بسم‌الله الرحمن الرحیم

# فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

## علمی ـ ترویجی

ISSN 1022-6443

سال ۳۳، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۹۳

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۹۳)

شمارهٔ پیاپی: ۵۵

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسئول: سید منصور واعظ‌پور
سردبیر: احمد صفاپور
ویراستاران ارشد: ابوالفضل رفیع پور، احسان ممتحن
مدیر اجرایی: شیوا زمانی



حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
تهیه و تنظیم: فریده صمدیان

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸–۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir
نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir
سامانهٔ نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیٔ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند یک نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- مقالات تحت بستهٔ «زی‌پرشین» (xepersian) بر اساس نمونه‌ای که در سامانه فرهنگ و اندیشه ریاضی قرار دارد، تهیه شود و نسخهٔ پی دی اف آن از طریق سامانهٔ نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال گردد. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «زی‌پرشین» مقاله می‌بایست از طریق همین سامانه به مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشند.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

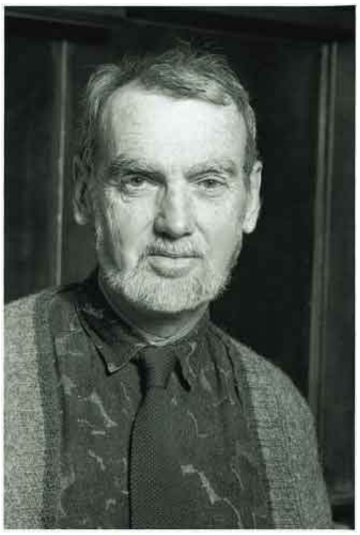
فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

# فهرست مطالب





**عکس روی جلد: رابرت فیلن لنگلندز**
(Robert Phelan Langlands)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) ص. ۱

# سخن سردبیر

احمد صفاپور

به نام خدا

در فاصله انتشار شماره پیشین نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی و شماره جاری، جامعه ریاضی کشور شاهد واقعه‌ای تاریخی بود: کسب مدال فیلدز توسط ریاضیدان جوان ایرانی سرکار خانم دکتر مریم میرزاخانی. کسب این مدال نه تنها افتخاری ماندگار برای ایشان است، بلکه به دلیل این که ایشان اولین ایرانی و اولین زنی است که موفق به دریافت این نشان می‌شود، این موفقیت بزرگ افتخاری برای همه‌ی زنان ریاضیدان، همه‌ی ایرانیان و به‌ویژه اعضای جامعه ریاضی ایران است. هیأت تحریریه فرهنگ و اندیشه ریاضی همراه و همزبان با دیگر بخش‌های جامعه ریاضی و علمی کشور، این موفقیت تاریخی و بی‌نظیر را به ایشان تبریک عرض می‌نماید.

در طی ماه‌های گذشته مطبوعات و مجامع علمی کشور به طور عام و انجمن ریاضی ایران به طور خاص و به تفصیل به این موضوع پرداخته و اهمیت این موفقیت و اثرات عام و خاص آن را مورد بررسی قرار داده‌اند. به همین دلیل ما در این شماره از نشریه از ورود به جزئیات موضوع خودداری می‌کنیم. امیدواریم در شماره‌های آینده با همکاری اعضای محترم جامعه ریاضی کشور و افراد آشنا به حوزه تخصصی ایشان، به شیوه‌ای که مناسب ساختار نشریه است، به توضیح و تشریح دیدگاه‌های دکتر مریم میرزخانی بپردازیم.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۳ تا ۲۶

# بازتاب‌ها، فضای بازتابی و فضای حرکت

سید قهرمان طاهریان

## چکیده

بازتاب یکی از مفهوم‌های کارآمد مبانی هندسه است که در کارهای بسیاری از ریاضیدان‌ها مانند «شور[1]»، «یلمسلف[2]»، «هیلبرت[3]» و «بلاشکه[4]» قابل مشاهده است [۳، ۱۰]. در این راستا، «امیل اشپرنر[5]» در سال ۱۹۸۰ با شروع از یک زیرگروه از عضوهای خودوارون یک گروه دلخواه و چند بنداشت ساده، از جمله بنداشت سه بازتاب، قضیهٔ دزارگ را به دست آورد. طی چند سال گذشته و در ادامهٔ کارهای اشپرنر، توسط «هلموت کارتسل[6]» و نگارندهٔ این مقاله، با مطالعهٔ هندسه‌های مطلق و گروه حرکت‌های آنها ساختارهای جدیدی موسوم به «فضاهای بازتابی[7]» مطرح شده است. در این نوشتار پس از بیان تاریخچهٔ مفهوم بازتاب به معرفی این ساختارها می‌پردازیم.

## ۱ مقدمه و تاریخچه

یکی از هدف‌های این مقاله معرفی مفهوم «بازتاب[8]» به عنوان ابزاری کارآمد برای بنیانگذاری مبانی هندسه است. در آغاز به تاریخچهٔ این مفهوم بر اساس مرجع [۷] می‌پردازیم. در اواخر قرن نوزدهم، هیلبرت بدون استفاده از پیش‌فرض‌های پیوستگی، هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی مسطح را بر اساس دو سیستم جداگانهٔ بُنداشتی بنا نهاد. وی هندسهٔ اقلیدسی مسطح را بر پایهٔ بُنداشت توازی و هندسهٔ هذلولوی مسطح را به کمک بنداشت توازی هذلولوی مطرح کرد. همچنین وی از بازتاب‌های خطی برای معرفی مفهوم «نقطه‌های پایانی[9] (آرمانی)» (نقطه‌های واقع بر دایرهٔ مدل بلترامی ـ کلاین) استفاده کرد. هیلبرت ثابت کرد حاصل ضرب سه بازتاب خطی که خط‌های نظیر آنها از یک نقطهٔ پایانی $w$ می‌گذرند، یک بازتاب خطی است که خط نظیر آن از $w$ می‌گذرد.

1) E. Schur 2) J. Hjelmselev 3) D. Hilbert 4) W. Blaschke 5) Emil Sperner
6) Helmut Karzel 7) reflection space 8) reflection 9) Enden

به کمک آن وی حساب نقطه‌های پایانی را بنیان گذاشت و قضیهٔ رده‌بندی هندسهٔ هذلولوی مسطح را اثبات کرد. پس از آن یلمسلف در سال ۱۹۰۷ به این پرسش پرداخت که آیا می‌توان هندسهٔ مطلق مسطح را بدون «بنداشت پیوستگی» و «بنداشت‌های توازی» یعنی فقط با «بنداشت‌های وقوع، هم‌نهشتی و ترتیب» بنیان‌گذاری کرد؟ وی حدس زد که برای این منظور می‌توان حتی از بنداشت‌های ترتیب هم صرف‌نظر کرد. برای نیل به این هدف یلمسلف راهی اساساً نو در پیش گرفت. روش‌های وی مبنی بر به‌کارگیری بازتاب‌های خطی و ویژگی‌های آنهاست. ایده‌ی به کارگیری بازتاب‌های خطی به عنوان ابزاری برای اثبات گزاره‌های هندسه، پیش از یلمسلف در کارهای «وینر[1]»، شور، هیلبرت و هسنبرگ نیز قابل مشاهده است. در همهٔ این کارها قضیه‌ی معروف «سه بازتاب» به کار گرفته می‌شود. برای مثال وینر گروه حرکت‌های فضای اقلیدسی را مورد بررسی قرار داد. وی حرکت‌های به اصطلاح سره[2] را به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی نمایش داد و قضیه‌ی سه بازتاب و وارون آن را برای بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی ثابت کرد. شور به کمک بنداشت همنهشتی (قابلیت انطباق) «پاش[3]» ثابت کرد که قضیه‌ی سه بازتاب برای سه خط که از یک نقطه‌ی عادی صفحه‌ی آفین می‌گذرند یا سه صفحه که یک خط مشترک دارند برقرار است. وی به کمک بازتاب‌ها نشان داد که «**قضیهٔ داندلن[4]» به شکل زیر در فضا برقرار است [۸]:**

**قضیه ۱.** **(داندلن)** اگر $A_0,B_0$ دوخط متمایز باشند که یکدیگر را در یک نقطهٔ عادی $s$ قطع کرده‌اند و $a_1,a_2,a_3 \in B_0 \setminus \{s\}$ و $b_1,b_2,b_3 \in A_0 \setminus \{s\}$ نقطه‌های متمایزی باشند آنگاه خطهای $A_i,B_i$ $(i=1,2,3)$ وجود دارند چنان که $a_i \in A_i$ و $b_i \in B_i$ و برای هر $i,j$ در $\{0,1,2,3\}$، خطهای $A_i$ و $B_i$ در یک صفحه واقعند و برای $i \neq j$، خطهای $A_j,A_i$ و خطهای $B_j,B_i$ متنافرند (شکل ۱).

**به کمک این قضیه، شور حالت خاصی از قضیهٔ پاپوس را نتیجه گرفت. از آنجا که روش‌های یلمسلف در تکامل مبانی هندسهٔ مدرن نقش زیادی داشته‌اند، مهم‌ترین نتایج وی را بر اساس مرجع [۷] به شکل فشرده بیان می‌کنیم. در هندسه‌ی مطلق می‌توان از یک نقطه بر هر خط عمود رسم کرد و برای هر خط $A$ بازتاب خطی یکتایی وجود دارد که فقط نقطه‌های $A$ را ثابت نگه می‌دارد. برای سادگی این بازتاب را هم با $A$ نمایش می‌دهیم. هر بازتاب خطی یک حرکت است، یعنی هر پاره‌خط به پاره‌خطی هم‌نهشت (قابل انطباق) با آن نگاشته می‌شود. یلمسلف برای وارد کردن نقطه‌های به اصطلاح غیرعادی[5] (ناسره) به بحث، ثابت کرد [۴]:**

**قضیه ۲.** اگر $B$ و $A$ دو خط متمایز و $c$ نقطه‌ای ناواقع بر آنها باشند (شکل ۲) آنگاه برای $b := AB(c)$ و $a := BA(c)$ داریم

۱− $[a,c] \equiv [b,c]$ ($[x,y]$ پاره‌خط مشخص شده با $x$ و $y$ و $\equiv$ به معنای «قابل انطباق» است).

۲− اگر $o \in A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $[o,a] \equiv [o,b]$.

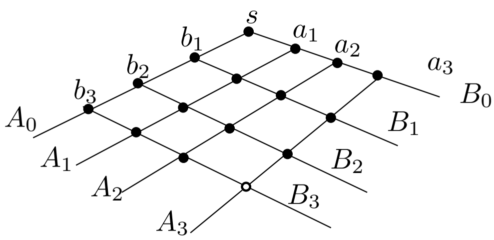
1) Winer 2) Proper 3) Pasch 4) Dandelin 5) Improper

۳− اگر $A \perp B$ آنگاه $a = b \in \overline{c,o}$ به قسمی که $o = A \cap B$.

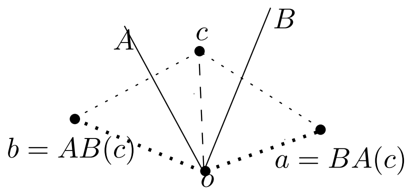
۴− دقیقاً یک خط $C$ وجود دارد که $c \in C$ و $b = C(a)$.

۵− خط $C$ باویژگی $c \in C$ و $ABC = CBA$ به صورت یکتا مشخص می‌شود.

٦− اگر $o \in A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $o \in C$.




شکل ۱. قضیهٔ داندلن.




شکل ۲. قضیهٔ یلمسلف.

به کمک این قضیه یلمسلف برای دو خط نامتقاطع $A$ و $B$ مفهوم «بافهٔ ناسره[1]» $\mathcal{B}_{AB}$ را تعریف کرد. خط $C$ دربافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ قرار دارد اگر و تنها اگر برای یک $c \in C$ داشته باشیم $AB(c) = CBA(c)$. وی سپس نشان داد که بافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ شامل همهٔ خط‌های $X$ است که $ABX = XBA$. به این ترتیب اگر مجموعهٔ خط‌ها را با $\mathfrak{G}$ نشان دهیم آنگاه $\mathcal{B}_{AB} = \{X \in \mathfrak{G} \mid ABX = XBA\}$. رابطهٔ وقوع برای یک بافه، همانند رابطهٔ وقوع نقطه‌های پایانی هیلبرت یک رابطهٔ سه‌تائی هم ارزی است. یلمسلف نشان داد برای هر دو خط متمایز $C, D \in \mathcal{B}_{AB}$ همواره $\mathcal{B}_{AB} = \mathcal{B}_{CD}$. وی همچنین نشان داد که اگر $A$ و $B$ یک عمود مشترک $L$ داشته باشند آنگاه هر خط در بافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ بر $L$ عمود است. به عبارت دقیق‌تر $X \in \mathcal{B}_{AB} \iff X \perp L$. وی به کمک این ویژگی ثابت کرد [۴]:

**قضیه ۳.** اگر در یک صفحهٔ مطلق مستطیل وجود داشته باشد آنگاه هر چهارگوش با سه زاویهٔ قائمه یک مستطیل است.

بر این اساس وی صفحه‌های مطلق را به دو دستهٔ **منفرد**[2] و **عادی**[3] رده‌بندی کرد. درصفحه‌های منفرد مستطیل وجود دارد ولی در صفحه‌های عادی مستطیل وجود ندارد. یلمسلف مجموعهٔ نقطه‌ها و مجموعهٔ بافه‌های ناسره را با هم به صورت مجموعهٔ جدید نقطه‌ها در نظر گرفت و نقطه‌های واقع بر هر خط مانند $X$ را به گونه‌ای گسترش داد که بافه‌های سرهٔ دربرگیرندهٔ $X$ بر آن واقع باشند. به این ترتیب خط $X$ به $\overline{X} = X \cup \{\mathcal{B}_{AB} \mid ABX = XBA\}$ گسترش داده می‌شود.

با این قراردادها وی توانست سه ویژگی مهم را برای هندسهٔ گسترش یافته ثابت کند:

۱− بر هر دو خط متمایز خطی یکتا واقع است.

---

1) Improper pencil  2) singular  3) regular

۲ــ از هر دو نقطهٔ متمایز که دست کم یکی از آنها سره باشد خطی یکتا می‌گذرد.

۳ــ دو خط عمود بر یک خط، یکدیگر را در نقطه‌ای ناسره قطع می‌کنند.

در صفحهٔ اقلیدسی، یک بافهٔ ناسره، ردهٔ هم‌ارزی خط‌های موازی است. این بافه‌ها در صفحهٔ هذلولوی، نقطه‌های پایانی و دسته خط‌های عمود بر یک خط هستند. بر اساس ایدهٔ یلمسلف، در این دو حالت همهٔ نقطه‌های یک صفحهٔ تصویری به دست می‌آیند. برای آن که در حالت کلی هم یک صفحهٔ تصویری به دست آید یلمسلف باید مجموعه‌های جدیدی از نقطه‌ها را هم به عنوان خط در نظر می‌گرفت. حتی در صفحهٔ هذلولوی نیاز به خط‌های جدید زیادی داریم که در مدل بلترامی ــ کلاین به خوبی دیده می‌شود. برای مثال خط‌هایی که دایرهٔ یکه را قطع نمی‌کنند باید در نظر گرفته شوند. یلمسلف تعریف خط‌های جدید را به کمک مفهوم **نیم دوران** بیان کرد. مهم‌ترین ابزار برای این کار قضیهٔ سه بازتاب به شکل کلی بود که به وسیلهٔ وی بیان و اثبات شد [۴].

**قضیه ۴.** (سه بازتاب[1]) برای سه خط $A$، $B$ و $C$ که از یک نقطهٔ سره (عادی) یا ناسره (غیرعادی) چون $u$ می‌گذرند خطی مانند $D$ وجود دارد که از $u$ می‌گذرد و $ABC = D$.

حالت خاص این قضیه یعنی حالتی که $u$ نقطه‌ای سره باشد پیش از آن توسط شور در سال ۱۸۹۹ ثابت شده بود. به کمک قضیهٔ سه بازتاب، یلمسلف قضیهٔ کاهش را ثابت کرد [۴].

**قضیه ۵.** (کاهش) حاصل ضرب چهار بازتاب خطی را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو بازتاب خطی بیان کرد.

از آنجا که هر حرکت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب حداکثر سه بازتاب بیان کرد، گروه حرکت‌ها به دو دستهٔ **حرکت‌های سره و ناسره** تجزیه می‌شود. حرکت‌هایی که به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی بیان می‌شوند سره و حرکت‌هایی که حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی باشند ناسره نامیده می‌شوند. یلمسلف مفهوم زاویه را هم مطرح کرد و به کار برد. زوج خطوط $(A, B)$ زاویه نامیده می‌شود هرگاه یک نقطهٔ مشترک سره داشته باشند. دو زاویهٔ $\angle(A, B), \angle(C, D)$ هم‌نهشت نامیده می‌شوند هرگاه حرکت سرهٔ $XY$ وجود داشته باشد که $A$ را به $C$ و $B$ را به $D$ بنگارد. به عبارت دیگر $C = XY(A) = XYAYX$ و $D = XYBYX$. یلمسلف نشان داد [۴]:

**قضیه ٦.** برای چهار خط $A$، $B$، $C$ و $D$ که از یک نقطهٔ عادی می‌گذرند، $AB = CD$ اگر و تنها اگر $\angle(A, B) \equiv \angle(C, D)$.

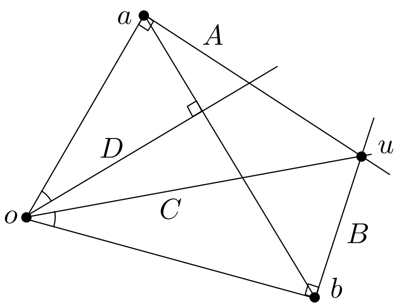
به کمک این قضیه وی قضیهٔ تعامد را ثابت کرد [۴]. هیلبرت از این قضیه در هندسهٔ اقلیدسی به عنوان ابزاری برای اثبات گسترش قضیهٔ پاپوس به هر صفحهٔ مطلق دلخواه بهره برده بود.

1) Three reflection theorem

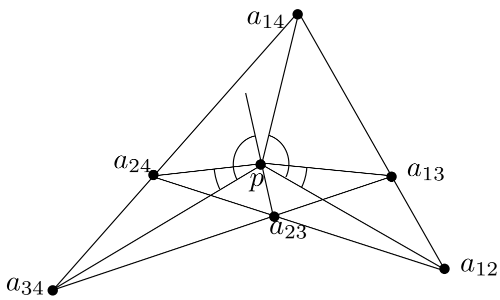
**قضیه ۷.** (تعامد) فرض کنیم $o$، $b$ و $a$ سه نقطهٔ متمایز، $A = \{a \perp \overline{o,a}\}$، $B = \{b \perp \overline{o,b}\}$، $D = \{o \perp \overline{a,b}\}$ و $u$ نقطهٔ تلاقی $A$ و $B$ باشند (شکل ۳). در این صورت برای هر خط $C$ که $o$ بر آن واقع است داریم $u \in C \iff \angle(C, \overline{o,b}) \equiv \angle(\overline{o,a}, D)$.

یلمسلف قضیهٔ **زوج‌های متقابل**[۱] هسنبرگ را هم به صفحه‌های مطلق گسترش داد [۴]:

**قضیه ۸.** (زوج‌های متقابل) فرض کنیم $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ چهار خط باشند که هیچ سه‌تای آنها از یک نقطه نمی‌گذرند و برای هر دو اندیس متمایز $i,j \in \{۱,۲,۳,۴\}$ نقطهٔ (عادی یا ناسره) $a_{ij}$ نقطهٔ تلاقی $A_j$ و $A_i$ باشد. همچنین فرض کنیم $p$ یک نقطهٔ سره باشد که با هیچ یک از $a_{ij}$ها برابر نیست و $G_{ij}$ را خط واقع بر $p$ و $a_{ij}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر $\angle(G_{۲۴}, G_{۳۴}) \equiv \angle(G_{۱۲}, G_{۱۳})$ یعنی اگر $G_{۱۲}G_{۱۳} = G_{۲۴}G_{۳۴}$ آنگاه $\angle(G_{۳۴}, G_{۱۴}) \equiv \angle(G_{۲۳}, G_{۱۲})$ و $\angle(G_{۱۴}, G_{۲۴}) \equiv \angle(G_{۱۳}, G_{۲۳})$ (شکل ۴).

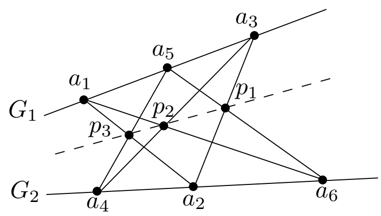



**شکل ۳.** قضیهٔ تعامد.

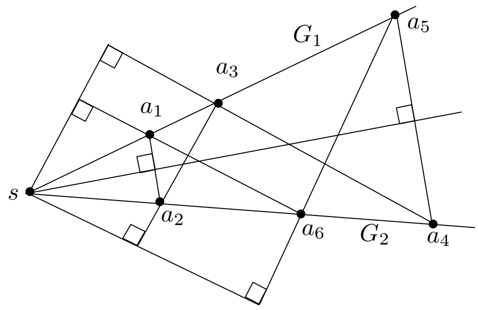



**شکل ۴.** قضیهٔ زوج‌های متقابل.

یلمسلف این قضیه را به کمک حساب بازتاب‌ها ثابت کرد. به کمک قضیه‌های تعامد و زوج‌های متقابل وی توانست به ترتیب اثبات‌های هیلبرت و هسنبرگ از قضیهٔ پاپوس را در حالت‌های اقلیدسی و بیضوی به کار ببرد و برای صفحهٔ مطلق دو شکل از قضیهٔ پاپوس را ثابت کند.




**شکل ۵.** حالتی از قضیهٔ پاپوس.




**شکل ٦.** حالت دیگری از قضیهٔ پاپوس.

1) Gegenpaarungssatz

**قضیه ۹.** (پاپوس) فرض کنیم $G_۲$ و $G_۱$ دو خط متمایز و $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶$ شش نقطهٔ متمایز سره باشند به قسمی که $a_۱, a_۳, a_۵ \in G_۱ \setminus G_۲$ و $a_۲, a_۴, a_۶ \in G_۲ \setminus G_۱$. در این صورت:

۱ــ اگر $s$ نقطه تلاقی $G_۱, G_۲$ نقطه‌ای سره باشد و عمود از $s$ بر $\overline{a_۱, a_۲}, \overline{a_۲, a_۳}$ به ترتیب بر $\overline{a_۴, a_۵}$ و $\overline{a_۵, a_۶}$ عمود باشند آنگاه عمود بر $s$ از $\overline{a_۳, a_۴}$ بر $\overline{a_۶, a_۱}$ نیز عمود است (شکل ۵).

۲ــ اگر نقطه‌های تلاقی $\overline{a_۱, a_۲}$ با $\overline{a_۴, a_۵}$ و $\overline{a_۲, a_۳}$ با $\overline{a_۵, a_۶}$ و $\overline{a_۳, a_۴}$ با $\overline{a_۶, a_۱}$ سره باشند آنگاه این نقطه‌ها بر یک خط واقعند.

