۲(n) \lambda(A^۲))^{-۱/p} \qquad b_n = (n \ln^۲ n \lambda(A^۲))^{۱/p'}$$

و

$$.f = \sum_{n=۲}^{\infty} a_n \chi_{A^n} \qquad g = \sum_{n=۲}^{\infty} b_n \chi_{A^n}.$$

وی سپس نشان می‌دهد $f \in L^p(G)$، $g \in L^p(G)$؛ ولی $\|f * g\|_p = \infty$.

این بود پایان ماجرای حدس L^p. اما پرسش‌هایی بی‌پاسخ ماندند. مثلاً پیچش رده‌های مختلف فضاهای L^p در چه فضاهای شناخته شده‌ای قرار می‌گیرد؟ یا مجموعه زوج‌های توابع، متعلق به رده‌های معینی از توابع، که پیچش آن‌ها موجود است به چه بزرگی (در یک معنای مناسب) است؟ قبل از پرداختن به این پرسش اجازه دهید گزاره زیر را که نتیجه مستقیم قضیه‌های قبل است بیان کنیم.

---

1) Illinois Journal of Mathematics

گزاره ۳.٦ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. احکام زیر برقرارند.

۱− اگر $p > ۲$ در این صورت پیچش دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۲− اگر $۱ < p \leq ۲$، پیچش هر دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها اگر G تک‌پیمانه‌ای است.

۳− اگر $\circ < p < ۱$، پیچش هر دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها G گسسته است.

برهان (۱) و (۲) به ترتیب نتیجه مستقیمی از قضیهٔ ریکرت، قضیهٔ ۵.۴، و قضیهٔ میلنز، قضیهٔ ۱.٦، است. قسمت (۳) نیز از قضیهٔ ژلازک، که به آن اشاره کردیم، به‌دست می‌آید. قسمت (۱) و (۳) گزارهٔ بالا، به‌ترتیب، نتایج اصلی [۱] و [۲] هستند.

مسئلهٔ دیگری که اخیراً درباره حدس L^p درنظر گرفته شده است تعیین بزرگی (به لحاظ توپولوژیکی) مجموعهٔ توابعی است که پیچش آن‌ها موجود است. چنین پرسش‌هایی اولین بار در [۱۰،۳۳] بررسی شده‌اند. برای بیان این مسئله نیاز به تعریف مجموعه متخلخل[1] داریم.

مجموعهٔ متخلخل و σ ــ متخلخل را اولین بار در محاسباتی که دانژوا برای توصیف مجموعه‌هایی که در تعیین ضرایب فوریه ظاهر می‌شوند به کار برده است. همچنین ی. پ. دُلژِنک[2] این مفهوم را در سال ۱۹٦۷ برای بررسی مجموعه‌های خوشه‌ای به کار برده است. ل. زائیچک[3] در سال ۱۹۷٦ بررسی و تعمیم جامعی از این مفاهیم را عرضه کرده است [٦۸]. وی همچنین در سال ۲۰۰۴ این مفاهیم را به فضای نرم‌دار و متریک دلخواه تعمیم داده است [٦۹]. اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و I یک بازه دلخواه باشد، طول بزرگ‌ترین زیر بازهٔ I را که با E اشتراک ندارد با $\lambda(E, I)$ نشان می‌دهیم. تخلخل[4] نقطه $x \in E$ را برابر

$$\limsup_{\epsilon \to \circ+} \frac{\lambda(E, (x-\epsilon, x+\epsilon))}{\epsilon}$$

تعریف می‌کنند. مجموعهٔ E را متخلخل می‌نامند اگر هر نقطهٔ E تخلخلی اکیداً مثبت داشته باشد. همچنین E را σ−متخلخل گویند اگر E اتحاد شمارایی از مجموعه‌های متخلخل باشد. فرض کنید X فضای متریک و $B(x,r)$ گوی باز به مرکز x و شعاع r باشد. اگر $\circ < c \leq ۱$، گوییم $M \subseteq X$، c−متخلخل پایینی است هرگاه

$$\forall x \in M, \forall \beta \circ < \beta < c/۲, \exists r_\circ > \circ, \forall r \circ < r < r_\circ, \exists z \in X : B(z, \beta r) \subseteq B(x,r) \setminus M.$$

اگر M اجتماع شمارایی از مجموعه‌های c ـ متخلخل به‌ازای cهایی مثبت باشد، آن را $\sigma - c$ ـ متخلخل پایینی می‌نامند؛ و اگر M اجتماع شمارایی از مجموعه‌های c ـ متخلخل به‌ازای $c > \circ$ ثابتی باشد، آن را σ ـ متخلخل پایینی می‌نامند. به راحتی دیده می‌شود c ـ متخلخل پایینی

---

1) porous set 2) E. P. Doleženko 3) Luděk Zajíček 4) porosity

هیچ‌جا چگال بودن و σ ـ متخلخل پایینی نیز از رسته اول بودن (به مفهوم بِر) را ایجاب می‌کند. برای $p, q > 0$ قرار دهید

$$E_{p,q} = \{(f,g) \in L^p(G) \times L^q(G) : \text{موجود است } G \text{ تقریباً همه‌جا روی } f * g\}.$$

اکنون آماده‌ایم چند نتیجه جالب از [۲۷] را بیان کنیم.

قضیه ۴.۶ [کلُنپ، استرُبین ـ ۲۰۰۹ [1]] احکام زیر برقرارند.

۱ــ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و $p, q > 1$ چنان باشند که $1/p + 1/q < 1$. در این صورت مجموعه $E_{p,q}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ــمتخلخل پایینی است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۲ــ فرض کنید G گروه تک‌پیمانه‌ای غیرفشرده و σــفشرده باشد و $p < 2$. در این صورت مجموعه $\{f \in L^p(G) : \text{موجود است } G \text{ تقریباً همه‌جا روی } f * f\}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ــمتخلخل پایینی است.

قضیه بعدی نتایج اصلی [۳،۴] را دربر دارد و نتایج [۲۷] را تکمیل می‌کند.

قضیه ۵.۶ [اکبربگلو، مقصودی — ۲۰۱۳] عبارت‌های زیر برقرارند.

۱ــ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیر تک‌پیمانه‌ای باشد و $1 < p < \infty$، $1 \le q < \infty$. در این صورت مجموعهٔ $E_{p,q}$ به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ ـ متخلخل پایینی است.

۲ــ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیر تک‌پیمانه‌ای باشد و $1 < p < \infty$، $1 \le q < \infty$. در این صورت، برای هر $r > 0$ مجموعهٔ $\{(f,g) \in L^p(G) \times L^q(G) : f * g \in L^r(G)\}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ ـ متخلخل پایینی است.

۳ــ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد و $0 < p < 1$، $0 < q \le \infty$. در این صورت مجموعهٔ $E_{p,q}$ به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ ـ متخلخل پایینی است.

۷ دربارهٔ آنچه سخن نگفتیم

در سال ۱۹۶۵، راجاگوپلان حدس L^p را برای نیم‌گروه‌ها نیز مطرح کرد. اجازه دهید به اختصار تعریفی را یادآوری کنیم. فرض کنید S یک نیم‌گروه و $l^p(S)$ فضای باناخ توابع مختلط ــ مقدار f روی S باشد به طوری که $\sum_{s \in S} |f(s)|^p \le \infty$. عمل پیچش به‌صورت $(f * g)(x) = \sum_{uv=x} f(u)g(v)$ برای $f, g \in l^p(S)$ تعریف می‌شود؛ که در آن اگر معادله $x = uv$ جواب نداشته باشد مقدار سیگما را صفر قرار می‌دهیم. حدس L^p برای نیم‌گروه‌ها بیان می‌کند که $l^p(S)$ با عمل پیچش جبر است اگر و تنها اگر S متناهی باشد. راجاگوپلان نشان می‌دهد در آن

1) Szymon Głąb, Filip Strobin

مقاله اگر S آبلی باشد یا $p = ۲$، در این صورت این حدس درست است.

در مقالهٔ دیگری ثابت می‌کند حدس مذکور برای هر نیم‌گروه S به‌شرطی که $۲ < p \leq \infty$، درست است. در حالت $۰ < p \leq ۲$ هیچ کاری انجام نشده است و به نظر مسئلهٔ جالبی است. همچنین تعمیم این مسئله به ساختارهای جبری دیگر می‌تواند مسئله جالبی باشد.

اولین بار آرنه بئورلینگ[۱] در ۱۹۳۸ جبر وزندار توابع روی مجموعهٔ اعداد حقیقی را به منظور تعمیم قضایای وینر معرفی کرد. این جبرها همواره به خاطر رفتار جالبی که به دلیل وجود وزن نشان می‌دهند مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان بوده‌اند. در ۱۹۵۱، جان ورمر[۲] دسته وسیع‌تری از جبرهای وزندار را روی $\mathbb{R}$ معرفی و برخی نتایج بئورلینگ را برای آن‌ها اثبات کرد. وی نشان داد اگر $۱ \leq p < \infty$ و ω یک وزن باشد؛ یعنی تابع بورل اندازه‌پذیر اکیداً مثبت روی $\mathbb{R}$ و $\omega^{-p'} * \omega^{-p'} \leq \omega^{-p'}$، در این صورت $L^p(\mathbb{R}, \omega)$ با عمل پیچش جبر باناخ است. این سؤال که تحت چه شرایطی $L^p(G, \omega)$ برای گروه موضعاً فشرده G با عمل پیچش جبر تشکیل می‌دهد به حدس L^p وزندار معروف است. برای $p = ۱$، ادواردز[۳] در ۱۹۵۸ نشان داد که شرط لازم و کافی این است که ω زیرضربی باشد: $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$ برای تقریباً هر (x, y). اما برای $p > ۱$ سؤال هنوز حل نشده است و در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. از جمله کارهای قابل اعتنا می‌توان به [۳۷، ۲۰] اشاره کرد. بحث در این باره را در جای دیگری عرضه خواهیم کرد.

سپاسگزاری: از داور محترم مقاله که نکات سودمندی را متذکر شدند، سپاسگزاری می‌کنم. همچنین سرکار خانم صمدیان با زحمات فراوانی که در صفحه‌آرایی و حروف چینی نهایی این مقاله متحمل شدند، نویسنده را وامدار خویش ساختند.

مراجع

[1] F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani, A. Rejali, On the L^p-conjecture for locally compact groups, *Arch Math.(Basel)*, **89** (2007) 237-242.

[2] F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani, A. Rejali, Convolution on L^p-spaces of a locally compact group, *Math. Slovaca*, **63** (2013) 291-298.

[3] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, An answer to a question on the convolution of functions, *Arch. Math. (Basel)*, **98** (2012) 545-553.

---

۱) Arne Carl-August Beurling(1905-1986) ریاضیدان سوئدی

۲) John Wermer مدت‌ها پیش، از دانشگاه براون در آمریکا بازنشسته شد.

۳)(-Robert Edmund Edwards(1926 ریاضیدان انگلیسی ، بازنشسته دانشگاه ملی استرالیا.

[4] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, Porosity of certain subsets of Lebesgue spaces on locally compact groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **88** (2013) 113-123.

[5] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, J. Seoane-Sepulveda, Porous sets and lineability of continuous functions on locally compact groups, *J. Math. Anal. Appl.*, **406** (2013) 211-218.

[6] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, Orlando, 1985.

[7] S. A. Alvarez, Reticulos engendrados por colecciones de espacios L^p, *Revista Colombiana de Math.* **22** (1988) 173-182.

[8] S. A. Alvarez, L^p arithmetic, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992) 656-662.

[9] K. I. Babenko, An inequality in the theory of Fourier integrals, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.*, **25** (1961) 531-542.

[10] M. Balcerzak, A. Wachowicz, Some examples of meager sets in Banach spaces, *Real Anal. Exchange*, **26** (2000) 877-884.

[11] F. Barthe, Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof, *Geom. Funct. Anal.*, **8** (1998) 234-242.

[12] W. Beckner, Inequality in Fourier analysis, *Ann. of Math.*, **102** (1975) 159-182.

[13] R. A. Bekes, The range of convolution operators, *Pacific J. Math.*, **110** (1984) 257-271.

[14] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions, *Advances in Math.*, **20** (1976) 151-173.

[15] J. T. Burnham, R. R. Goldberg, The convolution theorem of Dieudonné, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36** (1974) 1-3.

[16] E. A. Carlen, E. H. Lieb, Brascamp-Lieb inequality for non-commutative integration, *Doc. Math.*, **13** (2008) 553-584.

[17] M. Cowling, The Kunze-Stein phenomen, *Ann. of Math.*, **107** (1978) 209-234.

[18] C. B. Dawson, L-correspondences: the inclusion $L^p(\mu, X) \subseteq L^q(\nu, Y)$, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **19** (1996) 723-726.

[19] J. Dieudonné, Sur le produit de convolution II, *J. Math. Pures Appl.*, **39** (1960) 275-292.

[20] El Kinani, A. Roukbi, and A. Benazzouz, Structure d'algèbre de Banach sur l'espace à poids $L^p_\omega(G)$, *Le Matematiche*, **64** (2009) 179-193.

[21] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Boca Rota, CRC Press, 1999.

[22] J. J. F. Fournier, Sharpness in Young's inequality for convolution, *Pacific J. Math.*, **72** (1977) 383-397.

[23] R. J. Gaudet, J. L. Gamlen, An elementry proof of a part of a classical conjecture, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **3** (1970) 285-292.

[24] I. Gelfand, D. Raikov, Irreducible unitary representations of locally bicompact groups, *Math. Sbornik*, **55** (1943) 301-316.

[25] F. Ghahramani, A. T. M. Lau, Weak amenability of certain classes of Banach algebras without approximate identities, *Math. Proc. Cambridge Philo. Soc.*, **133** (2002) 357-371.

[26] J. E. Gilbert, Convolution operators on $L^p(G)$ and properties of locally compact groups, *Pacific J. Math.*, **24** (1968) 257-268.

[27] S. Głąb, F. Strobin, Porosity and the L^p-conjecture, *Arch. Math.(Basel)*, **95** (2010) 583-592.

[28] F.P. Greenleaf, *Invariant Means on Locally Compact Groups and Their Applications*, Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.

[29] E. Hewitt, The ranges of certain convolution operators, *Math. Scand.*, **15** (1964) 147-155.

[30] E. Hewitt, I. I. Hirschman, Jr., A maximum problem in harmonic analysis, *Amer. J. Math.*, **76** (1954) 839-854.

[31] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1979.

[32] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[33] J. Jachymski, A nonlinear Banach-Steinhaus theorem and some meager sets in Banach spaces, *Studia Math.*, **170** (2005) 303-320.

[34] D. L. Johnson, A new proof of the L^p-conjecture for locally compact group, *Colloq. Math.*, **47** (1982) 101-102.

[35] A. Kirillov, *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[36] R. Kunze, E. Stein, Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, *Amer. J. Math.*, **82** (1960) 1-62.

[37] Yu. N. Kuznetsova, Invarinat weighted algebras $L_p^\omega(G)$, *Math. Notes*, **84** (2008) 529-537.

[38] H. Leptin, Faltungen von Borelschen ma★en mit L^p-funktionen auf lokal kompakten gruppen, *Math. Annalen*, **168** (1966) 111-117.

[39] N. Lohoué, Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution, *Adv. Math.*, **38** (1980) 178-221.

[40] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, 1953.

[41] A. G. Miamee, The inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$, *Amer. Math. Monthly*, **98** (1991) 342-345.

[42] P. Milnes, Convolution of L^p functions on non-unimodular groups, *Canad. Math. Bull.*, **14** (1971) 265-266.

[43] O. A. Nielsen, *An Introduction to Integration and Measure Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1997.

[44] O. A. Nielsen, Sharpness in Young's inequality for convolution products, *Canad. J. Math.*, **46** (1994) 1287-1298.

[45] R. O'Neil, Convolution operators and $L(p,q)$ spaces, *Duke Math. J.*, **30** (1963) 129-142.

[46] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[47] M. Rajagopalan, On the l^p-spaces of a discrete group, *Colloq. Math.*, **10** (1963) 49-52.

[48] M. Rajagopalan, L^p-conjecture for locally compact groups I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966) 216-222.

[49] M. Rajagopalan, L^p-conjecture for locally compact groups II, *Math. Annalen*, **169** (1967) 331-339.

[50] M. Rajagopalan, W. Żelazko, L^p-conjecture for solvable locally compact groups, *J. Indian Math. Soc.*, **29** (1965) 87-93.

[51] H. J. Reiter, Investigation in harmonic analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952) 401-427.

[52] N. W. Rickert, Convolution of L^p functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967) 762-763.

[53] N. W. Rickert, Convolution of L^2 functions, *Colloq. Math.*, **19** (1968) 301-303.

[54] W. Rudin, Representation of function by convolutions, *J. Math. Mech.*, **7** (1958) 103-115.

[55] W. Rudin, Factorization in the group algebra of the real line, *Proc. Nat. Acod. Sci U.S.A.*, **43** (1957) 339-340.

[56] B. Russo, The norm of the L^p-Fourier transform, II, *Canad. J. Math.*, **28** (1976) 1121-1131.

[57] S. Saeki, The L^p-conjecture and Young's inequality, *Illinois. J. Math.*, **34** (1990) 615-627.

[58] H. Samea, L^p-spaces on locally compact groups, Preprint.

[59] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, **57** (1953) 401-457.

[60] B. Subramanian, On the inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978) 479-481.

[61] K. Urbanik, A proof of a theorem of Żelazko on L^p-algebras, *Colloq. Math.* **8** (1961) 121-123.

[62] A. Villani, Another note on the inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985) 485-487.

[63] A. Weil, *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Application*, Hermann, Paris, 1940.

[64] L. Y. H. Yap, On a convolution theorem, *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **38** (1976) 203-204.

[65] L. Y. H. Yap, On the impossibility of representing certain functions by convolution, *Math. Scand.* **26** (1970) 132-240.

[66] L. Y. H. Yap, Sharpness of Young's inequality for convolution, *Math. Scand.*, **53** (1983) 221-237.

[67] L. Y. H. Yap, On the ranges of certain convolution operators, *Exposition. Math.*, **11** (1993) 73-80.

[68] L. Zajíček, Sets of σ-porosity, *Casopis Pest. Mat.*, **101** (1976) 350-359.

[69] L. Zajíček, On σ-porous sets in abstract spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **5** (2005) 509-534.

[70] W. Żelazko, On the algebras L^p of a locally compact group, *Colloq. Math.*, **8** (1961) 112-120.

[71] W. Żelazko, A theorem on the discrete groups and algebra L^p, *Colloq. Math.*, **8** (1961) 205-207.

[72] W. Żelazko, A note on L^p algebras, *Colloq. Math.*, **10** (1963) 53-56.

[73] W. Żelazko, On the Burnside problem for locally compact groups, *Symp. Math.*, **16** (1975) 409-416.

[۷۴] ر. جهانی‌پور، ب. ظهوری زنگنه، آنالیز حقیقی، مبانی نظریهٔ اندازه و انتگرال، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۸.

[۷۵] ا. صفاپور، نمایش گروه و آنالیز هارمونیک از اویلر تا لانگلندز، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۳۸۹) ۴۰–۲۹.

[۷۶] و. رودین، آنالیز حقیقی و مختلط، ترجمهٔ ع. عالم‌زاده، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۸۸.

[۷۷] ع. ر. مدقالچی، مسائل راهبردی در آنالیز همساز و کاربردهای آنها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۰ (۱۳۸۷) ۴۶–۱۶.

سعید مقصودی

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان

s_maghsodi@znu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۶۱ تا ۶۴

کاربرد ریاضیات در بهبود هوش سیال*

ولی سیادت

مترجم: منصور معتمدی

جامعهٔ ریاضی در چند دههٔ گذشته شاهد بحث‌های پرشوری دربارهٔ ربط رشد مهارت‌های ریاضی و تفکرهای سطح بالا بوده است [9]. در این بحث‌ها فرآیند یادگیری و نیز آسان سازی یادداری آموخته‌ها مورد توجه قرار گرفته است. آزمودن، یک ابزار مهم آموزشی در پیشبرد فرآیند یادگیری است. تجربهٔ من نشان می‌دهد که برای بیشترین تأثیرگذاری، آزمودن باید تجمعی[1] باشد و زمان‌دار، مقصود از آزمون تجمعی، آزمونی است شامل آزمونک‌هایی که پرسش‌های آن از مواد مطرح شده در طول پاره سال تحصیلی انتخاب می‌شوند. در صورتی که دانشجویان بدانند آزمون تجمعی است، از آغاز دوره انگیزه‌ای قوی برای فهم، تمرین و مرور تمام مطالب تدریس شده، در آنان به وجود خواهد آمد. در مقابل آزمون‌هایی که از فصل‌ها و بخش‌ها به عمل می‌آید، آزمون تجمعی با این شناخت که یکپارچگی جان دانش است بر حقیقت پرورش تمرکز می‌یابد. به دلیل ماهیت واقعی سلسله مراتب ریاضیات، فهم مطالب نو به آن‌چه آموخته شده وابسته است و از این رو یادگیری مباحث جدید آشکارا به یادگیری مباحث پیشین گره می‌خورد.

با مطالعات هدایت شده در ریاضیات، کارآیی آزمون‌های تجمعی در مقابل آزمون‌هایی که به طور محدود متمرکز می‌شوند مورد تأیید قرار می‌گیرد (گروه‌های گواه یا پژوهش‌های سایر آموزشگران) [1, 5, 7]. بعضی اهل تحقیق دیگر دارای تألیفات مشابهی دربارهٔ آموزش، از طریق افزایش آزمون‌ها هستند [4, 6]. آزمون‌های زمان‌دار، در فرآیند آموزش، تأثیرگذاری دیگری را ممکن می‌سازند و آن گسترش مهارت‌های تمرکزی دانشجویان است. آنان باید به طور کامل تکالیف را در کانون توجه خود قرار دهند. این ضرورت، به ویژگی روزگار ما، یعنی زندگی با شکاف پایدار که در

---

*) Vali Siadat, Using Mathematics to Improve Fluid Intelligence, Notices of the AMS, March 2011, Volume 58, 432-433.

1) cumulative

فرآیند تفکر دانشجویان بازتاب داده شده و سرگشتگی و ناتوانی تمرکز را در پی دارد، برمی‌گردد. آزمون‌های مکرر و زمان‌دار در ریاضیات، دانشجویان را به گونه‌ای آموزش می‌دهد که به تکالیف، متمرکز شده و توسعهٔ توانایی یادگیری و یادداری دانش را هدف خود قرار دهند. نتیجهٔ پژوهش‌های دسته جمعی با هدایت من نشان می‌دهد که استفادهٔ مکرر از آزمون‌های زمان‌دار نه تنها پی‌آمد کار دانشجویان را در ریاضیات بهبود می‌بخشد، بلکه در موضوعاتی مانند فهمِ خواندن که به آن ارتباط ندارد مؤثر واقع می‌شود. یکی از همکارانم به طور مشخص نتایج مشابهی را در علوم اجتماعی گزارش می‌دهد. این مثال به احتمال زیاد به دانشجویانی که مهارت‌های تمرکزی آنان بهبود یافته است نسبت داده می‌شود.

افزون بر این دریافته‌ایم که آزمون‌های زمان‌دار، بسیار بیش از روش معمول استفاده از آزمون‌های کتبی توانایی دانشجویان را در انجام ریاضیات ذهنی با آموزش تصویرسازی مسائل چند مرحله‌ای و حل فوری آنها بالا می‌برد. به عنوان مثال برای حل معادله $\frac{x}{2} - 7 = -3$، آنان تصویر ذهنی از مسأله آفریده، اعمال جمع و ضرب را انجام داده و به نتیجه $x = 8$ می‌رسند. در مثلثات برای ساده‌کردن اتحاد $1 + \tan^2 x$ به سرعت تصویر ذهنی $1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ را به عنوان $1 + \tan^2 x$ ایجاد کرده، آن را برابر $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$ یا $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ یافته و در نهایت به نتیجه $\frac{1}{\cos^2 x}$ که همان $\sec^2 x$ است می‌رسند. در حسابان برای محاسبهٔ مشتق $e^{\sin 2x}$، آنان تصویر ذهنی قانون زنجیری را شکل داده، حاصل ضرب $(\sin 2x)' e^{\sin 2x}$ را که همان $2(\cos 2x) e^{\sin 2x}$ است به دست می‌آورند، همان کاری که ریاضیدانان در مواجه با چنین مسائلی انجام می‌دهند. دانشجویان بسیار شایسته‌ای را می‌شناسم که دستیابی به این نکته را آغاز کرده‌اند.

سرانجام این که آزمون‌های زمان‌دار، خودکاری دانشجویان را در مهارت‌های اصلی ریاضیات گسترش می‌دهد. ممکن است چنین به نظر آید که این چیزی نیست مگر ایجاد فشار روحی در طول برگزاری آزمون، اما بسیاری از اهالی علم شناخت تحقیق کرده‌اند که فشار روانی در متن تجربه یادگیری سبب توجه متمرکز شده و حافظه معلومات وابسته را بهبود می‌بخشد [3]. بدین ترتیب ذهن می‌تواند در سطح تفکر مفهومی که ویژه حل مسئله است عمل کند. آسایش خاطری که با دست یافتِ سیالی در مهارت‌های اصلی ریاضی تجربه می‌شود، هر فشار روانی اولیه را برطرف می‌کند، زیرا موانع آموزشی موجود در مسیر انجام دامنه‌های بالاتر اندیشه را از سر راه برمی‌دارد. پژوهش‌های اصیل و انگیزه بخش جدید نشان می‌دهد که هوش سیال می‌تواند با آموزش حافظه فعال بهبود یابد [3].

هوش سیال به عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل در امر آموزش شناخته شده، شامل مجموعه‌ای از توانایی‌های وابسته به استدلال مجرد و تفکرهای سطح بالاست. دیر زمانی است این باور وجود دارد که هوش دارای مؤلفه‌های قوی ارثی است و حتی با آموزش، ثابت باقی می‌ماند، اما پژوهش‌های اخیر خلاف این باور را نشان می‌دهد: آموزش در انجام تکالیف پیوسته (دوگان تکالیف n-back) که درستی آن در آزمایش‌های هوش بازتاب داده شده است فعالیت‌های مغز را تحریک کرده نتایج

بهتری را به دست خواهد داد. روانشناسان با تجربه از طریق n-back توانسته‌اند محرک‌های هم زمان شنیداری و دیداری در فاصله‌های زمانی محدود تهیه کنند. چنین تکالیفی به مقدار زیاد به نظارت توجهی متکی است. پژوهش‌های جدید در هوش سیال نیز مهم هستند، زیرا نشان دهنده تأثیر آموزش در تمام سطوح می‌باشند، بدین معنی که شامل تمام افراد، بابهره هوشی پایین و افراد واقع در انتهای طیف می‌شود. نتایج پژوهش‌های جدید سهم مهمی در علوم یادگیری دارد، چرا که پژوهشگران نشان داده‌اند یادگیری شناخت بنیاد، هوش سیال را بهبود می‌بخشد. افزون بر آن، این یافته‌ها کاربردهای مهمی در علوم ریاضی دارند.

در ریاضیات الگویی طبیعی برای پرورش مغز وجود دارد که با خواست تکالیف به طور متمرکز عمل می‌کند، همان که از آن به نام خود کاری متمرکز در ریاضیات ذهنی نام برده می‌شود. پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهند که کار در ریاضیات با استفاده از آزمون‌های مکرر و زمان دار می‌تواند حافظه فعال را یاری دهد. تربیت دانشجویان در حل مسائل به طریق ذهنی در سطوح متفاوت، در فاصله زمانی محدود شباهت زیادی به تکالیف n-back دارد. در پژوهش‌های روانشناسی مربوط به حافظه فعال، خواستار کامل تمرکز، سرعت و دقت در فرآیند تحریک هستند. اگر این همبستگیِ متغیر و تربیت در حافظه فعال بتواند با پیشرفت هوش سیال ارتباط داشته باشد، آن‌گاه تربیت منظم ریاضی با استفاده از آزمون‌های تجمعی و زمان‌دار می‌تواند هوش سیال و توانایی دانشجویان را در حل مسائل، در هر زمینه و در تمام رشته‌های علمی بهبود بخشد.

در ضمن این که پژوهش‌های بیشتر، شامل ارزش‌های نسبی این پروتکل در سطوح گوناگون ریاضی ضروری می‌نماید، دلالت معقول آن به آموزش ریاضی برجسته است. هم چنان که به کاوش در بنیاد و اساس این بحث ادامه می‌دهیم، ناگزیریم بار دیگر بینش نافذ افلاطون را در توانگری و ارزش آموزش ریاضی یادآوری کنیم.

مراجع

[1] F. N. DEMPSTER, Using test to promote learning: A neglected classroom resource. *Journal of Research and Development in Education* **25**(4) (1992). 213-217.

[2] S. M. JAEGGIG, M, BUSCHKUEHL, J. JONIDES, and W.J. PERRIG, Improving fluid intelligence with training on working memory,*Proceedings of the National Academy of Sciences* **105** (19) (2008), 6829-6833.

[3] M. JOËLS. Z. PU. O. WIEGERT, M. S. OITZL. and H. J. KRUGERS. Learning under stress: How does it work? *TRENDS in Cognitive Sciences* **10**(4) (2006), 152-158.

[4] J. D. KARPICKE. A. C. BUTLER and H. L. ROEDIGER III, Metacognitive strategies in student learning: Do students practice retrieval when they study on their own? *memory* **17** (4) (2009), 471-479.

[5] R. J. NUNGESTER and P.C. DUCHASTEL, Testing versus review: Effects on retention, *journal of Educational Psychology* **74**(1) (1982). 18-22.

[6] H. L. ROEDIGER III and J. D. KARPICKE, Test-enhanced learning: Talking memory tests improves long-term retention, *Psycological Science* **17**(3) (2006), 249-255

[7] Y. SAGHER, M. V. SIADAT, and L. HAGEDORN, Building study Skills in a college mathematics classroom, *The journal of General Education* **49** (2) (2000), 132-155.

[8] M. V. SIADAT, P. MUSIAL, and Y. SAGHER, Keystone Method: A learning Paradigm in mathematics, *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS),* **18**(4) (2008). 337-348.

[9] H. WU, Basic Skills Versus Conceptual Understanding: A bogus dichotomy in mathematics education, *American Educator* (fall 1999). 14-52.

مترجم: منصور معتمدی
خانه ریاضیات اصفهان
motamedi.mansoor@gmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ٦۵ تا ۷۵

مجموعهٔ ژولیای چندجمله‌ای‌های چبیشف

منیره اکبری و مریم ربیعی

چکیده

هدف این مقاله بررسی مجموعه ژولیای چندجمله‌ای‌های چبیشف از درجهٔ n روی کرهٔ ریمان است. این چندجمله‌ای‌ها که با استفاده از یک رابطهٔ بازگشتی تعریف می‌شوند به ازای $n \geq ۲$ دارای مجموعهٔ ژولیای هموار هستند. در واقع، ثابت می‌شود که مجموعهٔ ژولیای این نگاشت‌ها بازهٔ بسته $[-۲, ۲]$ است.
سپس با استفاده از خواص این چندجمله‌ای‌ها و رابطه بازگشتی مشابه، دستهٔ دیگری از چندجمله‌ای‌ها که آن ها را چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف خواهیم نامید، معرفی می‌شوند. نشان می‌دهیم مجموعهٔ ژولیای این خانواده جدید نیز، به ازای هر $n \geq ۲$ هموار است. هم چنین نشان می دهیم چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف در حالت n زوج با چندجمله‌ای‌های چبیشف و در حالت n فرد با منهای آن مزدوج هستند.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های چبیشف، مجموعهٔ ژولیای پرشده، مجموعهٔ ژولیا، تزویج.

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی گسسته یکی از شاخه‌های ریاضیات است که به دلیل کارایی روش‌های آن کاربردهای مهمی در بسیاری از علوم دیگر مانند فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، علوم پزشکی و ... پیدا کرده است. منظور از یک سیستم دینامیکی گسسته، زوج (f, X) است که در آن X یک فضای متری و $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته است.

یکی از موضوعات اصلی این حوزه، بررسی رفتار نهایی نقاط فضا تحت تکرارهای نگاشت f یعنی ترکیب‌های متوالی f با خودش است. به این منظور برای هر $x \in X$ دنبالهٔ $\left(f^n(x)\right)_{n\geq ۰}$ که در آن $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ بار}}$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این دنباله مدار نقطهٔ x نامیده می‌شود. اگر در این دنباله به ازای nای، $f^n(x) = x$ آن گاه نقطهٔ x نقطهٔ تناوبی f، مدار آن مدار تناوبی و n

یک دورهٔ تناوب x نامیده می‌شود. در حالت خاص $n = 1$، نقطهٔ x را یک نقطهٔ ثابت می‌نامیم.

از جمله موضوعات مهم دیگر این حوزه، شناسایی مجموعه‌هایی با رفتار پایدار و مجموعه‌هایی با رفتار ناپایدار است؛ یعنی شناسایی مجموعه‌نقاطی که نقاط نزدیک به آن رفتاری مشابه همان نقطه و یا رفتاری کاملاً متفاوت با آن دارند.

شناسایی سیستم‌هایی با رفتار مشابه هم از موضوعات مهم دیگر در سیستم‌های دینامیکی است. دو سیستم دینامیکی (f, X) و (g, Y) را مزدوج می‌نامیم هرگاه همسان‌ریختی $h : X \to Y$ موجود باشد به طوری که $h \circ f = g \circ h$. در این حالت تمام خواص دینامیکی f به وسیلهٔ h که نگاشت تزویج نامیده می‌شود به g منتقل می‌شود و بر عکس. درحالتی که h فقط پیوسته و به رو باشد آن را نگاشت نیم‌تزویج می‌نامیم. در این حالت بعضی از خواص f تحت h به g منتقل می‌شود [۳].

در صورتی که X زیرمجموعهٔ کرهٔ ریمان[1]، $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty$، باشد، آن را سیستم دینامیکی مختلط و اگر زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، باشد، آن را سیستم دینامیکی حقیقی می‌نامیم. رفتار یک سیستم دینامیکی، حتی درسیستم‌های به ظاهر ساده مانند حالتی که f یک چندجمله‌ای درجهٔ دو است، می‌تواند بسیار پیچیده باشد.

درحالتی که $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ یک چندجمله‌ای است مجموعه نقاطی که مدار آن‌ها کراندار نیست، مجموعه نقاطی هستند که همگی جذب ∞ می‌شوند؛ یعنی مدار آن‌ها به ∞ می‌گراید. بنابراین این دسته از نقاط همگی رفتار یکسانی دارند. در مقابل، مجموعه نقاطی که مدار آن‌ها کراندار است خود به دو دسته تقسیم می‌شوند مجموعه نقاطی با رفتار پایدار و مجموعه نقاطی با رفتار ناپایدار. بر این اساس مجموعهٔ ژولیای پرشده[2]، مجموعهٔ ژولیا[3]، و مجموعهٔ فاتوی[4] f به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} :$ دنبالهٔ $(f^n(z))$ کراندار است$\}$
- $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{K}(f) =$ مرز $\mathcal{K}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{J}$

لازم به ذکر است که در سیستم دینامیکی مختلط روی کرهٔ ریمان، مجموعه‌ی ژولیا، مجموعهٔ ناپایدار و مجموعهٔ فاتو، مجموعهٔ پایدار سیستم است. مجموعهٔ ژولیا، مجموعه‌ای بسته و کاملاً ناوردا تحت f، $f(\mathcal{J}) = \mathcal{J} = f^{-1}(\mathcal{J})$، و مجموعهٔ فاتو، مجموعه‌ای باز و کاملاً ناوردا تحت f است. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه منابع [۱]، [۲] و [۴] پیشنهاد می‌گردد.

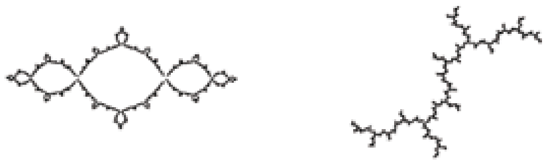
در شکل ۱ بخش سیاه رنگ، مجموعهٔ ژولیای دو نگاشت چندجمله‌ای از درجهٔ دو را نشان می‌دهد. در شکل سمت راست مجموعهٔ ژولیا با مجموعهٔ ژولیای پرشده برابر است ولی در شکل سمت چپ ناحیهٔ کرانداری که مرز آن مجموعهٔ ژولیا است در مجموعهٔ ژولیای پر شده واقع است و مدار سایر نقاط جذب ∞ می‌شود.

---

1) Riemann sphere 2) filled Julia set 3) Julia set 4) Fatou set

در این میان به جز نگاشت‌هایی به صورت z^d، $|d| \geq ۲$، که مجموعهٔ ژولیای آن هموار و در واقع دایرهٔ واحد است، نگاشت‌های چندجمله‌ای دیگری نیز موجودند که مجموعهٔ ژولیای آن‌ها هموار است. این چندجمله‌ای‌ها که به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند، چندجمله‌ای‌های چبیشف[۱] نامیده می‌شوند.

هدف ما در بخش ۱ این مقاله معرفی و بررسی دینامیک این چندجمله‌ای‌ها است. در بخش ۲ خانوادهٔ چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف را معرفی و مجموعهٔ ژولیای آن‌ها را بررسی می‌نماییم و نهایتاً نشان می‌دهیم که چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف در حالت n زوج با چندجمله‌ای‌های چبیشف و درحالت n فرد با منهای آن مزدوج هستند. این دقیقاً همان چیزی است که بر اساس قضیه‌ای از میلنر[۲]، قضیهٔ ۲، قابل انتظار است.



شکل ۱: مرز شکل‌های بالا، به ترتیب از راست، مجموعهٔ ژولیای نگاشت‌های $z^۲ - i$ و $z^۲ - ۱$ است.

۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف و مجموعه‌های ژولیای هموار

چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔ n، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} f_۰(z) &= ۲ \\ f_۱(z) &= z \\ f_n(z) &= zf_{n-۱}(z) - f_{n-۲}(z) \quad \forall n \geq ۲ \end{aligned}$$

نمودار این نگاشت‌ها در حالت $n = ۲, ۳, ۴$، وقتی متغیر z حقیقی است در شکل ۲ رسم شده است.

در واقع، هر چندجمله‌ای چبیشف حقیقی از درجهٔ n هنگامی که به درستی نرمال شود، به ازای متغیر حقیقی x با $|x| < ۱$، جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۱ - x^۲)y'' - xy' + \alpha^۲ y = ۰ \qquad (۱)$$

می‌باشد که در آن $y = \frac{۱}{۲} f_n(۲x)$ و α عدد صحیح و غیرمنفی n است. توجه کنید که برای بررسی

1) Chebyshev polynomials 2) Milnor

درستی ادعای اخیر لازم است ابتدا با استقرأ نشان دهیم

$$(۴ - x^۲)f'_n(x) + xnf_n(x) - ۲nf_{n-۱}(x) = ۰$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف نامیده می‌شود. چندجمله‌ای‌های چبیشف در مواقعی که لازم است یک تابع با یک چندجمله‌ای تقریب زده شود بسیار مفید واقع می‌شوند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی، $f_n|_{\mathbb{R}}$ دارای خواص جالبی هستند که سبب می‌شود رفتار دینامیکی آن‌ها به صورتی مشخص‌تر توصیف شود. از جمله:

I. $(f_n|_{\mathbb{R}})^{-۱}(I) = I = (f_n|_{\mathbb{R}})(I)$ که در آن $I = [-۲, ۲]$.

هرگاه $|x| > ۲$، به سادگی دیده می‌شود دنبالهٔ $(|f_n^m(x)|)$ به بینهایت می‌گراید. در صورتی که به ازای $|x| \leq ۲$، بررسی رفتار دینامیکی $(|f_n^m(x)|)$ بسیار پیچیده‌تر است.

II. نمودار چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد در نقاطی به طول ۲ و ۲− خط $y = x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به مبدا متقارن است. در حالی که نمودار چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج در نقطهٔ به طول ۲ خط $y = x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن است.

III. چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد، نگاشت‌هایی فرد و چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج، نگاشت‌هایی زوج هستند.

IV. اگر $S^۱$ دایرهٔ واحد باشد، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، نگاشت $C : S^۱ \longrightarrow [-۲, ۲]$ با ضابطهٔ $C(\theta) = ۲\cos\theta$ یک نیم‌تزویج بین نگاشت $D_n : S^۱ \longrightarrow S^۱$ با ضابطهٔ $D_n(\theta) = n\theta$ و $f_n|_I$ است. صحت این ادعا با استقراء به اثبات می‌رسد. ابتدا توجه کنید که نگاشت C به رو است. برای $n = ۲$ حکم به وضوح برقرار است. به علاوه داریم

$$\begin{aligned}
f_n(C(\theta)) &= f_n(۲\cos\theta) \\
&= (۲\cos\theta)f_{n-۱}(۲\cos\theta) - f_{n-۲}(۲\cos\theta) \\
&= (۲\cos\theta)\big(۲\cos(n-۱)\theta\big) - ۲\cos(n-۲)\theta \\
&= ۲\cos n\theta \\
&= C(D_n(\theta))
\end{aligned}$$

همهٔ نقاط تناوبی D_n با دورهٔ تناوب m از رابطهٔ $n^m\theta = \theta + ۲k\pi$ به دست می‌آید. در این حالت $\theta = \frac{۲k\pi}{n^m - ۱}$. به راحتی می‌توان نشان داد مجموعهٔ چنین نقاطی در دایره چگال است. از طرف دیگر D_n دارای خاصیت انبساطی است؛ یعنی هرگاه $A \subseteq S^۱$ کمانی از دایره باشد، $D_n(A)$ کمانی با طولی بیش از طول اولیه (n برابر طول اولیه) است و در نهایت به ازای m مناسب $D_n^m(A)$ تمام دایرهٔ $S^۱$ را می‌پوشاند. دو خاصیت ذکر شده در بالا تحت نگاشت C به چندجمله‌ای f_n روی بازهٔ I منتقل می‌شود. بنابراین

الف) مجموعهٔ نقاط تناوبی f_n در بازه‌ی I چگال است.
ب) هرگاه $A \subseteq I$ یک بازه باشد، به ازای m مناسب $f_n^m(A) = I$.

پس هرگاه $A \subseteq I$ یک بازه باشد، به ازای هر $x \in A$، عدد طبیعی m و $y \in A$ یافت می‌شوند به طوری که $|f_n^m(x) - f_n^m(y)| > \frac{1}{۲}$. به علاوه اگر $U, V \subseteq I$ دو بازهٔ دلخواه باشند، m ی وجود دارد به طوری که $f_n^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

خاصیت الف نشانگر نوعی نظم است. خاصیت ب نشان می‌دهد که رفتار مدار نقاط بسیار نزدیک به هم ممکن است متفاوت باشد. به عبارت دیگر نمی‌توان رفتار مدارهای نقاط نزدیک به هم را پیش‌بینی کرد. هم چنین نمی‌توان بازهٔ I را به دو مجموعهٔ مجزا و ناوردا تحت f_n تقسیم نمود. در این حالت گوییم:

نگاشت $f_n|_I$ روی بازه‌ی I آشوبناک است.

با استفاده از نیم تزویج بالا می‌توان خاصیت زیر را نیز در مورد چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی بیان نمود.

۷. یک چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔ $n \geq ۲$، دارای n نقطه‌ی ثابت متمایز و $n - ۱$ نقطه‌ی بحرانی متمایز است که همگی این نقاط بحرانی تحت f_n به ۲ یا ۲− نگاشته می‌شوند.

توجه کنید که خاصیت I نشان می‌دهد که $x_۰$ نقطهٔ اکسترمم f_n است اگر $f_n(x_۰) = \pm ۲$. بنابراین با توجه به رابطهٔ

$$f_n(C(\theta)) = C(D_n(\theta))$$

کافی است با فرض $۲\cos\theta = x_۰$ تساوی

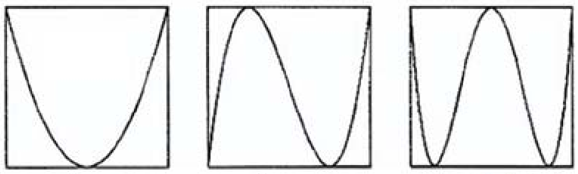
$$\pm ۲ = f_n(x_۰) = f_n(۲\cos(\theta) = C(n\theta) = ۲\cos(n\theta)$$

بررسی شود. از حل معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\theta = \frac{۲k\pi + \pi}{n} \text{ یا } \theta = \frac{۲k\pi}{n}$$

که در آن $۰ \leq k < n$. با توجه به این که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، یعنی نقاط ± ۲، همواره نقاط اکسترمم f_n هستند و با توجه به خاصیت نگاشت نیم تزویج، تعداد نقاط اکسترمم موضعی (نقاط بحرانی) با $\frac{۲n-۲}{۲} = n - ۱$ برابر است.

از طرفی وجود نقاط اکسترمم باعث می‌شود که بتوان بازهٔ $[-۲, ۲]$ را به n قسمت به گونه‌ای افراز نمود که تصویر هر قطعه تحت f_n تمام بازهٔ $[-۲, ۲]$ شود. بنابراین خط $y = x$ نمودار f_n را در n نقطهٔ متمایز قطع می‌کند.



شکل ۲: نمودار چندجمله‌ای‌های چبیشف در حالت حقیقی به ازای $n = 2, 3, 4$.

با استقرا می‌توان نشان داد که خواص زیر نیز در مورد این خانواده برقرار است.

۱. برای هر k و هر $n \geq k$، $f_n \times f_k = f_{n+k} + f_{n-k}$.

۲. برای هر k و هر n، $f_k \circ f_n = f_{kn}$.