ابزار اساسی که یلمسلف به کمک آن بستار تصویری را به دست آورد **نیم‌دوران‌ها** بودند. یک نیم‌دوران نگاشتی یک به یک از نقطه‌های صفحه به خودش است که نقطه‌های هم‌خط را به نقطه‌های هم‌خط می‌نگارد. فرض کنیم در صفحهٔ مطلق، نگاشت $w$ یک دوران حول نقطهٔ $o$ باشد به قسمی که $w^۲ \neq id$. در این صورت نگاشتی که به هر نقطهٔ $x$ نقطهٔ $x'$ وسط پاره‌خط $[x, w(x)]$ را می‌نگارد یک نیم‌دوران نامیده می‌شود (شکل ۶). یلمسلف نشان داد که می‌توان این نگاشت‌ها را به مجموعهٔ دربرگیرندهٔ نقطه‌های سره و ناسره گسترش داد. ثابت می‌شود که هر نقطهٔ ناسره اگر عمود بر خطی گذرنده از $o$ نباشد به کمک یک نیم‌دوران مناسب به یک نقطهٔ سره نگاشته می‌شود. اکنون می‌توانیم خط‌های ناسره را توصیف کنیم: هر مجموعه از نقطه‌های ناسره که به وسیلهٔ یک نیم‌دوران حول $o$ به نقطه‌های سره و ناسرهٔ واقع بر یک خط سره نگاشته شوند خطی ناسره نامیده می‌شود. علاوه بر این تمام بافه‌های حاصل از خط‌های عمود بر یک خط گذرنده از $o$ تشکیل یک خط ناسره می‌دهند. به این ترتیب مجموعهٔ نقطه‌های (سره و ناسره) و خط‌های (سره و ناسره) تشکیل یک صفحهٔ تصویری می‌دهند. یلمسلف به کمک حالت‌های خاص قضیهٔ پاپوس و نیم‌دوران‌ها حالت کلی قضیهٔ پاپوس را ثابت کرد. سرانجام وی این ایده را مطرح کرد که می‌توان هندسهٔ مطلق را بدون مفهوم ترتیب و تنها به کمک بنداشت‌های وقوع $I_۱$، $I_۲$، $E$ و چند بنداشت در مورد همنهشتی و حرکت‌ها بنیان گذاشت:

($I_۱$) بر هر دو نقطهٔ متمایز خطی یکتا می‌گذرد.

($I_۲$) بر هر خط دست کم دو نقطه واقع است.

($E$) سه نقطهٔ ناهم‌خط وجود دارند.

- هم‌نهشتی پاره‌خط‌ها ویژگی انتقالی دارد.
- برای هر پاره‌خط $(c, d)$ و زوج خط و نقطه‌ی $(a, G)$ که $a$ بر $G$ واقع است دو نقطه‌ی $b$ و $b'$ بر خط $G$ وجود دارند به گونه‌ای که $(a, b) \equiv (a, b') \equiv (c, d)$.
- برای هر خط $A$ دقیقاً یک حرکت موسوم به بازتاب خطی وجود دارد که فقط و فقط نقطه‌های $A$ را ثابت نگه می‌دارد.

- برای هر مثلث متساوی‌الساقین حرکتی وجود دارد که رأس مثلث را ثابت نگه می‌دارد و دو ساق مساوی مثلث را به هم تبدیل می‌کند.
- هرپاره خط دقیقاً یک نقطهٔ وسط دارد.
- نقطه‌های وسط اضلاع یک مثلث بر یک خط واقع نیستند.

نیم‌دوران‌ها و بازتاب‌ها پس از آن بارها برای بنیان گذاشتن صفحه‌های مطلق به کار گرفته شده است. در سال ۱۹۱۱ ویلهلم بلاشکه نگاشتی را مطرح کرد که نقاط صفحهٔ اقلیدسی را در فضای وقوعی نظیر گروه دوران‌های آن می‌نشاند. به کمک این نگاشت و با استفاده از گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی یک ساختار هندسی سه‌بعدی (فضای حرکت) ساخته می‌شود که صفحهٔ اقلیدسی زیر ساختاری از آن است. در سال ۱۹۳۳ «تامسن[1]» یک دستگاه بنداشتی بر اساس بازتاب‌ها برای هندسهٔ اقلیدسی مطرح کرد. تامسن با یک گروه $G$ شروع می‌کند که به وسیلهٔ مجموعه‌ای مانند $J$ از عضوهای خودوارون $G$ تولید می‌شود. وی مجموعه‌ی $J$ را به دو مجموعهٔ $P$ و $G$ به نام مجموعهٔ نقطه‌ها و مجموعهٔ خط‌ها تقسیم می‌کند. وی همچنین می‌پذیرد که $P$ دست کم دو عضو دارد و حاصل‌ضرب سه نقطه، یک نقطه است، یعنی برای هر $a, b, c \in P$ همواره $abc \in P$. افزون بر این، حاصل‌ضرب تعداد فردی از نقطه‌های $P$ نباید عضو همانی گروه $G$ شود و دو بنداشت «کاهش» و «وجود» پذیرفته می‌شوند. بنابر بنداشت وجود، هر دو نقطهٔ $a$ و $b$ و یا هر دوخط $A$ و $B$ را می‌توان به وسیلهٔ یک عضو خودوارون به هم تبدیل کرد یعنی عضو $\gamma \in J$ وجود دارد که $\gamma a \gamma = b$ و $\gamma A \gamma = B$. در این دستگاه بنداشتی نقطهٔ $a$ بر خط $B$ واقع است هرگاه $(aB)^۲ = ۱$ و تعامد دو خط $A$ و $B$ به وسیلهٔ رابطهٔ $(AB)^۲ = ۱$ و $A \neq B$ تعریف می‌شود. بر اساس این پیش‌فرض‌ها تامسن توانست قضیهٔ سه‌بازتاب را برای یک بافه از خط‌های موازی و یک بافه از خط‌های متقاطع و سرانجام قضیهٔ سه‌بازتاب را در حالت کلی ثابت کند. وی همچنین با تکیه بر کارهای هیلبرت قضیهٔ پاپوس را ثابت کرد. ده سال بعد صفحه‌های نااقلیدسی به کمک روش‌های نظریهٔ گروه مطرح شدند. یک دستگاه بنداشتی که همهٔ صفحه‌های مطلق را در بر می‌گیرد به‌وسیلهٔ «اشمیت» مطرح شد [۹]. برخلاف تامسن در دستگاه اشمیت زیرمجموعه‌های $G$ و $P$ از $J$ لزوماً متمایز نیستند. اشمیت بنداشت‌های زیر را می‌پذیرد:

- (وجود خط رابط) برای $p, x \in P$ عنصر $A \in G$ وجود دارد که $Ap, Ax \in J$.
- (وجود عمود) برای $X \in G, p \in P$ عنصر $A \in G$ وجود دارد که $Ap, AX \in J$.
- برای $x \in P, A \in G$ به قسمی که $Ax \in J$ داریم $Ax \in G$.
- برای $A, X \in G$ به قسمی که $AX \in J$ داریم $AX \in P$.
- (یکتایی خط رابط) برای $A, B \in G$ و $p, x \in P$ به قسمی که $Ap, Ax, Bp, Bx \in J$ داریم $A = B$ یا $p = x$.

1) Tomsen

- برای $A, B, X \in G$ و $p \in P$ به قسمی که $Ap, AX, Bp, BX \in J$ داریم $A = B$ یا $p = X$.
- برای $p \in P$ و $A, B, X \in G$ به قسمی که $Ap, AX, Bp, BX \in J$ داریم $A = B$ یا $p = X$.
- (سه بازتاب برای بافه‌ی شامل یک نقطه) برای $A, B, C \in G$ و $x \in P$ به قسمی که $Ax, Bx, Cx \in J$ داریم $ABC \in G$.
- (سه بازتاب برای بافهٔ عمود بر یک خط) برای $A, B, C, X \in G$ به قسمی که $AX, BX, CX \in J$ داریم $ABC \in G$.
- (عکس سه بازتاب) برای $x \in P, A, B, C \in G$ به قسمی که $Ax, Bx \in J$ و $ABC \in G$ داریم $A = B$ یا $Cx \in J$.
- برای $A, B, C, X \in G$ به قسمی که $AX, BX \in J$ و $ABC \in G$ داریم $A = B$ یا $CX \in J$.
- برای $x \in P$ یک $A \in G$ وجود دارد که $Ax \notin J$ و $A \neq x$.
- برای $X \in G$ یک $A \in G$ وجود دارد که $AX \notin J$ و $A \neq X$.

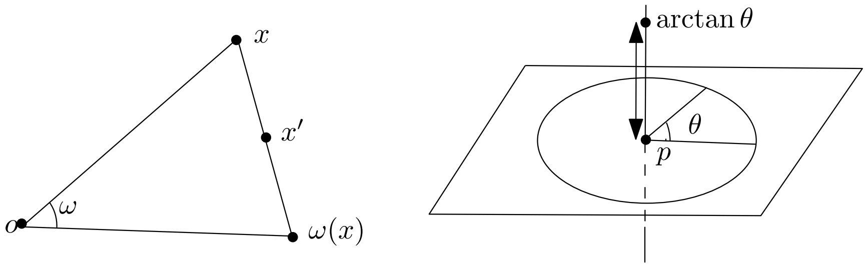
به کمک این دستگاه بنداشتی دقیقاً آن دسته از صفحه‌های بیضوی مشخص می‌شوند که به وسیلهٔ دستگاه بنداشتی «پُدل[1]» و «رایدمایستر[2]» به دست می‌آیند و بقیهٔ صفحه‌های مطلق نابیضوی که توسط دستگاه بنداشتی «باخمان[3]» مطرح می‌شوند. به این ترتیب برای نخستین بار صفحه‌های مطلق بیضوی و نابیضوی به صورت یکپارچه از یک دستگاه بنداشتی به دست آمدند. اشمیت با این دستگاه قصد داشت ویژگی همزادی رابطه‌های وقوع و تعامد را نمایش دهد. پس از آن باخمان نشان داد که اصول دستگاه بنداشتی اشمیت مستقل نیستند و تعداد آنها را کاهش داد. وی یک گروه $G$ را در نظر گرفت که بر خلاف فرض‌های تامسن و اشمیت به وسیلهٔ یک زیر مجموعهٔ $E$ از خودوارون‌های $J$ تولید می‌شود و هر عضو این مجموعه را خط نامید. اعضای خودوارونی که به صورت حاصل‌ضرب دو خط قابل بیان هستند در دستگاه باخمان نقطه نامیده می‌شوند. تعامد و وقوع در دستگاه وی همانند دستگاه تامسن بیان می‌شوند. وی می‌پذیرد که مجموعهٔ نقطه‌ها و خط‌ها یک فضای وقوعی پدید می‌آورند که در آن می‌توان از هر نقطه بر هر خط دلخواه عمود رسم کرد. همچنین چند بنداشت دیگر از دستگاه اشمیت پذیرفته می‌شوند. باخمان در سال ۱۹۵۹ در [۱] دو بنداشت مربوط به عمودها را با این فرض معادل جایگزین کرد که $E$ تحت خودریختی‌های داخلی ناوردا است، یعنی برای هر $a \in G$، $aEa^{-1} = E$. نظریهٔ بازتاب‌ها در سال ۱۹۵۹ با دستگاه بنداشتی اشپرنر پیشرفت چشم‌گیری کرد. اشپرنر به این می‌اندیشید که با چه پیش‌فرض‌های حداقلی می‌توان قضیهٔ دزارگ را به کمک نظریهٔ گروه ثابت کرد. وی با یک گروه $G$ و یک زیرمجموعهٔ $E$ از

---

1) Podehl 2) Reidmeister 3) Bachmann

خودوارون‌های $G$ شروع می‌کند که مولد $G$ است. تنها فرض بنیانی دیگر وی بنداشت سه بازتاب بود. (DS) (سه‌بازتاب) اگر $A, B, X, Y, Z \in E$ به قسمی باشند که $ABX, ABY, ABZ \in J$ و $A \neq B$ آنگاه $XYZ \in E$.

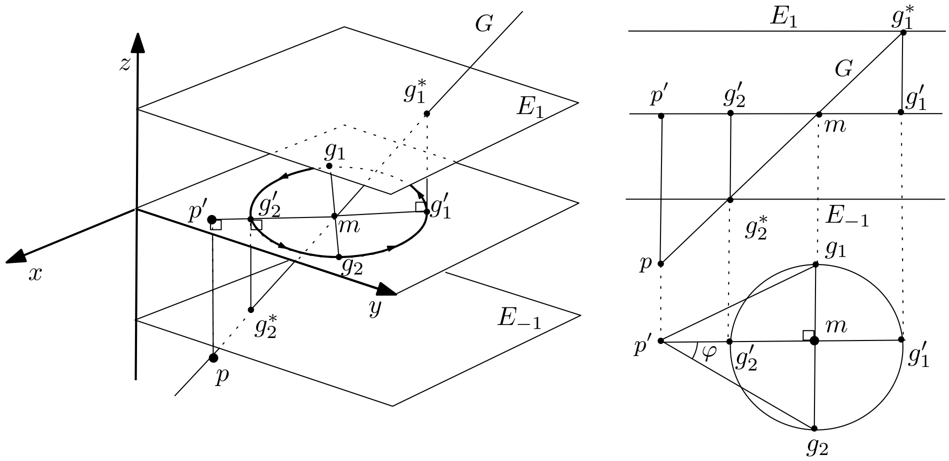
اشپرنر اعضای $E$ را خط می‌نامد. وی بر اساس بنداشت سه بازتاب و تعریف یلمسلف برای بافه، خط‌ها را در بافه‌ها دسته‌بندی می‌کند و هر بافه را یک نقطه می‌نامد. به این ترتیب هر دو خط متمایز $A, B \in E$ بافهٔ $\mathcal{B}_{AB} = \{X \in E \mid ABX \in J\}$ را پدید می‌آورند. بنا بر بنداشت سه‌بازتاب برای هر دو خط $C, D \in \mathcal{B}_{AB}$ همواره $\mathcal{B}_{CD} = \mathcal{B}_{AB}$.




**شکل ۷. تناظر بین نقاط فضا با دوران‌های صفحه و تعبیر هندسی نیم‌دوران در صفحه.**

با گسترش ایده‌های اشپرنر در سال ۲۰۱۱ توسط «کارتسل» و «طاهریان»، ساختارهای هندسی کلی‌تری موسوم به فضاهای بازتابی مطرح شد که در ادامهٔ این نوشتار به معرفی آن می‌پردازیم. در آغاز به یادآوری ایده‌های مشابهی از بلاشکه در این مورد می‌پردازیم.
همان‌گونه که پیش از این هم اشاره شد، بلاشکه در [۲] نگاشتی مطرح کرد که نقاط صفحهٔ اقلیدسی را در فضای پدید آمده از گروه دوران‌های آن می‌نشاند. به کمک این نگاشت و با استفاده از گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی یک ساختار هندسی سه‌بعدی (فضای حرکت) ساخته می‌شود که صفحهٔ اقلیدسی زیر ساختاری از آن است. وجود یک تناظر یک به یک بین نقاط فضا و دوران‌های صفحه را می‌توان به شکل‌های مختلفی بیان کرد. برای مثال هر دوران در صفحهٔ اقلیدسی به وسیلهٔ یک مرکز مانند $p$ و یک زاویهٔ دوران مانند $\theta$ مشخص می‌شود. بنابراین می‌توانیم دوران حول نقطهٔ $p$ با زاویهٔ دوران $\theta$ در صفحهٔ اقلیدسی را به نقطه‌ای در فضای سه بعدی اقلیدسی واقع بر خط عمود بر صفحه در $p$ نظیر کنیم که فاصلهٔ آن از $p$ برابر $\arctan\theta$ است (شکل ۷). به این ترتیب دوران‌های صفحه حول $p$ در تناظر یک به یک با نقاط واقع بر خط عمود بر آن صفحه در $p$ قرار می‌گیرند. برای بیان ایدهٔ بلاشکه که بر اساس آن مفهوم فضای حرکت پدید آمد تناظر بین دوران‌ها و نقاط فضای سه بعدی اقلیدسی را با استفاده از نگاشتی موسوم به **نگاشت بلاشکه** با جزییات بیشتری مطرح می‌کنیم. نگاشت بلاشکه این تناظر را به تعبیری هندسی‌تر بیان می‌کند.
فرض کنیم صفحه‌ی اقلیدسی مورد نظر، صفحهٔ $xoy$ و جهت مثبت دوران همان جهت مثبت مثلثاتی در هندسهٔ مقدماتی باشد. به عبارت دیگر اگر ناظری در امتداد جهت مثبت محور $z$

بایستد، با حرکت در جهت مثبت، محور $x$ را بر محور $y$ قرار می‌دهد. برای سادگی صفحه‌های $z=1$ و $z=-1$ را به ترتیب با $E_1$ و $E_{-1}$ نشان می‌دهیم (شکل ۸). فرض کنیم $p=(x,y,z)^t$ نقطهٔ دلخواهی در فضای سه بعدی اقلیدسی و واقع بر خطی دلخواه مانند $G$ ناموازی با محور $z$ باشد. اگر $g_1^*$ و $g_2^*$ به ترتیب نقطه‌های تلاقی $G$ با صفحه‌های $E_1$ و $E_{-1}$ باشند، تصویر قائم $g_1^*$ و $g_2^*$ بر صفحهٔ $xoy$ را به ترتیب با $g_1'$ و $g_2'$ نشان می‌دهیم. همچنین نقطه‌ی $p'=(x,y,0)^t$ را تصویر قائم $p$ بر صفحهٔ $xoy$ در نظر می‌گیریم. اگر نقاط $g_1'$ و $g_2'$ را در جهت مثبت حول $m$، نقطهٔ تلاقی $G$ با صفحهٔ $xoy$ به اندازه‌ی زاویهٔ قائمه دوران دهیم، زوج نقطه‌ای چون $(g_1,g_2)$ به دست می‌آید. مشاهده می‌شود که بنابر تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\triangle(m,g_2',g_2^*)$ و $\triangle(m,p',p)$ نتیجه می‌شود $z=\frac{|pp'|}{|g_2'g_2^*|}=\frac{|p'm|}{|mg_2'|}$. چون $g_1$ و $g_2$ به ترتیب از دوران $g_1'$ و $g_2'$ به اندازهٔ زاویهٔ قائمه به دست آمده‌اند، برای $\varphi:=\angle(m,p',g_2)=-\angle(m,p',g_1)$ داریم $\operatorname{cotan}\varphi=-z$. پس نقطهٔ $g_2$ از دوران نقطهٔ $g_1$ در جهت مثبت و به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ به دست می‌آید. به این ترتیب نگاشتی مشخص کرده‌ایم که هر خط شامل $p=(x,y,z)^t$ را به یک زوج $(g_1,g_2)$ نظیر می‌کند به گونه‌ای که $g_2$ دوران یافتهٔ $g_1$ در جهت مثبت به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ است. با تغییر خط $G$ زوج $(g_1,g_2)$ تغییر می‌کند ولی زاویهٔ بین آنها همان $\varphi$ است. به این ترتیب نقطهٔ $p$ نظیر یک دوران در صفحهٔ اقلیدسی به زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ است. بهتر است بگوییم به کمک این نگاشت بافهٔ خط‌هایی که $p$ بر آنها واقع است به یک دوران (حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی) در صفحه نظیر می‌شود.



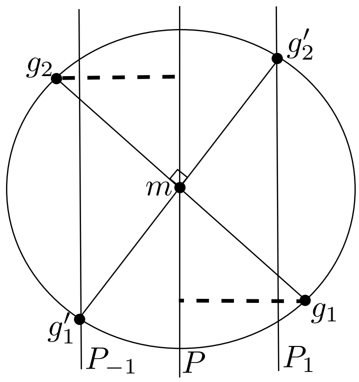

**شکل ۸. تناظر بین یک نقطه از خط با حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی توسط نگاشت بلاشکه.**

در ادامه نشان می‌دهیم که خط‌های واقع بر یک صفحهٔ $\pi$ و ناموازی با صفحهٔ $xoy$، توسط نگاشت بلاشکه به یک حرکت نگاشته می‌شوند که حاصل ضرب سه بازتاب خطی است. صفحهٔ $\pi$

صفحه‌های $E_{\text{۱}}$، $xoy$ و $E_{-\text{۱}}$ را در خط‌های موازی قطع می‌کند که تصویر قائم آنها بر صفحهٔ $xoy$ را به ترتیب $P_{\text{۱}}$، $P$ و $P_{-\text{۱}}$ می‌نامیم (شکل ۹). به این ترتیب بازتاب خطی نسبت به $P$ خطوط $P_{\text{۱}}$ و $P_{-\text{۱}}$ را به یکدیگر تبدیل می‌کند. برای خط دلخواه $G$ که در $\pi$ واقع است به کمک نگاشت بلاشکه ابتدا زوج نقاط $(g_{\text{۱}}^*, g_{\text{۲}}^*)$ به دست می‌آیند که $g_{\text{۱}}^* \in E_{\text{۱}}$ و $g_{\text{۲}}^* \in E_{-\text{۱}}$. سپس تصویر این زوج نقاط بر صفحهٔ $xoy$ یعنی $(g'_{\text{۱}}, g'_{\text{۲}})$ به دست می‌آیند. در گام بعد با دوران دادن این دو نقطه حول $m$ در جهت مثبت زوج نقاط $(g_{\text{۱}}, g_{\text{۲}})$ به دست می‌آیند. رابطهٔ بین $g_{\text{۱}}$ و $g_{\text{۲}}$ را می‌توان به شکل دیگری هم تعبیر کرد. کافی است ابتدا بازتاب $g_{\text{۱}}$ را نسبت به خط $P$ به دست آوریم و سپس آن را به اندازهٔ فاصلهٔ دو خط $P_{\text{۱}}$ و $P_{-\text{۱}}$ در راستای خط $P$ انتقال دهیم (شکل ۹). مشاهده می‌شود که فاصلهٔ دو خط $P_{\text{۱}}$ و $P_{-\text{۱}}$ برابر $\text{۲}\cot\text{an}\ \phi$ است که $\phi$ زاویهٔ بین صفحات $\pi$ و $xoy$ است. از سوی دیگر در صفحهٔ اقلیدسی هر انتقال به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی قابل نمایش است. به این ترتیب هر صفحهٔ $\pi$ در فضای اقلیدسی سه بعدی نظیر یک حرکت است و این حرکت به صورت حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی قابل نمایش است.
برای درک بهتر ایدهٔ بلاشکه و بیان تحلیلی مفهوم فضای حرکت، تناظر بین دوران‌های صفحه با یک خط تصویری را با رهیافت تحلیلی هم مطرح می‌کنیم.

فرض کنیم $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ یک گسترش میدان اعداد مختلط روی میدان اعداد حقیقی از مرتبهٔ دو باشد. به کمک این گسترش، گاوس بیان تحلیلی بسیار ساده‌ای برای صفحهٔ اقلیدسی به دست آورد. با این روش، مجموعهٔ نقاط صفحهٔ اقلیدسی مجموعهٔ اعداد مختلط است، مجموعهٔ خطوط عبارت است از $\mathbf{L} := \{a + b\mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{C}, b \neq \text{۰}\}$ و هم‌نهشتی (قابلیت انطباق) دو پاره‌خط $(a, b)$ و $(c, d)$ به وسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Longleftrightarrow (a - b)\overline{(a - b)} = (c - d)\overline{(c - d)}$$




**شکل ۹. تناظر بین صفحه در فضا با حاصل ضرب سه بازتاب خطی توسط نگاشت بلاشکه.**

در صفحهٔ اقلیدسی هر حرکت یک یکریختی طولپا است. به عبارت دیگر نگاشت یک

به یک و پوشای $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ حرکت نامیده می‌شود هرگاه $(a, b) \equiv (\varphi(a), \varphi(b))$. حرکت‌های صفحهٔ اقلیدسی با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که آن را با $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم. برای توصیف بیشتر $\mathcal{M}$ از حرکت‌های مقدماتی زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a \in \mathbb{C}$، $b \in \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = ۱\}$ و

$$^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto \bar{z}, \quad a^{+} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto a + z, \quad b^{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto bz$$

مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+} := \{a^{+} \circ b^{\cdot} \mid a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{S}\}$ یک زیرگروه $\mathcal{M}$ است که اعضای آن را **حرکت‌های سره**[1] می‌نامیم. مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+}$ همان زیرگروه دوران‌ها است که هر یک از اعضای آن را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی بیان کرد. علاوه بر این $\mathcal{M}^{-} := \mathcal{M}^{+} \circ {}^{-}$ یک هم‌مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+}$ است که اعضای آن را **حرکت‌های ناسره**[2] می‌نامیم. اعضای این مجموعه به صورت حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی قابل بیان هستند و می‌توان نشان داد که $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{+} \dot{\cup} \mathcal{M}^{-}$. دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی با نقطهٔ ثابتی مانند $o$ یک زیرگروه جابجائی $\mathcal{M}$ یکریخت با $(\mathbb{S}, \cdot)$ است. از سوی دیگر چون $\mathbb{C}$ یک فضای برداری دوبعدی روی $\mathbb{R}$ است یک خط تصویری از آن به دست می‌آید. برای $\mathbb{R}^{*} := \mathbb{R} \setminus \{۰\}$، $\mathbb{C}^{*} := \mathbb{C} \setminus \{۰\}$ و $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}\ ;\ \mathfrak{x} \mapsto \mathbb{R}^{*}\mathfrak{x}$، مجموعهٔ نقاط خط تصویری عبارت است از:

$$\overline{P} := \varphi(\mathbb{C}^{*}) = \{\mathbb{R}^{*}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathbb{C}^{*}\}$$

در واقع نقاطِ خط تصویری به جای مختصات مستوی $\mathfrak{x} = (x_۱, x_۲)$ دارای مختصات تصویری $\mathbb{R}^{*}\mathfrak{x} = \{(\leftarrow x_۱, \leftarrow x_۲) \mid \leftarrow \in \mathbb{R}^{*}\}$ هستند. در این صورت نگاشت $\kappa$ با ضابطهٔ $e^{i\theta} \mapsto e^{i\frac{\theta}{۲}}$ یک یکریختی بین دو گروه $(\mathbb{S}, \cdot)$ و $(\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}, \cdot)$ است. نگاشت $\kappa$ را **نگاشت حرکت**[3] می‌نامیم. به این ترتیب برای $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S},\ z \neq -۱$، با توجه به این که $\mathbb{R}^{*} e^{i\frac{\theta}{۲}} = \mathbb{R}^{*}\sqrt{z} = \mathbb{R}^{*}\frac{۱+z}{(۱+z)\overline{(۱+z)}} = \mathbb{R}^{*}(۱ + z)$، نگاشت $\kappa$ نقطهٔ $z$ را به نقطهٔ $\mathbb{R}^{*}(۱ + z)$ بر خط تصویری $\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}$ می‌نگارد و نقطهٔ $z = -۱$ به نقطهٔ دور این خط نگاشته می‌شود. این بحث برای هر میدان توسیعی جداشدنی مرتبهٔ ۲ مانند $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ برقرار است به شرط آن که $^{-}$ خودریختی نابدیهی با میدان ثابت $\mathbb{K}$ در نظر گرفته شود. در ادامهٔ نوشتار به یادآوری پیش‌نیازهایی می‌پردازیم که برای بیان فضای بازتابی لازم است. فرض کنیم $P$ یک مجموعه‌ی ناتهی باشد که اعضای آن را **نقطه** می‌نامیم. مجموعهٔ ناتهی $\mathbf{L}$ را مجموعهٔ دیگری در نظر می‌گیریم که اعضای آن **خط** نامیده می‌شوند (در برخی از مراجع مانند [٦] برای سادگی $\mathbf{L}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ توانی $P$ در نظر گرفته شده است). زوج $(P, \mathbf{L})$ را یک **فضای وقوعی**[4] می‌نامیم هرگاه رابطه‌ای موسوم به **وقوع** روی $P \times \mathbf{L}$ تعریف شده باشد به قسمی که برای آن بُنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{I}_۱$. برای هر دو نقطهٔ متمایز $x$ و $y$ در $P$، خط یکتای $L \in \mathbf{L}$ وجود دارد که $x, y$ بر $L$ واقعند.

$\mathbf{I}_۲$. بر هر خط $L$ حداقل دو نقطه واقع است.

1) proper motions 2) improper motions 3) kinematic map 4) incidence space

برای هر دو نقطهٔ متمایز $x$ و $y$ در $P$، خط یکتائی را که $\mathbf{I}_1$ مشخص می‌کند با $\overline{x,y}$ نشان می‌دهیم. اگر نقطهٔ $x$ بر خط $L$ واقع باشد می‌گوییم $x$ نقطه‌ای از $L$ است یا نقطهٔ $x$ روی خط $L$ قرار دارد.

مجموعه‌ای از نقاط مانند $M \subseteq P$ **هم‌خط**[1] نامیده می‌شوند هر گاه بر یک خط واقع باشند.
اگر $(P, \mathbf{L})$ و $(P', \mathbf{L}')$ دو فضای وقوعی باشند، نگاشت دوسویی $\phi$ که $P \mapsto P'$ و $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}'$، یک **یکریختی**[2] بین $(P, \mathbf{L})$ و $(P', \mathbf{L}')$ نامیده می‌شود هرگاه وقوع را حفظ کند. یعنی $x$ بر $L$ واقع باشد اگر و تنها اگر $\varphi(x)$ بر $\varphi(L)$ واقع باشد. در حالتی که $(P', \mathbf{L}') = (P, \mathbf{L})$، یکریختی را **هم‌خطی**[3] یا **خودریختی** می‌نامیم.

برای زیر مجموعه‌های $P_1 \subseteq P$ و $\mathbf{L}_1 \subseteq L$ زوج $(P_1, \mathbf{L}_1)$ را یک **زیرفضای**[4] $(P, \mathbf{L})$ می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه متمایز $a$ و $b$ در $P_1$، $\overline{a,b} \in L_1$.

از این پس برای سادگی $\mathbf{L}$ را زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ توانی $P$ در نظر می‌گیریم.

با این قرارداد $T \subseteq P$ زیرفضای $(P, \mathbf{L})$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز $a$ و $b$ در $T$ داشته باشیم $\overline{a,b} \subseteq T$.

فرض کنیم $\mathfrak{S}$ مجموعهٔ تمام زیرفضاهای $(P, \mathbf{L})$ باشد. در این صورت اگر $U$ و $V$ دو زیرفضای $(P, \mathbf{L})$ باشند آنگاه $U \cap V$ نیز زیرفضای $(P, \mathbf{L})$ خواهد بود. برای $S \in \mathfrak{S}$ قرار می‌دهیم $\mathbf{L}_S := \{L \in \mathbf{L} \mid L \subseteq S\}$. برای $S \subseteq P$ **بستار وقوعی**[5] $S$، فضای وقوعی $\overline{S} := \bigcap_{S \subseteq T \in \mathfrak{S}} T$ است. همچنین **بعد**[6] زیرفضای $T$ عبارت است از $\dim T := \inf\{|S| \mid \overline{S} = T\} - ۱$. برای مثال هر خط یک زیرفضای یک بعدی است. با این تعریف، منظور از **صفحه** یک زیرفضای دو بعدی $(P, \mathbf{L})$ است. از این پس $\mathcal{E}$ را مجموعهٔ تمام صفحه‌های $(P, \mathbf{L})$ در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $(G, \cdot)$ یک گروه با عضو همانی $e$ باشد. برای مجموعهٔ ناتهی $\mathfrak{F}$ از زیرگروه‌های سرهٔ $G$، زوج $(G, \mathfrak{F})$ را یک **کلاف**[7] $G$ می‌نامیم هرگاه شرط‌های زیر برقرار باشند.

۱) $\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = G$.

۲) برای هر دو عضو متمایز $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$، $F_1 \cap F_2 = \{e\}$.

یک کلاف را **کلاف حرکت**[8] می‌نامیم هرگاه علاوه بر شرط‌های بالا، شرط زیر هم برقرار باشد.

۳) برای هر $F \in \mathfrak{F}$ و هر $g \in G$، $gFg^{-1} \in \mathfrak{F}$.

مثلاً برای گروه جمعی $(\mathbb{C}, +)$ با عضو همانی ۰ و $\mathfrak{F} = \{< \mathbf{a} > \mid \mathbf{a} \in \mathbb{C}\}$ که در آن $< \mathbf{a} > := \{\lambda \mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$، زوج $(\mathbb{C}, \mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت برای گروه جمعی $(\mathbb{C}, +)$ است.

**گزاره ۱۰.** فرض کنیم $(G, \cdot)$ یک گروه با عضو همانی $e$ و $(G, \mathfrak{F})$ یک کلاف برای آن باشد. در این صورت برای $\mathfrak{G} := \{gF \mid g \in G,\ F \in \mathfrak{F}\}$ داریم:

---

1) collinear 2) isomorphism 3) collineation 4) subspace 5) incidence closure
6) dimension 7) fibration 8) kinematic fibration

۱) $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ یک **گروه وقوعی** است یعنی $(G,\mathfrak{G})$ یک فضای وقوعی و برای هر $a$ در $G$ نگاشت $a^{\cdot} : G\to G\ ;\ x\mapsto ax$ یک خودریختی $(G,\mathfrak{G})$ است.

۲) اگر $(G,\mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت برای گروه $(G,\cdot)$ باشد آنگاه نگاشت $\cdot a : G\to G\ ;\ x\mapsto xa$ نیز یک خودریختی $(G,\mathfrak{G})$ است. علاوه بر این سه تائی $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ یک **فضای حرکت** است، یعنی برای $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ هر دو نگاشت $a^{\cdot}$ و $\cdot a$ خودریختی‌های $(G,\mathfrak{G})$ و خط‌های شامل $e$ زیرگروه‌های $(G,\cdot)$ هستند.

اگر $(G,\mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت باشد آنگاه $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ را **فضای حرکت**[۵] نظیر آن می‌نامیم.

در آنچه ابتدای این بخش مطرح شد گروه $G$ همان گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی است.

این گروه را می‌توان اجتماع زیرگروه‌های آن یعنی دوران‌های صفحه حول یک نقطهٔ ثابت در نظر گرفت. فضای حرکت به دست آمده از این گروه همان فضای سه بعدی شامل صفحهٔ اقلیدسی است. در بخش بعد به جای گروه دوران‌های صفحه، یک گروه دلخواه قرار می‌دهیم و فضای حرکت نظیر آن را بررسی می‌کنیم.

## ۲ فضای بازتابی

فرض کنیم $\Gamma$ یک گروه باشد که عضو همانی آن را با ۱ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم مجموعه‌ی $J := \{x\in\Gamma \mid x^{۲}=۱,\ x\neq ۱\}$ زیرمجموعه‌ی عضوهای خودوارون $\Gamma$ و $P$ زیر مجموعه‌ای از $J$ باشد. **فضای بازتابی** $(P,\Gamma)$ به وسیله‌ی چند ویژگی زیر تعریف می‌شود:

**(S1)** **مجموعهٔ $P$ گروه $\Gamma$ را تولید می‌کند، یعنی** $\Gamma = < P >$.

پیش از بیان ویژگی دوم، ابتدا برای $a,b\in P$ قرار می‌دهیم:

$$\Pi(a) := \{x\in P\setminus\{a\} \mid xa = ax\}$$

$\Pi(a)$ را **قطب** نقطهٔ $a$ می‌نامیم. همچنین فرض کنیم

$$\overline{a,b} := \begin{cases} \{x\in P \mid abx\in J\} & ab\neq ba \\ \{x\in P\setminus\Pi(a) \mid abx\in J\}\cup\{b\} & a\neq b\ ,\ ab=ba \end{cases}$$

و $\mathbf{L} := \{\overline{a,b} \mid a,b\in \binom{P}{۲}\}$. بر اساس این تعریف‌ها، برای فضای بازتابی ویژگی زیر را هم می‌پذیریم:

**(S2)** **(ضرب سه بازتاب)** **برای هر $L$ در $\mathbf{L}$ و هر سه عضو $x,y,z$ در $L$،** $xyz\in P$.

از این پس عضوهای $P$ و $\mathbf{L}$ را به ترتیب **نقطه** و **خط** می‌نامیم.

1) kinematic space

یادآوری می‌کنیم که در کارهای اشپرنر همزاد این رهیافت مطرح شده است [۱۱]. به عبارت دیگر وی عضوهای $P$ را **خط** و عضوهای $\mathbf{L}$ را **نقطه** در نظر گرفته است. هر یک از این دو رهیافت مزیت‌ها و کاستی‌هایی دارد. با رهیافت اشپرنر مثال‌هایی از صفحهٔ مطلق مسطح و هندسه‌های **تکین**[1] (مانند هندسهٔ اقلیدسی) یعنی فقط فضاهای مسطح به دست می‌آیند. در حالی که با رهیافت دوم محدودیت بعد وجود ندارد ولی مثالی از هندسه‌های تکین به دست نمی‌آید. به منظور ارائهٔ مثال‌های شهودی از فضای بازتابی، هندسه‌های مطلق (مانند هندسهٔ اقلیدسی یا هذلولوی) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\widetilde{P} := \{\widetilde{p} \mid p \in P\}$ مجموعهٔ بازتاب‌های نقطه‌ای و $\Gamma :=< \widetilde{P} >$ گروه تولید شده به وسیلهٔ $\widetilde{P}$ باشد. در این صورت $(\widetilde{P}, \Gamma)$ مثالی از یک فضای بازتابی است. در این هندسه‌ها برای هر سه نقطهٔ هم‌خط $a$، $b$ و $c$ بازتاب‌های $\widetilde{a}$، $\widetilde{b}$ و $\widetilde{c}$ در $(\widetilde{P}, \Gamma)$ هم‌خط هستند، یعنی $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J$. وارون این مطلب فقط برای هندسه‌های **عادی**[2] مثل هندسهٔ هذلولوی برقرار است ولی برای هندسه‌های تکین مانند هندسهٔ اقلیدسی برقرار نیست. برای هندسه‌های تکین همواره $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J$. به عبارت دیگر تمام نقاط بر یک خط واقع هستند، یعنی $\mathbf{L} = \{\widetilde{P}\}$. برای کنار گذاشتن حالت‌های بدیهی و هندسه‌های تکین، ویژگی دیگری را به دو ویژگی قبلی اضافه می‌کنیم.

**(S3)** **نقطه‌های** $x, y, z$ **در** $P$ **وجود دارند به قسمی که** $xyz \notin J$.

طبق این بنداشت سه نقطهٔ متمایز داریم که بر یک خط واقع نیستند. بنابر گزارهٔ ۲ نظیر هر فضای بازتابی یک فضای وقوعی $(P, \mathbf{L})$ وجود دارد. از بنداشت $(\mathbf{S3})$ نتیجه می‌شود $|P| \geq ۳$ و $|\mathbf{L}| \geq ۳$. همان‌گونه که گفتیم به وسیلهٔ بنداشت $(\mathbf{S3})$ حالت‌های بدیهی کنار گذاشته می‌شوند.

به منظور پوشاندن حالت‌هایی که $\Pi(p)$ برای نقطه‌ای چون $p \in P$ ناتهی است، شرط زیر را نیز برای یک فضای بازتابی می‌پذیریم.

**(S4)** **(قطب)** **برای هر** $a, b, c, d \in P$ **که** $b \neq c$، **اگر** $ab, ac, bcd \in J$ **آنگاه** $ad \in J$.

برای تعبیر هندسی این خاصیت باید یادآوری کرد که در هندسه‌هائی مانند صفحهٔ کلاسیک بیضوی که برای هر نقطه مانند $a$ یک قطب وجود دارد، نقطه‌های قطب تنها نقطه‌هایی (غیر از $a$) هستند که در شرط $ab \in J$ (یا به طور معادل $ab = ba$) صدق می‌کنند. در مدل کروی صفحهٔ کلاسیک بیضوی، دایرهٔ عظیمه‌ای که بر همهٔ دایره‌های عظیمهٔ گذرنده از $a$ عمود است قطب نقطهٔ $a$ است. بنداشت قطب در واقع می‌گوید که اگر $b$ و $c$ در قطب $a$ باشند آنگاه هر نقطهٔ $d$ واقع بر خط $\overline{b, c}$ نیز در شرط $ad \in J$ صدق می‌کند، یعنی در قطب $a$ قرار می‌گیرد. به بیان دقیق‌تر، از شرط قطب نتیجه می‌شود که $\Pi(a)$ یک زیرفضا است. به عبارت دیگر برای هر $a \in P$، $\Pi(a) \in \mathfrak{S}$. به این ترتیب برای $T \subseteq P$ داریم $\Pi(T) := \bigcap_{t \in T} \Pi(t) \in \mathfrak{S}$.

در بحث مربوط به فضاهای بازتابی که نقاطی از آن قطب دارند، می‌گوییم سه نقطهٔ $a, b, c \in P$ تشکیل یک **مثلث قطبی** می‌دهند هرگاه $c, a \in \Pi(b)$، $b, c \in \Pi(a)$ و $a, b \in \Pi(c)$.

---

1) singular 2) ordinary

## ۱.۲ گروه هم‌خطی‌های یک فضای بازتابی

فرض کنیم $\mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$ گروه هم‌خطی‌های فضای وقوعی $(P,\mathbf{L})$ نظیر فضای بازتابی $(P,\Gamma)$ باشد. یعنی $\mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$ مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های یک به یک و پوشای $\sigma : P \to P$ است چنان که برای هر $L \in \mathbf{L}$ داریم $\sigma(L) \in \mathbf{L}$. از بنداشت $(\mathbf{S2})$ نتیجه می‌شود برای $p, x \in P$، $pxp \in P$. پس می‌توان نگاشت $\widetilde{p} : P \to P\ ;\ x \mapsto pxp$ را تعریف کرد که به آن **بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ** $p$ می‌گوییم. بنابر $(\mathbf{S2})$ نگاشت $\widetilde{p}$ یک هم‌خطی است. همچنین بنابر $(\mathbf{S1})$، مجموعهٔ $P$ گروه $\Gamma$ را تولید می‌کند. پس هر خودریختی داخلی $\gamma_i : \Gamma \to \Gamma\ ;\ \xi \mapsto \gamma\xi\gamma^{-1}$ مجموعهٔ $P$ را به خودش می‌نگارد و بازتاب نقطه‌ای $\gamma_i|_P$ یک هم‌خطی است. قرار می‌دهیم $\widetilde{P} := \{\widetilde{p} \mid p \in P\}$ و $\Gamma_i := \{\gamma_i \mid \gamma \in \Gamma\}$.

**گزاره ۱۱.**

۱) $\widetilde{P} \subseteq \Gamma_i \leq \mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$.

۲) هر بازتاب نقطه‌ای $\widetilde{p}$ فقط نقاط $\{p\} \cup \Pi(p)$ وخط‌های شامل $p$ را ثابت نگه می‌دارد.

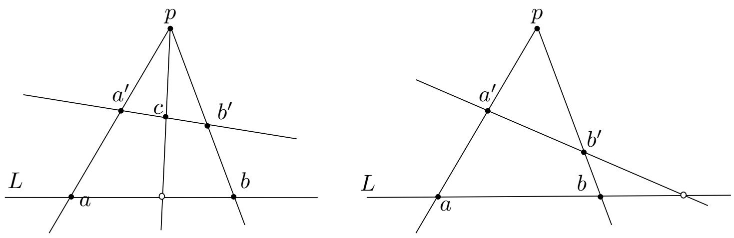
۳) $\widetilde{P}|_P \subseteq \Gamma_i|_P \leq \mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$.

۴) اگر $a,b,c \in P$ و $abc \in J$ آنگاه $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} = \widetilde{abc}$. به ویژه $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)} = \widetilde{aba}$.

۵) اگر $a,b,c \in P$ به گونه‌ای باشند که $a \neq b$ و $\widetilde{a}(c) = \widetilde{b}(c)$ آنگاه $c \in \overline{a,b}$ و $ab = ba$.

۶) اگر $a,b \in P$ به قسمی باشند که $\gamma := ab \in J^+ := \{ab \mid a,b \in P\}$ آنگاه $\gamma_i$ یک بازتاب خطی نسبت به خط $\overline{\gamma} = \{x \in P \mid abx \in J\}$ خواهد بود.

۷) اگر $a,b,c \in P$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که $abc \notin J$ آنگاه $(\widetilde{P},\Gamma_i)$ یک فضای بازتابی است و نگاشت $\widetilde{\ } : P \to \widetilde{P}\ ;\ p \mapsto \widetilde{p}$ یکریختی بین فضای بازتابی $(P,\Gamma)$ و فضای بازتابی $(\widetilde{P},\Gamma_i)$ است.




**شکل ۱۰. شرط‌های وبلن ـ پاش.**

در ادامه به بررسی فضاهای بازتابی خاصی می‌پردازیم که برای آنها شرط‌های زیر موسوم به شرط‌های **وبلن ـ پاش** برقرار باشند. اثبات برخی از گزاره‌ها را می‌توان در مقالهٔ [۱۵] مشاهده کرد.

فرض کنیم $(p, L)$ یک زوج نقطه و خط باشد که $p \notin L$. این زوج را یک **زوج تصویری** گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند (شکل ۱۰).

(**PV1**) برای نقاط $a, b \in L$، $a' \in \overline{p, a} \setminus \{p\}$ و $b' \in \overline{p, b} \setminus \{p\}$ و $c \in \overline{a', b'} \setminus \{p\}$ داریم $\overline{p, c} \cap L \neq \emptyset$.

(**PV2**) برای نقاط $a, b \in L$، $a' \in \overline{p, a} \setminus \{p\}$ و $b' \in \overline{p, b} \setminus \{p\}$ داریم $\overline{a', b'} \cap L \neq \emptyset$.

**گزاره ۱۲.** اگر $(p, L)$ در شرط (**PV1**) صدق کند آنگاه $T := \bigcup_{x \in L} \overline{p, x} \in \mathfrak{S}$.

**گزاره ۱۳.** فرض کنیم $(p, L)$ یک زوج تصویری باشد و $E := \overline{\{p\} \cup L}$. در این صورت:

۱) $E$ یک صفحه است (یعنی $\dim E = ۲$) و $E = \bigcup_{x \in L} \overline{p, x}$.

۲) برای هر $X$ در $\mathbf{L}_E$، $X \cap L \neq \emptyset$.

۳) اگر $q \in E \setminus L$ آنگاه $(q, L)$ یک زوج تصویری است.

۴) برای هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط $a, b, c \in E$، $\overline{\{a, b, c\}} = E$.

## ۳ زیرمجموعه‌ها و زیرفضاهای کاهش‌پذیر

در این قسمت به مجموعه‌های خاصی از نقاط در یک فضای بازتابی موسوم به مجموعه‌های کاهش‌پذیر می‌پردازیم. در فضای بازتابی $(P, \Gamma)$ زیرمجموعهٔ $S \subseteq P$ را **یک مجموعهٔ کاهش‌پذیر** می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c, d \in S$، عناصر $u, v \in S$ وجود داشته باشند به قسمی که $abcd = uv$. این ویژگی در واقع برگرفته از مثال‌های خاصی مانند برخی از صفحه‌های مطلق است که در آنها حاصل ضرب چهار بازتاب خطی یا نقطه‌ای را می‌توان به شکل حاصل ضرب دو بازتاب خطی یا نقطه‌ای بیان کرد. در این بخش مجموعهٔ $\mathcal{R}$ را مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای کاهش‌پذیر با بعد حداقل ۲ در نظر می‌گیریم. روشن است که مجموعهٔ تهی، مجموعه‌های شامل فقط یک نقطه و خط‌ها (بنابر (**S2**)) کاهش‌پذیر هستند. در گزاره‌های بعد برای $S \subseteq P$ قرار می‌دهیم $\kappa(S) := \{ab \mid a, b \in S\}$.

**گزاره ۱۴.** در فضای بازتابی $(P, \Gamma)$ برای هر $\alpha \in \Gamma$ و هر $R \in \mathcal{R}$، $\alpha R \alpha^{-۱} \in \mathcal{R}$.

**گزاره ۱۵.** فرض کنیم $S, T \subseteq P$ زیرمجموعه‌های ناتهی $P$ باشند. در این صورت:

۱) $S$ کاهش‌پذیر است اگر وتنها اگر $\kappa(S) \leq \Gamma$.

۲) اگر $T$ و $S$ کاهش‌پذیر باشند آنگاه $S \cap T$ کاهش‌پذیر است.

**گزاره ۱۶.** برای هر خط $L \in \mathbf{L}$، $\kappa(L)$ یک زیرگروه جابجائی $\Gamma$ است و $\kappa(L) \subseteq \Gamma^+ := P \cdot P$.