۳. $f_n(-z) = (-1)^n f_n(z)$

۴. $f_n^k(-z) = (-1)^n f_n^k(z)$

بنابراین از دومین رابطه می‌توان نتیجه گرفت:

$$f_n \circ f_k = f_k \circ f_n \quad \forall n \geq 0,\ \forall k \geq 0$$

همچنین اگر قرار دهیم $h(z) = z + \frac{1}{z}$ و $F_n(z) = z^n$؛ در این صورت به ازای هر $n \geq 2$ داریم

$$f_n \circ h = h \circ F_n \tag{2}$$

زیرا

$$f_2(h(z)) = (h(z))^2 - 2 = (z + \tfrac{1}{z})^2 - 2 = z^2 + \tfrac{1}{z^2} = h(F_2(z))$$

با فرض برقراری رابطهٔ (۲) برای هر k، $k < n$، در حالت $k = n$ داریم:

$$\begin{aligned}
f_n(h(z)) &= h(z) \times f_{n-1}(h(z)) - f_{n-2}(h(z)) \\
&= (z + \frac{1}{z}) \times h(F_{n-1}(z)) - h(F_{n-2}(z)) \\
&= (z + \frac{1}{z}) \times (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}) - (z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}) \\
&= z^n + \frac{1}{z^n} \\
&= h(F_n(z))
\end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید به ازای هر $m \geq 1$:

$$f_n^m \circ h = h \circ F_n^m \qquad (۳)$$

اکنون با کمک رابطهٔ (۳) نشان می‌دهیم $\mathcal{J}(f_n) = I$ برای این کار توجه کنید که مجموعهٔ ژولیای پرشدهٔ F_n، دیسک واحدبسته‌است؛ زیرا برای هر $|z| \leq 1$، $|F_n^m(z)| \leq 1$ و برای هر z با $|z| > 1$، $\lim_{m\to\infty} F_n^m(z) = \infty$. بنابراین مجموعهٔ ژولیای F_n، مرز دیسک واحد؛ یعنی دایرهٔ واحد است.

هم‌چنین توجه کنید که $h(S^1) = I$ و $h(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}) = h(D) = \mathbb{C}_\infty \setminus I$ که در آن $D = \{z : |z| < 1\}$.

حال برای $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus I$، $z_\circ \in \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}$ موجود است به طوری که $h(z_\circ) = z$. بنابراین

$$f_n^m(h(z_\circ)) = f_n^m(z)$$

در نتیجه

$$h(F_n^m(z_\circ)) = f_n^m(z)$$

چون $\lim_{m\to\infty} F_n^m(z_\circ) = \infty$ و $h(\infty) = \infty$، پس $\lim_{m\to\infty} f_n^m(z) = \infty$.

با روش مشابه، برای $z \in I$، $z_\circ \in S^1$ موجود است که $h(z_\circ) = z$. چون $|F_n^m(z_\circ)| = 1$ لذا $h(F_n^m(z_\circ)) \in I$. بنابراین برای هر m، $f_n^m(z) \in I$ پس داریم:

قضیه ۱. مجموعهٔ ژولیای f_n، بازهٔ بستهٔ $I = [-2, 2]$ است.

برای دیدن اثبات دیگری از این قضیه به [۱] مراجعه کنید. بنابراین در حالت مختلط نیز آشوبناک بودن f_n روی $I = [-2, 2]$ به اثبات می‌رسد. زیرا نقاط بیرون بازهٔ I تحت تکرارهای f_n به بینهایت همگرا هستند، بنابراین رفتار سیستم در بیرون بازهٔ I یک رفتار قابل پیش‌بینی است. در واقع بیرون بازهٔ I همهٔ نقاط رفتار یکسانی دارند. در صورتی که روی بازهٔ I این گونه نیست. چون بازهٔ I مجموعه نقاط مرزی مجموعهٔ ژولیای پر شده است، در هر همسایگی بسیار کوچک نقاط واقع بر بازهٔ I، نقاطی موجودند که تحت تکرارهای f_n به بینهایت میل می‌کنند و در عین حال نقاطی نیز موجودند که همواره در بازهٔ I باقی می‌مانند. این مطلب وابستگی حساس به شرایط اولیه را به خوبی نشان می‌دهد. بنابراین سیستم روی بازه‌ی I ناپایدار است.

۲ چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف و مجموعه‌های ژولیای هموار

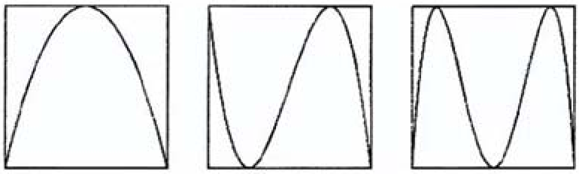
ممکن است این سوال مطرح شود که آیا می‌توان خانوادهٔ دیگری از نگاشت‌ها ارائه داد که به طور بازگشتی تعریف شوند و مجموعهٔ ژولیای آن‌ها نیز یک بازه باشد. قضیهٔ زیر از میلنر بیان می‌کند اگر مجموعهٔ ژولیای یک چندجمله‌ای یک بازه باشد، آن گاه باید با $\pm f_n$ مزدوج شود.

قضیه ۲. [۵] یک چندجمله‌ای از درجهٔ n که مجموعهٔ ژولیای آن با یک بازه همسان‌ریخت باشد به طور خطی با $\pm f_n$ مزدوج است.

حال اگر به قرینهٔ نمودار چندجمله‌ای‌های چبیشف نسبت به محور حقیقی x توجه کنیم، خانوادهٔ دیگری از چندجمله‌ای‌های حقیقی حاصل می‌شوند که نمودار آن‌ها در شکل ۳ نشان داده شده است. این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند با رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف شوند.

$$\begin{aligned} h_0(x) &= -2 \\ h_1(x) &= -x \\ h_n(x) &= xh_{n-1}(x) - h_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

در واقع، $h_n = -f_n$.



$-x^2 + 2$ $\qquad$ $-x^3 + 3x$ $\qquad$ $-x^4 + 4x^2 - 2$

شکل ۳: نمودار خانواده h_n به ازای $n = 2, 3, 4$.

این خانواده که به جز در حالت $n = 0, 1$ با استفاده از همان رابطهٔ بازگشتی ارائه شده در بخش ۱ تعریف می‌شود، ویژگی‌هایی مشابه چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی دارند و حتی در بعضی ویژگی‌ها مشترک هستند.

- $h_n^{-1}(I) = I = h_n(I)$
- چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد در نقاطی به طول ۲ و ۲− خط $y = -x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به مبدا متقارن است. چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج در نقطه‌ی به طول ۲ خط $y = -x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن است.
- چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد، نگاشت‌هایی فرد و چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج، نگاشت‌هایی زوج هستند.
- هر چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq 2$ در این خانواده، دارای n نقطه‌ی ثابت متمایز و $n - 1$ نقطهٔ بحرانی متمایز است که همگی این نقاط بحرانی تحت h_n به ۲ یا ۲− نگاشته می‌شوند.

برای nهای زوج،

$$h_n^k = -f_n^k \qquad \forall k \geq ۱$$

و برای n های فرد،

$$\begin{aligned} h_n^{۲k+۱} &= -f_n^{۲k+۱} & \forall k \geq ۰ \\ h_n^{۲k} &= f_n^{۲k} & \forall k \geq ۱ \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $n \geq ۲$ آشوبناک بودن h_n اثبات می‌شود.

با توجه به خواص این خانواده از نگاشت‌های حقیقی، خانواده‌ی چندجمله‌ای‌های مختلط زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{۰\}$. خانوادهٔ نگاشت‌های چندجمله‌ای زیر را که با رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف می‌شوند، خانوادهٔ شبه چبیشف می‌نامیم.

$$\begin{aligned} g_۰(z) &= \frac{۲}{\alpha} \\ g_۱(z) &= -z \\ g_n(z) &= -\alpha z g_{n-۱}(z) - g_{n-۲}(z) \quad \forall n \geq ۲ \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر قرار دهیم $\alpha = -۱$ آن گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $n \geq ۲$، $g_n(x) = h_n(x)$.

با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد

$$\alpha g_n(z) = (-۱)^n f_n(\alpha z)$$

در واقع داریم

$$\varphi \circ g_n = (-۱)^n f_n \circ \varphi$$

که در آن $\varphi(z) = \alpha z$. بنابراین اگر n زوج باشد g_nها با f_n ها و اگر فرد باشد با $-f_n$ها مزدوج هستند.

توجه کنید که اگر در تعریف فوق به جای $g_۱(z) = -z$ قرار دهیم $g_۱(z) = z$ و رابطهٔ بازگشتی را به صورت

$$g_n(z) = \alpha z g_{n-۱}(z) - g_{n-۲}(z)$$

تغییر دهیم، آن گاه تحت نگاشت تزویج $\varphi(z) = \alpha z$، g_nها فقط با f_nها مزدوج هستند.

با محاسباتی سرراست خواص زیبای زیر برای چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف ثابت می‌شود.

۱. $g_n(-z) = (-1)^n g_n(z)$ و $g_n^k(-z) = (-1)^n g_n^k(z)$.
توجه کنید که ترکیب توابع زوج، تابعی زوج و ترکیب توابع فرد، تابعی فرد است.

۲. برای هر k و هر $n \geq k$، $g_n \times g_k = \frac{1}{\alpha}\{g_{n+k} + g_{n-k}\}$.

۳. برای هر k و هر n، $g_k \circ g_n = (-1)^k g_{kn}$.

۴. $g_k \circ g_n = (-1)^{k+n} g_n \circ g_k$.

در گزارهٔ زیر، رابطهٔ تکرارهای نگاشت چبیشف و شبه چبیشف بیان می‌شود.

گزاره ۱. برای هر $k \geq 1$ و $n \geq 0$

$$f_n^k(\alpha z) = \begin{cases} (-1)^n \alpha g_n^k(z) & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \\ \alpha g_n^k(z) & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در نتیجه

$$|f_n^k(\alpha z)| = |\alpha||g_n^k(z)|$$

بنابراین $z \in \mathcal{K}(g_n)$ اگر و فقط اگر $\alpha z \in \mathcal{K}(f_n)$. به عبارت دیگر نشان داده‌ایم:

قضیه ۳. برای هر $n \geq 2$، $\mathcal{J}(g_n) = \alpha^{-1} I$ یعنی مجموعهٔ ژولیای نگاشت‌های شبه چبیشف نیز یک بازه است.

توجه کنید اگر به جای $\varphi(z) = \alpha z$ از نگاشت $\varphi(z) = \alpha z + \beta$ استفاده کنیم و بخواهیم حداقل رابطهٔ $\varphi \circ g_n = f_n \circ \varphi$، برای هر $n \geq 0$ برقرار شود در این صورت لزوماً خواص ۱ تا ۴ که در بالا ذکر شد برقرار نیست. به عنوان مثال چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد لزوماً نگاشت‌هایی فرد و یا چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج لزوماً نگاشت‌هایی زوج نیستند و نمی‌توان بین $g_n \circ g_k$ و $g_k \circ g_n$ رابطه برقرار نمود. هرچند که مجموعهٔ ژولیای g_n نیز یک بازه است. در واقع مجموعهٔ ژولیای g_n تصویر بازهٔ I تحت نگاشت تزویج φ^{-1} است.

مراجع

[1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, New York (2000).

[2] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag. New York (1993).

[3] R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd. ed., Addison-Wesley (1989).

[4] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable, Introductory lectures*, Third edition, Princeton Univ. (2006).

[5] J. Milnor, *Pasting together Julia sets: A worked out example of mating,* Experimental Mathematicas **13** (2004) 55-92.

منیره اکبری، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، akbari@srttu.edu

مریم ربیعی، دانشگاه الزهرا، mrabii@alzahra.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۷۷ تا ۹۹

مروری بر نگاشت پوانکاره

ابوالحسن رزمی‌نیا

چکیده

یکی از ابزارهای مناسب در مطالعه سیستم‌های دینامیکی، نگاشت پوانکاره است که عمدتاً به دو دلیل مورد توجه است. یکی کاهش مرتبه سیستم پیوسته زمان و مطالعه آن سیستم در حوزه گسسته زمان و دیگری برقرار کردن ارتباط بین مجموعه‌های حدی سیستم اولیه با سیستم گسسته زمان کاهش یافته. در این مقاله با تعریف نگاشت پوانکاره برای انواع سیستم‌های خودگردان و ناخودگردان، به بحث‌هایی راجع به مجموعه‌های حدی نگاشت شده می‌پردازیم. در ادامه مثال‌هایی از کاربردهای این نگاشت توانمند ارائه می‌گردد.

کلید واژه‌ها: سیستم دینامیکی، مجموعه حدی، نگاشت پوانکاره، نگاشت پوانکاره از مراتب بالا.

مقدمه

به زبانی ساده یک سیستم دینامیکی از دو عامل تشکیل شده است:

۱ — قاعده‌ای برای تولید حالت‌ها یا متغیرهای سیستم؛ این قاعده می‌تواند یک معادله دیفرانسیل، تفاضلی، انتگرالی، اپراتوری با ترکیبی از این نوع معادلات باشد،

۲ — شرایط اولیه.

اگر معادله با قاعده توصیف کننده سیستم، یک معادله غیرخطی باشد ما آن را یک سیستم دینامیکی غیرخطی می‌نامیم[۱]. از بین انواع گوناگون قواعد توصیف سیستم‌ها، معادلات دیفرانسیل از جامعیت و کاربرد بیشتری برخوردار است به طوری که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی کنونی با معادلات دیفرانسیل و انتگرال آغاز شده‌اند. در جریان رشد نظریه سیستم‌های دینامیکی، دو وجه این نظریه

---

۱) در بخش ۲ تعریف دقیقی از یک سیستم دینامیکی ارائه می‌شود.

به موازات، مورد توجه قرار گرفت: یکی مطالعات کیفی و دیگری مطالعات کمی. انگیزه معرفی این زمینه‌ها، بررسی حوادث واقعی پیرامونی بوده است. تلاش برای فهم و پیش‌بینی حرکت سیارات، لرزش و ارتعاش یک ریسمان، امواج روی سطح آب و پیش‌بینی وضع آب و هوا، فقط مثال‌های کوچکی از انگیزه‌های مطالعاتی نظریه سیستم‌های دینامیکی بوده است. از زمان نیوتن و اویلر تا همیلتون و ماکسول، کارهای زیادی برای کشف قانون جهان [1]، انجام گرفت، اما نتایج به دست آمده در مقابل آن همه تلاش، بسیار اندک و ناچیز بوده است. جالب است بدانید یکی از انگیزه‌های اصلی نیوتن برای کشف قانون جهان، اعتقادات مذهبی وی بوده است. نکته فرعی دیگری ذکر آن خالی از لطف نیست این است که با ورود نیوتن به دنیای علم، مرز شبه علم و علم به معنای امروزی تا حد زیادی روشن شد. به عبارت دیگر رنگ و بوی ریاضی دادن به مسائل طبیعت، از جمله گام‌های اساسی بود که نیوتن آن را به معنای کامل اجرا کرد.

در اواخر قرن نوزدهم، دانشمندان متوجه شدند بسیاری از معادلات دیفرانسیل غیرخطی دارای جواب‌های صریحی نمی‌باشند. مسئله برهم‌کنش سه جرم، یکی از این مسائل بود. استفاده از سری‌ها و دریافتن پاسخ این گونه معادلات پیچیده، یک ایده مناسب به نظر می‌رسید اما قادر نبود رفتار سیستم را برای بلندمدت پیش‌بینی نماید. پوانکاره با بررسی مسئله منظومه شمسی و آغاز برای حل مسئله پایداری برای این سیستم، نظریه سیستم‌های دینامیکی نوین را پایه‌گذاری کرد. در واقع پوانکاره از حل تحلیلی و مطالعه کمی این مسئله به بررسی کیفی و مطالعه خواص کیفی مسئله پایداری سیستم منظومه شمسی روی آورد. پوانکاره با نبوغ خود توانست ایده‌های زیادی در رابطه با این مقوله معرفی نماید به طوری که بسیاری از ایده‌ها و نظریات امروز در حوزه سیستم‌های دینامیکی و هندسه دیفرانسیلی مرهون کارهای پایه‌ای وی بوده است *. به عنوان مثال او مشاهده کرد برای یک سیستم قطعی [2] که نیروی خارجی آن متغیر با زمان نبوده و همچنین تصادفی نیز نیستند، می‌توان رفتارهای شبه تصادفی مشاهده کرد که ما امروزه آن‌ها را رفتارهای آشوبی [3] می‌نامیم. پیرو جدی کارها و ایده‌های پوانکاره، بیرکهف [4] بود. در واقع در سایه کارهای بیرکهف، برای نخستین بار رفتارهای حدی متعددی برای سیستم‌های دینامیکی معرفی شد و حتی عبارت سیستم‌های دینامیکی برای اولین بار در کتاب وی آورده شده است [۱]. افراد دیگری نیز در پیش‌برد نظریه سیستم‌های دینامیکی سهم به سزایی داشته‌اند که از جمله آن‌ها می‌توان به لیاپانوف، پونتریاگن، آندرونوف، موزر، اسمیل، پیزوتو، کولموگوروف، آرنولد، سینای، اورنز، مای، یورک، فایگن‌بام، رویی و تیکنز

---

*) یکی از مسائل سنگین در حوزه نظریه هندسی دیفرانسیلی که حدود یک قرن جامعه ریاضی‌دانان را درگیر خود کرده بود، مسئله حدس پوانکاره بوده است. بیان ساده این مسئله این است که هر منیفلد سه بعدی هم‌بند ساده بست با یک کره سه‌بعدی هم‌ریخت است. این مسئله به گمان بسیاری از اهالی فن سخت‌ترین مسئله صد سال اخیر بوده است. اما بالأخره گریشا پرلمن ریاضی‌دان روس توانست اثبات کاملی برای این مسئله ارائه دهد. یک نتیجه اخلاقی از این داستان این است که در بسیاری مواقع طرح یک سؤال خوب خیلی سخت‌تر از حل آن است.

1) World rule 2) Determinstic 3) Chaotic behaviors 4) Birkhoff

اشاره کرد. نظریه سیستم‌های دینامیکی به خصوص سیستم‌های آشوناک یکی از موفقیت‌های اساسی قرن بیستم به شمار می‌رود که مدیون کارهای عمیق و جدی بسیاری از دانشمندان از حوزه‌های مختلف بوده است. اهمیت این نظریه در گستردگی و کاربردی بودن آن در انواع زمینه‌ها از جمله مهندسی، فیزیک، ریاضیات، بیولوژی، اقتصاد، پزشکی و شیمی و بسیاری دیگر از زمینه‌های علوم طبیعی و انسانی است و بارها و بارها به نمایش گذاشته شده است. در این مقاله به بحثی مروری در باب مجموعه‌های حدی و ارتباط آن با نگاشت پوانکاره می‌پردازیم. برای این نگاشت کاربردهای فراوانی در ادبیات مهندسی کنترل و فیزیک کاربردی ارائه شده است. از جمله: پزشکی[۲]، لیزر[۳]، تیرهای کامپوزیتی[۴]، مهندسی کنترل[۵]، میدان و امواج الکترومغناطیسی[٦]، نوسانگرها[۷]، بدیهی است برای استفاده از این ابزار کارآمد در انواع زمینه‌های علوم و مهندسی، بایستی دید عمیقی نسبت به مبانی نظری این مقوله کسب گردد. در این مقاله سعی شده است با زبانی روان و در عین حال دقیق، به معرفی مبانی نظری نگاشت پوانکاره پرداخته شود. ساختار مقاله به قرار زیر است: در بخش ۲ مجموعه‌های حدی ناوردا معرفی می‌شود. در این بخش تعاریف اساسی و رفتارهای حدی مهم را معرفی خواهیم نمود. نگاشت پوانکاره و مسائل مربوطه و نحوه ارتباط آن با مجموعه‌های حدی ناوردا در بخش ۳ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نهایتاً در بخش ۴ نکات پایانی را ارائه خواهیم داد.

۲ مجموعه‌های حدی ناوردا

مجموعه‌های ناوردای حدی[1] از نقطه نظر تحلیل رفتار مانای سیستم‌های دینامیکی، در تئوری سیستم‌های غیرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در واقع منظور از رفتار مانای یک سیستم وضعیت رفتاری سیستم در $t \longrightarrow \infty$ است. ما تمرکز اصلی خود را به سیستم‌هایی معطوف می‌کنیم که رفتار مانای کران‌داری داشته باشند. اختلاف بین رفتار مانا و کل رفتار یک مسیر را رفتارگذاری[2] سیستم می‌نامیم. همان‌طوری که احتمالاً احساس می‌کنید این واژه‌ها از نظریهٔ سیستم‌های خطی وام گرفته شده‌اند جایی که اصل جمع آثار به معنای دقیق برقرار است. اما برای سیستم‌های دینامیکی غیرخطی وضعیت متفاوتی وجود دارد. در واقع، در سیستم‌های غیرخطی اصل جمع آثار برقرار نیست و بدین ترتیب ممکن است رفتارهای ماندگاری در این رده از سیستم‌ها ببینیم که در سیستم‌های خطی مشاهده نمی‌شوند.

تعریف ۱. (**سیستم دینامیکی**) سیستم‌های دینامیکی را عموماً به دو کلاس کلی تقسیم می‌کنند:

۱) سیستم‌های دینامیکی زمان پیوسته با قاعده:

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in I \subset R \qquad (۱)$$

1) Limit invariant sets 2) Transient behavior

۲) سیستم‌های دینامیکی زمان گسسته با قاعده:

$$x(k+1) = f(x, u, k), k = 0, 1, 2, ... \quad (۲)$$

که در آنها $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R^n}$ و $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R^p}$ و مجموعه‌های X و U مجموعه‌هایی باز هستند و $\mathbf{f} : X \times U \times I \longrightarrow X$ مبین یک نگاشت است. معمولاً رابطه (۱) را میدان برداری [1] و رابطه (۲) را یک نگاشت [2] می‌نامند. همچنین منظور از یک جواب برای رابطه (۱)، نگاشتی مانند $\mathbf{x}$ است که با دامنه و برد زیر مشخص می‌گردد:

$$\begin{aligned} & x : I \longrightarrow R^n \\ & t \mapsto x(t) \end{aligned} \quad (۳)$$

جایی که $I \subset \mathbf{R}$. علاوه بر این، نگاشت باید در رابطه (۱) نیز صدق کند. همین تعریف برای سیستم‌های گسسته زمان نیز برقرار است.در روابط (۱) و (۲)، اغلب منظور از سیگنال یا تابع $\mathbf{u}$، سیگنال کنترل است.

به عنوان یک تعبیر هندسی از میدان برداری، می‌توان $\mathbf{x}$ را متعلق به فضایی دانست که در آن فضا، رابطه (۱) بیان‌گر شیب منحنی‌های آن فضا می‌باشند. این فضا اغلب با نام‌های فضای فاز [3] یا فضای حالت [4] می‌شناسند. بنابراین:

هدف ما از مطالعه سیستم‌های دینامیکی، بررسی و مطالعه ویژگی‌های منحنی‌های پاسخ در فضای حالت است

از میان همه پاسخ‌های موجود در فضای حالت، آن منحنی که از یک نقطه خاص که همان $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ می‌باشد، می‌گذرد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این مقدار را مقدار آغازین یا همان شرایط اولیه [5] می‌نامیم. گاهی اوقات برای نشان دادن وابستگی جواب‌ها به شرایط اولیه، ممکن است در شکل ضمنی پاسخ، این مقدار اولیه نیز گنجانده شود.

مفهوم دومی که بایستی در باب آن اندکی صحبت شود، مجموعه‌های ناورداست. در واقع به زبانی ساده منظور از یک مجموعه ناوردا مجموعه‌ای است که به ازای هر شرط اولیه از درون آن مجموعه، همه مسیر ناشی از آن در آینده و گذشته همچنان درون آن مجموعه واقع باشد. در ادامه مجموعه ناوردا را برای هر کدام از انواع سیستم‌های پیوسته زمان و گسسته زمان به طور جداگانه و به صورت رسمی معرفی می‌نماییم.