**گزاره ۱۷.** برای هر زیرفضای $T \in \mathfrak{S}$ با $|T| > ۱$، گزاره‌های زیر معادلند.

۱) $\kappa(T)$ مجموعه‌ای است که برای هر $a$ و $b$ در آن $ab = ba$.

۲) $\kappa(T)$ یک گروه جابجائی است.

۳) $T \in \mathbf{L}$، یعنی $T$ یک خط است.

**گزاره ۱۸.** اگر $(p, L)$ یک زوج تصویری باشد آنگاه صفحهٔ $E := \overline{\{p\} \cup L}$ کاهش‌پذیر است.

## ۴ فضای حرکت نظیر فضاهای کاهش‌پذیر

در این بخش فرض می‌کنیم فضای بازتابی $(P, \Gamma)$ یک فضای کاهش‌پذیر باشد. در نتیجه بنابر گزاره‌ی ۲، $\Gamma^+ := P \cdot P \leq \Gamma$ و $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ که در آن $\Gamma^- := P \cdot P \cdot P$. به این ترتیب دو دسته فضای بازتابی وجود دارد. برای یک دسته $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \emptyset$ و برای دسته‌ی دیگر $\Gamma^+ \cap \Gamma^- \neq \emptyset$. در حالت دوم $\Gamma^+ = \Gamma^- = \Gamma$ ,$P \subseteq \Gamma^+$ و در نتیجه مثلث قطبی $(a, b, c)$ وجود داد که $c = ab$.

در این بخش مانند قبل فرض می‌کنیم $\mathfrak{G}$ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای $(P, \Gamma)$ باشد. برای $\alpha = ab \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha] = a \cdot \overline{a, b} := \{ax \mid x \in \overline{a, b}\}$$

در این‌صورت $[\alpha]$ یک زیرمجموعه و حتی یک زیرگروه از مرکزساز $\alpha$ در $\Gamma^+$ است و اگر $c, d \in \overline{a, b}$ به گونه‌ای باشند که $c \neq d$، آنگاه $[\alpha] = a \cdot \overline{c, d} = c \cdot \overline{c, d}$. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{F} := \{[\alpha] \mid \alpha \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}\}.$$

همچنین برای $\varepsilon \in \Gamma^-$ فرض کنیم:

$$\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle := \{\xi \in \Gamma^+ \mid \varepsilon\xi \in J\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{E} := \{\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle \mid \varepsilon \in \Gamma^-\}.$$

همچنین برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ قرار می‌دهیم:

$$\ll\alpha, \beta\gg := \{\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle \in \mathfrak{E} \mid \alpha, \beta \in \langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle\}.$$

با توجه به این‌که فضای بازتابی $(P, \Gamma)$ یک فضای کاهش‌پذیر است و این‌که $\varepsilon \in \Gamma^-,\ \xi \in \Gamma^+$، داریم

$$\varepsilon\xi \in J \iff \varepsilon\xi \in P.$$

بنابر این (مقایسه کنید با گزارهٔ ۱۰):

**قضیه ۱۹.** ساختار $(\Gamma^+, \mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت است و اگر $(\Gamma^+, \cdot, \mathfrak{G})$ فضای حرکت نظیر آن باشد آنگاه:

۱) $\mathfrak{F}$ شامل زیرگروه‌های جابجائی $\Gamma^+$ است.

۲) برای $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma^+$ و $\alpha\neq\beta$ نقاط $c,d,x,y\in P$ وجود دارند که $\alpha^{-۱}\gamma = xy$، $\alpha^{-۱}\beta = cd$ و خط شامل $\alpha,\beta$ عبارت است از:

$$[\alpha,\beta] := \alpha[\alpha^{-۱}\beta] = \alpha c\,\overline{c,d}.$$

و هم‌خطی $\alpha,\beta,\gamma$ در $(\Gamma^+,\cdot,\mathfrak{G})$ با $dxy\in P$ هم‌ارز است.

۳) برای $\varepsilon\in\Gamma^-$، $\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle = \varepsilon^{-۱}\cdot P$ یک زیرفضای $(\Gamma^+,\mathfrak{G})$ است و $۱\in\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle$ اگر و تنها اگر $\varepsilon\in P$. در ادامه قرار می‌دهیم $\mathfrak{G}_\varepsilon := \{A\in\mathfrak{G}\mid A\subseteq\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle\}$.

۴) برای $\alpha\in\Gamma^+$ و $\varepsilon\in\Gamma^-$، نگاشت انتقال چپ

$$\alpha^{\cdot}:\Gamma^+\to\Gamma^+;\quad \xi\mapsto\alpha\xi$$

زیرفضای $\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle$ را به زیرفضای $\langle\!\langle\varepsilon\alpha^{-۱}\rangle\!\rangle$ تبدیل می‌کند. بنابر این:

$$\alpha^{\cdot}(\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle) = \langle\!\langle\varepsilon\alpha^{-۱}\rangle\!\rangle$$

و در نتیجه همهٔ زیرفضاهای $\mathfrak{E}$ یکریختند.

۵) برای هر $a\in P$، نگاشت $a^{\cdot}:P\to\Gamma^+;\ x\mapsto ax$ یک هم‌خطی از فضای وقوعی $(P,\mathbf{L})$ به فضای وقوعی $(\Gamma^+,\mathfrak{G})$ است که $(P,\mathbf{L})$ را به $(\langle\!\langle a\rangle\!\rangle,\mathfrak{G}_a)$ می‌نگارد و $\mathfrak{G}_a=\{aL\mid L\in\mathbf{L}\}$.

۶) $\mathfrak{E}=\{abcP\mid a,b,c\in P\}$ , $\mathfrak{G}=\{abcL\mid a,b,c\in P, L\in L\}$, $\mathfrak{F}=\{aL\mid L\in L,\ a\in L\}$.

۷) نگاشت $\nu:\Gamma^+\to\Gamma^+\ ;\ \xi\mapsto\xi^{-۱}$ یک پادریختی است که ۱ و خودواورن‌های $\Gamma^+$ را ثابت نگه می‌دارد.

زیرمجموعهٔ $\Sigma\subseteq\Gamma^+$ را یک زیرفضای $(\Gamma^+,\mathfrak{G})$ می‌نامیم هرگاه:

$$\forall\alpha,\beta\in\Sigma\quad,\alpha\neq\beta\qquad[\alpha,\beta]\subseteq\Sigma.$$

اگر $\Sigma$ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای $(\Gamma^+,\mathfrak{G})$ باشد آنگاه کلاف حرکت $\mathfrak{F}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathfrak{F}=\{[۱,\alpha]\mid\alpha\in\Gamma^+\setminus\{۱\}\}.$$

فرض کنیم:

$$\kappa: ۲^P\to ۲^{\Gamma^+}; X\mapsto X\cdot X := \{xy\mid x,y\in X\}$$

در این صورت تصویر $\mathfrak{G}$ با نگاشت $\kappa$ را **نشاندن در فضای حرکت** می‌نامیم.

**قضیه ۲۰.** فرض کنیم $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma^+$ و $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲ \in \Gamma^-$. در این صورت:

۱) $\langle\varepsilon_۱\rangle = \langle\varepsilon_۲\rangle \iff \varepsilon_۱ = \varepsilon_۲$

۲) اگر $\varepsilon_۱ \neq \varepsilon_۲$ آنگاه $u, v \in P$ وجود دارند به قسمی که $\varepsilon_۱\varepsilon_۲^{-۱} = uv \neq ۱$ و

$$\langle\varepsilon_۱\rangle \cap \langle\varepsilon_۲\rangle = \varepsilon_۱^{-۱}\ \overline{u,v} = \varepsilon_۲^{-۱}\ \overline{u,v} \subseteq \Gamma^+$$

به ویژه اگر $a, b \in P, a \neq b$ آنگاه مجموعهٔ

$$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = a\ \overline{a,b} = b\ \overline{a,b} = \kappa(\overline{a,b})$$

یک خط از فضای حرکت و ۱ بر آن واقع است.

۳) $\ll \gamma\alpha, \gamma\beta \gg = \ll \alpha, \beta \gg \gamma^{-۱}$.

و اگر $a, b \in P$ وجود داشته باشند به قسمی که $\alpha^{-۱}\beta = ab \neq ۱$ آنگاه

$$\ll ۱, ab \gg = \{\langle x\rangle \mid x \in \overline{a,b}\} \quad , \quad \ll \alpha, \beta \gg = \{\langle x\alpha^{-۱}\rangle \mid x \in \overline{a,b}\}.$$

۴) برای $G \in \mathfrak{G}$ و $\mathfrak{E}(G) := \{\langle\varepsilon\rangle \mid G \subseteq \langle\varepsilon\rangle\}$ اگر $A, B \in \mathbf{L}$ آنگاه:

$$|A \cap B| = |\mathfrak{E}(\kappa(A)) \cap \mathfrak{E}(\kappa(A))|.$$

۵) اگر $a, b \in P, a \neq b$ آنگاه $\kappa(\overline{a,b}) = [۱, ab]$.

۶) $\dim \kappa(P) \geq \dim P + ۱$.

## ۵ ساختارهای حرکت وابسته به فضاهای بازتابی

در این بخش به بررسی فضاهای بازتابی $(P, \Gamma)$ می‌پردازیم که لزوماً کاهش‌پذیر نیستند. همانند بخش قبل فرض کنیم $\Gamma^+ := P \cdot P = \{ab \mid a, b \in P\}$ و برای $\alpha = ab \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha] := a\ \overline{a,b} = a\ \overline{\alpha} \quad , \quad a \in \overline{\alpha}.$$

در حالت کلی $\Gamma^+$ یک زیرمجموعه از $\Gamma$ و $[\alpha]$ یک زیرگروه از مرکزساز $\alpha$ در $\Gamma^+$ است. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{F} := \{[\alpha] \mid \alpha \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}\}.$$

همچنین برای $\varepsilon \in \Gamma^-$ فرض کنیم $\langle\!\langle\varepsilon\rangle\!\rangle := \{\xi \in \Gamma^+ \mid \varepsilon\xi \in P\}$. اکنون برای فضاهای بازتابی $(P, \Gamma)$ که لزوماً کاهش‌پذیر نیست، مفهوم **ساختار حرکت** را روی $\Gamma^+$ مطرح می‌کنیم.

برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ فرض کنیم $\alpha \smile \beta \iff \alpha\beta^{-۱} \in \Gamma^+$ و اگر $\alpha^{-۱}\beta = cd$ و $\alpha \neq \beta$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha, \beta] := \alpha c\, \overline{c, d} = \alpha c\, \overline{\alpha^{-۱}\beta}.$$

اگر $u \in \overline{\alpha} \cap \overline{\alpha^{-۱}\beta}$ وجود داشته باشد و قرار دهیم $v := \alpha u$ آنگاه $[\alpha, \beta] = v \cdot \overline{\alpha^{-۱}\beta} \subseteq \Gamma^+$. در این صورت $\alpha$ و $\beta$ را **قابل اتصال** می‌نامیم. اگر $\beta \neq ۱$ و $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \neq \emptyset$ آنگاه $\alpha \cdot [\beta] \subseteq \Gamma^+$. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{G} := \{\alpha F \mid \alpha \in \Gamma^+,\ F \in \mathfrak{F}\ ,\ \alpha F \subseteq \Gamma^+\}.$$

زیرگروه $V \leq \Gamma^+$ را یک $v-$زیرگروه می‌نامیم هرگاه برای هر $\alpha \in V \setminus \{۱\}$ داشته باشیم $[\alpha] \subseteq V$. فرض کنیم $\mathcal{K}$ مجموعهٔ همهٔ $v-$زیرگروه‌هائی باشد که در $\mathfrak{F}$ نیستند. برای $V \in \mathcal{K}$ داریم:

$$\mathfrak{F}_V := \{[\alpha] \mid \alpha \in V \setminus \{۱\}\} = \{F \in \mathfrak{F} \mid F \subseteq V\}.$$

فرض کنیم

$$\mathfrak{G}_V := \{\alpha F \mid \alpha \in V,\ F \in \mathfrak{F}_V\}.$$

نگاشت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\kappa : ۲^P \to ۲^{\Gamma^+}; X \mapsto X \cdot X := \{xy \mid x, y \in X\},$$

$$\kappa' : ۲^{\Gamma^+} \to ۲^P; A \mapsto \kappa'(A) := \{x \in P \mid x \cdot A \subseteq P\} = \bigcap\{\overline{\alpha} \mid \alpha \in A^* = A \setminus \{۱\}\}.$$

یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{R}$ مجموعهٔ زیرفضاهای کاهش‌پذیر با بعد بزرگتر از ۱ است.

**گزاره ۲۱**

۱) اگر برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ با شرط $\alpha \neq \beta$، نقطهٔ $c \in P$ وجود داشته باشد که $a := c\alpha \in P$ و $b := c\beta \in P$ آنگاه $[\alpha, \beta] = c\, \overline{a, b} \subseteq \Gamma^+$.

۲) اگر $L = \overline{a, b} \in \mathbf{L}, a \neq b$ آنگاه $\kappa(L) = a \cdot \overline{a, b} \leq \Gamma^+$.

**قضیه ۲۲** فرض کنیم $J^+ := \Gamma^+ \cap J$ و برای $\alpha \in J^+$ فرض کنیم $\overline{\alpha} := \{x \in P \mid \alpha x \in J\}$. در این صورت

۱) اگر $\alpha \in J^+$ آنگاه نگاشت $\alpha_i|_P : P \to P\ ;\ x \mapsto \alpha x \alpha$ یک بازتاب نسبت به خط $\overline{\alpha}$ است.

۲) اگر برای خط $L \in \mathbf{L}$ نقطه‌ی $a \in L$ وجود داشته باشد که $L \cap \Pi(a) \neq \emptyset$ و $b \in L \cap \Pi(a)$ آنگاه $\alpha := ab \in J^+$، $L = \overline{\alpha}$ و $\alpha_i|_P$ بازتابی نسبت به خط $L$ است. علاوه بر این $\alpha_i|_P = \widetilde{a} \circ \widetilde{b}$.

**قضیه ۲۳.**

۱) فرض کنیم $A \subseteq P$ یک زیرمجموعهٔ کاهش‌پذیر باشد. در این صورت $\kappa(A) \leq \Gamma^+$ و $\kappa' \circ \kappa(A) \subseteq \overline{A}$. افزون بر این اگر $A$ شامل سه نقطهٔ ناهم‌خط باشت آنگاه $\kappa' \circ \kappa(A) = \emptyset$ و اگر نقاط $A$ هم‌خط باشند آنگاه $\kappa' \circ \kappa(A) = \overline{A}$.

۲) نگاشت $\kappa$ خط‌های $\mathbf{L}$ را به شکل دوسوئی به کلاف‌های $\mathfrak{F}$ و نگاشت $\kappa'$ کلاف‌های $\mathfrak{F}$ را به شکل دوسوئی به خط‌های $\mathbf{L}$ می‌نگارند ( در نتیجه $\kappa \circ \kappa'|_{\mathfrak{F}} = id|_{\mathfrak{F}}$ و $\kappa' \circ \kappa|_{\mathbf{L}} = id|_{\mathbf{L}}$).

۳) برای هر $R \in \mathcal{R}$، $\kappa(R) \in \mathcal{K}$.

۴) برای هر $K_۱, K_۲ \in \mathcal{K}$ داریم $K_۱ \cap K_۲ = \{۱\}$ یا $K_۱ \cap K_۲ \in \mathfrak{F}$ و یا $K_۱ \cap K_۲ \in \mathcal{K}$.

**قضیه ۲۴.** برای هر $U \in \mathcal{K}$، $(U, \mathfrak{F}_U)$ گروهی با یک کلاف حرکت است (قضیهٔ ۲). بنابر این $(U, \cdot, \mathfrak{G}_U)$ یک فضای حرکت است که $\mathfrak{G}_U \subseteq \mathfrak{G}$.

هر $K \in \mathcal{K}$ را یک **فضای حرکت** در $\Gamma^+$ می‌نامیم.

اکنون به مطالعهٔ هندسهٔ $(\mathbf{L}, \mathcal{R})$ شامل خط‌ها و زیرمجموعه‌های سرهٔ $(P, \Gamma)$ و هندسهٔ $(\mathfrak{F}, \mathcal{K})$ شامل بافه‌های $\mathfrak{F}$ و فضای حرکت $\mathcal{K}$ روی $\Gamma^+$ می‌پردازیم.

**قضیه ۲۵.**

۱) برای $E, E' \in \mathcal{R}$ و $D := E \cap E'$ داریم:

$a$) اگر $|D| \leq ۱$، یعنی $D = \emptyset$ یا $D$ شامل فقط یک نقطه باشد آنگاه $\kappa(E) \cap \kappa(E') = \{۱\}$.

$b$) اگر $|D| \geq ۲$ آنگاه $\kappa(E) \cap \kappa(E') = \kappa(D)$.

۲) اگر در $(P, \Gamma)$ صفحه‌ها تعویض‌پذیر باشند[۱] آنگاه

$D$ یک صفحه در $(P, \Gamma)$ است $\iff$ $\kappa(E) = \kappa(E')$.

۳) اگر $E \neq E'$ آنگاه $\kappa(E) \neq \kappa(E')$.

## ٦ مثال‌های دیگر برای فضاهای بازتابی

به جز مثال‌هائی که از گروه بازتاب‌های هندسه‌های مطلق به دست می‌آید مثال جالب دیگری

---

۱) در فضای وقوعی $(P, \mathbf{L})$، زیرفضای $T$ را تعویض‌پذیر می‌نامند هرگاه برای زیرمجموعهٔ $S \subseteq T$، از $x, y \in T$ به ازای $x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S}$ نتیجه شود $y \in \overline{S \cup \{x\}}$ [٦]

برای فضای بازتابی قابل بیان است. فرض کنیم $(P, \mathfrak{G}, \equiv)$ یک فضای بیضوی به معنای مراجع [۱۲] و [۱۳] باشد. سورنسن[1] نشان داد که $(P, \mathfrak{G})$ یک فضای تصویری پاپوسی است که بنداشت فانو در آن برقرار است. همچنین به کمک هم‌نهشتی $\equiv$ می‌توان یک نگاشت (قطبی) $\pi$ تعریف کرد. در این فضای تصویری، بازتاب نقطه‌ای یک نگاشت خودوارون است که نقطه‌های ثابت آن $p$ و نقطه‌های واقع بر $\pi(p)$ هستند و

$a, b, c$ هم خط هستند $\iff \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J \iff \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in \widetilde{P}$.

همچنین $(P, \mathbf{L})$ یک فضای تصویری است و اگر $E$ صفحه‌ای (تصویری) در این فضا باشد و خط‌های این صفحه را با $\mathbf{L}_E$ نمایش دهیم و قرار دهیم $\mathfrak{F}_E := \{\kappa(L) \mid L \in \mathbf{L}_E\}$ و $\mathfrak{G}_E := \{aF \mid a \in \kappa(E),\ F \in \mathfrak{F}_E\}$ آنگاه برای $K := \kappa(E)$ زوج $(K, \mathfrak{F}_E)$ یک گروه با کلاف حرکت، $(K, \cdot, \mathfrak{G}_E)$ یک فضای حرکت و $(K, \mathfrak{G}_E)$ یک فضای تصویری سه بعدی خواهد بود [۱۶]. ثابت می‌شود که نگاشت $\kappa$ در این حالت مجموعهٔ صفحات فضا، یعنی $\mathcal{E}$ را، به صورت یک به یک و پوشا به مجموعهٔ همه $v$ ــ زیرگروه‌ها تصویر می‌کند، $\bigcup \mathcal{K} = \Gamma^+$ و اگر $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ و $D = K_1 \cap K_2$ آنگاه یا $D = \{1\}$ یا $D \in \mathfrak{F}$ و یا $D = K_1 = K_2$. به ویژه اگر $\dim\,(P, \mathbf{L}) = 3$ آنگاه هر دو فضای حرکت در $\mathcal{K}$ با یکدیگر یک کلاف $D \in \mathfrak{F}$ مشترک دارند [۱۶].

## مراجع


[1] BACHMANN F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, Heidelberg, New York. 2. Auflage 1973

[2] BLASCHKE W., *Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I, II* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1911), 61-92.

[3] HJELMSELEV J., *Geometrie des droites dans l'espace non euclidian* Verk. Dän. Akad. Kopenhagen **51** (1900), 305-330.

[4] HJELMSELEV J., *Neue Begründungder ebebnen Geometrie* , Math. Ann. **64** (1907), 449-474.

[5] H. KARZEL, G. GRAUMANN: *Gruppentheoretische Begründung metrischer Geometrien.* Ausarbeitung der von Prof. H. Karzel in WS 1962/63 an der Uni. Hamburg gehaltenen Vorlesung, 1963.

[6] KARZEL H., SÖRENSEN K., WINDELBERG D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.


1) Sörensen

[7] KARZEL H. AND KROLL H. J., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[8] PASH M., *Vorlessungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882(third edition 1929).

[9] SCHMIDT H. A., *Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten geometrie* Math. Ann. **118** (1941/1943), 609-625.

[10] SCHUR F., *Über die Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.* Math. Ann. **51** (1899), 401-409.

[11] SPERNER E., *Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik.* Archiv der Mathematik **5** (1954) 458-468.

[12] K. SÖRENSEN, *Elliptische Ebenen.* Mitt. Math. Ges. Hamburg. **10** (1976) 277-296.

[13] K. SÖRENSEN, *Elliptische Räume.* Mitt. Math. Ges. Hamburg. **18** (1999) 159-167.

[14] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Reflection Spaces, Partial K-loops and K-loops.* Results Math. **59** (2011), 213-218.

[15] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Reflection spaces and corresponding kinematic structures.* Results Math. **63** (2013), 597-610.

[16] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Elliptic reflection spaces.* accepted paper to appear in Results Math.

سید قهرمان طاهریان
دانشکدۀ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
taherian@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۲۷ تا ۴۵

# جستجوی شبه تناوب در تزئینات اسلامی ۵ ـ تا (قسمت دوم)*

پیتر آر. کرومول

مترجمین: مریم‌السادات فلسفی، مریم جمالی گندمانی

## ۴. طرح‌های چند سطحی

برخی از صفحات طومار توپقاپی طرح‌هایی را نشان می‌دهند که در مقیاس‌های متفاوت بر روی یکدیگر اضافه شده‌اند. این تأثیر متقابل طرح‌ها در مقیاس‌های چندگانه، یک ویژگی برای برخی از طرح‌های بزرگ اسلامی است که در بناها یافت می‌شود. در این حالت بیننده با نزدیک آمدن، توالی نگاره‌ها را تجربه می‌کند. از فاصله‌ی دور، اشکال بزرگ مقیاس، با تفاوت رنگ زیاد، بیش از هر چیزی به چشم می‌خورند. اما در نگاره‌ی نزدیک‌تر، این اشکال به قدری بزرگ می‌شوند که نمی‌توان آنها را به درستی مشاهده نمود. در این حالت اشکال کوچک‌تر غلبه پیدا می‌کنند. روش‌های اولیه برای تغییر حالت از اشکال بزرگ و برجسته‌ی سرتاسر ناحیه‌ی میانی، به اشکال ریز و ظریف، ساده بودند. این روش‌ها اغلب، به طور پیش رونده، فضاهای خالی پس زمینه را به گونه‌ای پر می‌کرد که طرحی بدون هیچ فضای خالی، بر جای بماند (یک نگاره‌ی ثانویه از این شکل در گنبد کبود، موجود است). تفاوت‌های موجود در اندازه و سطح جزئیات، با استفاده از اختلاف موجود در تراکم، عمق

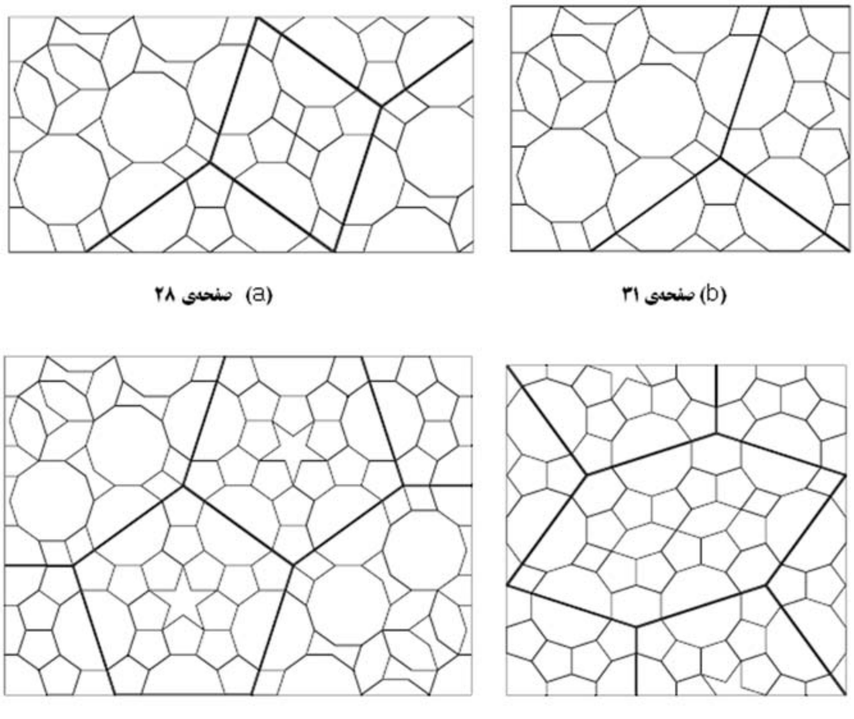
---

*) Peter R. Cromwell, spmr02@liverpool.ac.uk *The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament*, The Mathematical Intelligencer, Voulme 31, Number 1, 2009, pp 36-56.