تعریف ۲. (مجموعه ناوردا) فرض کنید $S \subset \mathbf{R}^n$ یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت:

---

1) Vector field 2) Map 3) Phase space 4) State space 5) Initial conditions

- (پیوسته زمان) S را تحت میدان برداری $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ناوردا گویند هرگاه برای هر $\mathbf{x}_\circ \in S$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &\forall t \in R : x(t, \circ, x_\circ) \in S \\ &x(\circ, \circ, x_\circ) = x_\circ \end{aligned} \tag{۴}$$

- (گسسته زمان) S را تحت نگاشت $\mathbf{x}(k+۱) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$ ناوردا گویند هرگاه برای هر $\mathbf{x}_\circ \in S$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &\forall n \in Z : f^n(x_\circ) \in S \\ &x(\circ, \circ, x_\circ) = x_\circ \end{aligned} \tag{۵}$$

توجه نمایید در این تعریف اگر خود را فقط به زمان‌های مثبت محدود نماییم $(t \geq \circ, n \geq \circ)$ در این صورت مجموعه را مجموعه ناوردای مثبت می‌نامند. به طور مشابه مجموعه ناوردای منفی نیز قابل تعریف است.

تعریف ۳. فرض کنید $r \in \mathbf{N}$. برای سیستم دینامیکی با نگاشت معین $\mathbf{f}$ (برای هر دو مورد پیوسته و گسسته زمان)، مجموعه ناوردایی مانند $S \subset \mathbf{R}^n$ را یک C^rـمنیفلد ناوردا گویند اگر S دارای ساختار یک C^rـمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد.

تعریف ۴. فرض کنید $\varphi(t, \mathbf{x})$ شاری روی فضای متریک M باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $\mathbf{y} \in M$ را یک نقطه ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ برای $\varphi(t, \mathbf{x})$ می‌نامند اگر یک دنباله صعودی نامتناهی مانند $\{t_i\}$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} d(\varphi(t, x), y) = \circ \tag{٦}$$

مجموعه همه نقاط ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ برای $\varphi(t, \mathbf{x})$ را مجموعه ωـحدی نامیده و با $\omega(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهند. همان طور که این نماد نشان می‌دهد مجموعه ωـحدی به نقطه $\mathbf{x}$ بستگی دارد. تعبیر دیگری که می‌توان از ωـنقطه حدی ارائه داد بدین صورت است که نقطه $\mathbf{y} \in M$ را یک نقطه ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی دلخواه از $\mathbf{y}$، شار $\varphi(t, \mathbf{x})$ مرتباً به صورت مجانبی به این همسایگی وارد گردد.

در مقابل ωـنقاط حدی، مجموعه حدی دیگری موسوم به نقاط αـحدی تعریف می‌شود. در واقع تعریف این مجموعه مشابه تعریف نقاط ωـحدی است با این تفاوت که دنباله $\{t_i\}$ در

زمان‌های منفی و برای حد $i \longrightarrow \infty$ مورد نظر خواهد بود.

تعریف ۵. نقطه $\mathbf{x}_\circ$ را ناسرگردان[1] گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- (پیوسته زمان) شارها: برای هر همسایگی U از نقطه $\mathbf{x}_\circ$ و $T > \circ$، وجود داشته باشد زمان‌هایی مانند t که $|t| > T$ به طوری که:

$$\varphi(t, U) \cap U = \phi \qquad (۷)$$

- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: برای هر همسایگی U از نقطه $\mathbf{x}_\circ$، وجود داشته باشد $n \neq \circ$ به طوری که:

$$f^n(U) \cap U \neq \phi \qquad (۸)$$

مفهوم شهودی یک نقطه ناسرگردان این است که همواره بتوان اطمینان داشت اگر از اطراف این نقطه شروع به حرکت کنیم. حتماً پس از مدتی باز به این منطقه (اطراف نقطه آغاز) برگردیم. این بحث وجه تسمیه ناسرگردان بودن را روشن می‌کند. همچنین مجموعه همه نقاط ناسرگردان را مجموعه ناسرگردان یک شار یا نگاشت می‌نامند.

تعریف ٦. برای یک سیستم دینامیکی با نگاشت معین f، مجموعه ناوردای بسته $A \in \mathbf{R}^n$ را یک مجموعهٔ جاذب[2] گویند هرگاه همسایگی‌هایی مانند U از A وجود داشته باشند به طوری که:

- (پیوسته زمان) شارها: برای هر $t \geq \circ$، داشته باشیم: $\varphi(t, U) \subset U$ و $\bigcap_{i \geq \circ} \varphi(t, U)$.
- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: برای هر $n \geq \circ$، داشته باشیم: $\mathbf{f}^n(U) \subset U$ و $\bigcap_{n \geq \circ} \mathbf{f}^n(U) = A$.

همان‌طور که از تعریف برمی‌آید، مفهوم شهودی یک مجموعه جاذب این است که همه مسیرهای شروع شونده از همسایگی آن مجموعه، اطراف آن نقطه بمانند و نهایتاً به خود مجموعه میل کنند. یک نتیجه فوری که در عمل استفاده از آن راحت‌تراست بدین صورت قابل بیان است: یک مجموعه ωـحدی مانند A جاذب است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد یک همسایگی باز مانند U از A به طوری که برای همه $\mathbf{x}$های عضو U داشته باشیم: $A(\mathbf{x}) = A$.

نکته مفید در باب مجموعه‌های جاذب این است مجموعه‌های غیرجاذب در شبیه سازی‌ها و سیستم‌های عملی فیزیکی قابل رؤیت نیستند. بنابراین در عمل ما عموماً با مجموعه‌های جاذب سر و کار داریم و همین نکته اهمیت مطالعه این دسته از مجموعه‌ها را در نظریه سیستم‌های دینامیکی دوچندان می‌کند.

1) Non-wandering 2) Attracting set

تعریف ۷. حوزه جذب[1] یک مجموعه جاذب مانند A به صورت زیر تعریف می‌گردد:

- (پیوسته زمان) شارها: $\bigcup_{t\leq 0}\varphi(t,U)$،
- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: $\bigcup_{n\leq 0}\mathbf{f}^n(U)$.

که در آن‌ها U مجموعه‌ای است که در تعریف (۶) آورده شده است.
مفهوم شهودی حوزه جذب یک مجموعه جاذب این است: اجتماع همه نقاطی از فضای فاز که با شروع از آنها آخرالامر به مجموعه جاذبی مانند A میل می‌کنند. به عنوان یک نکته مهم توجه نمایید که حوزه جذب یک مجموعه جاذب یک مجموعه باز است.

نکته قابل توجه دیگر این است که تعاریف بالا از مجموعه‌ها و حوزه جذب اغلب برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان استفاده می‌شوند. این مفاهیم برای سیستم‌های دینامیکی ناخودگردان معنای چندانی ندارند مگر اینکه با تبدیلی بتوان آن‌ها را با سیستم‌های خودگردانی تعدیل نمود. همچنین برای این که دیدی نسبت به مفاهیم فوق داشته باشیم، توجه کنید که رفتار حدی کران‌دار یک سیستم خطی یا یک رفتار پله‌گونه است یا یک رفتار سینوسی. همچنین حوزه جذب این حالات مانا، کل فضای حالت است. به عبارت دیگر حالت مانا مستقل از شرایط آغازین سیستم است. اما در سیستم‌های غیرخطی، وضع به کلی متفاوت است به طوری که رفتار آیندهٔ سیستم کاملاً به شرایط آغازین وابسته بوده و هر شرط آغازین می‌تواند به مجموعه‌های جاذب کاملاً متفاوتی بینجامد.

تعریف ۸. برای یک سیستم دینامیکی با نگاشتی معین، مجموعه ناوردای بسته A را متعدی توپولوژیکی[2] می‌نامند هرگاه برای هر دو زیرمجموعه بازی مانند U ،$V\subset A$ داشته باشیم:

- (پیوسته زمان) شارها: وجود داشته باشد یک $t\in\mathbf{R}$ به طوری که: $\varphi(t,U)\cap V=\phi$،
- (گسسته زمان): نگاشت‌ها: وجود داشته باشد یک $n\in\mathbf{Z}$ به طوری که: $\mathbf{f}^n(U)\cap V=\phi$.

مفهوم شهودی یک مجموعه متعدی توپولوژیکی این است که اگر دو بخش از آن مجموعه را در نظر بگیریم، با شروع از هر کدام از این دو بخش، مسیر سیستم دینامیکی حداقل یک بار از بخش دیگر نیز بگذرد. به عبارت دیگر همه بخش‌های یک مجموعه متعدی، توسط مسیرهایی به هم متصل‌اند.

تعریف ۹. هر مجموعه جاذب متعدی توپولوژیکی را یک جذب کننده[3] می‌نامند.

توجه داشته باشید هر مجموعه جاذب لزوماً یک جذب‌کننده نیست. در واقع شرط تعدی توپولوژیکی برای یک جذب‌کننده ضروری است. به عبارت دیگر برای این که یک مجموعه بتواند جذب‌کننده باشد باید علاوه بر جاذب بودن، کاملاً در هم پیچیده (متعدی توپولوژیکی) باشد.
چهار نوع رفتار مانا برای سیستم‌های دینامیکی قابل رویت است که عبارتند از: نقطه تعادل،

1) Region of attraction 2) Topological transitive 3) Attracto

رفتار متناوب، رفتار شبه‌متناوب و رفتار آشوب‌ناک که در ادامه سه نوع رفتار اول را به اختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بحث رفتارهای مانای آشوب‌ناک را در مقاله‌ای دیگر مورد تدقیق قرار خواهیم داد.

نقطه تعادل

بحث مجموعه‌های ناوردا را با معرفی نقاط تعادل سیستم‌های دینامیکی پیوسته زمان به عنوان یک مجموعه ناوردای ساده آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱۰. نقطه $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ را یک نقطه تعادل[1] از سیستم $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ می‌نامیم هرگاه:

$$f(x^*) = 0 \tag{۹}$$

بنابراین تعریف، نقطه تعادل، نقطه‌ای است که تغییرات زمانی نداشته باشد؛ یعنی به محض این که سیستم در فضای حالت به این نقطه برسد دیگر تغییرات زمانی نخواهد داشت چرا که $\dot{\mathbf{x}} = 0$.

تعریف نقطه تعادل برای سیستم‌های ناخودگردان بایستی با احتیاط بیشتری صورت گیرد. در زیر تعریفی بدین منظور ارائه می‌شود.

تعریف ۱۱. سیستم ناخودگردان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ مفروض است که در آن $\mathbf{f} : \mathbf{K} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ نسبت به t تکه‌ای پیوسته و روی $\mathbf{K} \times [0, \infty)$ نسبت به $\mathbf{x}$ لیپشیتز موضعی است. جایی که $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^n$ حوزه‌ای است شامل $\mathbf{x} = 0$. بدین ترتیب مبداء را یک نقطه تعادل از این سیستم ناخودگردان در $t = 0$ گویند اگر برای همه $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$f(t, 0) = 0 \tag{۱۰}$$

توجه: البته در عمل این تعریف استفاده چندانی ندارد.

از نقطه نظر طیف فرکانسی، طیف یک نقطه برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان، در واقع یک اسپایک ساده در نقطه صفر فرکانسی است. به زبان دقیق‌تر طیف $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$ فقط شامل یک مولفه در فرکانس صفر است و این یعنی مولفه DC یک سیگنال. همچنین به صورتی شهودی به سادگی دیده می‌شود مجموعه حدی یک نقطه تعادل، خود نقطه تعادل است.

تعریف ۱۲. برای سیستم خودگردان گسسته زمان $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}((k))$ نقطه $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ را نقطه تعادل یا نقطه ثابت این سیستم می‌نامند هرگاه:

$$f(x^*) = x^* \tag{۱۱}$$

۲.۲ رفتارهای متناوب

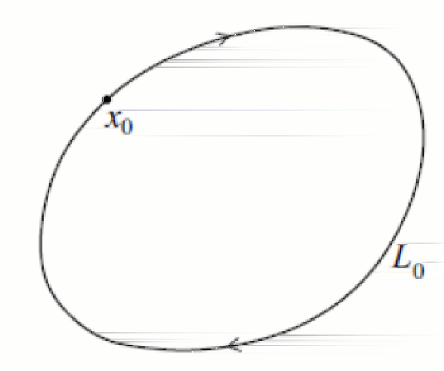
در ادامه دسته خاصی از سیستم‌ها را معرفی می‌کنیم که در مطالعه نوسان‌ها بسیار حائز اهمیت است.

---

1) Equilibrium

تعریف ۱۳. پاسخی مانند $\varphi(t,\mathbf{x}^*)$ از سیستم دینامیکی $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ که از نقطه $\mathbf{x}^*\in X\subset\mathbf{R}^n$ می‌گذرد را متناوب با دوره تناوب $T>0$ گویند هرگاه $\varphi(T,\mathbf{x}^*)=\mathbf{x}^*$. همچنین مجموعه $L_0=\{\varphi(t,\mathbf{x}^*):t\in[0,T]\}$ را که یک منحنی بسته در فضای حالت است را یک مدار متناوب می‌نامند.

مطابق تعریف، $T>0$ را دوره تناوب مدار متناوب می‌خوانند که دوره زمانی آن مسیر بسته را اندازه می‌گیرد. البته توجه داشته باشید منحنی‌های بسته ایزوله فقط در سیستم‌های غیرخطی دیده می‌شوند. به این دسته منحنی‌های بسته نام چرخه حدی تخصیص می‌دهند. در صورت وجود یک چرخه حدی برای یک سیستم دینامیکی خودگردان، آن چرخه حدی را پایدار ساختاری[1] گویند اگر با یک تغییر جزئی در پارامترهای سیستم، سیستم از وضعیت چرخه‌ای خود خارج نگردد. البته برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان با پایداری مرزی نیز مسیرهای بسته‌ای در فضای حالت وجود دارد که این نوع مسیرهای بسته از این نظر که ایزوله نیستند نمی‌توان به آن‌ها چرخه حدی گفت مضاف بر اینکه یک تغییر جزئی در پارامترهای آن سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان می‌تواند پایداری مرزی آن سیستم را به هم بزند و بدین ترتیب مسیرهای بسته در این دست از سیستم‌ها، هرگز پایداری ساختاری نیستند. نمونه‌ای از یک مدار متناوب از یک سیستم خودگردان پیوسته زمان در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱. مدار متناوب در یک سیستم پیوسته زمان.

نکته حائز اهمیت در خصوص طیف فرکانسی رفتارهای متناوب و خصوصاً چرخه‌های حدی این است که طیف مربوطه شامل اسپایک‌هایی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیحی از فرکانس پایه $f=T^{-1}$ می‌باشد. البته ممکن است برخی از این اسپایک‌ها دارای دامنه صفر باشند و چه بسا فرکانس پایه هم وجود نداشته باشد اما اگر اسپایکی در طیف فرکانسی دیده شود قطعاً در مضرب صحیحی از فرکانس پایه قرار گرفته است. با توجه به این نکته می‌توان به این نتیجه مهم

1) Structural stable

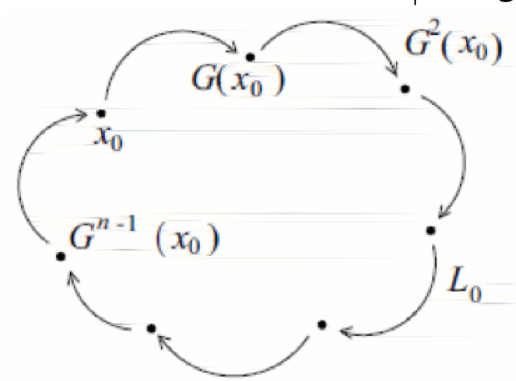
رسید که از روی اولین اسپایک غیرصفر یک سیگنال متناوب نمی‌توان دوره تناوب آن را محاسبه نمود بلکه باید به فاصله فرکانسی اسپایک‌ها نیز توجه کرد. به منظور کشف شهودی از مجموعه حدی یک رفتار متناوب فرض کنید $\mathbf{x}^*$ نقطه‌ای روی یک چرخه حدی نوعی باشد. البته توجه داشته باشید این نقطه دلخواه است. بدین ترتیب مجموعه حدی متناظر با این چرخه حدی عبارت است از منحنی بسته‌ای که توسط $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$ روی یک دوره تناوب پیموده می‌شود. به زبانی دقیق، این مجموعه حدی نسخه دیفومورفیکی از دایره S^lاست. برای درک بهتر می‌توانید این مجموعه حدی را به صورت دایره‌ای تصور کنید.
مشابه تعاریف بالا برای یک سیستم گسسته زمان با معادله دینامیکی $\mathbf{x}(k+۱) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k))$ یک مدار nـمتناوب به صورت مجموعه $\Theta_۰ = \{\mathbf{x}_۰, \mathbf{x}_۱, ..., \mathbf{x}_{n-۱}\}$ تعریف می‌شود که در آن برای هر زوج $i \neq j$ داریم $\mathbf{x_i} \neq \mathbf{x_j}$ به طوری که:

$$\begin{aligned} x_۱ &= G(x_۰) \\ x_۲ &= G(x_۱) \\ &\vdots \\ x_۰ &= G(x_{n-۱}) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

توجه داشته باشید هر نقطه از یک مدار nـمتناوب خود یک نقطه nـمتناوب است زیرا برای $k = ۰, ۱, ۲, ..., n-۱$ داریم:

$$\begin{aligned} &x_k = G^n(x_k); \\ &۰ < j < n : G^j(x_k) \neq x_k \end{aligned} \tag{۱۳}$$

نمونه‌ای از یک مدار متناوب از یک سیستم گسسته زمان در شکل ۲ آورده شده است. از روی این شکل می‌توانید درک روشنی از مفهوم یک نقطه nـمتناوب است داشته باشید.



شکل ۲. نمونه‌ای از یک مدار متناوب گسسته زمان

تعریف ۱۴. مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ را مدار بسته تناوب K [1] مربوط به نگاشت G می‌نامیم هرگاه برای $j = 1, 2, ...K - 1$ داشته باشیم: $y_{j+1} = G(y_j)$ و $y_1 = G(y_k)$.

تعریف ۱۵. شار $\varphi_t(t_\circ, \mathbf{x}^*)$ پاسخ متناوبی از سیستم ناخودگردان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ است اگر برای همه زمان‌های t و برای برخی دوره‌های تناوب کمینه مانند $T > \circ$ داشته باشیم:

$$\varphi_t(t_\circ, x^*) = \varphi_{t+T}(t_\circ, x^*) \tag{۱۴}$$

هر وقت به وسیله تبدیلی یک سیستم ناخودگردان متناوب با دوره کمینه T_f را به یک سیستم خودگردانی تعدیل نماییم، پاسخ متناوب یک چرخه حدی روی یک استوانه خواهد شد. بنابراین دوره تناوب T مضرب صحیحی (مانند K) از دوره تناوب اولیه خواهد بود. در این صورت $\varphi_t(t_\circ, \mathbf{x}^*)$ را پاسخ Kـتناوبی می‌نامند. معمولاً برای $K = 1$، پاسخ را پاسخ پایه می‌نامند و برای $K > 1$ پاسخ‌ها را زیرهارمونیک مرتبه K می‌نامند.

شمائل طیفی یک پاسخ Kـتناوبی برای یک سیستم متناوب ناخودگردان بدین صورت است که یک اسپایک در فرکانس صفر و اسپایک‌های دیگر در مضارب صحیحی از $(KT_f)^{-1}$ قرار دارند. بدین ترتیب هر چه مرتبه زیرهارمونیک‌ها بزرگ‌تر باشد طیف فرکانسی به هم فشرده‌تر خواهند بود.

۳.۲ رفتار شبه متناوب

در ادامه به معرفی دسته سوم از رفتارهای سیستم‌های دینامیکی موسوم به رفتارهای شبه‌متناوب [2] است می‌پردازیم. ابتدا تعریف رسمی از آن‌ها را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۶. تابع $\eta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^m$ را شبه متناوب گویند هرگاه بتوان آن را به شکل $\eta(t) = I(\omega_1 t, \omega_2 I, ..., \omega_m t)$ نوشت که در آن I یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π نسبت به هر کدام از آرگمان‌هایش است و حداقل دو تا از ω_iها نسبت به هم نامتناسب [3] باشند. منظور از نامتناسب بودن این است که نسبت دو مقدار، گویا نباشد.

یک تعبیر عملی‌تر از یک رفتار شبه متناوب بدین صورت است که تابعی مانند $\eta(t)$ را شبه متناوب می‌نامیم هرگاه بتوان آن را به صورت مجموع شمارش‌پذیری از تعدادی توابع متناوب به صورت زیر نوشت:

$$\eta(t) = \sum_j h_j(t) \tag{۱۵}$$

که در آن تابع متناوب h_j دارای دوره تناوب T_j است. علاوه بر این بایستی مجموعه فرکانس‌های پایه‌ای مانند $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_b\}$ چنان وجود داشته باشد که:

---

1) Period $-K$ closed orbit 2) Quasi-periodic 3) Incommensurate

الف: این مجموعه مستقل خطی باشند،

ب: همه فرکانس‌های پایه مربوط به توابع h_j یعنی $f_j = T_j^{-1}$ را بتوان توسط این مجموعه ساخت.

به زبانی ساده یک شکل موج را شبه متناوب گوییم هرگاه مشتکل از تعدادی تابع متناوب باشد که فرکانس‌های این توابع به صورت مجموع و یا تفاضل‌هایی از یک مجموعه فرکانس پایه باشد. توجه شود که تعداد فرکانس‌های پایه یکتاست اما خود فرکانس‌های پایه می‌تواند هر مجموعه‌ای باشد مشروط به این که دو شرط بالا را تأمین نماید.

تعریف ۱۷. یک پاسخ شبه متناوب با تعداد b فرکانس پایه را پاسخ bـ متناوب می‌نامیم[1].

برای درک بهتر، سیستم زیر را که متشکل از دو نوسان‌گر ساده است در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \\ &\ddot{y} = \omega_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

که در آن $x, y \in X \subset \mathbf{R}$ و ω_1 و ω_2 ثابت‌های مثبتی هستند. این دو معادله را می‌توان در شکل فضای حالت به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\omega_2^2 x_3 \end{aligned} \tag{17}$$

این نوع نمایش را می‌توان در قالب فرم قطبی به صورت زیر نیز نشان داد:

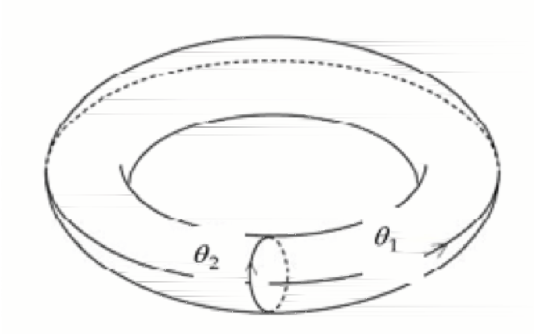
$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{r}_1 &= 0 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \dot{r}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

که در آن θ_i و r_i $(i = 1, 2)$ به ترتیب زاویه و شعاع دایره نوسان هستند، دیده می‌شود. این دو نوسان‌گر در واقع بیان‌کننده نوعی حرکت روی یک چنبره[2] با دو شعاع (r_1, r_2) هستند. شکل (۳) نمایشی از این حرکت است.

---

۱) توجه نمایید دو واژه مشابه تعریف کردیم: یکی پاسخ bـمتناوب و دیگری پاسخ Kـتناوبی. تفاوت در این است که اولی شبه متناوب و دومی متناوب است.