ترجمه‌ی مقاله در دو قسمت تنظیم گشته است. قسمت اول، که سه بخش ابتدایی مقاله، با عناوین مقدمه، روش‌های اسلامی ترسیم و شبه‌تناوب را شامل می‌شود، در شماره‌ی قبل به چاپ رسید. این قسمت، در ادامه‌ی قسمت اول و مشتمل بر پنج بخش نهایی مقاله می‌باشد. لازم به ذکر است، شکل‌های ۱ تا ۱۳ مقاله، در قسمت اول آورده شده است.

حکاکی، رنگ و ساختار بیان شده بودند. طرح‌های بعدی بلند پروازانه‌تر هستند و سبک یکسانی را در بیش از یک مقیاس به کار می‌برند. حتی می‌توان همان نگاره را دوباره استفاده نمود.
طرح‌هایی که بتوانند در چندین مقیاس خوانده شوند را با نام خود متشابه می‌شناسند. اما خود این اصطلاح، دارای سطوح چندگانه‌ای از معنی است. در معنای خاص، منظور مقیاس پایا است. به عبارت دیگر، یک تبدیل تشابه (یک طولپایی توسط یک توسعه) که طرح را روی خودش می‌نگارد. این تبدیل می‌تواند به یک هم‌ارزی توپولوژیکی تقلیل یابد. برای مثال همریختی‌های موجود در دستگاه‌های توابع مکرر، منجر به فرکتال‌ها می‌شوند ولی هنوز در معنای خفیف‌تر، منظور از آن، نقوشی در مقیاس‌های متفاوت است که در سبک یا آرایش متشابه‌اند، اما نسخه‌های یکدیگر نیستند. ما برای طرح‌های چندگانه‌ی شکل اخیر، عبارت سلسله مراتبی را به کار می‌بریم.

در صفحه ۲۸ طومار توپقاپی، سه نقش بر شکل یکسانی قرار گرفته‌اند: ۱ ــ یک شبکه‌ی چندضلعی کوچک مقیاس که با نقطه‌چین قرمز کشیده شده است. ۲— طرح متناظر با آن در مقیاس کوچک که با یک خط توپر سیاره رنگ رسم می‌شود و ۳ ــ یک طرح بزرگ مقیاس که با یک خط توپر قرمز رنگ به آن اضافه شده است.



(a) صفحه‌ی ۲۸

(b) صفحه‌ی ۳۱

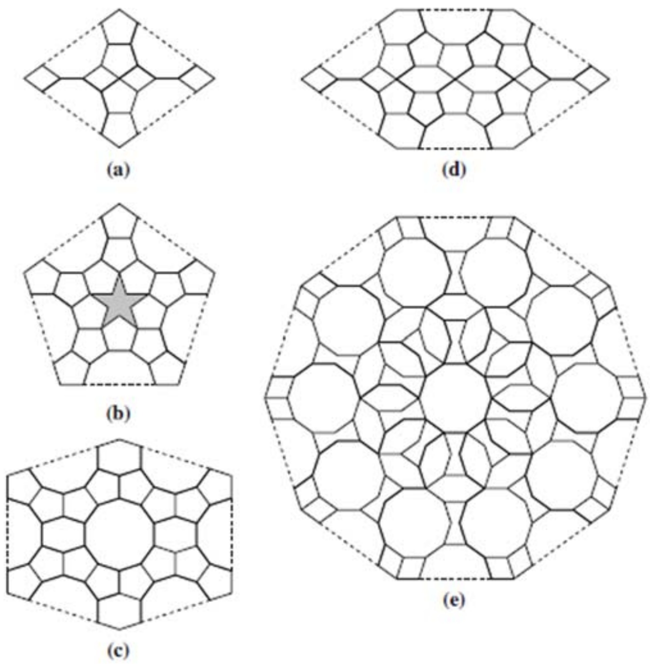
(c) صفحه‌ی ۳۲

(d) صفحه‌ی ۳۴

شکل ۱۴: شبکه‌های چندضلعی دوسطحی زیرین از صفحات طومار توپقاپی.

شبکه‌ی چندضلعی متناظر با طرح بزرگ مقیاس، نشان داده نشده است اما می‌تواند استنباط شود ــ دو شبکه چندضلعی نشان داده شده، در شکل ۱۴(a) بر روی هم قرار گرفته‌اند. بخش‌های دیگر شکل، شبکه‌های چندضلعی زیرین سه طرح دیگر دوسطحی از طومار را نشان می‌دهد. اما هیچ کدام از این شبکه‌ها در صفحات نشان داده نشده‌اند و تنها طرح‌های دو سطحی قرمز و سیاه پایان یافته قابل مشاهده می‌باشند.

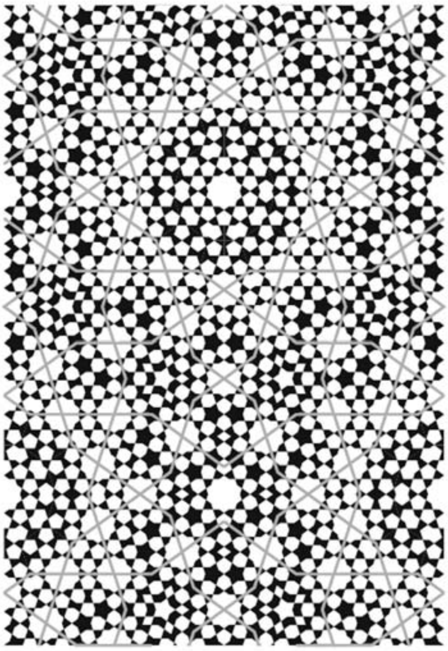
بر روی هم قرار دادن شبکه‌های چندضلعی کوچک و بزرگ مقیاس این صفحات، تقسیمات جزئی برخی از این کاشی‌ها را نشان می‌دهد: یک لوزی در صفحه ۲۸، دو پنج ضلعی در صفحه ۳۲ و یک ماسوره در صفحه ۳۴. در تمامی موارد ضلع کاشی، ترکیبی از اضلاع دو کاشی کوچک و قطر یک ده ضلعی کوچک است. همچنین می توانیم تکه‌های چندضلعی‌های بزرگ مقیاس بریده شده توسط صفحات را مشخص نماییم.




**شکل ۱۵:** تقسیمات جزئی مشتق شده از طومار توپقاپی.
ضریب مقیاس برابر با $۳ + \sqrt{۵} \simeq ۵.۲۳۶$.

این صفحات اجزایی نیستند که به طور دلخواه از یک طرح انتخاب شده باشند، بلکه آنها الگوهایی هستند که می‌بایست توسط انعکاس در اضلاع مستطیل مرزی تکرار شوند. اگرچه با یک نگاه ظاهری در شکل ۱۴(d)، شاید بتوان چنین اظهار نظر کرد که شبکه‌ی بزرگ مقیاس، ماسوره‌ای

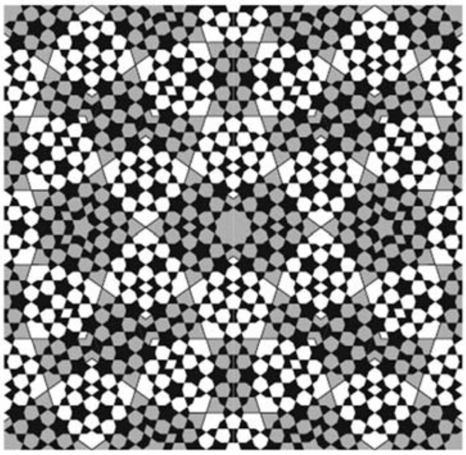
است که توسط شش، پنج ضلعی احاطه شده باشد. آرایشی که در شبکه‌ی کوچک مقیاس می‌توان مشاهده نمود. انعکاس در اضلاع، لوزی‌ها، پنج ضلعی‌ها و خمره‌ها را ایجاد می‌کند. طرح بزرگ مقیاس ایجاد شده توسط صفحه ۳۱، در شکل ۸(g) نشان داده شده است. به نظر می‌رسد که صفحه ۲۸ از سمت راست بریده شده و شاید به خاطر فضای موجود، محدود شده باشد. اگر این صفحه در اطراف مرکز لوزی بزرگ، دارای تقارن دورانی ۲ ـ تایی می‌بود، طرح بزرگ مقیاس، شکل ۸(h) می‌شد. یک گزینش پایدار تقسیم‌جزیی، در هر چهار صفحه پدیدار می‌شود. تقسیمات جزئی پنج کاشی استفاده شده، در شکل ۱۵ نشان داده شده است. به عقیده‌ی من چنین موردی، پیش از این گزارش نشده بود.



شکل ۱٦: یک طرح دوسطحی بر مبنای صفحه ۳۲ طومار توپقاپی.

شکل شماره ۱٦، طرح دوسطحی من را، که بر مبنای صفحه ۳۲ می‌باشد، نشان می‌دهد. کاشی‌های ترکیبی، طرح بزرگ مقیاس را ایجاد می‌کنند (که با رنگ خاکستری نشان داده شده‌اند) و کاشی‌های کوچک مقیاس، طرح کوچک مقیاس را موجب می‌شوند (سفید و سیاه)، که نواحی پس‌زمینه‌ی خود را پر کرده‌اند. کاشی خمره دارای دو نوع تزئین است. من از نقش ساده، برای طرح بزرگ مقیاس استفاده نموده‌ام و نقش دیگر را در طرح کوچک مقیاس به کار برده‌ام. کامل کردن طرح کوچک مقیاس در مرکز پنج ضلعی ترکیبی، کاری دشوار است. برای یک پنج ضلعی در این

مقیاس، تنها یک تقسیم جزئی امکان دارد. زمانی که نیم ده ضلعی‌ها، در محل قرار داده شوند باید پنج ضلعی‌ها را در گوشه‌ها بگذاریم. تنها یک پنج ضلعی یا یک خمره می‌تواند در مجاورت گوشه‌ی پنج ضلعی‌ها قرار گیرد. در هر دو صورت نواحی کوچکی ایجاد می‌شوند که نمی‌توان آنها را با کاشی مفروش نمود. ناحیه‌ی خاکستری در شکل (b)۱۵، یکی از این حفره‌های اساسی را نشان می‌دهد. من برای پر کردن این نواحی شیوه‌ای انتخاب کرده‌ام که نسبت به آن‌چه در طومار توپقاپی آمده، کمی متفاوت است. طرح بزرگ مقیاس همان شکل (c)۲ می‌باشد.



شکل ۱۷: یک طرح دوسطحی بر مبنای صفحه ۳۴ طومار توپقاپی.

شکل ۱۷، نسبت به صفحه ۳۴، از تدبیر مشابهی استفاده کرده است. این شکل چهار نسخه از الگوی مستطیل نشان داده شده در شکل (d)۱۴ را شامل می‌شود که دوتای آنها تصاویر مستقیم و دوتای دیگر تصاویر انعکاس‌یافته در آیینه هستند. در این حالت، نگاره‌ی بزرگ مقیاس، با استفاده از سایه‌اندازی نواحی مشخص شده است. نمونه‌هایی از هر دو سبک را می‌توان در بناهای موجود در اصفهان، ایران، یافت.

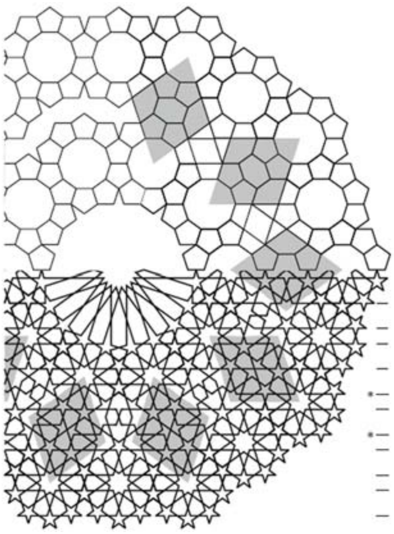
نبود پاپیون در شکل ۱۵، مشخص و قابل توجه است. پاپیون نیز به همان سرنوشت پنج ضلعی محکوم است. کاشی‌ها در دو انتهای آن فشرده‌اند و میانه‌اش را نمی‌توان با کاشی مفروش نمود (شبکه‌ی چندضلعی زیرین بزرگ مقیاس، از صفحه ۲۹ طومار، شامل $\frac{1}{4}$ از یک پاپیون، در گوشه‌ی بالا، سمت راست است که توسط بخش‌هایی از ده ضلعی‌ها احاطه شده، اما این تقسیم جزئی بر پایه‌ی همان روشی که برای بقیه صورت گرفته، نیست).

در شکل ۱۶، بخش قابل رؤیت از طرح بزرگ مقیاس را نیز می‌توان به صورت یک پیکربندی در طرح کوچک مقیاس یافت. با این وجود بخش‌های بزرگ‌تر نشان می‌دهند که این نگاره، با مقیاس پایا نیست. این یک محدودیت کلی از این تقسیمات جزئی است. استفاده از تقسیمات جزئی

شکل ۱۵، به عنوان پایه‌ی یک کاشی‌کاری جانشینی ممکن نمی‌باشد، چرا که بدون تقسیمات جزئی پنج ضلعی و پاپیون، فرآیند تورم قابل تکرار نیست.

## ۵. طرحی از الحمرا

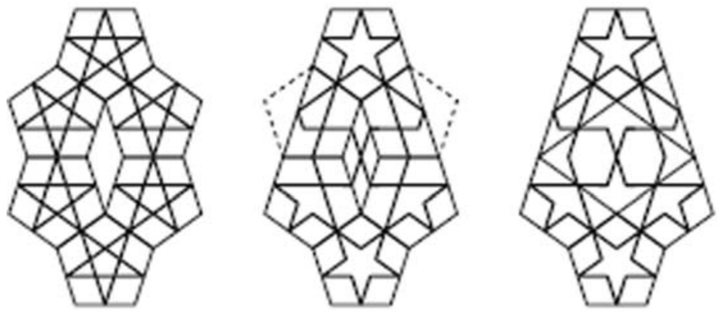
طرح مصور شکل ۱۸، بخش اصلی از یک صفحه بزرگ در موزه‌ای از الحمرا است ـ برای مشاهده‌ی عکسی از این طرح [۲۴] را مشاهده نمایید. قطعات پیدا شده در سال ۱۹۵۸، این صفحه را پدید آورده است، در حالی که نمونه‌ی اصلی آن مربوط به قرن ۱۴ می‌شود. بخش پایین شکل، طرح پایان یافته را نشان می‌دهد. در بخش بالایی، یک شبکه‌ی چندضلعی برای چهارچوب زیرین طرح پیشنهاد داده‌ام. عضو ترکیبی اصلی این چهارچوب، یک ده ضلعی است که توسط ده پنج ضلعی محاط شده است. این امر رز ۱۰ ـ تایی برگردنده را، به عنوان یک نقش اصلی در طرح نهایی افزایش می‌دهد. نسخه‌هایی از این عنصر در دو حلقه قرار گرفته‌اند که می‌توان آنها را در گوشه سمت چپ بالا دید ـ حلقه‌ی درونی شامل ده عنصر و حلقه‌ی بیرونی دارای بیست عنصر است. عناصر مجاور، در دو پنج ضلعی مشترکند. اتصال بین حلقه‌های درونی و بیرونی به دو قسم است. لوزی‌های سایه‌دار، که شامل واحد انتقال از طرح متناوب آشنای شکل (b)۲ هستند. رسم طرح در فضاهای باقی مانده، در شکل ۱۹ نشان داده شده است. زیرمجموعه‌ای از آرایش نقوش پنج ضلعی آورده شده در قسمت (a)، در قسمت (b) دیده می‌شود. در حالی که قسمت (c) همان طرح را بر روی شبکه‌ای که شامل نیمه خمره‌ها و یک‌دهم ده ضلعی‌ها است، نشان می‌دهد. در شکل ۱۸، چندضلعی‌های قسمت (c) استفاده شده‌اند.



شکل ۱۸: ترسیمی از صفحه ۴۵۸۴ در موزه‌ای از الحمرا.

یال‌ها، در شبکه‌ی چندضلعی حاصل، دارای دو طول متفاوت می‌باشند که مربوط به ضلع و قطر کاشی پنج ضلعی می‌شود. طرح نهایی می‌تواند با استفاده از این شبکه، که تعمیمی از روش PIC در آن به کار رفته است، حاصل شده باشد. یال‌های کوتاه دارای زاویه‌ی برخورد $۷۲°$ هستند و یال‌های بلند زاویه‌ی $۳٦°$ دارند. یک رز ۲۰ ــ تا در مرکز قرار گرفته است. سر گلبرگ‌ها، یک در میان، با رزهای ۱۰ ــ تا برخورد می‌کنند و خطوط تشکیل دهنده‌ی سر گلبرگ‌های میانی، تا جایی که با خطوط دیگر نگاره، برخورد نداشته باشند، امتداد می‌یابند. صفحه‌ی مستطیلی احیا شده نیز، دارای $\frac{1}{4}$ رزهای ۲۰ ــ تا است که در چهارگوشه واقع شده‌اند. این مطلب ویژگی مشترک چنین صفحاتی است که خود نشان می‌دهد، بیشترشان زیرمجموعه‌هایی از نگاره‌های متناوب می‌باشند. به هر حال چارک‌ها ناهم‌ترازند و همچنین بیشترین نواحی تعمیری صفحه را شامل می‌شوند. من آنها را از شکل حذف کرده‌ام.

این طرح به خاطر تعداد زیاد خطوط مستقیمی که در سرتاسر شکل، تقریباً بدون وقفه، ادامه دارند، طرحی غیر معمول می‌باشد. علامت‌های موجود در گوشه‌ی راست پایین شکل ۱۸، ارتفاع خطوط افقی را نمایان می‌سازد. پنج خانواده از خطوط موازی وجود دارند که توسط زوایای $۳٦°$ از هم جدا شده‌اند.



(a) (b) (c)

شکل ۱۹

در برخی از کاشی‌کاری‌های شبه‌تناوبی این امکان وجود دارد که کاشی‌های اولیه را با پاره‌خط‌ها تزئین نمود. پاره‌خط‌هایی که در یال‌های کاشی به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک شبکه‌ی پیوسته از خطوط مستقیم ایجاد نمایند. شبکه‌ای که در تمامی صفحه امتداد دارد. این خطوط را میله‌های امان[1] می‌نامند. فواصل بین میله‌های امان موازی و متوالی در دو اندازه می‌آیند، که به صورت سنتی با S و L (کوتاه و بلند) نشان داده می‌شوند. این میله‌ها دنباله‌های نامنظمی را شکل می‌دهند که خود را تکرار نمی‌کنند و هرگز شامل دو S مجاور یا سه L هم‌جوار نخواهند بود.

1) Amman bars

خطوط موجود در شکل ۱۸، میله‌های امان اصلی نیستند. خطوطی که با ستاره مشخص شده‌اند به طور کامل بر روی تمامی عرض قطعه‌ی نشان داده شده منطبق نمی‌باشند. اما این خطوط به نحوی دارای انحرافند که فواصل S و L اضلاع را با هم تعویض می‌کنند. (ایرادات ساختاری این نمونه، در شبه‌بلورها مشاهده شده است که با نام فاسون[1] شناخته می‌شوند). اگرچه طرح تناوبی شکل ۲(b) دارای خطوط مشابهی است، اما دنباله‌هایش تکرار می‌شوند. میله‌های امان قائم، دنباله‌ی SLSL را ایجاد می‌کنند. خطوطی که با خط قائم زاویه‌ی $36°$ می‌سازند، دنباله‌ی SLLSLL را تشکیل می‌دهند اما خطوطی که با خط قائم زاویه‌ی $72°$ دارند، به درستی منطبق نمی‌شوند. ماکوویکی و دیگران در [۲۴]، شکل ۱۸ را به عنوان نمونه‌ای از یک طرح شبه‌تناوبی پیشنهاد می‌دهند. آنها سعی دارند تا بین این طرح و عنصر چرخ و فلک کاشی‌کاری پنروز رابطه‌ای ساختاری برقرار نمایند. پس از اعتراف به این که تلاش برای منطبق کردن بادبادک‌ها و پیکان‌ها کاری دشوار است، سعی نمودند تا آن را با نوعی از کاشی‌های پنروز تطبیق دهند. نمونه‌ای که توسط ماکوویکی [۲۰]، کشف شد. او این نمونه را در حالی که مشغول مطالعه‌ی نگاره‌ی مراغه، نشان داده شده در شکل ۹(b)، بود کشف کرد. جسورانه‌ترین ادعای آنها نتیجه‌ی شماره ٦ [۲۴, p, ۱۲۵] است: «نگاره‌ی ده ضلعی چرخ و فلکی متناوب موجود در حفاری‌های الحمرا و نیز در مراکش، بر مبنای یک کاشی‌کاری تغییریافته‌ی نامتناوب پنروز می‌باشد که اخیراً به نام کاشی‌کاری (PM1) توسط ماکوویکی به دست آمده است. ما به این نتیجه رسیدیم که یک گونه‌ی متقارن شده‌ی نظیر PM1 پنروز، می‌بایست برای هنرمندان (ریاضی‌دانان) مرینیون و النصریون شناخته شده باشد و بدون شک در مجموعه‌ی نگاره‌های پیشرفته‌تر آنها وجود داشته است.»

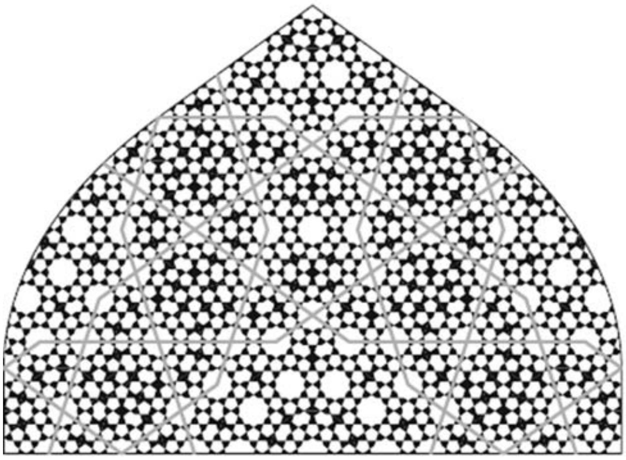
در جاهای دیگر این مقاله نویسندگان نسبت به ماهیت حدسشان محتاط‌تر و واقع‌گرایانه‌ترند. آنها ترسیمی متناوب را ارائه می‌دهند که بر مبنای یک شبکه‌ی زیرین از لوزی‌های به طور شعاعی متقارن بنا شده است. رئوس این لوزی‌ها در مراکز کاشی‌های ده ضلعی قرار دارند [۲۴، شکل ۲۳].