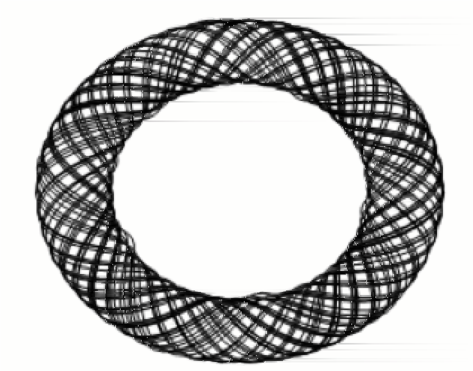
1) Torus



شکل ۳. حرکت نوعی روی یک چنبره دوبعدی

در واقع بسته به اندازه $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ دو نوع حرکت متفاوت برای این سیستم وجود دارد.

- ۱. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ عددی گویا باشد؛ در این حالت هر نقطه از چنبره بر روی یک مدار تناوبی با دوره تناوب q قرار دارد،
- ۲. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ عددی گنگ باشد؛ در این وضعیت با آغاز هر شرط اولیه روی چنبره، مسیر حالت به صورت سرگردان در تمام سطح چنبره می‌گردد، به طوری که به ازای هر نقطه روی چنبره مذکور، این مسیر به فاصله دلخواهی کوچک از کنار آن نقطه می‌گذرد بدون اینکه دقیقاً از نقطه بگذرد. در این وضعیت می‌گویند شار تولید شده توسط معادله (۱۸) روی چنبره مذکور به صورت توپولوژیکی متعدی[۱] است. شکل (۴) را ببینید.



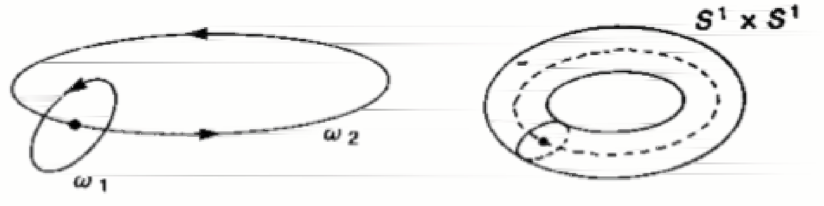
شکل ۴. نمونه‌ای از یک حرکت شبه‌متناوب روی یک چنبره

توجه نمایید در هر دو وضعیت برشمرده، دو نقطه نزدیک به هم، تحت نگاشت، همواره به هم نزدیک باقی می‌مانند.

1) Topologically transitive

از نقطه نظر طیف فرکانسی باید گفت طیف یک پاسخ شبه‌متناوب شامل یک اسپایک در فرکانس صفر و اسپایک‌های دیگر در kf_j است که در آن f_j فرکانس تابع متناوب h_j بوده و $k = ۱, ۲, ۳, ...$. البته همانند وضعیت‌های قبلی، دامنه برخی از مؤلفه‌های فرکانسی ممکن است صفر باشد. توجه کنید از بعد نظری طیف فرکانسی یک شکل موج شبه‌متناوب با مرتبه بالاتر از دو، با شکل موج متناوب، تفاوت اساسی دارد بدین صورت که اسپایک‌های فرکانسی در طیف شبه متناوب به صورت مضارب صحیحی از یک فرکانس خاص مرتب نمی‌شوند. البته از آنجا که نمی‌توان گویا یا اصم بودن یک مقدار اندازه‌گیری شده را به صورت فیزیکی تشخیص داد، از روی طیف نیز نمی‌توان گفت یک شکل موج مربوط به شبه‌متناوب است یا متناوب. در واقع یک شکل موج ظاهراً شبه متناوب ممکن است شکل موج متناوبی با دوره تناوب بزرگ باشد.

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم در یک سیستم خودگردان شبه‌متناوب ۲ـ متناوب مسیرها روی یک مسیر چنبره‌گونه حرکت می‌کنند. این مجموعه‌های حدی را اصطلاحاً نسخه‌های دیفرومورفیکی از یک دو-چنبره $T^۲ = S^۱ \times S^۱$ می‌نامند که در آن هر کدام از دایره‌های $S^۱$ و $S^۲$ مشخص‌کننده رفتار با فرکانس $\omega_۱$ و $\omega_۲$ هستند. وضعیت مجزای این دو فرکانس در شکل ۵ آورده شده است. نکته ظریفی که باید به آن توجه شود این است که مسیرهای سیستم دینامیکی که بیان‌گر رفتار زمانی آن سیستم می‌باشند از نوع اشکال تک‌بعدی هستند در حالی که یک دو-چنبره شکلی دوبعدی است. بنابراین این مسیرها هرگز نمی‌توانند کل سطح چنبره را بپوشانند. اما هر مسیر می‌تواند به هر اندازه دلخواه به هر نقطه روی این چنبره مکرراً نزدیک شود که این همان تعریف مجموعه حدی است. بنابراین مجموعه حدی یک پاسخ شبه متناوب، یک چنبره است. برای پاسخ‌های شبه متناوب با تعداد فرکانس‌های پایه بیشتر، مجموعه حدی نسخه‌های تعمیم یافته‌ای از همین چنبره‌ها است که در بالا معرفی شد.



شکل ۵. رفتار ۲ـ متناوب روی یک چنبره

۳. نگاشت پوانکاره

یکی از ابزارهای کلاسیک برای تحلیل سیستم‌های دینامیک، نگاشت پوانکاره است که به افتخار ریاضیدان فرانسوی هنری پوانکاره نام‌گذاری شده است. با زبانی ساده این نگاشت یک سیستم دینامیکی مرتبه n را به یک نگاشت گسسته زمان $(n - ۱)$ بعدی تبدیل می‌کند. در واقع این نگاشت

طوری تعریف می‌شود که یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌های حدی دینامیک پیوسته زمان و دینامیک گسسته زمان وجود دارد. در واقع اهمیت این نگاشت در دو نکته نهفته است.

۱ــ کاهش مرتبه سیستم دینامیکی،

۲ــ ارتباط دادن دو سیستم پیوسته زمان و گسسته زمان به صورتی یک به یک.

تعریف نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های خودگردان و ناخودگردان متفاوت است. در ادامه هر کدام را به طور جداگانه معرفی خواهیم نمود.

۱.۳ نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های ناخودگردان

یک سیستم ناخودگردان متناوب با دوره تناوب T با معادله $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که پیش از این هم توضیح دادیم، می‌توان این سیستم را با معرفی یک متغیر حالت مانند $\theta := \frac{2\pi t}{T}$ به یک سیستم خودگردان تبدیل نمود. بنابراین دینامیک این سیستم ناخودگردان به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \frac{\theta T}{2\pi}); x(t_0) = x_0 \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T}; \theta(t_0) = \frac{2\pi t_0}{T} \end{aligned} \qquad (19)$$

از آنجا که میدان برداری $\mathbf{f}$ نسبت به زمان با دوره T متناوب است، شکل جدید آن نیز نسبت به θ با دوره 2π متناوب خواهد بود. بدین ترتیب صفحات $\theta = 0$ و $\theta = 2\pi$ یکسان خواهند بود و فضای حالت از قالب فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^{n+1}$ به فضای استوانه‌ای $\mathbf{R}^n \times S^1$ تبدیل خواهد شد که در آن S^1 دایره واحد است. پاسخ ۱۹ در فضای استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

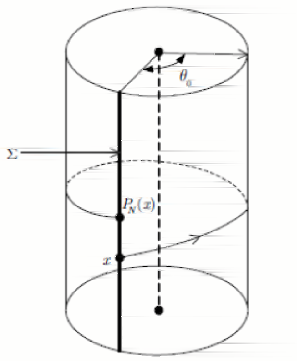
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_t(x_0, t_0) \\ \frac{2\pi t}{T} mod 2\pi \end{pmatrix} \qquad (20)$$

حال ابرصفحه $\sum \in \mathbf{R}^n \times S^1$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$\sum := \{(x, \theta) \in R^n \times S^1 : \theta = \theta_0\} \qquad (21)$$

همان‌طور که می‌توان از شکل ٦ مشاهده نمود. هر T ثانیه، مسیر (۲۰) ابرصفحه $\sum$ را قطع خواهد کرد. این شکل برای یک سیستم ناخودگردان مرتبه اول رسم شده است. نگاشت نتیجه شده $P_N : \sum \longrightarrow \sum$ را نگاشت پوانکاره می‌نامند و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_N := \varphi_{t_0 + T}(x, t_0) \qquad (22)$$



شکل ٦. نگاشت پوانکاره برای یک سیستم ناخودگردان مرتبه اول.

اندیس N بیان‌گر نگاشت برای سیستم‌های ناخودگردان است. توجه نمایید برای زمان ثابت t، φ_t یک دیفیومورفیسم است و بنابراین P_N معکوس‌پذیر و دیفرانسیل‌پذیر است. تعابیر شهودی زیر را می‌توان در مورد نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های ناخودگردان ارائه داد.

۱ــ $\mathbf{P}_N(\mathbf{x})$ بیانگر این است که نقطه $\mathbf{x}$ پس از T ثانیه توسط شار φ_t به کجا برده می‌شود. این فرایند را نگاشت T-پیش‌رو[1] می‌نامند.

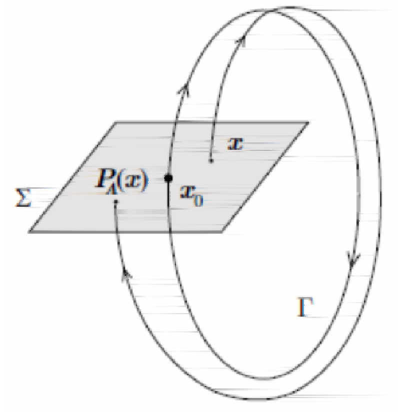
۲ــ عملیات نمونه‌گیری از شار روی ابرصفحه مثل یک عکس‌برداری استروبوسکوپیک است. به زبان دقیق‌تر مدار گسسته زمان $(P_N^k(\mathbf{x}))_{k=1}^{\infty}$ در واقع نمونه‌برداری از یک مسیر است که در هر T ثانیه انجام می‌شود؛ یعنی برای $k = ۰, ۱, ۲, ...$

$$P_N^k = \varphi_{t_0+kT}(x, t_0) \qquad (۲۳)$$

۲.۳ نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های خودگردان

حال یک سیستم خودگردان مرتبه n با چرخه حدی Γ را در نظر بگیرید. $\mathbf{x}_0$ را نقطه‌ای روی چرخه حدی فرض کرده و $\sum$ را ابرصفحه‌ای $(n-۱)$ بعدی در نظر بگیرید که در $\mathbf{x}_0$ با چرخه حدی تقاطع دارد. دیده می‌شود مسیرهای آغازشونده از $\mathbf{x}_0$ پس از گذشت T ثانیه ابرصفحه را مجدداً در $\mathbf{x}_0$ ملاقات خواهند کرد که در آن T کمینه دوره تناوب چرخه حدی است. از آنجا که φ_t نسبت به شرایط اولیه پیوسته است، هر مسیر آغازشونده از همسایگی به اندازه کافی کوچک از $\mathbf{x}_0$ روی ابرصفحه $\sum$، پس از گذشت تقریباً T ثانیه، $\sum$ را در نقطه‌ای در نزدیکی $\mathbf{x}_0$ قطع خواهد کرد. شکل ۷ را ببینید.

1) T-advancing map



شکل ۷. نگاشت پوانکاره برای یک سیستم مرتبه سوم خودگردان.

بدین ترتیب φ_t و $\sum$ نگاشتی مانند P_A از یک همسایگی از $\mathrm{x}_\circ$ مانند $U \in \sum$ به یک همسایگی دیگر از $\mathrm{x}_\circ$ مانند $V \in \sum$ تعریف می‌کند. این نگاشت را نگاشت پوانکاره می‌نامند. اندیس A بیان‌گر نگاشت برای سیستم‌های خودگردان است.

در رابطه با نگاشت پوانکاره سه نکته قابل ذکر است:

- ۱. همان‌طور که دیدیم، P_A به صورت موضعی (یعنی در همسایگی $x_\circ$) تعریف می‌شود. برخلاف سیستم‌های ناخودگردان، تضمینی وجود ندارد که با شروع از هر نقطه از ابرصفحه $\sum$ به نقطه‌ای از این ابرصفحه برگردیم.
- ۲. برای یک فضای حالت اقلیدسی، نقطه $P_A(\mathrm{x})$ لزوماً اولین نقطه‌ای نیست که $\varphi_t(\mathrm{x})$ ابرصفحه $\sum$ را ملاقات می‌کند؛ در واقع $\varphi_t(\mathrm{x})$ قبل از رسیدن به همسایگی $V \in \sum$، حداقل یک بار از $\sum$ می‌گذرد. این وضعیت برای سیستم‌های ناخودگردان رخ نمی‌دهد.
- ۳. نگاشت P_A یک دیفیومورفیسم است و بدین ترتیب معکوس‌پذیر و مشتق‌پذیر است.

نکته دیگری که در ارتباط با نگاشت پوانکاره باید مورد توجه قرار گیرد این است که تعاریفی که در بالا ارائه شد از تعاریف استاندارد نظریه سیستم‌های دینامیکی است. اما از آن‌جا که برای محاسبه نیاز به دانستن موقعیت چرخه حدی هستیم، در عمل و شبیه‌سازی‌ها کم‌تر می‌شود از آن‌هااستفاده کرد.

۳.۳ بررسی مجموعه‌های حدی ناوردا از طریق نگاشت پوانکاره

پیش از این یکی از خصوصیات با اهمیت نگاشت پوانکاره را ویژگی یک به یکی بین سیستم دنیامیکی پیوسته زمان و نسخه گسسته زمان آن برشمردیم. یکی از این خصوصیات مربوط می‌شود به نحوه ارتباط بین مجموعه‌های حدی برای سیستم پیوسته زمان و متناظر آن در گسسته زمان پس از

نمونه‌برداری توسط نگاشت پوانکاره. در این زیربخش قصد داریم بحثی مختصر راجع به این مقوله انجام دهیم.

همان‌طور که پیش از این هم گفته شد رفتار حدی کران‌دار یک سیستم دینامیکی به چهار دسته نقطه تعادل، پاسخ متناوب، پاسخ شبه متناوب و آشوب تقسیم‌بندی می‌شود. اینک می‌خواهیم ببینیم هر یک از این رفتارهای حدی پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره به چه شکلی درخواهد آمد.

۱. نقطه تعادل

متناظر با نقطه تعادل نگاشت پوانکاره مجموعه حدی مناسبی به دست نمی‌دهد. در واقع اگر ابرصفحه $\sum$ شامل یک نقطه تعادل مانند x^* باشد و نگاشت پوانکاره به نحو مناسبی در همسایگی این نقطه تعادل تعریف شده باشد، در این صورت مجموعه حدی این نگاشت همان نقطه تعادل خواهد بود. اما اگر این ابرصفحه اندکی دچار اختلال شود، این نقطه تعادل روی ابرصفحه باقی نخواهد ماند و این یعنی مجموعه حدی دارای پایداری ساختاری نیست[1].

۲. پاسخ متناوب

- سیستم‌های ناخودگردان

یک پاسخ تناوب ـ۱ از یک سیستم پیوسته زمان پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_N، به یک نقطه ثابت مانند x^* از نگاشت تبدیل می‌شود.

همچنین یک زیرهارمونیک مرتبه K از یک سیستم پیوسته زمان پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_N، به یک مدار بسته تناوب ـK از نگاشت تبدیل می‌شود.

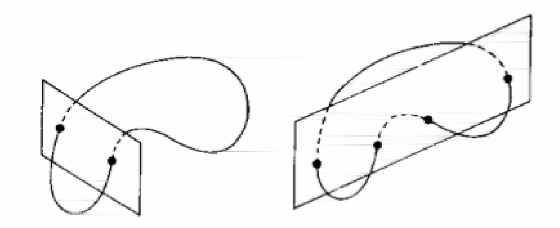
- سیستم‌های خودگردان

یک چرخه حدی از شار φ_t پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_A، به یک نقطه ثابت مانند x^* از نگاشت تبدیل می‌شود. همچنین یک مدار بسته تناوب ـK از نگاشت پوانکاره P_A، بیان‌گر یک زیرهارمونیک مربوط به چرخه حدی می‌باشد. نکته ظریفی که در این جا وجود دارد این است که اگر دوره تناوب کمینه چرخه حدی برابر T باشد، دراین صورت دوره تناوب یک زیرهارمونیک مرتبه K اگر چه خیلی به KT نزدیک است اما دقیقاً برابر نیست[2]. بنابراین، زمان بازگشت برای نقطه x^* روی چرخه حدی دقیقاً برابر T است ولی زمان بازگشت نقاط نزدیک به این نقطه چیزی نزدیک به T است که به هر حال دقیقاً با T برابر نیست. نحوه گزینش ابرصفحه بسیار مهم است. این مسأله را می‌توانید از شکل ۸ ببینید.

---

۱) ما در این زیربخش بحث خود را به مجموعه‌های حدی دارای پایداری ساختاری محدود می‌کنیم.

۲) در واقع برخلاف نگاشت پوانکاره مربوط به سیستم‌های ناخودگردان، نگاشت P_A بر اساس سطح مقطع تعریف می‌شود نه بر اساس زمان.



شکل ۸. بستگی نقاط حدی مربوط به یک چرخه حدی به نحوه گزینش ابرصفحه

۳. پاسخ شبه متناوب

- سیستم‌های ناخودگردان

یک پاسخ ۲ـمتناوب مانند $\varphi_t(\mathbf{x})$ از یک سیستم دینامیکی ناخودگردان را با مجموعه فرکانس پایه $\{f_۱, f_۲\}$ در نظر بگیرید که در آن $f_۲ = T_۲^{-۱}$ فرکانس ورودی است. با تغییر مختصاتی به شکل $(\theta_۱, \theta_۲)$ روی یک چنبره، $\varphi_t(\mathbf{x})$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x(t) = F(\theta_۱(t), \theta_۲(t)) \qquad (۲۴)$$

۴.۳ مثالی از نگاشت پوانکاره

در زیر برای درک بهتری از نحوه استفاده این نگاشت ارزش‌مند، مثالی از [۸] آورده شده است. سیستم دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^۲ + y^۲) \\ \dot{y} &= x + y + y(x^۲ + y^۲) \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

سطح مقطعی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\sum = \{(x, y) \in R^۲ : x > ۰, y = ۰\} \qquad (۲۶)$$

اینک سیستم معرفی شده در (۲۵) را در مختصات قطبی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم[۱]:

$$\dot{r} = r(۱ - r) \qquad (۲۷)$$

$$\dot{\theta} = ۱ \qquad (۲۸)$$

۱) تغییر مختصات از دکارتی به قطبی با روابط $r^۲ = x^۲ + y^۲$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$ داده می‌شود. کافی است از طرفین این دو رابطه مشتق بگیرید و از معادلات توصیف‌کننده سیستم استفاده نمایید.

و نسخه قطبی سطح مقطع فوق به شکل زیر است:

$$\sum = \{(r,\theta) \in R \times S^{1} : r > 0, \theta = 0\} \tag{۲۹}$$

پس از کمی محاسبه می‌توان شکل کلی پاسخ سیستم (۲۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_i(r_0,\theta_0) = \left(\left(1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-2t}\right)^{-0.5}, t+\theta_0\right) \tag{۳۰}$$

به سادگی دیده می‌شود زمان بازگشت یک نقطه مانند q از ابرصفحه $\sum$ برابر است با 2π. بنابراین نگاشت پوانکاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_A(r_0) = \left(1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-4\pi}\right)^{-0.5} \tag{۳۱}$$

از رابطه نگاشت به روشنی دیده می‌شود نقطه $r_0 = 1$ یک نقطه ثابت از نگاشت است، یعنی $P_A(1) = 1$ که در واقع مشخص‌کننده مسیر بسته مستدیری با شعاع واحد است. در اینجا نگاشت پوانکاره یک نگاشت تک‌بعدی است. همچنین با روش اول لیاپانوف می‌توان نشان داد این چرخه حدی و یا متناظر آن نقطه ثابت نگاشت، دارای پایداری مجانبی است.

۵.۳ بحثی راجع به نگاشت پوانکاره از مراتب بالاتر

چنان‌که پیش از این دیدیم نگاشت پوانکاره با کاهش مرتبه یک سیستم پیوسته زمان، یک چرخه حدی را به یک نقطه، یک چنبره را به یک دایره و یک Kـچنبره را به یک $(K-1)$ـچنبره تقلیل می‌دهد.

یک سیستم پیوسته زمان ناخودگردان را در نظر بگیرید که شامل دو جمله متناوب با دوره‌های تناوب نامتناسب T_1 و T_2 می‌باشد به طوری که سیستم یک رفتار دوـمتناوب با فرکانس‌های پایه $\{T_1^{-1}, T_2^{-1}\}$ از خود بروز می‌دهد. چنان‌که دیدیم یک چنین سیستمی دارای مجموعه حدی دوـچنبره‌ای مانند $S^1 \times S^1$ است. مختصات روی این چنبره را θ_1 و θ_2 می‌نامیم که در آن θ_1 مختصات متناظر با دوره T_1 است و مختصات θ_2 متناظر است با دوره تناوب T_2. نمونه‌برداری یک مسیر دوـمتناوب از این سیستم با نرخ T_1^{-1} حرکت را در امتداد مختصه θ_1 فریز می‌کند. به عبارت بهتر مجموعه حدی متناظر با این مسیر حرکتی به صورت $L_1 = \{(\theta_1,\theta_2 : \theta_1 = \theta_0\}$ درمی‌آید که در آن θ_0 مختصات زمان آغاز t_0 است. به همین ترتیب نمونه‌برداری با نرخ T_2^{-1} حرکت را در امتداد مختصه θ_2 فریز می‌کند که مجموعه حدی آن دایره‌ای مانند L_2 است که با $L_2 = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_2 = \theta_0\}$ تعریف می‌شود. اگر بتوان مسیر مورد مطالعه را به صورت هم‌زمان با نرخ‌های T_1^{-1} و T_2^{-1} نمونه‌برداری نماییم، در این صورت حرکت روی نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}^* = (\theta_0,\theta_0)$ که همان محل تلاقی L_1 و L_2 است فریز می‌شود.

فلسفه نگاشت پوانکاره مرتبه دوم، در واقع انجام این عملیات نمونه‌برداری دوگانه هم‌زمان است. برای درک بهتر موضوع اجازه دهید یک بار دیگر مسئله را دقیق‌تر بشکافیم. زمان آغاز را $t_۰ = ۰$ بگیرید. نمونه‌برداری اولیه با نرخ $T_۱^{-۱}$، دنباله‌ای به شکل $(\mathbf{x}_k)_{k=۰}^{\infty}$ تولید می‌کند که در فواصل زمانی $kT_۱$ قرار دارند. نمونه‌برداری دوم در واقع از این دنباله با نرخ $T_۲^{-۱}$ انجام می‌شود. یعنی نقاطی را از این دنباله انتخاب می‌کند که در زمان‌هایی با مضاربی از $T_۲$ قرار دارند. بنابراین عنصر $\mathbf{x}_j$ از دنباله فوق در نمونه‌برداری دوم انتخاب می‌گردد هرگاه وجود داشته باشد یک عدد صحیح مانند r به طوری که:

$$jT_۱ = rT_۲ \tag{۳۲}$$

اما بنابر فرض نامتناسب بودن زمان‌ها $T_۱$ و $T_۲$، این شرط (۳۲) نمی‌تواند برقرار باشد. برای حل این معضل، یک $\epsilon > ۰$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت می‌توان گفت نقطه $\mathbf{x}_j$ در نمونه‌برداری ثانویه انتخاب خواهد شد اگر زمان متناظر با آن $jT_۱$ در فاصله ϵ از مضرب صحیحی از $T_۲$ باشد. به زبان دقیق‌تر مدار ناشی از یک نگاشت پوانکاره مرتبه دوم از مجموعه نقاطی به شکل $\mathbf{x}_k := \varphi_{kT_۱}(\mathbf{x}_۰, ۰)$ تشکیل شده است که:

$$kT_۱ + \epsilon \ \ modT_۲ < ۲\epsilon \tag{۳۳}$$

با توجه به حضور ϵ مجموعه حدی نگاشت پوانکاره مرتبه دوم دیگر همانند نگاشت پوانکاره ساده نمی‌تواند یک نقطه ثابت مانند $\mathbf{x}^*$ باشد. در این وضعیت، مجموع حدی بخش کوچکی از $S_۲^۱$ است که نقطه ثابت $\mathbf{x}^*$ را در برمی‌گیرد. البته توجه شود با میل کردن ϵ به سمت صفر، معادله (۳۳) به (۳۲) میل می‌کند که این به معنای این است که مجموعه حدی به نقطه ثابت $\mathbf{x}^*$ میل کرده است.

این الگو برای معرفی نگاشت‌های پوانکاره از مراتب بالاتر به سادگی قابل تعمیم است. نکته مهم در این تعمیم این است که هر مرتبه از نگاشت، یک واحد از بعد سیستم مورد اولیه می‌کاهد.

نگاشت پوانکاره مرتبه دومی که در بالا تشریح شد برای سیستم‌های دینامیکی ناخودگردان است. همین رهیافت برای تعریف نگاشت پوانکاره مرتبه دوم برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان نیز قابل استفاده است با این تفاوت که در سیستم‌های خودگردان نمونه‌برداری در فضای حالت صورت می‌گیرد در حالی که در سیستم‌های ناخودگردان این نمونه‌برداری در حوزه زمان انجام می‌شد. روند به این صورت است که نمونه‌برداری در ابرصفحه $(n-۱)$ بعدی $\sum_۱$ انجام می‌شود. مجموعه نقاطی که حاصل تقاطع مسیر مورد مطالعه با ابرصفحه $\sum$ است تشکیل یک دنباله مانند $(\mathbf{x}_k)_{k=۰}^{\infty}$ از نگاشت پوانکاره مرتبه اول می‌دهند. پس از آن نمونه‌برداری ثانویه در ابرصفحه $(n-۲)$ بعدی دیگری مانند $\sum_۲$ انجام می‌شود که $\sum_۲ \subset \sum_۱$. نقاط موجود در ابرصفحه اخیر، مجموعه نقاط نگاشت پوانکاره مرتبه دوم را می‌سازند. البته همانند آن‌چه در وضیت سیستم‌های ناخودگردان گفته شد در این‌جا نیز عملاً هیچ کدام از نقاط $\mathbf{x}_j$ دقیقاً روی ابرصفحه $\sum_۲$ نمی‌افتد؛ بنابراین فقط نقاطی که در فاصله ϵ از $\sum_۲$ قرار دارند انتخاب می‌شوند.

نکته: با ترکیب ایده‌های نمونه‌برداری در زمان و در فضای حالت، می‌توان نگاشت‌های پوانکاره مرکب از مراتب بالاتر نیز ساخت.

بررسی دقیقی از محاسبات مربوط به نگاشت پوانکاره از مراتب بالاتر در [۹] انجام شده است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله بحث مختصری راجع به مجموعه‌های حدی ناوردای سیستم‌های دینامیکی ارائه شد و دیدیم عموماً چهار نوع رفتار برای پاسخ‌های سیستم‌های دینامیکی قابل رویت‌اند: نقطه تعادل، پاسخ تناوبی، پاسخ شبه تناوبی و پاسخ‌های آشوبی که در این مقاله فقط به بحث راجع به سه نوع پاسخ اول پرداخته شد. نگاشت پوانکاره به عنوان یک ابزار تحلیلی مناسب برای مطالعه سیستم‌های دینامیکی خودگردان و ناخودگردان معرفی شد و به برخی ویژگی‌های آن اشاره‌ای شد. همچنین در قالب مثال‌هایی نحوه استفاده از این نگاشت نیز ارائه گردید. یکی از مباحث مهم که می‌تواند موضوع پژوهش‌های محققین قرار گیرد بحث‌های مربوط به نگاشت‌های پوانکاره از مراتب بالاتر است که در این مقاله مرور شد.

[1] G, D. Birkhoff, Dynamical Systems, American Mathematical Society, Providence, RI, (1927).

[2] M. Amiri, E. Davoodi-Bojd, F. Bahrami, M. Reza, Bifurcation analysis of the Poincare$'$ map function of intracranial EEG signals in temporal lobe epilepsy, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 81, No. 11 (2011) 2471-2491.

[3] L. M. Sa'nches, A. A. Hnilo, Description of Kerr lens mode-loched lasers with Poincare$'$ maps in the complex plane, Optics Communications, Vol. 199, No. 1-4 (2001) 189-199.

[4] M. A. Avila, R. A. Me'ndez-Sa'nchez, The method of the Poincare$'$ map for compressional and torsional waves in composite rods Physica E: Low dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 30, No. 1-2 (2005) 174-178.

[5] S. M. M. Kashani, H. Salarieh, G. Vossoughi, Control of nonlinear systems onPoincare$'$ section via quasisliding mode method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, No 3, (2009) 645-654.

[6] E. Petrisor, J. H. Misguich, D. Constantinescu, Reconnection in a global model of Poincare$'$ map describing dynamics of magnetic field lines in a reversed shear tolamak, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 18, No. 5 (2003) 1085-1099.

[7] S. H. M. J. Houben, J. M. L. Maubach, R. M. M. Mattheij, An accelerated Poincare$'$-map method for autonomous oscillators, Applied Mathematics and Computation, Vol. 140, No 2-3 (2003) 191-216.

[8] Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillatios, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1983).

[9] J. Grote, M. Berz, K. Makino, High-order epresentation of Poincare$'$ maps, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Vol. 558, No 1 (2006) 106-111.

ابوالحسن رزمی‌نیا
دانشکده مهندسی؛ دانشگاه خلیج‌فارس بوشهر؛
razminia@pgu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار ۱۳۹۳) صص. ۱۰۱ تا ۱۱۹

جستجوی شبه تناوب در تزئینات اسلامی ۵ ـ تا (قسمت اول)*

پیتر آر. کرومول

مترجمین: مریم السادات فلسفی، مریم جمالی گندمانی

مقدمه

کاشی‌کاری پنروز[1] در بین کاشی‌کاری‌های نامتناوب (که تقارن انتقالی ندارند)، اما مرتب شده، قابل توجه هستند. ساختار این کاشی‌کاری‌ها، که شبه‌تناوبی نامیده می‌شوند، به چندین روش قابل توصیف است: ۱ ـ تقسیم‌جزیی خودمتشابه، ۲ــ کاشی‌های با قوانین انطباقی، ۳ ـ تصویر یک قطعه از یک شبکهٔ مکعبی در R^5. مطلب غیر عادی دیگر در مورد کاشی‌کاری‌های پنروز، وجود تقارن دورانی ۵ ـ تا و ۱۰ ـ تای موضعی، در بسیاری از مراکز است. ظاهر این کاشی‌کاری‌ها با برخی نگاره‌های هندسی اسلامی مشترکند. این تشابه ما را به مقایسه واداشته است؛ مقایسه‌ای که نتیجهٔ آن مشاهدهٔ برخی مطالب مقدماتی کاشی‌کاری‌های پنروز، در طرح‌های سنتی اسلامی است. این مطلب خود نشانه‌ای از شبه‌تناوب در این طرح‌ها می‌باشد. بونر[2] [۲]، سه سبک خودمتشابهی را شناسایی کرد. ماکوویکی[3] [۲۰]، الهام‌بخش ایجاد انواع جدیدی از کاشی‌کاری‌های پنروز بوده است. او سپس با همکارانش [۲۴]، طرح‌های سنتی موریش[4] را با کاشی‌کاری‌های از نوع پنروز

*) Peter R. Cromwell, spmr02@liverpool.ac.uk *The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament,* The Mathematical Intelligencer, Voulme 31, Number 1, 2009, pp 36-56.

ترجمهٔ مقاله در دو قسمت تنظیم شده است. قسمت اول، سه بخش نخست را شامل می‌شود. پنج بخش بعدی مقاله، با عناوین طرح‌های چندسطحی، طرحی از الحمرا، طرح‌هایی از اصفهان، ارتباط با کاشی‌کاری پنروز، و در انتها نتایج، در قسمت دوم آورده خواهد شد.)

1) Penrose 2) Bonner 3) Makovicky 4) Moorish

انطباق داده و پوشانید. اخیراً لو و اشتینهارت[1] [۱۷]، استفاده از تقسیم‌جزیی خود متشابه را در سیستم‌های طرح سنتی اسلامی مشاهده نمودند. آنها همچنین طرح‌های ایرانیان را با بادبادک‌ها و پیکان‌های پنروز انطباق داده و پوشانیدند. مقالهٔ اخیر، اگرچه در بعضی از موارد، تعبیر و تفسیر غلط و کاملاً همراه با بزرگ‌نمایی داشته است، با این حال به طور گسترده در جراید جهان نمود یافت.

اگرچه تمایل به یافتن مثال‌هایی از شبه‌تناوب در نگاره‌های سنتی اسلامی قابل درک است، اما نباید انگیزه‌های مدرن و نیز برداشت امروزی را در گذشته جستجو کنیم. نظر بر این است، فرهنگی که خالق چنین نگاره‌های تکراری است، به طور ذاتی نسبت به علم نظریهٔ گروه آگاهی داشته است، اگرچه آنها دارای هیچ تصوری از مفهوم یک گروه نبودند. دو استدلال غلط وجود دارد که باید از آنها دوری جست:

انتزاع: اگر P دربارهٔ X بداند و X مثالی از Y باشد، بنابراین P دربارهٔ Y می‌داند.

استنتاج: P دربارهٔ X می‌داند و X، Y را نتیجه می‌دهد، بنابراین P دربارهٔ Y می‌داند.

در هر مورد احتمالاً P اصلاً دربارهٔ Y فکر نمی‌کند و حتی اگر چنین باشد هیچ لزومی ندارد که ارتباط آنها از طریق X باشد.

من در این مقاله، ابتدا به توصیف روشی برای ترسیم طرح‌های هندسی اسلامی می‌پردازم. این روش بر مبنای کاشی‌کاری است. با مهارت و نبوغ، تکنیک پایه می‌تواند، به طرق بسیاری تنوع و گسترش یابد. این مطلب، ما را به یک دستهٔ متنوع گسترده، از طرح‌های پیچیده و دشوار رهنمون است. همچنین برخی از طرح‌های سنتی‌ای را که قابل مقایسه با کاشی‌کاری‌های شبه‌تناوبی هستند، در بخش اصلی مقاله آورده‌ام. آنها را بررسی می‌کنم و از هندسهٔ زیرین، برای برجسته کردن شباهت‌ها و تفاوت‌ها بهره می‌گیرم. همچنین سندی را ارزیابی خواهم نمود که نشانی از وجود شبه‌تناوب در هنر اسلامی است.

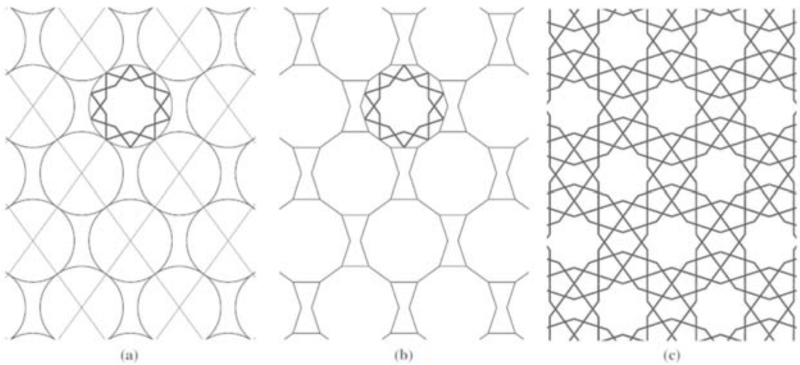
یک بیان مختصر از اصطلاحات علمی: بسیاری از ترسیمات بر مبنای کاشی‌کاری‌های سطح هستند. یک «قطعه» زیرمجموعه‌ای از یک کاشی‌کاری است، که تعدادی متناهی کاشی و یک صفحهٔ همسان را شامل است. عبارت «تکرار واحد» را به عنوان یک عبارت عام، برای الگویی به کار می‌برم، که در آفرینش یک نگاره، با استفاده از تبدیلات طولپا[2] تکرار شده باشد. این مطلب مختص به تناوب متوازی‌الاضلاع یا حوزهٔ بنیادی نیست. یک طرح یا کاشی‌کاری با «تقارن شعاعی» دارای یک مرکز واحد از تعدادی متناهی تقارن دورانی است. دیگر اصطلاحات، همان‌هایی هستند که در [۸] برای کاشی‌کاری‌ها آمده و برای کاشی‌کاری‌های جانشینی در [۳۳] تکمیل شده‌اند.

روش‌های اسلامی ترسیم

اگرچه اصول طراحی هندسی اسلامی پیچیده نیست، اما شناخته شده هم نمی‌باشد. تلاش برای

1) Lu and Steinhardt 2) isometry

بازیابی این اصول از کار هنری خاتمه یافته، دشوار است، چرا که اکثر عناصر مشهود در یک طرح، ترکیب عناصر استفاده شده توسط طراح نیستند. خوشبختانه اسنادی از قرون وسطی باقی مانده است که برخی از رازهای اهل فن را برملا می‌سازد. بهترین سند طومار دست‌نویس MS.H. ۱۹۵٦، در کتاب‌خانهٔ «(قصر توپقاپی (Topkapi»، استانبول است. این طومار، یک سری شکل هندسی می‌باشد که در صفحاتی مجزا کشیده شده‌اند. انتهای این صفحات به یکدیگر چسبانیده شده است. صفحهٔ متصل شدهٔ حاصل، حدود ۳۳ سانتی‌متر عرض و ۳۰ متر ارتفاع دارد. این طومار چیزی شبیه به یک راهنما نیست، چرا که در آن متنی موجود نمی‌باشد. آن بیشتر یک کتاب نگاره است که ترسیم خطوط را نشان می‌دهد. یک نیم‌سایز رنگی بازآفرینی شده‌اش را می‌توان در [۲۵] یافت. این نیم‌سایز، شامل حاشیه‌هایی است که ترسیم خطوط را نمایش می‌دهد. برخی خطوط که در عکس‌ها واضح نیستند، در آن مقاله با یک قلم خاص مشخص گشته است. در این مقاله، ارجاعات به طومار توپقاپی، با همان شمارهٔ صفحاتی می‌باشد که در [۲۵] شماره‌گذاری شده است.



شکل ۱. نگارهٔ ستاره‌ها و بادبادک‌ها

طرح‌های اسلامی اغلب دارای نقش ستاره هستند، که در شکل‌های متنوعی می‌آیند. اما ما در این مقاله تنها به شکل‌های ساده‌ای از آنها نیاز داریم. شکل‌هایی که با ستاره‌ی منتظم چندضلعی‌ها از هندسهٔ مسطحه همخوانی دارد. حال n نقطه با فواصل مساوی را حول یک دایره در نظر بگیرید. نقاطی که در فاصلهٔ d از یکدیگر هستند را به وسیلهٔ خطوط مستقیم به هم متصل نمایید تا ستارهٔ چندضلعی حاصل آید. این ستاره با $\{n/d\}$ نشان داده می‌شود. اگرچه این نقش برای یک ریاضیدان تنها یک ستاره می‌باشد، اما برای یک هنرمند یک نقش خام است که در تمام شکل به‌عنوان یک نقش‌مایهٔ زینتی به کار می‌رود. در اکثر مواقع پاره‌خط‌های میانی اضلاع ستاره حذف می‌شوند.

بسیاری از طرح‌های اسلامی به وسیلهٔ ستاره‌های ٦ ـ ، ۸ ـ ، یا ۱۲ ـ پری ساخته می‌شوند که رئوس، در شبکه‌های استاندارد مربع‌ها یا مثلث‌های متساوی‌الاضلاع واقع شده‌اند. شبکهٔ لوزی شکل متداول، به دیگر ستاره‌ها اجازه می‌دهد تا مورد استفاده قرار گیرند. یک مثال مبنی بر $\{۱۰/۳\}$، در

شکل (a)۱ نشان داده شده است. زاویهٔ لوزی‌ها ۷۲° و ۱۰۸° می‌باشند که هر دو مضاربی از زاویهٔ بین سرهای مجاور ستاره، یعنی ۳۶°، هستند. حال یک مجموعه از دایره‌های با شعاع‌های مساوی و مراکز رئوس شبکه، به گونه‌ای بکشید که هر دایره بر دایرهٔ مجاورش مماس باشد. در دایره‌ها، نسخه‌هایی از نقش ستاره را چنان قرار دهید که سر ستاره‌ها روی یال‌های شبکه قرار گیرد. این مطلب فضا و جهت اصلی نقوش را کنترل می‌کند. اما طرح هنوز کامل نیست. اگرچه در هر نقش برخی از سرها به نقش مجاورشان متصل نیستند، اما آزادند و در فضاهای ماندهٔ بین دایره‌ها واقع شده‌اند. خطوط مرزی این سرهای آزاد، آن‌سوتر از محیط دایره، تا آن‌جایی گسترش داده می‌شوند که به خطوط مشابه‌شان در ستاره‌های نزدیک برسند. این روش ساده، فضاهای باقی‌مانده را مرتبط کرده و اتصال نقوش ستاره را افزایش می‌دهد. می‌بایست نگاره‌ای مشابه با آن‌چه درون شبکه را پر کرده است، به طور یکنواخت در تمام فضاهای باقی‌مانده به کار برده شود و تقارن طرح تا حد امکان حفظ گردد. حاصل این کار در شکل (c)۱ نشان داده شده است. در این مورد خاص بابادک‌هایی همنهشت با بادبادک‌های ستاره، فضای باقی‌مانده را پر می‌نمایند. این نگاره یکی از معمول‌ترین طرح‌های ده ضلعی است. ما برای ارجاعات بعدی آن را نگارهٔ «ستاره‌ها و بادبادک‌ها» می‌نامیم.

بر این اساس، با تکرار واحدهای کوچک، یک دامنهٔ محدود از طرح‌های متناوب حاصل می‌شود. این مطلب تنها برای ستاره‌هایی با این تعداد رأس صادق است. یک روش کلی‌تر که بتواند برای تمام ستاره‌ها به کار رود و همچنین قادر به ترکیب ستاره‌های متفاوت در یک طرح باشد، بر پایهٔ کاشی‌کاری‌های یال به یالی است که شامل چندضلعی‌های محدب منتظم با بیش از چهار ضلع می‌شود. شکل (b)۱، یک کاشی‌کاری از ده ضلعی‌ها، به همراه کاشی‌های شش ضلعی نامحدب بین آنها را نشان می‌دهد. پس از این‌که ستاره‌های {۱۰/۳} را در هر کاشی ده ضلعی قرار دادیم، همان روش پر کردن فضاهای درون شبکه‌ای را، که قبلاً بیان شد، به کار می‌بریم تا نگاره در شش ضلعی‌ها تکمیل گردد.

این تغییر شکل از دایره به چندضلعی، ممکن است به نظر کم اهمیت بیاید، اما این کار دامنهٔ تعمیم‌ها را بالا می‌برد. ما خود را به یک شبکه مرتب از ستاره‌ها محدود نمی‌کنیم. هر کاشی‌کاری‌ای برایمان کفایت خواهد کرد. ممکن است کاشی‌کاری، شامل انواع متفاوتی از چندضلعی‌های منتظم شود که خود اجازه می‌دهد تا نقوش مختلف ستاره در همان طرح ترکیب شوند. خود کاشی‌کاری به طور طبیعی اندازهٔ نسبی ستاره‌های متفاوت را مشخص می‌نمایند. حتی می‌توانیم از نقوش ستارهٔ منتظم، که پر کردن فضاهای درون شبکه‌ای را آغاز می‌کنند و موجبات پیدایش روند کلی طرح را فراهم می‌آورند، چشم‌پوشی نماییم. در این مورد آخر، یک جفت از خطوط کوتاه با آرایش یک X را در نقطهٔ میانی هر یال قرار داده، سپس آنها را تا جایی گسترش می‌دهیم که با خطوط دیگر برخورد کند. این مطلب مشابه پر کردن فضاهای درون شبکه‌ای در هر کاشی است. زاویه‌ای که خطوط، با یال‌های کاشی‌کاری می‌سازند، یا زاویهٔ برخورد، ملاکی برای هماهنگ بودن، توسط هنرمند است. این زاویه، معمولاً در تمام یال‌ها اندازه‌ای یکسان دارد. هیچ لزومی ندارد که امتداد دادن خطوط، در اولین نقطهٔ تلاقی پایان یابد. اگر نواحی وسیع و خالی‌ای در طرح موجود باشند، یا به نحوی طرح

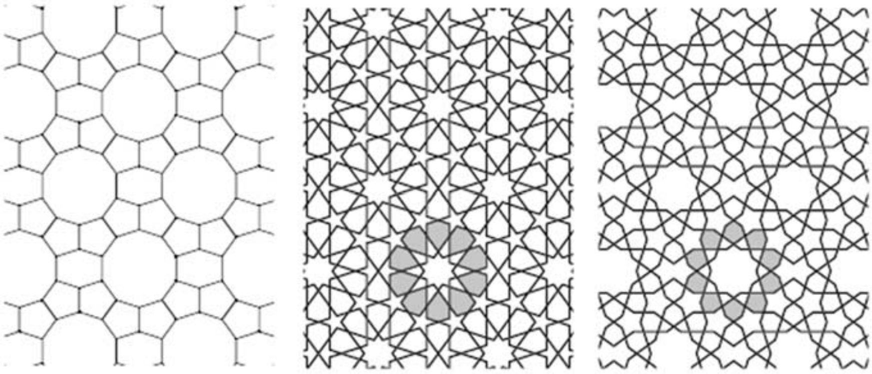
فاقد جذابیت باشد، می‌توان خطوط را ادامه داد تا جایی که تلاقی جدیدی حادث شود.