برای رده‌بندی یک نگاره به عنوان متناوب و یا به طور شعاعی متقارن، نمونه‌ی ما می‌بایست به قدری بزرگ باشد که بتوان یک الگو و قوانین مربوط به تکرار آن را مشخص کرد. به طور مشابه، به منظور رده‌بندی یک نگاره به عنوان بخشی از یک ساختار شبه‌تناوبی، که تمامی صفحه را پوشانده است، مشاهده نماییم. این مطلب کافی نیست، که بتوان ویژگی‌های هندسی یک طرح، همچون مراکز دوران، را با یک کاشی‌کاری شبه‌تناوبی آشنا در یک قطعه‌ی متناهی، تنظیم کرد. ما ناگزیر به یافتن یک شیوه‌ی ساخت، برای عناصر طرح هستیم. مجموعه‌ی کاشی‌های زیرین شکل ۱۸ و مجموعه‌ی $P_2$، نشان داده شده در شکل ۱۳، هر دو قطعات بزرگی هستند که دارای تقارن ۱۰ ـ تایی می‌باشند، اما ما تنها چگونگی توسیع مورد دوم، به صورت شبه‌تناوبی، را می‌دانیم.

به نظر من راهکار موجود در طراحی زیرین نگاره‌ی الحمرا نیاز به شناخت کاشی‌کاری‌های از نوع پنروز ندارد و بر پایه‌ی چیزی بیش از تمایل برای قرار دادن نقوش متقارن بزرگ (رزها) در یک

1) phason

نگاره‌ی متقارن شعاعی و پرکردن شکاف‌هاست. رسمی که در ابتدای این بخش ارائه شد، با استفاده از شیوه‌ها و نقوشی که گمان می‌رود توسط هنرمندان اسلامی مورد استفاده قرار گرفته است، طرح کاملی را ترسیم می‌نماید. ساختار کلی طرح همان احساس موجود در شکل ۵ را داراست. گرچه طرح ممکن است، بازشده و برای اثر بخشی بیشتر انتخاب شده باشد، با این حال میله‌های امان، یک نتیجه از رسم طرح هستند. آنها به حفظ هم‌ترازی صحیح عناصر در حین ساخت، کمک می‌نمایند.



**شکل ۲۰:** یک طرح دو سطحی مدل‌سازی شده از درب امام، اصفهان.

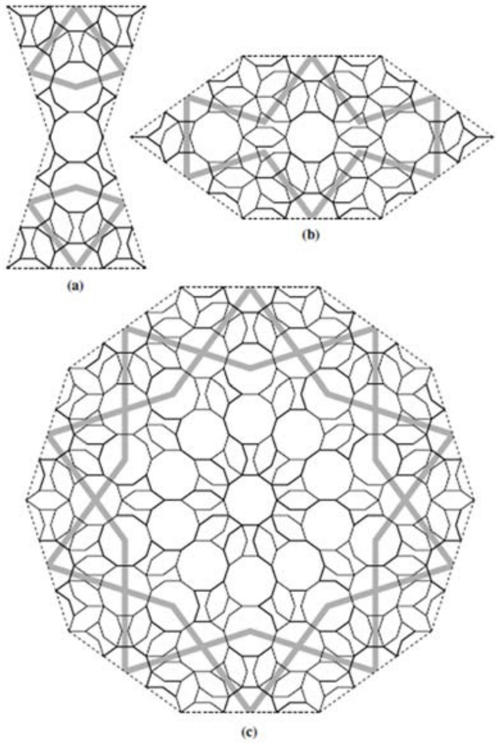
## ۶. طرح‌هایی از اصفهان

شکل ۲۰، یک طرح دوسطحی را نشان می‌دهد که همچون نمونه‌های طومار توپقاپی در بالا، بر مبنای تقسیم جزئی است. طرح بزرگ مقایس، نگاره‌ی ستاره‌ها و بادبادک‌ها می‌باشد که برگرفته از کاشی‌کاری پاپیون و ده ضلعی موجود در شکل (b)۱ است. طرح کوچک مقیاس از تقسیمات جزئی پاپیون و ده ضلعی حاصل می‌شود. این تقسیمات در شکل‌های (a)۲۱ و (c) به همراه نگاره‌ی بزرگ مقیاس اضافه شده با خاکستری، نشان داده شده است. ضلع یک کاشی مرکب، شامل قطرهای دو ماسوره و یک ده ضلعی است. نگاره نمی‌تواند با مقیاس پایا باشد، چرا که شبکه‌ی چندضلعی طرحی بزرگ مقیاس، شامل پاپیونی است که توسط چهار ده ضلعی محاط شده است اما این آرایش موضعی، در شبکه‌ی کوچک مقیاس رخ نمی‌دهد.

این تقسیمات جزئی توسط لو و اشتینهارت [۱۷]، از سه طرح سلسله مراتبی که در بناهای اصفهان یافت شد، برگرفته شده‌اند، نواحی خاکستری رنگ در شکل ۲۲، بخش‌های مربوط به شبکه‌ی چندضلعی بزرگ مقیاس زیرین این طرح‌ها را نشان می‌دهد. نوار مستطیلی، در اطراف قسمت درونی درگاهی از مسجد آدینه قرار دارد. قسمت مثلثی، یکی از یک جفت تصویر قرینه‌ی

لچکی‌ها، از امام زاده درب امام است و قوس، یک سنتوری از درگاهی است که این مورد نیز مربوط به درب امام می‌باشد. (برای تصاویر، [۱۷ و ۳۵] را مشاهده نمایید.) بونر [۲]، روش تقسیم جزئی جایگزینی را برای قوس درب امام پیشنهاد می‌دهد که در آن از کاشی‌کاری شکل ۲(a)، به عنوان پایه‌ی طرح بزرگ مقیاس استفاده می‌شود.

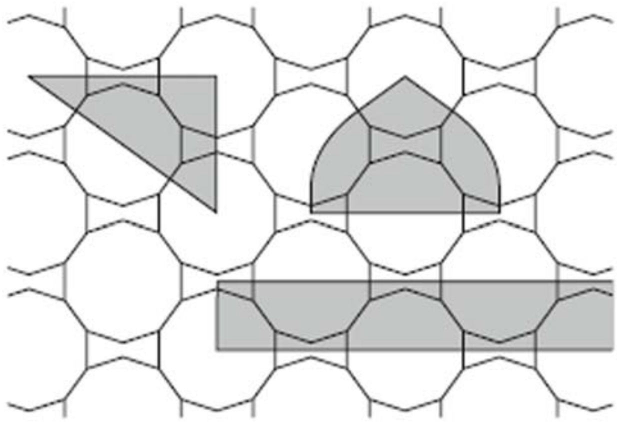
موزائیک سنتوری درب امام، در چندین جا متفاوت از رسم کامل متقارن شکل ۲۰ است. برای مثال ترکیب پاپیون ـ ماسوره شکل ۷(a)، که در گوشه‌ی بالا سمت راست از قسمت مرکزی پاپیون ترکیبی وجود دارد، وارونه است. ترکیب پاپیون ـ ماسوره در گوشه‌های بالای ده ضلعی ترکیبی نیز وارونه هستند. یک ده ضلعی در انتهای پایینی قسمت منحنی مرز، در هر سمت، با شکل ۷(d)، جایگزین شده است. به نظر می‌رسد که اصلاحات انجام گرفته در ده ضلعی ترکیبی، تعمدی است، چرا که تغییرات به صورت یکنواخت در تمام گوشه‌ها اعمال گشته است.




**شکل ۲۱:** تقسیمات جزئی (a) و (c) از طرح‌های بناهایی در اصفهان، گرفته شده‌اند [۱۷]. ضریب مقیاس برابر با $۸.۴۷۲ \simeq ۲\sqrt{۵} + ۴$.

جایگزین کردن ده ضلعی‌های کوچک، شاید جا دادن موزائیک را در قسمت شاه‌نشین آن آسان‌تر

کند. پاپیون نامتعارف، احتمالاً اشتباهی بوده که از طرف استادکار رخ داده است.



**شکل ۲۲:** بخش‌هایی از کاشی‌کاری پاپیون و ده ضلعی به کار رفته در نگاره‌های اصفهان.

اگر بخواهیم از تقسیمات جزئی اصفهان، به عنوان مبنای یک کاشی‌کاری جانشینی استفاده نماییم، ناگزیر می‌بایست همتای مربوط به تقسیم جزئی کاشی ماسوره را ترسیم کنیم. در چنین کاری می‌بایست مشخصات هر دو نمونه را تقلید نمود. ویژگی‌هایی همچون تقارن آیینه‌ای در تقسیمات جزئی و موقعیت کاشی‌ها نسبت به خطوط خاکستری. توجه داشته باشید که نقاط کانونی، مانند گوشه‌ها یا محل تقاطع خطوط خاکستری، همیشه در مرکز ده ضلعی قرار دارند و مسیرهای به هم متصل شده از میان درازای پاپیون‌ها عبور می‌کنند. شکل (b)۲۱ راه حل پیشنهادی من است. این راه حل در برخی از این ضوابط صدق می‌کند. اما از این جهت که برخی از گوشه‌های خطوط خاکستری، آن‌قدر به هم نزدیک می‌باشند که ده ضلعی‌هایی که در مرکز واقع‌اند، بر روی هم هم‌پوشانی داشته و نیز با توجه به تضادی که بین گذر از مسیر میان یک پاپیون و رسیدن به تقارن آیینه‌ای در طرفین، وجود دارد، لذا این طرح معیوب می‌باشد. این تقسیم جزئی اضافی، انجام فرآیند تورم را ممکن می‌سازد. اما احتمالاً کاشی‌کاری‌های حاصل، تنها از لحاظ ریاضی قابل توجه‌اند. ضریب بزرگ مقیاس برای تقسیمات جزئی، یک نرخ رشد زیاد متناظر در تورم را حاصل می‌آورد. پس از دو مرحله تورم یک ده ضلعی، قطعه‌ی حاصل، شامل حدود ۱۵۰۰ کاشی خواهد بود. برای مقایسه، قطعه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۳، شامل حدود ۱۵۰۰ کاشی است. لو و اشتینهارت در بحث از شبه‌تناوب، از نگاره‌های اصفهان بهره می‌گیرند. نظر آنها در مورد لچکی درب امام چنین است [۱۷, p. ۱۱۰۸]:

«موزائیک کاری درب امام در یک چهارچوب متناوب نشانده نشده است و در اصل می‌تواند به یک نگاره‌ی نامتناهی شبه‌تناوبی توسعه یابد.»

به عبارت دیگر، قسمت قابل رؤیت طرح بزرگ مقیاس، به قدری کوچک می‌باشد که هیچ تقارن انتقالی‌ای به راحتی مشخص نیست. لذا این قطعه، می‌تواند بخشی از یک کاشی‌کاری نامتناوب باشد. اگر ما تنها به یک بخش متناهی از هر کاشی‌کاری دسترسی داشته باشیم، نمی‌توان مشخص نمود که آیا این کاشی‌کاری تناوبی است یا نه. این کار با داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ساختار کلی یا موضعی آن، امکان‌پذیر است. اگرچه فقدان تناوب آشکار در طرح درب امام را می‌توان به عنوان نوعی نمایش حساب شده، از سردرگمی هنرمند، روی بخشی از طرح تفسیر کرد، اما به نظر من، آنها احتمالاً نتیجه‌ای هستند از انتخاب‌های متأثر از

۱) زیبایی شناسی ساختمان در طرح،

۲) اندازه‌های نسبی تکه‌های موزائیک در نگاره‌ی کوچک مقیاس و ناحیه‌ی پر شده.

این واقعیت که کاشی‌کاری تناوبی یکسانی مبنای هر سه طرح اصفهان واقع شده‌اند آن را داوطلب مناسبی برای طرح اصلی زیرین قرار می‌دهد. انتقال در یک جهت، در الگوی موجود در مسجد جمعه دیده می‌شود.

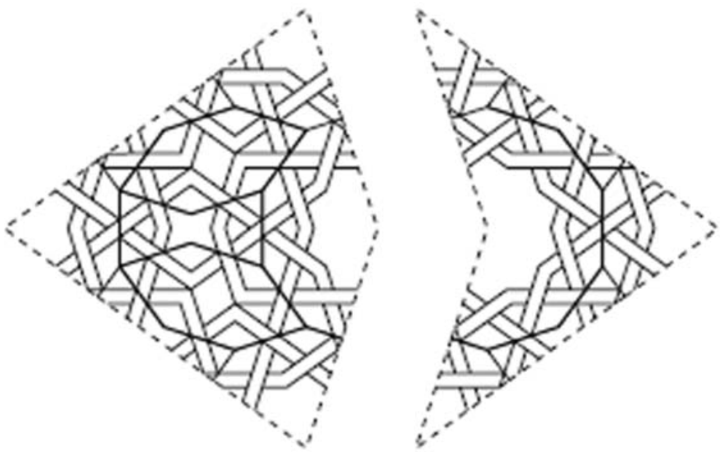
لو و اشتینهارت به این نکته پی بردند که هنرمندان قرون وسطی، یک کاشی بزرگ را به اجزای کوچک‌تر تقسیم نمی‌کردند. بلکه در عوض از قطعه‌ای استفاده می‌نمودند که شامل چند کاشی بزرگ آراسته شده در شکل می‌شد. قطعه‌ای که در شبکه‌ی کوچک مقیاس، قابل رؤیت نبود. سپس چنین توضیح دادند [۱۷, p. ۱۱۰۸]:

« اگر بخواهیم دقیق صحبت کنیم، این انتخاب غیر ضروری و دلخواه، بدین معناست که این کاشی‌کاری خود متشابه نیست، اگرچه کاربرد مداوم قانون تقسیم جزئی، منجر به یک کاشی‌کاری غیرمتناوب می‌شود.»

از این مطلب چنین برداشت می‌شود، که اگر صنعتگران قرون وسطی می‌خواستند، می‌توانستند با یک کاشی بزرگ، کار را شروع کنند و آن را تا زمانی که تمام سطح موجود را پوشش دهد، متورم سازند. اما ما می‌بایست از مشاهده‌ی انتزاعی نوین در کارهای قبلی برحذر باشیم. هیچ مدرکی دال بر آن که صنعتگران قرون وسطی از فرآیند تورم اطلاع داشته‌اند، در دست نیست. موزاییک کاری، تنها یک سطح از تقسیم جزئی را ایجاب می‌کند. آنها شامل یک تقسیم جزئی از ماسوره نمی‌شوند که مستلزم تکرار فرآیند تورم باشد. به نظر من، نگاره‌های اصفهان همچون طرح‌های دوسطحی طومار توپقاپی، بهترین شرح و توضیح برای یک کاربرد از تقسیم جزئی، در تولید یک طرح کوچک مقیاس کامل، از یک طرح بزرگ مقیاس متناوب، می‌باشند. علاوه بر این، به نظر می‌رسد که انتخاب طرح بزرگ مقیاس، به هیچ وجه اختیاری نیست: این طرح، یکی از قدیمی و رایج‌ترین نگاره‌های ستاره‌ی ده ضلعی است و لذا برای ناظران قرون وسطی بسیار آشنا بوده و حتی از یک بخش کوچک، مشخص می‌شده است.

## ۷. ارتباط با کاشی‌کاری پنروز

کاربرد تقسیم جزئی و تورم، در ساخت کاشی‌کاری شبه‌تناوبی، به همراه مراکز دوران غیر مجاز، در دهه‌ی ۱۹۷۰ اهمیت یافت. این امر با بررسی‌های بعدی کشف مجموعه‌های کوچک نامتناوب از کاشی‌ها انجام گرفت. بادبادک و پیکان پنروز معروف‌ترین نمونه است. کاشی‌کاری‌های پنروز دارای مراکز دوران ۵ ــ تا و ۱۰ ــ تا می‌باشند. این واقعیت که برخی از طرح‌های اسلامی نیز این ویژگی‌های تقارنی غیر معمول را دارا هستند، سبب شد تا چندین نفر به بررسی ارتباطات بین این دو بپردازند [۱, ۱۷, ۲۰, ۲۴, ۲۷].

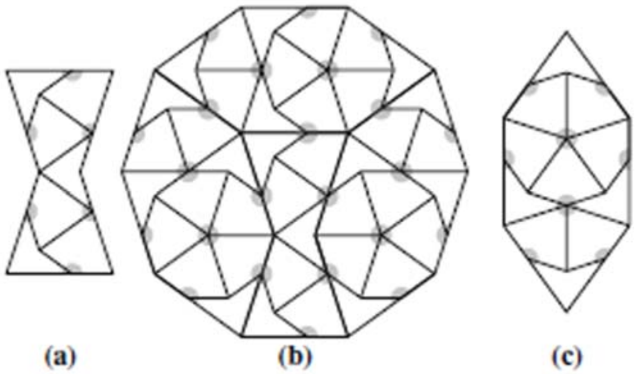


**شکل ۲۳:** تقسیمات جزئی بادبادک و پیکان پنروز.

شکل ۲۳، فرآیند تقسیم جزئی بادبادک و پیکان را به پاپیون، ماسوره و کاشی‌های ده ضلعی نشان می‌دهد. مانند مثال‌های قبلی، اضلاع بادبادک و پیکان، بر خطوط تقارن کاشی‌ها قرار دارند. با استفاده از این جانشینی، هر کاشی‌کاری پنروز می‌تواند به طرحی با سبک اسلامی تبدیل گردد [۲۷]. علاوه بر این، از آن جا که بادبادک و پیکان، یک مجموعه‌ی نامتناوب هستند، چنین طرحی نیز نامتناوب خواهد بود.

انتقال می‌تواند در جهت دیگری نیز انجام گیرد. شکل ۲۴، تقسیمات جزئی سه کاشی اسلامی را به بادبادک‌ها و پیکان‌ها نشان می‌دهد. دو قطعه از آنها برای دانشجویان کاشی‌کاری پنروز آشنا هستند. (a) مؤلفه‌ی بلند پاپیون از حلزون‌های کانونی است و (b) مرکز کاشی‌کاری چرخ و فلک می‌باشد. توجه داشته باشید که (b) از (a) و (c) و به طریق شکل ۷(d) ساخته می‌شود. زمانی که کاشی‌ها همچون یک جورچین کنار هم قرار می‌گیرند، این مطلب که بادبادک‌ها و پیکان‌ها با قوانین انطباقی آورده شده‌اند، مانع از ساخت کاشی‌کاری متناوب خواهد شد. در شکل ۲۴، دو گوشه در

جناح‌های هر پیکان و دو گوشه در خطوط تقارن هر بادبادک، توسط قسمت‌های خاکستری رنگ مشخص گشته‌اند. قانون انطباق آنها بدین ترتیب است که گوشه‌های خاکستری رنگ را تنها می‌توان در کنار سایر گوشه‌های خاکستری قرار داد. به عنوان نمونه، با توجه به این قانون، نمی‌توان پاپیون و ده ضلعی موجود در شکل را در کنار نگاره‌ی ستاره‌ها و بادبادک‌ها جفت کرد.



**شکل ۲۴:** قطعاتی از بادبادک‌ها و پیکان‌های پنروز.

**شکل ۲۵:** تقسیمات جزئی از کاشی‌های نشان‌دار که علامت‌هایش حفظ شده است. ضریب مقیاس برابر با $\frac{1}{۲}(۳+\sqrt{۵}) \simeq ۲.٦۱۸$.

قرار دادن دو پاپیون در گوشه‌های روبروی غیر ممکن است. علائم موجود بر بادبادک‌ها و پیکان‌های شکل ۲۴، باعث شده است که این کاشی‌های مرکب، دارای قانون انطباقی منحصر به خود باشند. هر ضلع از یک کاشی مرکب، دارای یک نقطه‌ی خاکستری رنگ است که طول ضلع را با نسبت طلایی تقسیم می‌کند. ما هر ضلع را توسط یک پیکان که به دو قسمت کوتاه، اشاره دارد مزین ساخته‌ایم. همان‌طور که قبلاً در مثال پنروز توضیح داده شد، در این‌جا به جای تعریف قانون انطباقی در رئوس کاشی‌کاری، قیودی را روی یال‌های کاشی‌کاری اعمال می‌کنیم. با توجه به این علائم و

قانون انطباقی، پاپیون و ماسوره یک مجموعه‌ی نامتناوب هستند. برای اثبات این مطلب توجه داشته باشید که شکل ۲۵، نشان می‌دهد که تمامی صفحه را می‌توان توسط فرآیند تورم، کاشی کرد و نیز هر کاشی‌کاری متناوب توسط پاپیون‌ها و ماسوره‌ها را می‌توان با استفاده از بادبادک‌ها و پیکان‌ها به کاشی‌کاری متناوب تبدیل نمود، در حالی که این کار غیر ممکن است. ماتریس جانشینی برای کاشی‌های نشان‌دار شده، مربوط به دنباله‌ی فیبوناتچی می‌شود، همچنین نسبت ماسوره‌ها به پاپیون‌ها در یک کاشی‌کاری جانشینی نسبت طلایی است. توجه داشته باشید که یک خط افقی از میان یک پاپیون مرکب عبور می‌کند. این خط از درازی پاپیون‌های کوچک و پهنای ماسوره‌های کوچک می‌گذرد. تورم، خط طولانی‌تری را با ویژگی‌های مشابه پدید می‌آورد. همچنین یک کاشی‌کاری جانشینی به صورت تصادفی، شامل این خطوط بلند خواهد بود. خطوط نامتناهی می‌بایست به موازات یکدیگر باشند، به نحوی که یکدیگر را قطع نکنند. این خطوط، قانون جانشینی یک بعدی خود را دارند.

## ۸. نتایج

در بخش‌های قبلی روش‌های مربوط به رسم نگاره‌های هندسی اسلامی را توضیح دادم، همچنین مقدمه‌ی مختصری در باب ریاضیات جدید کاشی‌کاری جانشینی ارائه و نیز برخی از طرح‌های سنتی اسلامی را تحلیل نمودم. نتایجی که در طول دوره‌ی بررسی و بحث به دست آورده‌ام را در این‌جا به طور مجزا و خلاصه ارائه می‌کنم.

۱ ـ امکان ترسیم کاشی‌کاری‌های شبه‌تناوبی، از مجموعه‌ی کاشی‌های اولیه که توسط هنرمندان اسلامی به کار می‌رفته، وجود دارد (شکل ٦). مثال‌های مربوط به آن را می‌توان از طریق کاشی‌کاری جانشینی‌ای که بر اساس فرآیند تورم ایجاد شده است و یا با استفاده از قانون انطباقی کاشی‌های نشان‌دار، تولید کرد.

۲ ـ هنرمندان اسلامی برای ایجاد طرح‌های سلسله مراتبی، از تقسیم جزئی بهره می‌گرفتند. مثال‌های موجود در طومار توپقاپی، شیوه‌ی این کار را بیان می‌کند. همچنین سه طرح، در بناهای اصفهان، می‌تواند این روش را توضیح دهد. در واقع نمونه‌ی اولیه‌ی کاشی‌های آنها، از لحاظ قابلیت ایجاد تقسیمات جزئی خودشان به روش‌های بسیار، قابل توجه‌اند.

۳ ـ هیچ دلیلی وجود ندارد که هنرمندان اسلامی فرآیند تقسیم جزئی را به صورت مکرر انجام می‌داده‌اند. تمامی طرح‌هایی که من از آنها اطلاع دارم، تنها دارای دو سطح هستند. این مطلب تا حدی یک موضوع کاربردی است: ضریب مقیاس بین طرح‌های کوچک مقیاس و بزرگ مقیاس معمولاً بزرگ است و ناحیه‌ی مربوط به طرح، نسبتاً کوچک. تقسیم جزئی به کار رفته در طومار توپقاپی تسلسل و تکرار را غیر ممکن می‌سازد، چرا که نسخه‌های ترکیبی پنج ضلعی و پاپیون وجود ندارد.

۴ ـ شاهدی دال بر استفاده‌ی هنرمندان اسلامی از قوانین انطباقی موجود نیست. میله‌های امان، نزدیک‌ترین مورد برای تزئین می‌باشند که می‌توانند برای قوت بخشیدن به پدیده‌ی غیرتناوبی، به

کار رفته باشند. خطوط مشابهی که در برخی از طرح‌ها یافت می‌شوند، محصول ساخت هستند و نه مربوط به ابتدای فرآیند طراحی. اگرچه این طرح‌ها ممکن است از این لحاظ که این ویژگی جذاب بوده است، انتخاب شده باشند.

۵ ـ طرح‌های تحلیل شده در این مقاله، این امر که هنرمندان اسلامی از فرآیندی اطلاع داشته‌اند که می‌تواند طرح‌های شبه‌تناوبی ایجاد کند را اثبات نمی‌کند. آنها طرح‌هایی متناوب هستند که توسط انعکاس اضلاع یک مستطیل ایجاد می‌شوند و یا طرح‌های بزرگی با تقارن شعاعی. طرح‌های چندسطحی، سلسله مراتبی‌اند ولی با مقیاس پایا نیستند.

در این مقاله من بر روی طرح‌هایی با تقارن موضعی ۵ ـ تایی متمرکز شدم. در اسپانیا و مراکش طرح‌های مشابهی با تقارن موضعی ۸ ـ تایی وجود دارد. از جمله برخی طرح‌های ظریف دوسطحی در Patio de las Doncellas در آلکازار سویل ـ عکس‌هایش را می‌توانید در [۲۲] مشاهده نمایید. هندسه‌ی موجود در شبکه‌های چندضلعی زیرین این طرح‌ها بر مبنای سیستم تناسبات $\sqrt{۲}$ نهاده شده است و نه بر مبنای نسبت طلایی. گاهی اوقات، نقشه‌های مقرنس‌ها (پیش‌آمدگی سقف‌ها، که توسط روی هم انباشتن واحدها، در ردیف‌هایی ساخته می‌شوند و به تدریج اندازه‌یشان از حفره‌ی مرکزی، کاهش می‌یابد تا برآمدگی‌ای استالاکتیت[1] مانند پدید آید.)، ویژگی‌های یکسانی را نشان می‌دهند. این شبکه‌ها شباهت بسیار نزدیکی به کاشی‌کاری شبه‌تناوبی امان ـ بنکر[2] دارند، که از مربع‌ها و لوزی $۱۳۵^\circ - ۴۵^\circ$ تشکیل شده‌اند [۳۳]. این کاشی‌کاری، کاشی‌کاری جانشینی دیگری است که می‌تواند توسط تقسیم جزئی و تورم ایجاد شده باشد. کاشی‌ها می‌توانند با پاره‌خط‌هایی مزین شده باشند تا میله‌های امان را حاصل آورند. مشابه ادعاهایی که در این مقاله بررسی شد، نتایجی برای برخی از طرح‌های اسلامی ۸ ـ تایی به دست آمده است [۲۳ ,۲۲ ,٦ ,۲].

از نظر من به احتمال بسیار زیاد، علاقه‌ی هنرمندان اسلامی به تقسیم جزئی، به منظور ساخت طرح‌های چندسطحی بوده است. مسلماً هنرمندان اسلامی با ایجاد طرح‌ها، با استفاده از انعکاس، دوران و انتقال، آشنا بوده‌اند تا این که بخواهند یک الگو را تکرار کنند. احتمالاً آنها، به صورت ذاتی نسبت به محدودیت بلورشناسی آگاهی داشته‌اند و نیز به طور حسی به این نکته واقف بوده‌اند که مراکز دوران ۱۰ ـ تایی و ۵ ـ تایی، تا حدی با خاصیت تناوبی بودن ناسازگار است. مسلماً آنها ابراز ساخت طرح‌های شبه تناوبی را در اختیار داشته‌اند، اما به لحاظ نظری، چهارچوب دانستن احتمال یا اهمیت چنین چیزی را در دست نداشته‌اند.

## منابع


[1] M. Arik and M. Sancak, "Turkish-Islamic art and Penrose tilings", *Balkan Physics Letters* **15** (1 Jul 2007) 1-12.


1) stalactite 2) Amman-Beenker

[2] J. Bonner, "Three traditions of self-similarity in fourteenth and fifteenth century Islamic geometric ornament", *Proc. ISAMA/Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (Granada, 2003), eds. R. Sarhangi and N. Friedman, 2003, pp. 1-12.

[3] J. Bonner, *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Derivation,* unpublished manuscript.

[4] J. Bourgoin, *Les Element de I'Art Arabe: Le Trait des Entrelacs, Firmin-Didot*, 1879, Plates reprinted in *Arabic Geometric Pattern and Design,* Dover Publications, 1973.

[5] J. -M. Castera, *Arabesques: Art Decoratif au Maroc,* ACR Edition, 1996.

[6] J. M. Castera, "Zellijs, muqarnas and quasicrystals", *Proc. ISAMA,* (San Sebastian, 1999), eds. N. Friedman and J. Barrallo, 1999, pp. 99-104.

[7] G. M. Fleurent, "Pentagon and decagon designs in Islamic art", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 263-281.

[8] B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns,* W. H. Freeman, 1987.

[9] E. H. Hankin, "On some discoveries of the methods of design employed in Mohammedan art", *J. Society of Arts* **53** (1905) 461-477.

[10] E. H. Hankin, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art,* Memoirs of the Archaeological Society of India, no 15, Government of India, 1925.

[11] E. H. Hankin, "Examples of methods of drawing geometrical arabesque patterns", *Math. Gazette* **12** (1925) 370-373.

[12] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs II", *Math. Gazette* **18** (1934) 165-168.

[13] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs III", *Math. Gazette* **20** (1936) 318-319.

[14] C. S. Kaplan, "Computer generated Islamic star patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science,* (Kansas, 2000), ed. R. Sarhangi, 2000, pp. 105-112.

[15] C. S. Kaplan, "Islamic star patterns from polygons in contact", *Graphics Interface* 2005, ACM International Conference Proceeding Series **112**, 2005, pp. 177-186.

[16] A. J. Lee, "Islamic star patterns", *Muqarnas IV: An Annual on Islamic Art and Architecture,* ed. O. Grabar, Leiden, 1987, pp. 182-197.

[17] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, "Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **315** (23 Feb 2007) 1106-1110.

[18] P. J. Lu and P. J. Steinhardt,"Response to Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318**(30 Nov 2007) 1383.

[19] F. Lunnon and P. Pleasants, "Quasicrystallographic tilings", *J. Math. Pures et Appliques* **66** (1987) 217-263.

[20] E. Makovicky, "800-year old pentagonal tiling from Maragha, Iran, and the new varieties of aperiodic tiling it inspired", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 67-86.

[21] E. Makovicky, "Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318** (30 Nov 2007) 1383.

[22] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "Mirador de Lindaraja: Islamic ornamental patterns based on quasi-periodic octagonal lattices in Alhambra, Granada, and Alcazar, Sevilla, Spain", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **19** (1996) 1-26.

[23] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "The stalactite dome of the Sala de Dos Hermanas-an octagonal tiling?", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **24** (2001) 1-21.

[24] E. Makovicky, F. Rull Perez and P. Fenoll Hach-Ali, "Decagonal patterns in the Islamic ornamental art of Spain and Morocco", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **21** (1998) 107-127.

[25] G. Necipoglu, *The Topkapi Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture,* Getty Center Publication, 1995.

[26] J. Rigby, "A Turkish interlacing pattern and the golden ratio", *Mathematics in School* **34** no 1 (2005) 16-24.

[27] J. Rigby, "Creating Penrose-type Islamic interlacing patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (London, 2006), eds. R. Sarhangi and J. Sharp, 2006, pp. 41-48.

[28] F. Rull Perez, "La nocion de cuasi-cristal a traves de los mosaicos arabes", Boletin Sociedad Espanola Mineralogia **10** (1987) 291-298.

[29] P. W. Saltzman, "Quasi-periodicity in Islamic ornamental design", *Nexus VII: Architecture and Mathematics*, ed. K. Williams, 2008, pp. 153-168.

[30] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry,* Cambridge Univ. Press, 1995.

[31] M. Senechal and J. Taylor,"Quasicrystals: The view from Les Houches", *Math. Intelligencer* **12** no 2 (1990) 54-64.

## منابع اینترنتی

[32] ArchNet. Library of digital images of Islamic architecture, http://archnet.org/library/images/

[33] E. Harriss and D. Frettloh, *Tilings Encyclopedia*, http:// tilings.math.uni-bielefeld.de/

[34] C. S. Kaplan, taprats, computer-generated Islamic star Patterns, http:// www.cgl.uwaterloo.ca/csk/washington/taprats/

[35] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, Supporting online material for [17], http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/315/5815/1106/DC1

[36] D. Wade, *Pattern in Islamic Art: The Wade Photo-Archive*, http://www.patterninislamicart.com/

مترجم: مریم‌السادات فلسفی، m.s.falsafi@gmail.com
خانه ریاضیات اصفهان و دانشگاه اصفهان
مریم جمالی گندمانی، maryam_jamali61@yahoo.com
دبیر آموزش و پرورش

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۴۷ تا ۶۷

# گنجایش همتافته و ارتباط آن با مدارهای بسته

محمد شفیعی

چکیده

در این مقاله پس از معرفی گنجایش همتافته و ارائهٔ چند نمونه از آن، ارتباط آن با وجود مدارهای بسته روی ابررویه‌های یک خمینه همتافته بررسی می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** خمینه همتافته، گنجایش همتافته، مدار بسته.

## ۱ مقدمه

یک خمینه همتافته $(M,\omega)$ عبارت است از یک خمینه هموار $M$ همراه با ۲ ـ فرم بسته $\omega$ که به مفهوم زیر ناتبهگون نیز هست

$$\iota_X\omega = \circ \Longrightarrow X = \circ, \qquad X \in TM.$$

چون $\omega$ یک ۲ ـ فرم ناتبهگون است، $M$ از بعد زوج بوده و جهت‌پذیر است. در حقیقت اگر خمینه از بعد $۲m$ باشد $\omega^m = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ یک فرم حجم بر $M$ است.
بارزترین نمونه از خمینه‌های همتافته، فضاهای اقلیدسی $\mathbf{R}^{۲m}$ با فرم همتافته استاندارد $\omega_\circ = \sum\limits_{i=۱}^{m} dx_i \wedge dy_i$ است که در آن $x_۱, y_۱, \ldots, x_m, y_m$ مختصات $\mathbf{R}^{۲m}$ را نمایش می‌دهد. اگر $M$ یک خمینه هموار دلخواه باشد، آنگاه $(T^*M,\omega)$ یک نمونهٔ مهم دیگری از خمینه‌های همتافته است که در آن $\omega = -d\lambda$ و $\lambda$ ۱ ــ فرم متعارف روی $T^*M$ است. فضاهای افکنشی مختلط $\mathbb{C}P^m$ و به طور کلی خمینه‌های کیلر همراه با ۲ ـ فرم کیلر نیز رده مهمی از خمینه‌های همتافته را تشکیل می‌دهد.

دو قضیه مهم از داربو[1] و گروموف[2] نقش مهمی در شکل‌گیری هندسه همتافته (به عبارتی توپولوژی همتافته) داشته است. بنا بر قضیه داربو، هر دو خمینه همتافته از بعد یکسان، به طور موضعی هم ارز است. به گونه‌ای دقیق‌تر

**قضیه ۱.۱.** (قضیه داربو). فرض کنید $(M,\omega)$ یک خمینهٔ همتافته از بعد $2m$ باشد. برای هر $p \in M$ نقشه $(U,\eta)$ حول $p$ وجود دارد به گونه‌ای که $\omega = \eta^*\omega_0$ که در آن $\omega_0$ فرم همتافته استاندارد روی $\mathbf{R}^{2m}$ است.

داربو این حکم مهم را در اواخر قرن نوزدهم ثابت نموده است و این در حالی است که هندسه همتافته در اواخر قرن بیستم به عنوان شاخه‌ای مهم از هندسه مورد توجه واقع شده است. شاید بتوان دلیل این تأخیر طولانی را در محتوای این قضیه جست. طبق این قضیه، خمینه‌های همتافته بر خلاف خمینه‌های ریمانی، ناورداهای موضعی ندارند. البته دلیل دیگری را نیز می‌توان به آن افزود. این که تا مدت‌ها تصور بر این بود که خمینه همتافته، همان خمینه کیلر است، تا این که نمونه‌های زیادی از خمینه‌های همتافته ارائه شد که کیلر نبود ([۱۰، ۱۱]).

در اواخر دهۀ هشتاد قرن بیستم، گروموف حکم شگفت‌انگیزی را ثابت نمود که پایه هندسه همتافته را بنا نهاد. فرض کنید

$$B^{2m}(r) = \{(x_1, y_1, ..., x_m, y_m) \in R^{2m} : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + y_i^2 \leq r^2\}$$

گوی به مرکز مبدأ و شعاع $r$ و

$$Z^{2m}(R) = \{(x_1, y_1, ..., x_m, y_m) \in R^{2m} : x_1^2 + y_1^2 \leq R^2\}$$

استوانه همتافته به شعاع $R$ باشد. این استوانه بر صفحه همتافته $x_1y_1$ بنا نهاده شده است. از این رو آن را استوانه همتافته می‌نامند.

**تعریف ۲.۱.** اگر $(M_1,\omega_1)$ و $(M_2,\omega_2)$ ، دو خمینهٔ همتافته هم بعد باشند، نشاننده $\varphi : (M_1,\omega_1) \longrightarrow (M_2,\omega_2)$ را همتافته گوییم هرگاه $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ . افزون بر این اگر $\varphi$ وابرریختی[3] باشد، آن را یک وابرریختی همتافته می‌نامند. یک نشاننده همتافته از $M_1$ بتوی $M_2$ را با $M_1 \hookrightarrow M_2$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳.۱.** (قضیه نافشردگی گروموف [۱۲]). گوی $B^{2m}(r)$ را می‌توان با یک نشاننده همتافته در استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ نشاند اگر و تنها اگر $r \leq R$.
این حکم به این دلیل شگفت‌انگیز است که بنا بر آن، اگر $R < r$ آنگاه استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ با وجود حجم نامتناهی، **گنجایش** آن را ندارد که گوی $B^{2m}(r)$ را به طور همتافته در خود جای دهد.

---

1) Darboux 2) Gromov 3) diffeomorphism

این قضیه سرآغاز پرسش‌های عمیق و مفاهیم جدیدی شد که امروزه هندسه همتافته بر آنها بنا شده است. یکی از این پرسش‌ها، پرسش از ماهیت و ابرریختی‌ها و نشانند‌ه‌های همتافته است. هر وابرریختی همتافته، چون ساختار همتافته را نگه می‌دارد، پس حجم را نیز نگه می‌دارد. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ در بعد ۲ چون فرم همتافته، خود فرم حجم نیز هست، وابرریختی‌های حجم نگهدار، همتافته نیز خواهد بود.اما در بعدهای بالاتر، بنا بر قضیه گروموف، ممکن است یک وابرریختی حجم‌نگه‌دار، ساختار همتافته را نگه ندارد. گروموف خود این پرسش را مطرح کرد که چه وقت می‌توان یک خمینه همتافته مفروض را در یک خمینه همتافته دیگر نشاند. با توجه به این گفته‌ها، قطعاً یکی از مانع‌ها، حجم است. اما بنا به قضیه گروموف، حجم تنها مانع نیست. از این رو این قضیه، هوفر[1] و زندر[2] را بر آن داشت که مفهوم گنجایش همتافته را معرفی نمایند.

**تعریف ۴.۱.** فرض کنید $\mathcal{M}$ خانواده‌ای از خمینه‌های همتافته (احتمالا مرزدار) از بعد $2m$ باشد. یک گنجایش همتافته روی $\mathcal{M}$ عبارت است از یک نگاشت $c$ که به هر خمینه همتافته $(M,\omega)\in\mathcal{M}$، یک عدد نامنفی $c(M,\omega)$ یا $\infty$ را وابسته می‌کند به گونه‌ای که:

**الف) یکنوایی:** اگر $(M_i,\omega_i)$ ، $i=1,2$، دو عضو $\mathcal{M}$ بوده و $\varphi: M_1\hookrightarrow M_2$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه $c(M_1,\omega_1)\leq c(M_2,\omega_2)$ .

**ب) همدیسی:** برای هر $(M,\omega)\in\mathcal{M}$ و برای هر عدد حقیقی ناصفر $a$ داشته باشیم

$$c(M,a\omega)=|a|c(M,\omega).$$

**پ) نرمال بودن:**

$$c(B^{2m}(1),\omega_0)=c(Z^{2m}(1),\omega_0)=\pi$$

هوفر و زندر بر اساس ایده‌های گروموف، اولین گنجایش همتافته به نام **پهنای گروموف** را ارائه نمودند. اگر $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته باشد پهنای گروموف آن $c_G(M,\omega)$ به صورت

$$c_G(M,\omega)=\sup\{\pi r^2 : B^{2m}(r)\hookrightarrow M\}$$

تعریف می‌شود (توجه شود که بنا بر قضیه داربو، همواره می‌توان یک گوی $B^{2m}(r)$ با شعاع کوچک $r$ را به طور همتافته در $(M,\omega)$ نشاند). با توجه به تعریف، به سادگی می‌توان دید

$$c_G(B^{2m}(r),\omega_0)=\pi r^2=c_G(Z^{2m}(r),\omega_0).$$

بنابراین می‌توان گفت برای نشاندن همتافته گوی $B^{2m}(r)$ در استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ تنها مانع، پهنای گروموف می‌تواند باشد. آیا می‌توان گفت حجم و پهنای گروموف، تنها مانع‌ها برای نشاندن همتافته هستند؟ پاسخ به این پرسش منفی است [۱۲]. از این رو یافتن مانع‌های جدید، یعنی گنجایش‌های همتافته، به مسأله‌ای مهم تبدیل شد. پس از معرفی پهنای گروموف، هوفر، زندر و اکلند[3] گنجایش‌های دیگری را نیز ساختند [۵، ۶، ۱۸، ۱۹]. امروزه نیز یافتن گنجایش‌های جدید

1) Hofer 2) Zehnder 3) Ekeland

و مطالعه ارتباط بین آنها در هندسه همتافته اهمیت ویژه‌ای دارد. باید توجه داشت که بنا بر تعریف، گنجایش همتافته تحت وابرریختی‌های همتافته ناوردا است. لذا اگرچه خمینه‌های همتافته ناوردای موضعی ندارند ولی ناورداهای سراسری آنها کم نیست. گنجایش‌های همتافته، نه تنها در شناخت توپولوژی خمینه‌های همتافته بلکه گاهی در اثبات وجود مدارهای متناوب در دستگاه‌های دینامیکی و روی ابررویه‌های یک خمینه همتافته نیز سودمند است. برای توضیح بیشتر این مهم، به شرح زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته باشد. چون $\omega$ ناتبهگون است، یک یکسانی بین دو کلاف برداری $TM$ و $T^*M$ القاء می‌کند. لذا، اگر $H: M \longrightarrow \mathbf{R}$ یک نگاشت هموار (همیلتونی) باشد آنگاه $\omega$ یک میدان برداری یکتای $X_H$ به $H$ وابسته می‌کند که $\iota_{X_H} = -dH$ . میدان برداری $X_H$ را میدان همیلتونی و شار آن $\varphi_H^t$ را **شار همیلتونی** می‌گویند. فرض کنید $c$ یک مقدار عادی $H$ و $S = H^{-1}(c)$ یک ابررویه فشرده در $M$ باشد. چون فضای مماس بر $S$ در $x \in S$ همان هسته $dH_x$ است و $dH(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0$ پس $X_H$ بر $S$ مماس است و بنابراین یک میدان برداری تمام بر $S$ است. قضیه‌ای مشهور از پوانکاره به نام قضیه‌ی بازگشتی، حکم می‌کند که تقریباً تمام نقطه‌های $S$ نقطه‌های بازگشتی است؛ یعنی تقریباً برای هر $x \in S$ دنباله‌ی $t_j \uparrow \infty$ وجود دارد که

$$\lim \varphi_H^{t_j}(x) = x.$$

پس طبیعی است که از وجود مدارهای متناوب $X_H$ روی $S$ پرسیده شود.

**پرسش ۱.** آیا ابررویه فشرده $S = H^{-1}(c)$ در $(M,\omega)$ حامل یک مدار متناوب از میدان همیلتونی $X_H$ است؟

این پرسش عمیق، حتی برای حالتی که $S$ در $(\mathbf{R}^{2m},\omega_0)$ است، هنوز به طور کامل پاسخ داده نشده است. باید توجه داشت که وجود مدار متناوب روی $S$ مستقل از انتخاب همیلتونی $H$ برای نمایش $S$ است. در حقیقت، اگر

$$\{x \in M : H(x) = c_0\} = S = \{x \in M : F(x) = c_1\},$$

به سادگی می‌توان دید که $X_H$ مضربی از $X_F$ بوده و بنابراین شار آن نیز بازپرمایشی از شار $X_F$ است. بنابراین مدارهای متناوب آنها یکسان هستند.

ابررویه $S$ و فرم همتافته $\omega$ یک کلاف خطی $L_S$ بر $S$ القاء می‌کند که به کمک آن می‌توان **پرسش ۱** را به گونه‌ای کلی‌تر و مجردتر بیان نمود. چون $S$ نقص بعد ۱ دارد پس برای هر $x \in S$ ، $T_xS$ زیرفضایی از $T_xM$ با نقص بعد ۱ است. پس بعد آن فرد بوده و تحدید $\omega_x$ به $T_xS$ نمی‌تواند ناتبهگون باشد. در حقیقت هسته این تهدید یک بعدی است. بنابراین می‌توان کلاف خطی $L_S$، موسوم به **کلاف هادی** $S$ را به صورت

$$L_S = \{(x,\xi) \in T_xS : \omega_x(\xi,\zeta) = 0, \forall \zeta \in T_xS\}$$

تعریف کرد. اگر $S = H^{-1}(c)$ و $x \in S$ ، به سادگی می‌توان دید $X_H(x) \in L_S(x)$ .

**تعریف ۵.۱.** یک **مدار بسته** (مدار همیلتونی) بر $S$ عبارت است از یک دایره نشانده شده $P$ در $S$ به گونه‌ای که

$$TP = L_S|P.$$

مجموعه همه مدارهای بسته بر $S$ را با $\mathcal{P}(S)$ و مجموعه همه مدارهای بسته بر $S$ که در $S$ انقباض پذیر است را با $\mathcal{P}^\circ(S)$ نمایش می‌دهیم. بنا بر آنچه گفته شد، هر مدار متناوب از $X_H$ یک مدار بسته بر $S$ است. لذا می‌توان پرسش ۱ را چنین مطرح کرد.

**پرسش ۲.** آیا ابررویه فشرده $S$ در $(M, \omega)$ حامل مدار متناوب است؟

این پرسش نیز در حالت کلی بدون پاسخ مانده است و فقط در برخی موارد خاص به آن پاسخ داده شده است [۲، ۱۷، ۱۹، ۸، ۹] در همین ارتباط، در سال ۱۹۷۹ [۳۲] واینشتاین [1] حدس زد که با اعمال شرط‌های بیشتر بر $S$، پرسش بالا همواره پاسخ مثبت دارد. برای بیان حدس واینشتاین به تعریف زیر نیاز است:

**تعریف ۶.۱.** ابررویه فشرده و جهتپذیر $S$ در خمینه همتافته $(M, \omega)$ را **سایاگونه** [2] نامند هرگاه
۱ ـ فرم $\alpha$ بر $S$ وجود داشته باشد که ویژگی‌های زیر درست باشد:
الف) $d\alpha = j^*\omega$ که در آن $j : S \longrightarrow M$ نگاشت شمول است.
ب ) اگر $0 \neq \xi \in L_S$ آنگاه $\alpha(\xi) \neq 0$ .