این روش به عنوان «چندضلعی‌های متصل» (PIC)[۱] شناخته می‌شود. زمانی که هانکین[۲] در شرق بود برای اولین بار این روش را توصیف کرد [۱۳—۹]. او همان کسی است که در زمان کارش در هند، کلیات شبکه‌های چندضلعی را در گچ‌کاری برخی طرح‌ها مشاهده نمود. بسیاری از صفحات طومار توپقاپی، یک طرح اضافه را روی شبکهٔ چندضلعی زیرینش نشان می‌دهد. اگرچه هدف از این شبکه‌ها ثبت شده نیست، اما به نظر منطقی می‌آید که آنها را در نتیجهٔ ترسیم خطوط تفسیر نماییم. بونر [۳و۲]، PIC را تنها سیستمی می‌داند که مدرکی از استفادهٔ تاریخی آن توسط طراحان سرتاسر جهان اسلام، وجود دارد. این روش یک روش کامل است و می‌توان آن را برای یک دامنهٔ وسیع از نگاره‌های سنتی در نظر گرفت، اما همه جا قابل اجرا نیست. یک جانشین نزدیک به آن توسط کاسترا[۳] [۵]، به کار رفته است. او کسی است که شکل‌هایی که به نظر در طرح نهایی‌یشان، از هیچ شبکهٔ مخفی‌ای استفاده نشده را مرتب نمود. روش PIC، در چهار شکل بعد توضیح داده شده است، در شکل ۲، دو طرح حاصل شده از یک کاشی‌کاری با ده ضلعی‌های منتظم، پنج ضلعی‌های منتظم و شش ضلعی‌های محدب نامنتظم را نشان می‌دهد. در قسمت (b)، یک نقش ستارهٔ {۱۰/۴} در کاشی‌های ده ضلعی قرار گرفته است، که یک زاویهٔ برخورد °۷۲ برای دیگر یال‌ها می‌دهد. طرح تکمیل شده‌اش از بین تمام نگاره‌های ستاره، یکی از معمول و رایج‌ترین طرح‌های به کار رفته می‌باشد. قسمت (c)، طرحی را نشان می‌دهد که در آسیای مرکزی معمول است و بر مبنای {۱۰/۳}، با یک زاویهٔ برخورد °۵۴، می‌باشد. یک ستارهٔ {۱۰/۲} و یک زاویهٔ برخورد °۳۶، نگارهٔ ستاره‌ها و بادبادک‌ها را تولید می‌کند. طرح شکل ۳، از مرجع [۱۴] می‌باشد و شامل نقش ستارهٔ {۷/۳} است. در این کاشی‌کاری، هفت ضلعی‌ها منتظم هستند، در حالی که پنج ضلعی‌ها نامنتظم می‌باشند. شکل ۴، بر مبنای یک کاشی‌کاری است، که نه ضلعی‌ها و دوازده ضلعی‌های منتظم را شامل می‌شود. من زاویهٔ برخورد °۵۵ را انتخاب کرده‌ام، تا عناصر دوازده ضلعی محدب طرح، در چندضلعی‌های منتظم و برخی پاره‌خط‌های درونی کاشی‌های شش ضلعی نامحدب متصل شوند، بدون این که یک گوشه بسازند. اما، به عنوان یک نتیجه، هرگز نقش ستاره به طور هندسی منتظم نیست. صفحات ۱۲۲ ــ ۱۲۰ از[۴]، طرح‌های سنتی مبنی بر یک کاشی‌کاری است که مشابه با این کاشی‌کاری می‌باشند. شکل ۵، طرح تقارن دورانی ۱۰ ــ تایی را نشان می‌دهد. این طرح بر مبنای صفحهٔ ۹۰a، از طومار توپقاپی است. نکیپوگلو[۴]، آن را به عنوان طرحی برای یک گنبد می‌داند [۲۵]. صفحهٔ اصلی طومار توپقاپی، برای شکل شامل $\frac{1}{10}$ نگاره، یک الگو ارائه می‌دهد. طرح، با خطوط مشکی پررنگ و کاشی‌کاری، با خطوط نقطه‌چین قرمز رنگ مشخص شده‌اند. توجه داریم که برخی از کاشی‌ها، $\frac{2}{10}$ و $\frac{3}{10}$ بخش، از یک ده ضلعی هستند. گنبدها نیز با اعمال روش PIC، در شبکه‌های چندوجهی تزیین شده بودند. برخی از نگاره‌ها، تعداد کمتری از ستاره‌ها را شامل می‌شدند. این نگاره‌ها با به کار بردن روش PIC در کاشی‌کاری‌های

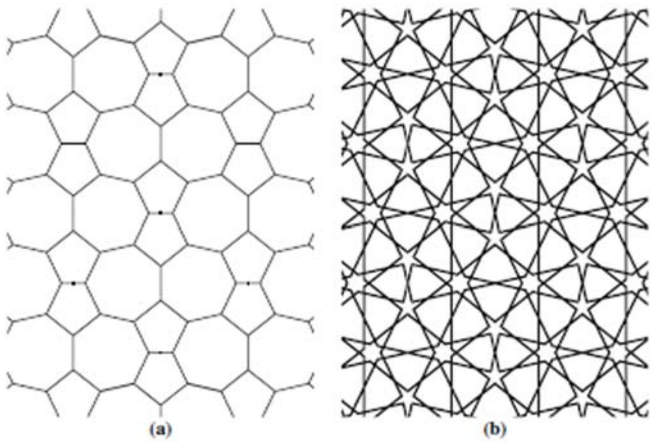
1) Polygons in Contact 2) Hankin 3) Castera 4) Necipoglu

k-یکنواخت، از چندضلعی‌های منتظم سه، چهار، شش و دوازده ضلعی حاصل شده بودند. برای دیدن برخی مثال‌های غیر معمول، صفحات ۷۷، ۹۷ و ۱۴۲ از [۴] را مشاهده نمایید.

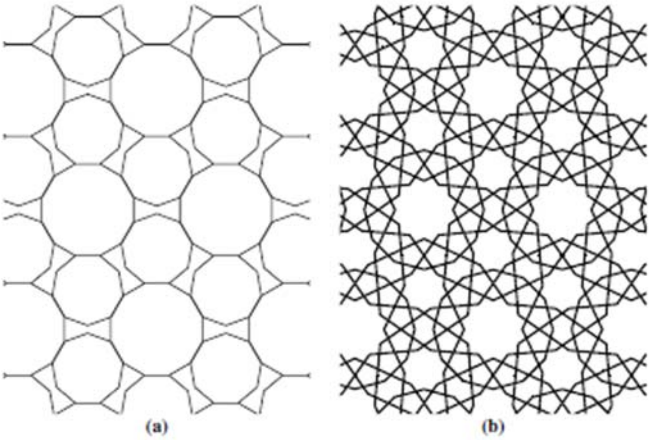
طرح‌های شکل ۲، دو نقش اسلامی رایج دیگر را نشان می‌دهد. در هر دو طرح، یک مجموعه از شش ضلعی‌های محیط بر یک ستاره، با رنگ خاکستری مشخص شده است. نقش مایهٔ ستارهٔ توسیع‌یافته، یک «رز» نامیده می‌شود و شش ضلعی‌های اضافی، گلبرگ‌های آن هستند. در این مورد از آن‌جا که کاشی ده ضلعی زیرین، توسط چندضلعی‌های متساوی‌الاضلاع محاط شده‌اند، لذا نقش رز، نمایان گشته است. در حالی که می‌توان آنها را با استفاده از یک مجموعهٔ دایره‌های مماس، حول دایرهٔ محیطی ستاره، رسم کرد [۱۶] و ترکیبی از عناصر را در مسیر خودشان به کار برد.



شکل ۲. یک کاشی‌کاری و دو نگارهٔ ستارهٔ مشتق‌شده از آن. در هر نگاره گلبرگ‌های یک رز، مشخص شده است.

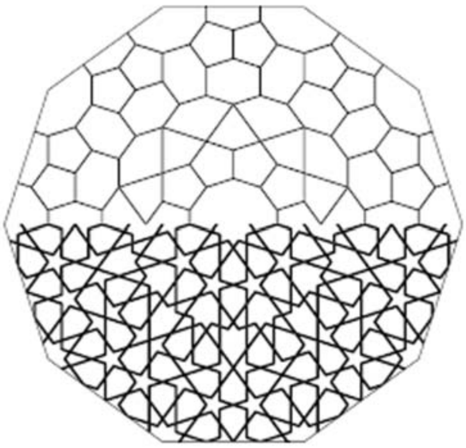


شکل ۳. طرحی شامل ستاره‌های ۷ ـ پر منتظم



شکل ۴. طرحی شامل ستاره‌های ۹ ـ پر و ۱۲ ـ پر

شما می‌توانید روش PIC را در عمل ببینید و نگاره‌های ستارهٔ خودتان را با استفاده از ریز برنامهٔ Kaplan's online Java طراحی کنید. شما یک کاشی‌کاری و زوایای برخورد نقش ستاره را انتخاب می‌کنید. سپس منطق استنباط نگارهٔ درون شبکه‌ای را ارائه می‌نماید.



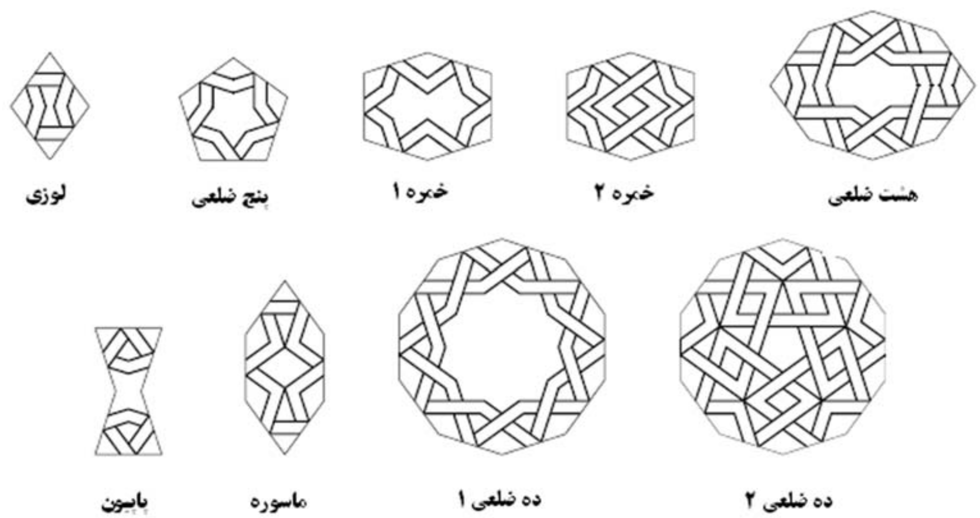
شکل ۵. طرحی از صفحهٔ ۹۰a طومار توپقاپی

کاشی‌کاری به کار رفته در ترسیم شبکهٔ زیرین روش PIC، اغلب از تقارن زیادی برخوردار است.

هنرمندان اسلامی همچنین طرح‌هایی می‌سازند که در ظاهر بیشتر آرایشی آشفته از عناصر، به همراه یک نظم موضعی در مقیاس کوچک، را دارا هستند. با این حال کمی از ناحیهٔ بلند ساختار، در قطعهٔ نشان داده شده قابل رؤیت است. صفحات طومار توپقاپی آشکار می‌سازد که این طرح‌ها یک شبکهٔ چندضلعی زیرین دارند. این شبکه از نسخه‌های یک مجموعهٔ کوچک کاشی‌های متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. کاشی‌های متساوی‌الاضلاعی که زوایایشان مضاربی از ۳۶° می‌باشد: یک لوزی با زوایای ۷۲° و ۱۰۸°، یک پنج ضلعی منتظم با زوایای ۱۰۸°، یک شش ضلعی محدب با زوایای ۷۲° و ۱۴۴° –ماسوره، یک شش ضلعی محدب با زوایای ۱۰۸° و ۱۴۴° –خمره، یک شش ضلعی نامحدب با زوایای ۷۲° و ۲۱۶° –پاپیون، یک هشت ضلعی محدب با زوایای ۱۰۸° و ۱۴۴°، یک ده ضلعی منتظم (زوایای ۱۴۴°).

نقش روی کاشی‌ها با استفاده از روش PIC، با زاویهٔ برخورد ۵۴°، حاصل شده است. شش ضلعی خمره و ده ضلعی به دو شکل آراسته شده‌اند. یکی از نقوش ده ضلعی، تنها یک ستارهٔ {۱۰/۳} است و بادبادک‌های تشکیل دهنده‌اش همان بادبادک‌های روی پاپیون هستند. نقش ده ضلعی دیگر، پیچیده‌تر و تقارنش از دوران ۱۰ ـ تایی به ۵ ـ تایی تقلیل یافته است.

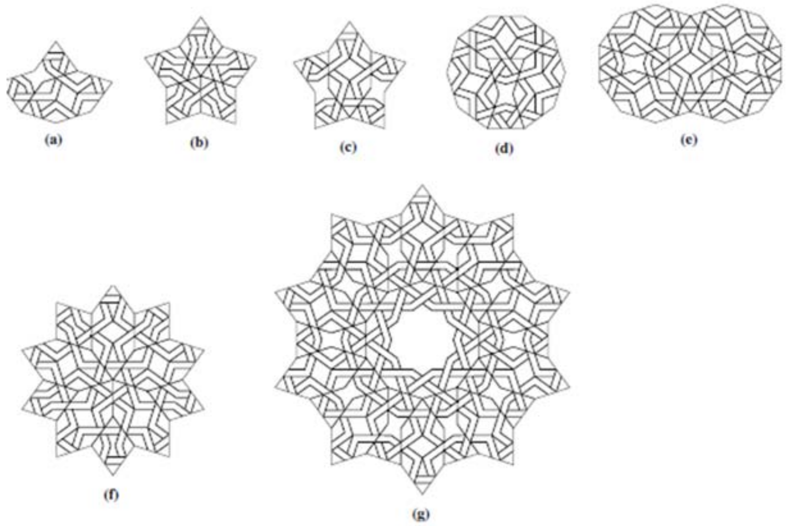
با آزمودن ده ضلعی‌ها و پنج ضلعی‌ها، اشکال دیگر کاشی‌ها به طور طبیعی حاصل می‌شوند. پاپیون و خمره را در شکل‌های قبلی مشاهده کرده‌ایم. هشت ضلعی باقیمانده را می‌توان از فصل مشترک هم‌پوشانی دو ده ضلعی به دست آورد. نقش مایهٔ روی شش ضلعی، شبیه به یک دوک یا قرقرهٔ با نخ است. محل این نقش خاص، به راحتی در طرح مشخص می‌شود و وجودش نشانهٔ خوبی است که بتوان طرح را با کاشی‌ها ترسیم نمود.



شکل ٦. مجموعه‌ای اسلامی از کاشی‌های اولیه

ارتفاع کاشی‌های نامنتظم از اشکال اضافی به عناصر ترکیبی، به نوبهٔ خود پیشرفت مهمی را در طراحی اسلامی ایجاد می‌کند. در نظر گرفتن کاشی‌ها به عنوان قطعاتی از یک جورچین، سبب خواهد شد تا نسبت به این ترکیب رویکرد ساده‌تری را در پیش بگیریم. یک طرح می‌تواند به گونه‌ای پیش‌بینی نشده، به صورت اورگانیک و مداوم، با اضافه نمودن کاشی‌ها به حاشیهٔ هر کدام از قطعات و با در نظر گرفتن گزینه‌های موجود در هر مرحله، به وجود آید. این رویکرد جدید، به هنرمندان آزادی و انعطافی بخشید تا به طرقی نوین، کاشی‌ها را به یکدیگر متصل نمایند، از طرف دیگر سبب پیدایش ردهٔ جدیدی از طرح‌ها شد. از آن‌جا که نمونه‌هایی از این ابداع در قرون ۱۲ و ۱۳ در ایران و ترکیه مشاهده گشت، لذا به نظر می‌آید که این نوآوری مربوط به دورهٔ سلجوقی بوده باشد. کاربرد وسیع و مداوم این کاشی‌های تزیینی به عنوان یک سیستم طراحی، توسط لو و اشتینهارت [۱۷] شناسایی شده بود. بونر [۲]، اظهارات مشابهی ارائه داد. هانکین [۱۰] نیز از این کاشی‌ها استفاده نموده است.

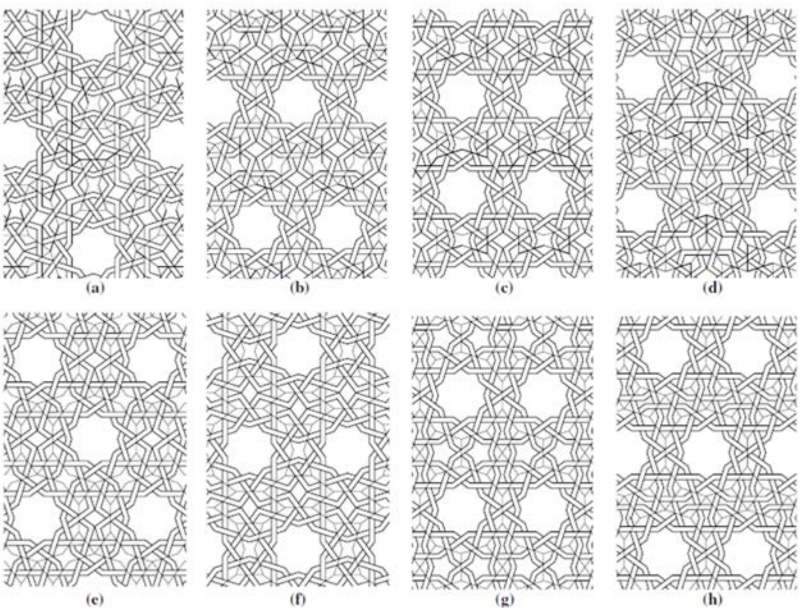
شکل ۷، قطعات کوچکی از کاشی‌ها را نشان می‌دهد. اغلب برای پرکردن یک ناحیه، چندین راه حل وجود دارد. حتی در ترکیب سادهٔ یک ماسوره با یک پاپیون، که در قسمت (a) نشان داده شده است، بازتاب کاشی‌ها نسبت به یک خط قائم، سبب خواهد شد که پاپیون به جای گوشهٔ بالا سمت چپ، در قسمت بالا سمت راست قرار گیرد. قطعهٔ مربوط به بخش (d) را می‌توان جایگزین هر یک از کاشی‌های ده ضلعی کرد که در این حالت سبب از بین رفتن قرینهٔ موجود در این شکل خواهد شد؛ چنان که پاپیون می‌تواند به هریک از ده جهت اشاره داشته باشد. قطعات (b) و (c) جفت دیگری هستند، اگرچه به لحاظ تقارن با یکدیگر متفاوت‌اند.



شکل ۷. قطعات کوچکی از کاشی‌ها

شکل ۸، برخی از طرح‌های سنتی پدید آمده از این کاشی‌ها را نشان می‌دهد. (a) و (b) به ترتیب، برگرفته شده از صفحات ۵۰ و ٦۲ طومار توپقاپی است. در هر دو مورد صفحات اصلی، الگویی را روی کاشی‌های مشخص شده با نقاط قرمز رنگ نشان می‌دهند. این الگو دارای خطوط سیاه پررنگی است که با کاشی‌کاری اضافه گشته است. طرح‌های قسمت (b)، (c) و (d) صفحات ۱۷۳، ۱۷٦ و ۱۷۸ از مرجع [۴] هستند. همچنین طرح‌های (e) و (f)، شکل‌های ۳۳ و ۳۴ از مرجع [۱٦] می‌باشند. یال‌های کاشی‌کاری‌ها در اشکال منظور شده‌اند، تا بدین وسیله ساختار زیرین طراحی نشان داده شود. اما در محصول نهایی این خطوط پاک می‌شوند تا تنها نوارهای در هم بافته باقی بماند. این کار چهارچوب زیرین را مخفی نگه می‌دارد و به حفظ شیوهٔ هنرمند کمک می‌نماید. تماشاگر با توجه به نوارها، تنها یک نمای مختصر از چندضلعی‌ها را مشاهده می‌کند اما در واقع این‌ها ترسیم‌هایی تصنعی هستند و نه نقوش اصلی به کار رفته در ترکیب.

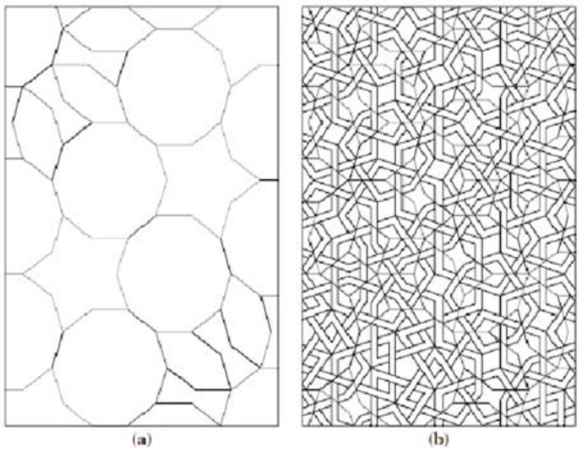
زوایای درونی در گوشه‌های کاشی‌ها، همه مضاربی از 36° هستند. بنابراین تمام یال‌های یک کاشی‌کاری در یکی از پنج جهت می‌باشد. به عبارت دیگر، هر یک از یال‌های کاشی‌کاری با یکی از اضلاع یک پنج ضلعی منتظم، موازی خواهد بود.



شکل ۸. طرح‌های متناوب

کنار هم گذاشتن کاشی‌ها، خودبه‌خود پنج ضلعی‌های منتظمی را در پس زمینهٔ به هم بافته شده به وجود می‌آورد و مراکزی از تقارن دورانی ۵ ـ تا یا ۱۰ ـ تای موضعی را در طرح ایجاد می‌نماید. این تقارن در برخی از پیکربندی‌های شکل ۷، قابل رؤیت است. با این وجود در نگاره‌هایی که

توسط انتقال یک الگو ایجاد می‌شوند، می‌بایست این تقارن شکسته گردد و نمی‌تواند برای طرح کامل در نظر گرفته شود. این مطلب ناشی از محدودیت بلورشناسی است. بنابر این محدودیت، مراکز دوران در یک نگارهٔ متناوب، تنها می‌تواند ۲ ـ ، ۳ ـ ، ۴ ـ یا ٦ ـ تا باشد. این مطلب تا قرن ۱۹، به طور دقیق اثبات نشده بود. اما مسلماً، می‌بایست به طور شهودی توسط نگاره‌سازان اسلامی درک شده باشد. شاید به این علت که این کاشی‌کاری‌ها دارای تعداد زیادی مرکز غیرمجاز بوده‌اند، بسیار جالب به نظر می‌رسیدند. آنها این تصور را ایجاد می‌کردند که می‌توان از این قانون طبیعت گریخت. متأسفانه زمانی که یک بخش به قدر کافی بزرگ از یک کاشی‌کاری، برای تناوبی آشکار نشان داده شود، هر مرکز دورانی، تنها ۲—تا می‌خورد و نوع تقارن کاشی‌کاری (تزیین نشده)، معمولاً یکی ازانواع pgg، pmm و یا به طور معمول‌تر cmm می‌باشد.

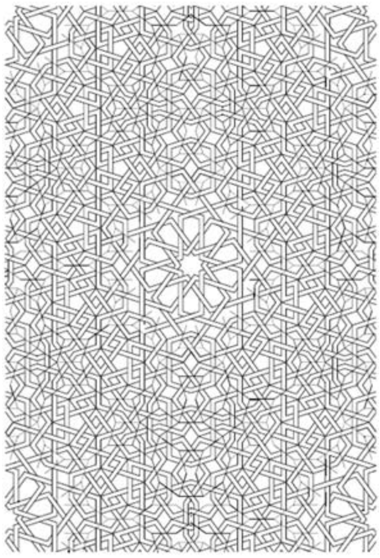


شکل ۹. طرحی از گنبد کبود، مراغه، ایران

شکل ۹(b) طرح روی یک دیوار از گنبد کبود مراغه (برج فیروزه‌ای) را نشان می‌دهد که در شمال غربی ایران واقع شده است. طرح‌های مشابه دیگری نیز سمت‌های دیگر برج را آراسته‌اند. طرح موجود، در نگاه اول به نظر فاقد یک اصل سازمان دهندهٔ کلی است اما در واقع به راحتی می‌توان آن را در چهارچوب نشان داده شده در شکل ۹(a) قرار داد. در گوشهٔ پایین سمت راست صفحه، قطعهٔ شکل ۷(g) به گونه‌ای قرار گرفته که توسط یک حلقه از ده ضلعی‌ها احاطه شده است. آرایش مشابهی نیز در گوشهٔ بالا سمت چپ قرار دارد که بر اولی مماس است. حاصل آن فضاهای خالی به شکل ستاره می‌باشند. حلقه‌های ده ضلعی‌ها توسط قطعهٔ شکل ۷(d) پرشده‌اند. در این حالت پاپیون‌ها به سمت خارج قرار دارند. تنها مورد استثنا، یال پایین صفحه می‌باشد، که با یک کاشی ده ضلعی کامل گشته است. فضاهای خالی ستاره‌ای شکل، با پنج لوزی نشان داده شده در شکل ۷(b) پر شده‌اند. این طرح دارای بی‌نظمی‌ها و همچنین تفاوت‌هایی نسبت به طرح اصلی می‌باشد؛ به خصوص در گوشهٔ پایین سمت چپ صفحه. از سوی دیگر، ده ضلعی موجود در گوشهٔ

بالا سمت چپ نیز با شکل (d)۷ کامل گشته است و نه با یک کاشی ده ضلعی.