**گزاره ۷.۱.** [۱۹، ۲۴] ابررویه $S$ در $(M, \omega)$ سایاگونه است اگر و تنها اگر میدان برداری $X$ در همسایگی $U$ از $S$ وجود داشته باشد که

الف) بر $U$، $X$ یک میدان لیوویل باشد یعنی $L_X\omega = \omega$

ب) اگر $x \in S$ آنگاه $T_xM = T_xS \bigoplus < X(x) >$ که در آن $< X(x) >$ زیرفضای تولیدشده توسط $X(x)$ است.

ابررویه $S$ را **سایاگونه کاهش یافته** [3] نامند هرگاه میدان لیوویل $X$ بر $M$ وجود داشته باشد که در شرط «ب» گزاره ۷.۱ نیز صدق کند.

**حدس واینشتاین:** اگر $S$ یک ابررویه سایاگونه در $(M, \omega)$ باشد که اولین گروه کوهومولوژی آن صفر است ($H^1(S) = 0$)، آنگاه $\mathcal{P}(S)$ ناتهی است.

در سال ۱۹۹۰، هوفر و زندر برای اثبات حالت ویژه‌ای از این حدس، نخستین بار سرنوشت مدارهای بسته را با گنجایش‌های همتافته گره زدند. آنها با حذف شرط توپولوژیکی $H^1(S) = 0$ و جایگزین نمودن آن با این شرط که یک همسایگی از $S$، گنجایش هوفر ـ زندر متناهی داشته باشد، این حدس را ثابت نمودند.

---

1) Weinstein 2) contact type 3) restricted contact type

فرض کنید $S = H^{-1}(c)$ یک ابررویه فشرده و منظم در $(M,\omega)$ بوده و $g$ یک متریک ریمانی دلخواه روی $M$ باشد. چون میدان گرادیان $\nabla H$ (نسبت به $g$) در یک همسایگی از $S$ ناصفر است، میدان $X = \frac{\nabla H}{g(\nabla H,\nabla H)}$ را می‌توان در نزدیکی $S$ تعریف کرد. اگر $\psi^t$ شار این میدان باشد، برای هر $x \in S$ داریم $H(\psi^t(x)) = 1 + t$. پس نگاشت $\psi : (x,t) \longmapsto \psi^t(x)$ یک وابرریختی از $S \times (-\epsilon,\epsilon)$ بروی زیرمجموعه بازی مثل $U \subseteq M$ تعریف می‌کند. نگاشت $\psi : S \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow U$ را یک قطور شده[1] $S$ می‌گویند. برای هر $t \in (-\epsilon,\epsilon)$، تصویر $S \times \{t\}$ تحت $\psi$ را با $S_t$ نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۸.۱.** [۱۸] (هوفر ـ زندر) فرض کنید $S = H^{-1}(1)$ یک ابررویه فشرده و منظم از $(M,\omega)$ بوده و $U$ یک همسایگی از $S$ باشد که $C_{HZ}(U,\omega)$ متناهی است. دنباله $t_j \to 1$ از مقادیر عادی $H$ وجود دارد که $X_H$ روی هر ابررویه $S_{t_j}$ یک مدار متناوب دارد.

امروزه حدس واینشتاین برای تمام ابررویه‌های سایاگونه رده‌های خاصی از خمینه‌های همتافته، ثابت شده است [۲، ۷، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۳، ۳۱]. در این مقاله، پس از معرفی چند نمونه از گنجایش‌های همتافته در بخش پایانی چند نتیجه جدید در مورد وجود مدارهای متناوب ارائه می‌شود.

## ۲ گنجایش همتافته

در این بخش افزون بر پهنای گروموف که در مقدمه معرفی شد گنجایش‌های هوفر ــ زندر، گنجایش انرژی جابجایی، گنجایش اکلند ــ هوفر و گنجایش‌های طیفی را نیز معرفی می‌نماییم. اما قبل از آن لازم است چند ویژگی کلی از گنجایش همتافته را به شرح زیر برشماریم.

۱) وجود گنجایش همتافته با قضیه نافشردگی گروموف هم‌ارز است.

۲) هر گنجایش همتافته یک ناوردای همتافته است.

۳) در بعد ۲، گنجایش همتافته همان حجم کل بوده و بنابراین یکتاست.

۴) در بعدهای بزرگتر از ۲، حجم یک گنجایش همتافته نیست.

### ۱.۲ پهنای گروموف

در این زیربخش ابتدا با پذیرش قضیه نافشردگی (که اثباتی بسیار پیچیده دارد) نشان می‌دهیم پهنای گروموف یک گنجایش است و سپس برخی از ویژگی‌های کلی آن بیان می‌شود.

**گزاره ۱.۲.** پهنای گروموف یک گنجایش همتافته است.

اثبات. اگر $\varphi : (B^{2m}(r),\omega_0) \hookrightarrow (M,\omega)$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه $\varphi \circ \psi^{\pm} : (B^{2m}(r\sqrt{|a|}),\omega_0) \hookrightarrow (M,a\omega)$ (بسته به علامت $a$) یک نشاننده همتافته است که در آن

1) thickening

$$\psi^{\pm} : B^{2m}(r\sqrt{|a|}) \longrightarrow B^{2m}(r), \qquad (x,y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{|a|}}(\pm x, y).$$

به طور مشابه اگر $\theta : (B^{2m}(r), \omega_0) \hookrightarrow (M, a\omega)$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه $\theta \circ \eta^{\pm} : (B^{2m}(\frac{r}{\sqrt{|a|}}), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega)$ (بسته به علامت $a$) یک نشاننده همتافته است که در آن

$$\eta^{\pm} : B^{2m}(\frac{r}{\sqrt{|a|}}) \longrightarrow B^{2m}(r), \qquad (x,y) \longmapsto \sqrt{|a|}(\pm x, y).$$

به این ترتیب، خاصیت همدیسی $c_G$ ثابت می‌شود. اگر $B^{2m}(1) \hookrightarrow B^{2m}(r)$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه می‌توان گفت $r \geq 1$. از طرفی نگاشت شمول از $B^{2m}(1)$ بتوی خودش یک نشاننده همتافته است. پس $c_G(B^{2m}(1), \omega_0) = \pi$. همچنین بنا بر قضیه نافشردگی، $B^{2m}(r)$ را می‌توان به طور همتافته در $Z^{2m}(1)$ نشاند هرگاه $r \leq 1$ و نگاشت شمول $B^{2m}(1) \hookrightarrow Z^{2m}(1)$ همتافته است؛ پس $c_G(Z^{2m}(1), \omega_0) = \pi$. بررسی خاصیت یکنوایی نیز سرراست است.

یک نکته مهم در مورد پهنای گروموف آن است که در بین همه گنجایش‌ها، پهنای گروموف کوچکترین است. یعنی برای هر گنجایش $c$ داریم

$$c_G(M, \omega) \leq c(M, \omega). \tag{1.2}$$

این نابرابری مهم، نتیجه مستقیم تعریف پهنای گروموف و تعریف گنجایش همتافته است. برای $r = (r_1, ..., r_m)$ که $0 < r_1 \leq ... \leq r_m$ بیضیگون $E(r)$ و چند دیسکی $P(r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} E(r) &= \{(x_1, y_1, ..., x_m, y_m) \in R^{2m} : \sum_{i=1}^{m} \tfrac{x_i^2 + y_i^2}{r_i^2} \leq 1\}, \\ P(r) &= B^2(r_1) \times ... \times B^2(r_m). \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید

$$c_G(E(r), \omega_0) = \pi r_1^2 = c_G(P(r), \omega_0).$$

فرض کنید $\omega$ فرم کیلر بر $\mathbb{C}P^m$ باشد. با توجه به این که هوفر و وایتربو[1] در [۱۶] نشان دادند $C_{HZ}(\mathbb{C}P^m, \omega) = \pi$ و با توجه به نابرابری ۱.۲ می‌توان گفت $c_G(\mathbb{C}P^m, \omega) \leq \pi$. تساوی در حالت $m = 1$ برقرار است اما در حالت $M > 1$، هنوز مقدار دقیق $c_G(\mathbb{C}P^m, \omega)$ محاسبه نشده است [۲۲]. اخیراً نیز محاسبه‌ی پهنای گروموف برخی از خمینه‌های همتافته، مورد توجه قرار گرفته است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، خواننده را به مرجع‌های [۲۰، ۲۷، ۲۲، ۳۳] ارجاع می‌دهیم.

### ۲.۲. گنجایش هوفر ـ زندر

مجموعه همه نگاشت‌های هموار بر $(M, \omega)$ که تکیه‌گاه آنها فشرده بود و در درون $M \backslash \partial M$ قرار

---

1) Viterbo

دارد را با $\mathcal{H}(M)$ نمایش می‌دهیم.
نگاشت نامنفی $H \in \mathcal{H}(M)$ را ساده می‌نامند و می‌نویسند $H \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ هرگاه
الف) زیرمجموعه‌ی باز و ناتهی $U$ از $M$ وجود داشته باشد که مقدار $H$ بر $U$ ثابت بوده و برابر $\max H$ باشد.
ب) صفر و $\max H$ تنها مقدارهای بحرانی نگاشت $H$ باشند.
مجموعه‌ی همه نگاشت‌های نامنفی $H \in \mathcal{H}(M)$ را که فقط در شرط (الف) صدق می‌کنند، با $\mathcal{F}(M)$ نمایش می‌دهیم.
نگاشت $H \in \mathcal{H}(M)$ را $HZ$ ــ سازگار (به ترتیب $HZ^\circ$ ــ سازگار) گوییم هرگاه شار $\varphi_H^t$ مدار متناوب (به ترتیب مدار متناوب انقباض پذیر) ناثابتی با دوره تناوب $T$، $T \leq ۱$ نداشته باشد. برای زیر مجموعه $A$ از $M$، مجموعه همهٔ نگاشت‌های ساده و $HZ$ــ سازگار (به ترتیب $HZ^\circ$ــ سازگار) را با $\mathcal{S}_{HZ}(A)$ (به ترتیب $\mathcal{S}_{HZ^\circ}(A)$) نمایش می‌دهیم. به طور مشابه، مجموعه‌های $\mathcal{F}_{HZ}(A)$ و $\mathcal{F}_{HZ^\circ}(A)$ تعریف می‌شوند. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
c_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{S}_{HZ}(A)\}, \\
c^\circ_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{S}_{HZ^\circ}(A)\}, \\
C_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{F}_{HZ}(A)\}, \\
C^\circ_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{F}_{HZ^\circ}(A)\}.
\end{aligned}$$

در [۱۸، ۱۹، ۲۳، ۲۹] نشان داده شده است که $c_{HZ}$ ، $c^\circ_{HZ}$ ، $C_{HZ}$، $C^\circ_{HZ}$ همگی گنجایش همتافته هستند. این گنجایش‌ها به گنجایش‌های هوفر ــ زندر معروف هستند. با توجه به تعریف، نامساوی‌های زیر بین این گنجایش‌ها برقرار است.

$$c_{HZ}(A) \leq c^\circ_{HZ}(A), \qquad C_{HZ}(A) \leq C^\circ_{HZ}(A) \tag{۲.۲}$$

$$c_{HZ}(A) \leq C_{HZ}(A), \qquad c^o_{HZ}(A) \leq C^\circ_{HZ}(A). \tag{۳.۲}$$

در [۱۸] نشان داده شده است که برای زیرمجموعه‌های محدب $\mathbf{R}^{۲m}$ در ۳.۲ برابری برقرار است. اما تاکنون نمونه‌ای ارائه نشده است که برای آن نابرابری اکید برقرار باشد. برای زیرمجموعه‌های محدب $E(r)$ و $P(r)$ مقدار تمام این گنجایش‌ها $\pi r_۱^۲$ است.

**تبصره ۱.** نکته مهم در مورد گنجایش $C_{HZ}$ (همچنین $C^\circ_{HZ}$ ) آن است که اگر $C_{HZ}(A) < \infty$ ، $H \in \mathcal{F}(A)$ و $\max H > C_{HZ}(A)$ آنگاه $H$ عضوی از $\mathcal{F}_{\mathcal{H}Z}(\mathcal{A})$ نبوده و بنابراین $\varphi_H^t$ دارای دست کم یک مدار متناوب ناثابت است.

### ۳.۲. انرژی جابجایی

فرض کنید $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته و $H : [0,1] \times M \longrightarrow \mathbf{R}$ یک نگاشت هموار با تکیه‌گاه فشرده باشد. اگر $\varphi_H^t$ شار میدان برداری وابسته به زمان $X_H$ باشد که از رابطه $\omega(X_H,.) = -dH$ تعریف می‌شود، آنگاه هر یک از وابرریختی‌های $\varphi_H^t$ را یک وابرریختی همیلتونی می‌نامیم. توجه کنید که چون تکیه‌گاه $H$ فشرده است، پس $\varphi_H^t$ بر تمام $M$ تعریف شده و تکیه‌گاه فشرده دارد؛ یعنی در خارج از یک مجموعه فشرده، همانی است. برای نگاشت $H$ قرار می‌دهیم

$$||H|| = \int_0^1 (\sup_{x\in M} H(t,x) - \inf_{x\in M} H(t,x))dt,$$

و به کمک آن انرژی یک وابرریختی همیلتونی $\varphi$ چنین تعریف می‌شود

$$E(\varphi) = \inf\{||H|| : \varphi = \varphi_H^1\}.$$

اکنون انرژی جابجایی یک زیرمجموعه فشرده $K$ از $M$ را به صورت

$$e(K,M) = \inf\{E(\varphi) : \varphi(K) \cap K = \emptyset\},$$

و انرژی یک زیرمجموعه دلخواه $A$ از $M$ به صورت

$$e(A,M) = \sup e(K,M)$$

تعریف می‌شود که در آن سوپریمم بر زیرمجموعه‌های فشرده مشمول در $A$ گرفته شده است. هوفر در [۱۳] نشان داد که $e$ برای زیرمجموعه‌های باز $(\mathbf{R}^{2m},\omega_0)$ یک گنجایش همتافته است. سپس مک داف[1] و لالنده[2] [۲۲] این مهم را برای زیرمجموعه‌های باز یک خمینه همتافته دلخواه ثابت نمودند.

یک ویژگی مهم انرژی جابجایی ویژگی زیر است که توسط هوفر و زندر ثابت شده است. اگر $U$ زیرمجموعه بازی از $M$ باشد

$$C_{HZ}(U) \leq e(M,\omega). \qquad (۴.۲)$$

**تعریف ۲.۲.** زیرمجموعه $A$ از $(M,\omega)$ را جابجاپذیر[3] نامند هرگاه وابرریختی همیلتونی $\varphi$ وجود داشته باشد که $\varphi(A) \cap A = \emptyset$ .

نابرابری ۴.۲ و قضیه هوفر ـ زندر نشان می‌دهند که اگر $U$ جابجاپذیر باشد آنگاه تقریباً هر رویه انرژی از همیلتونی $H : M \longrightarrow \mathbf{R}$ که مشمول در $U$ است، دست کم یک مدار بسته دارد.

### ۴.۲. گنجایش اکلند ـ هوفر

در [۵] و سپس در [٦]، اکلند و هوفر دنباله‌ای از گنجایش‌های همتافته را بر زیرمجموعه‌های

1) MacDuff 2) Lalonde 3) displaceable

$(\mathbf{R}^{۲m},\omega_\circ)$ معرفی نمودند.
در این زیربخش، اولین گنجایش از این دنباله را که آسان‌تر است معرفی می‌کنیم. قبل از آن لازم است چند نماد و مفهوم که در بخش بعد نیز مورد نیاز است معرفی شود.

برای $A \subseteq M$ و $I=[\circ,۱]$، مجموعه همه‌ی نگاشت‌های هموار $H: I\times A \longrightarrow \mathbf{R}$ که تکیه‌گاه آنها فشرده بوده و مشمول در $I\times intA$ است را با $\mathcal{H}(I\times A)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص $A=M$، این مجموعه را به طور ساده با $\mathcal{H}$ نمایش خواهیم داد. برای $H\in\mathcal{H}$ ، $\mathcal{P}^\circ(H)$ مجموعه همه‌ی مدارهای متناوب از $\varphi_H^t$ با دوره تناوب ۱ را که انقباض پذیر هستند، نمایش می‌دهد. برای $x\in\mathcal{P}^\circ(H)$ فرض کنید $\mathcal{D}(x)$ مجموعه همه‌ی گسترش‌های $\overline{x}: D^۲=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq ۱\}\longrightarrow M$ باشد. برای $\overline{x}\in\mathcal{D}(x)$ قرار می‌هیم $\int_{\overline{x}}\omega=\int_{D^۲}(\overline{x})^*\omega$ و $H\in\mathcal{H}$ عملگر کنش $\mathcal{A}_H$ روی $\overline{\mathcal{P}}^\circ(H)=\{(x,\overline{x}):x\in\mathcal{P}^\circ(H),\overline{x}\in\mathcal{D}(x)\}$ به صورت

$$\mathcal{A}_H(x)=-\int_{\overline{x}}\omega+\int_\circ^۱ H(t,x(t))dt \tag{۵.۲}$$

تعریف می‌شود.
فرض کنید $E$ مجموعه همه‌ی نگاشت‌های $x\in L^۲((\circ,۱),\mathbf{R}^{۲m})$ باشد که سری فوریه آنها

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} x_k \exp ۲k\pi i t,\quad x_k\in\mathbf{R}^{۲m}$$

در نابرابری $\sum|k||x_k|^۲<\infty$ صدق کند. اگر $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی بر $\mathbf{R}^{۲m}$ باشد، ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ را بر $E$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x,y)=\langle x_\circ,y_\circ\rangle+۲\pi\sum|k|\langle x_k,y_k\rangle.$$

با این ضرب داخلی، $E$ یک فضای هیلبرت است. فضای $E$ را می‌توان به سه زیرفضای دوبدو متعامد زیر تجزیه نمود.

$$\begin{aligned}
E^+ &= \{x: x_k=\circ, k=\circ,-۱,-۲,\ldots\}\\
E^\circ &= \{x: x_k=\circ, k\neq\circ\}\\
E^- &= \{x: x_k=\circ, k=\circ,۱,۲,\ldots\}.
\end{aligned}$$

افکنش $x\in E$ بر این زیرفضاها را به ترتیب با $x^+$ ، $x^\circ$ و $x^-$ نمایش می‌دهیم.
اکنون فرض کنید $M=\mathbf{R}^{۲m}$ و نگاشت $H\in\mathcal{H}$ را در نظر بگیرید. اگر $x\in\mathcal{P}^\circ(H)$ و $\overline{x}$ گسترشی از $x$ به سراسر دیسک واحد باشد، آنگاه چون $\omega_\circ$ دقیق است پس $\int_{\overline{x}}\omega_\circ$ مستقل از $\overline{x}$ است. بنابراین می‌توان $\mathcal{A}_H$ را بر $\mathcal{P}^\circ(H)$ به صورت ۵.۲ تعریف کرد. عملگر کنش $\mathcal{A}_H:\mathcal{P}^\circ(H)\longrightarrow\mathbf{R}$ را با ضابطه

$$\mathcal{A}_H(x)=a(x)+b(x),\qquad x\in E$$

می‌توان به $E$ گسترش داد که در آن $\frac{\|x^+\|^2-\|x^-\|^2}{2} = -\int_{\overline{x}}\omega_0 = a(x)$ و $b(x) = \int_0^1 H(t,x(t))dt$. نگاشت $\mathcal{A}_H : E \longrightarrow \mathbf{R}$ مشتق پذیر بوده و گرادیان آن عبارت است از

$$\nabla\mathcal{A}_H(x) = x^+ + x^- + \nabla b(x).$$

با توجه به ساختار شار این میدان گرادیان، گروه $\Gamma$ متشکل از همه همسانریختی‌های $h : E \longrightarrow E$ را با ویژگی‌های زیر در نظر می‌گیریم:

الف) $h$ و $h^{-1}$ هر دو زیرمجموعه‌های کراندار از $E$ را به زیرمجموعه‌های کراندار می‌نگارند.

ب) نگاشت‌های پیوسته $\gamma^{\pm} : E \longrightarrow \mathbf{R}$ و $k : E \longrightarrow E$ وجود دارند که زیرمجموعه‌های کراندار از $E$ را به زیرمجموعه‌های پیش فشرده می‌نگارند. افزون بر این $\rho = \rho(h)$ وجود دارد که برای هر $x \in E$ $\|x\| \geq \rho$ داریم $\gamma^{\pm}(x) = 0$، $k(x) = 0$ و

$$h(x) = e^{\gamma^+(x)}x^+ + x^\circ + e^{\gamma^-(x)} + k(x), \quad \forall x \in E.$$

قرار می‌دهیم

$$\sigma_{HZ}(H) = \sup\inf \mathcal{A}_H(x) \tag{٦.٢}$$

که در آن سوپریمم بر $\Gamma$ و اینفیمم بر $S^+ = \{x \in E^+ : \|x\| = 1\}$ گرفته شده است. اکلند و هوفر به کمک این حقیقت که $h(E^+) \cap h(E^- \bigoplus E^\circ) \neq \emptyset$ نشان دادند $\sigma_{HZ}(H)$ متناهی است. اکنون زیرمجموعه کراندار $B$ از $\mathbf{R}^{2m}$ را درنظر گرفته و مجموعه همه‌ی نگاشت‌های $H \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^{2m})$ را که در یک همسایگی از $cl(B)$ صفر می‌شوند با $\mathcal{F}(B)$ نمایش می‌دهیم. بگیرید:

$$c_{EH}(B) = \inf\{\sigma_{HZ}(H) : H \in \mathcal{F}(B).$$

سرانجام برای زیرمجموعه دلخواه $A \subseteq \mathbf{R}^{2m}$ تعریف می‌کنیم

$$c_{EZ}(A) = \sup c_{EH}(B),$$

که سوپریمم بر زیرمجموعه‌های کراندار مشمول در $A$ گرفته شده است. اکلند و هوفر در [۵] نشان دادند $c_{EH}$ یک گنجایش همتافته است.

## ۵.۲ گنجایش‌های طیفی

دوباره $(M,\omega)$ را یک خمینه همتافته دلخواه گرفته و برای $H \in \mathcal{H}$ عملگر کنش $\mathcal{A}_H$ را در نظر بگیرید. مجموعه

$$\Sigma^\circ(H) = \{\mathcal{A}_H(\overline{x}) : (x,\overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}'(\mathcal{H})\}$$

را طیف کنش[۱] می‌نامند. اگر $a \in \Sigma^\circ(H)$ آنگاه $a + \omega(\pi_2(M))$ مشمول در $\Sigma^\circ(H)$ است.

1) action spectrum

لذا $\Sigma^\circ(H)$ می‌تواند در $\mathbf{R}$ چگال باشد (مثلاً اگر $\omega(\pi_2(M))$ چگال باشد). نکته مهم در مورد $\Sigma^\circ(H)$ این است که اندازه لبگ آن صفر است [۱۹]. برای $H\in\mathcal{H}$ قرار می‌دهیم

$$E^+(H)=\int_0^1 \max_{x\in M} H(t,x)dt$$

اگر $H,K\in\mathcal{H}$ ، به سادگی دیده می‌شود ترکیب $\varphi_H^1\circ\varphi_K^1$ توسط تابع زیر تولید می‌شود

$$(H\divideontimes K)(t,x)=H(t,x)+K(t,(\varphi_H^t)^{-1}(x)).$$

**تعریف ۳.۲.** یک کنش گزینشگر ضعیف[1] روی $(M,\omega)$ عبارت است از یک نگاشت $\sigma:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbf{R}$ که برای هر $H,K\in\mathcal{H}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱− $\sigma(H)\in\Sigma^\circ(H)$

۲− اگر $0\neq H\in\mathcal{S}(M)$ آنگاه $\sigma(H)>0$

۳− $\sigma(H)\leq E^+(H)$

۴− $\sigma$ نسبت به توپولوژی $C^\circ$ روی $\mathcal{H}$ پیوست باشد

۵− $\sigma(H\divideontimes K)\leq\sigma(H)+E^+(K)$

کنش گزینشگر ضعیف $\sigma$ را یک کنش گزینشگر گوییم هرگاه

۶− اگر $H\in\mathcal{S}^\circ_{HZ}(M)$ آنگاه $\sigma(H)=\max