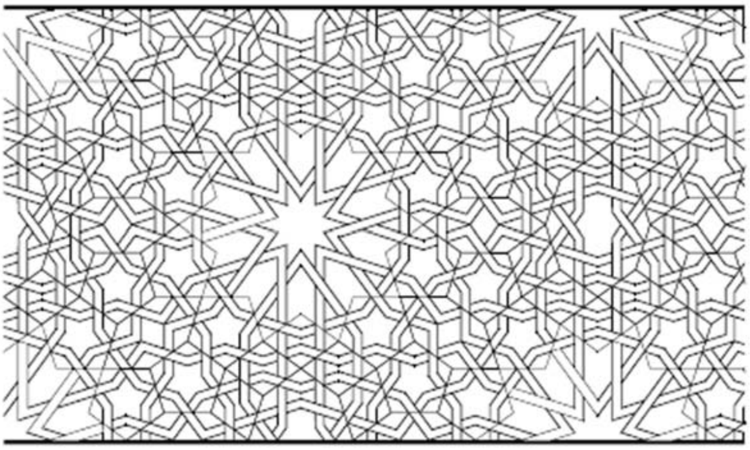
شکل (a)۹ را می‌توان شالودهٔ اصلی طرح نشان داده شده در شکل ۱۰، نیز در نظر گرفت. مراکز نقوش رز، در وسط شکل و گوشهٔ بالا سمت چپ، به طور قطری در گوشه‌های مقابل یک مستطیل قرار دارند که در واقع یک تکرار واحد برای طرح است. چهارچوب زیرین این مستطیل، مشابه طرح به کار رفته در مراغه می‌باشد. طرح کامل، توسط انعکاس اضلاع مستطیل از همین سلول حاصل شده است. توجه داشته باشید که این آرایش کاشی‌هاست که انعکاس داده شده‌اند و نه کاشی‌ها به همراه نقوش زینتی‌یشان.



شکل ۱۰. طرحی از مدرسهٔ کاراتای، قونیه، ترکیه

طرح کامل در هم بافته شده، متناوب باقی می‌ماند. اکثر مرزهای مستطیل واحد را اضلاع کاشی‌ها یا خطوط بازتابی کاشی‌ها تشکیل می‌دهند. هر دوی این موارد، پیوستگی کاشی‌کاری را در سراسر اتصالات تضمین می‌نماید. با این همه در گوشه‌های بالا سمت راست و پایین سمت چپ، کاشی‌ها به طور کامل در مستطیل قرار نمی‌گیرند؛ بلکه از یال‌های مستطیل آویزان‌اند. (در این حالت، سلول در مرکز خودش دارای تقارن دورانی ۲ ـ تایی است.) این مطلب در روش ایجاد طرح‌ها مشکلی ایجاد نخواهد نمود. برای رفع این ایراد، کاشی‌های آویزان برش خورده تا هماهنگ شوند و انعکاس‌ها اتصال نوارها را برعهده می‌گیرند. در شکل ۱۰، به وضوح می‌توان این امر را مشاهده نمود. در میانهٔ شکل و نزدیک به پایین، جفت‌های پاپیون‌ها و ماسوره‌ها با یکدیگر ادغام شده‌اند. مرکز این کاشی‌کاری را می‌توان با قطعهٔ نشان داده شده در شکل (g)۷ پر کرد. اما با آوردن یک نقش رز بزرگ، از این کار صرف نظر شده است. ترسیم متفاوتی از این نگاره توسط

ریگبی[1] در [۲۶] ارائه گشته است.
با بررسی کاشی‌های موجود در شکل ٦، به سرعت می‌توان دریافت که استفاده از کاشی‌های ردیف بالا، نسبت به بقیه، جالب نیست. زوایای 108° می‌بایست به صورت جفت، دور تا دور یک رأس قرار بگیرند، در حالی که این امر خود سبب محدود کردن گزینه‌های موجود می‌شود. در واقع طرح‌های بسیاری از به کارگیری این کاشی‌ها اجتناب کرده و اساس کارشان را تنها روی سه شکل ردیف پایین قرار می‌دهند. طرح شکل ۱۱، از این جهت غیر معمول می‌باشد که تا حدود زیادی از کاشی‌های غیر استادانه (لوزی، پنج ضلعی و هشت ضلعی) به همراه تعدادی ماسوره، ساخته شده است. نواحی ستاره‌ای شکل بزرگ کاشی‌کاری را می‌توان با قطعهٔ نشان داده شده در شکل ۷(f) پر نمود. استفاده از این مجموعه کاشی‌ها را ادامه می‌دهیم. اما به جای شکل ۷(f)، ستارهٔ $\{10/4\}$ را جایگزین می‌نماییم.



شکل ۱۱. طرحی از سلطان هان، کایسری، ترکیه

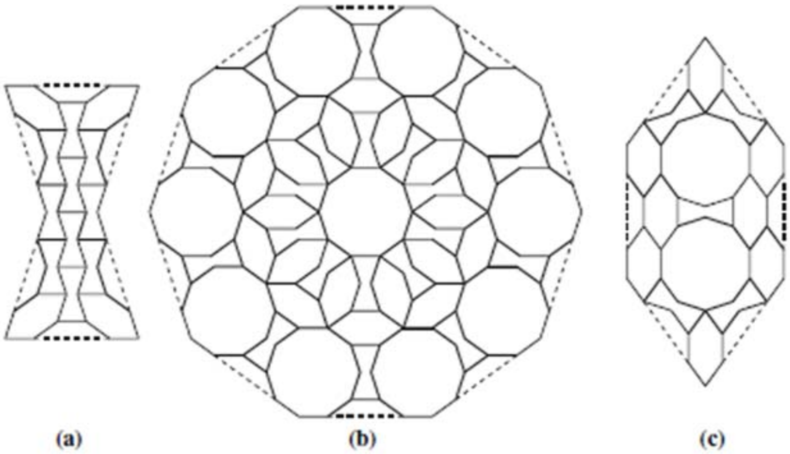
طرحی که برای یکبار ترسیم شده باشد را می‌توان به طرق متفاوت و بر اساس مفاد و مواد به کار رفته در آن به اتمام رسانید. در برخی از اشکال ضمیمه، نواحی به درستی با دو رنگ، رنگ آمیزی شده‌اند (سایهٔ صفحهٔ شطرنجی). خطوط دیگر، در نوارهای در هم بافته ایجاد شده است. در گچ‌کاری نیز زمانی که نقش حکاکی می‌شود، رسم خطوط پایه‌ای در خود گچ‌کاری قابل استفاده است.

۳. شبه‌تناوب چیست؟

در دههٔ ۱۹۸۰ میلادی، اکتشاف آلیاژهای فلزی بلورین که در نگاره‌های پراش‌شان تقارن

1) Rigby

۵ ـ تایی دارند، سبب ایجاد شور و نشاط بسیاری گشت. نقاط تیز در یک نگارهٔ پراش، نشان از نظم و ترتیبی دراز مدت دارد. این مطلب در آن زمان مترادف با تناوب بود، اما دوران‌های ۵ ـ تایی با محدودیت بلورشناسی ناسازگارند، لذا پدیدهٔ جدیدی مشاهده شده بود. این اجسام جدید، به عنوان شبه‌بلورها شناخته شدند و نظم و ترتیب زیرین‌شان به عنوان شبه‌تناوب معرفی شد. برای بلورشناسان نقاط تیز معین در یک نگارهٔ پراش، جز ویژگی‌های شبه تناوب محسوب می‌شود. البته در مطالعهٔ هنرهای زینتی، واژهٔ شبه‌تناوب تقریباً به صورت غیر رسمی به کار می‌رود و تعریف پذیرفته شده‌ای در مورد آن وجود ندارد. زمانی که خواننده‌ای مقالات را مقایسه می‌نماید، باید از منشأ نهانی آشفتگی مطلع باشد. برای کاشی‌کاری‌ها و طرح‌های هندسی وابستهٔ مورد بحث در این مقاله، یک گزینه، اعمال نمودن شرایط همگن روی توزیع آرایش موضعی کاشی‌هاست (این مطلب ضعیف‌تر از تعریف بلورشناسی می‌باشد). این مطلب و دیگر خواص از طریق مثال زیر توضیح داده خواهند شد.

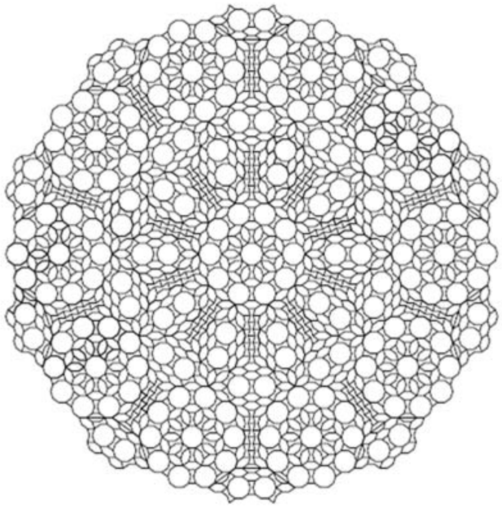


شکل ۱۲. تقسیمات جزئی سه کاشی، توسط نسخه‌های کوچک‌تر همان سه کاشی ضریب مقیاس برابر با $\frac{۱}{۲}(۷ + \sqrt{۵}) \simeq ۴.۶۱۸$

این مثال از قطعات نشان داده شده در شکل ۱۲ ساخته شده است. قطعات، تنها برای به نمایش گذاشتن تکنیک انتخاب گشته‌اند و دارای ارزش هنری نیستند. این مطلب را از پراکندگی نامتعادل پاپیون‌ها، که منجر به ایجاد طرح‌های ضعیف می‌شوند، می‌توان دریافت. هر قطعهٔ پوشانده شده با پاپیون‌ها، ماسوره‌ها و ده ضلعی‌ها را می‌توان به یک قطعهٔ بزرگ‌تر تبدیل نمود. این کار با تقسیم‌جزیی هر کاشی صورت می‌پذیرد. این مطلب در شکل، نشان داده شده است. در ادامه، نتیجه را در مقیاس مناسب قرار می‌دهیم تا کاشی‌های کوچک، در اندازه‌های اصلی مورد استفاده قرار گیرند. این فرایند تقسیم به اجزا و سپس بسط دادن آنها «تورم» نامیده می‌شود. هر ضلع از هر کاشی مرکب، شامل دو ضلع کاشی‌های کوچک و قطر بزرگ یک ماسورهٔ کوچک می‌باشد. در کاشی‌کاری

تورم یافته، نیم‌ماسوره‌ها با هم جفت می‌شوند تا بدین ترتیب کاشی‌های کامل را شکل دهند.

فرض می‌کنیم که P_0 یک ده ضلعی تک باشد و برای هر $i \in N$، P_{i+1} را قطعه‌ای در نظر می‌گیریم که از تورم P_i حاصل شده است. شکل ۱۲(b)، P_1 و شکل ۱۳، P_2 را نشان می‌دهد. فرآیند تورم را می‌توان با کاشی کردن نواحی به طور دلخواه بزرگی از صفحه تکرار کرد. علاوه بر این، چون P_1 شامل یک ده ضلعی مرکزی است، P_{i+1} یک نسخه از P_i را در وسط دارد. بنابراین P_{i+1} توسیعی از P_i است. با فرض این که i به سمت ∞ میل کند، می‌توانیم قطعه‌های یک کاشی‌کاری را به تمام صفحهٔ P_∞ توسیع دهیم. توجه داریم که تقارن قطعهٔ اولیه، در فرآیند تورم محفوظ باقی می‌ماند. لذا P_∞ دارای یک تقارن ۱۰ ـ تایی سرتاسری است و بنابراین نمی‌تواند متناوب باشد.



شکل ۱۳. یک مرحله در ترسیم یک کاشی‌کاری شبه‌تناوب

به طور کلی تورم، توانایی خلق قطعه‌های به طور دلخواه بزرگ را فراهم می‌آورد. قطعه‌هایی که لزوماً هم‌مرکز نیستند. لذا برای نشان دادن محدودیت موجود، باید کاری انجام داد. این کار یک کاشی‌کاری صفحه است [۱۹]. دو کاشی‌کاری را به طور موضعی نامتمایز گوییم اگر یک نسخه از هر قطعهٔ کاشی‌کاری اول، بر دیگری واقع شود و برعکس. خانواده‌ای از کاشی‌کاری‌های جانشینی، توسط کاشی‌های ابتدایی و تقسیمات‌جزیی نشان داده شده در شکل ۱۲، تعریف شده‌اند. این خانواده، مجموعهٔ همهٔ کاشی‌کاری‌هایی می‌باشد که به طور موضعی نامتمایز از P_∞ هستند. در واقع در این خانواده تعداد ناشمارایی از کاشی‌کاری‌ها وجود دارد. اما هر قطعه در هر کدام از آنها شامل قسمتی از P_n خواهد بود. یک کاشی‌کاری جانشینی، بر اساس یک مجموعهٔ متناهی از n کاشی اولیهٔ $T_1, \ldots, T_n$ را در نظر بگیرید. ویژگی‌های ترکیبی اصلی این کاشی‌کاری را می‌توان در

قالب یک ماتریس $n \times n$ آورد، به این ترتیب که درایهٔ ستون j ام سطر iام، تعداد T_i کوچک در T_j مرکب باشد. برای مثال ماتریس جانشینی نظیر به کاشی‌های به ترتیب، پاپیون، ماسوره و ده ضلعی به صورت

$$\begin{pmatrix} ۱۰ & ۵ & ۲۰ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۵ \\ ۰ & ۲ & ۱۱ \end{pmatrix},$$

است. در صورتی که توانی از یک ماتریس وجود داشته باشد به طوری که تنها درایه‌های مثبت ناصفر را شامل گردد، آن ماتریس، اولیه نامیده می‌شود. اگر یک ماتریس جانشانی، اولیه باشد، آن‌گاه قطعه‌ای از کاشی‌هایی که توسط تورم متوالی کاشی، ایجاد شده است، سرانجام شامل نسخه‌هایی از تمامی کاشی‌های ابتدایی خواهد بود. ویژگی‌های کاشی‌کاری را می‌توان از خواص جبری ماتریس اولیه به دست آورد. برای مثال بزرگترین مقدار ویژه، عبارت است از مربع ضریب مقیاس تورم و بردار ویژهٔ متناظر با آن، شامل فراوانی‌های نسبی کاشی‌های ابتدایی در یک کاشی‌کاری کامل از صفحه است. در مثال ما فراوانی بردار ویژه

$$(\ ۵+\sqrt{۵},\quad ۵+۷\sqrt{۵},\quad ۴\ ),$$

است. از آن‌جا که برخی از نسبت‌های میان درایه‌ها گنگ هستند، لذا هر کاشی‌کاری جانشینی که برآمده از این تقسیمات جزئی باشد، نامتناوب است [۳۰ و ۳۱].

اگر چه کاشی‌کاری‌های جانشینی بحث ما تقارن انتقالی ندارند، اما در برخی از ویژگی‌ها با کاشی‌کاری‌های متناوب سهیم‌اند.
۱ — هر کاشی‌کاری یال به یال است. ۲ ـ کاشی‌کاری از یک تعداد متناهی از اشکال کاشی تشکیل شده است، که هر کدام در جهات معدودی واقع می‌شوند. ۳ ـ تعداد متناهی روش، برای احاطه کردن یک رأس وجود دارد. در این حالت گفته می‌شود که کاشی‌کاری دارای پیچیدگی موضعی متناهی است. این امر برای کاشی‌کاری‌های جانشینی اولیه پیامدهای مهمی دارد: به ازای هر قطعهٔ مفروض X در کاشی‌کاری، عدد R وجود دارد به نحوی که قرص به شعاع R، در هر کجای کاشی‌کاری که قرار گیرد، شامل یک نسخه از X خواهد بود. کاشی‌کاری‌ای که دارای چنین ویژگی‌ای باشد، کاشی‌کاری مکرر نامیده می‌شود. به این معنی که نسخه‌هایی از هر بخش متناهی کاشی‌کاری، به صورتی عادلانه در سرتاسر کاشی‌کاری، توزیع گشته است. شما نمی‌توانید تعیین کنید که در هر نمودار متناهی از کاشی‌کاری، کدام قسمت نشان داده شده است.

برای اهداف این مقاله، یک کاشی‌کاری را شبه‌تناوبی می‌نامیم در صورتی که ضمن نامتناوب بودن دارای پیچیدگی موضعی متناهی بوده و مکرر باشد. با گسترش مطلب، یک طرح اسلامی را که در ترسیم آن از روش PIC بهره گرفته شده است، شبه‌تناوب می‌نامیم، اگر شبکهٔ چندضلعی زیرین طرح، یک کاشی‌کاری شبه‌تناوبی باشد. متأسفانه با استفاده از هر زیرمجموعهٔ متناهی یک کاشی‌کاری، نمی‌توان گفت که آیا آن کاشی‌کاری شبه‌تناوبی است یا نه. بنابراین برای اثبات این که یک کاشی‌کاری می‌تواند شبه‌تناوبی باشد، نیازمند آن هستیم که فرآیندی همچون تورم را مشخص

کنیم. فرآیندی که بتواند در تولید قطعهٔ نشان داده شده به کار رفته باشد و نیز بتواند یک کاشی‌کاری شبه‌تناوبی کامل را تولید نماید.

منابع

[1] M. Arik and M. Sancak, "Turkish-Islamic art and Penrose tilings", *Balkan Physics Letters* **15** (1 Jul 2007) 1-12.

[2] J. Bonner, "Three traditions of self-similarity in fourteenth and fifteenth century Islamic geometric ornament", *Proc. ISAMA/Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (Granada, 2003), eds. R. Sarhangi and N. Friedman, 2003, pp. 1-12.

[3] J. Bonner, *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Derivation,* unpublished manuscript.

[4] J. Bourgoin, *Les Element de I'Art Arabe: Le Trait des Entrelacs, Firmin-Didot*, 1879, Plates reprinted in *Arabic Geometric Pattern and Design,* Dover Publications, 1973.

[5] J. -M. Castera, *Arabesques: Art Decoratif au Maroc,* ACR Edition, 1996.

[6] J. M. Castera, "Zellijs, muqarnas and quasicrystals", *Proc. ISAMA,* (San Sebastian, 1999), eds. N. Friedman and J. Barrallo, 1999, pp. 99-104.

[7] G. M. Fleurent, "Pentagon and decagon designs in Islamic art", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 263-281.

[8] B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns,* W. H. Freeman, 1987.

[9] E. H. Hankin, "On some discoveries of the methods of design employed in Mohammedan art", *J. Society of Arts* **53** (1905) 461-477.

[10] E. H. Hankin, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art,* Memoirs of the Archaeological Society of India, no 15, Government of India, 1925.

[11] E. H. Hankin, "Examples of methods of drawing geometrical arabesque patterns", *Math. Gazette* **12** (1925) 370-373.

[12] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs II", *Math. Gazette* **18** (1934) 165-168.

[13] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs III", *Math. Gazette* **20** (1936) 318-319.

[14] C. S. Kaplan, "Computer generated Islamic star patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science,* (Kansas, 2000), ed. R. Sarhangi, 2000, pp. 105-112.

[15] C. S. Kaplan, "Islamic star patterns from polygons in contact", *Graphics Interface* 2005, ACM International Conference Proceeding Series **112**, 2005, pp. 177-186.

[16] A. J. Lee, "Islamic star patterns", *Muqarnas IV: An Annual on Islamic Art and Architecture,* ed. O. Grabar, Leiden, 1987, pp. 182-197.

[17] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, "Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **315** (23 Feb 2007) 1106-1110.

[18] P. J. Lu and P. J. Steinhardt,"Response to Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318**(30 Nov 2007) 1383.

[19] F. Lunnon and P. Pleasants, "Quasicrystallographic tilings", *J. Math. Pures et Appliques* **66** (1987) 217-263.

[20] E. Makovicky, "800-year old pentagonal tiling from Maragha, Iran, and the new varieties of aperiodic tiling it inspired", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 67-86.

[21] E. Makovicky, "Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318** (30 Nov 2007) 1383.

[22] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "Mirador de Lindaraja: Islamic ornamental patterns based on quasi-periodic octagonal lattices in Alhambra, Granada, and Alcazar, Sevilla, Spain", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **19** (1996) 1-26.

[23] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "The stalactite dome of the Sala de Dos Hermanas-an octagonal tiling?", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **24** (2001) 1-21.

[24] E. Makovicky, F. Rull Perez and P. Fenoll Hach-Ali, "Decagonal patterns in the Islamic ornamental art of Spain and Morocco", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **21** (1998) 107-127.

[25] G. Necipoglu, *The Topkapi Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture,* Getty Center Publication, 1995.

[26] J. Rigby, "A Turkish interlacing pattern and the golden ratio", *Mathematics in School* **34** no 1 (2005) 16-24.

[27] J. Rigby, "Creating Penrose-type Islamic interlacing patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (London, 2006), eds. R. Sarhangi and J. Sharp, 2006, pp. 41-48.

[28] F. Rull Perez, "La nocion de cuasi-cristal a traves de los mosaicos arabes", Boletin Sociedad Espanola Mineralogia **10** (1987) 291-298.

[29] P. W. Saltzman, "Quasi-periodicity in Islamic ornamental design", *Nexus VII: Architecture and Mathematics*, ed. K. Williams, 2008, pp. 153-168.

[30] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry,* Cambridge Univ. Press, 1995.

[31] M. Senechal and J. Taylor,"Quasicrystals: The view from Les Houches", *Math. Intelligencer* **12** no 2 (1990) 54-64.

منابع اینترنتی

[32] ArchNet. Library of digital images of Islamic architecture, http://archnet.org/library/images/

[33] E. Harriss and D. Frettloh, *Tilings Encyclopedia*, http:// tilings.math.uni-bielefeld.de/

[34] C. S. Kaplan, taprats, computer-generated Islamic star Patterns, http:// www.cgl.uwaterloo.ca/csk/washington/taprats/

[35] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, Supporting online material for [17], http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/315/5815/1106/DC1

[36] D. Wade, *Pattern in Islamic Art: The Wade Photo-Archive*, http://www.patterninislamicart.com/

مترجم: مریم‌السادات فلسفی، ms.falsafi@gmail.com
خانه ریاضیات اصفهان و دانشگاه اصفهان
مریم جمالی گندمانی، maryam_jamali61@yahoo.com
دبیر آموزش و پرورش

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 33, No. 1, Spring 2014

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir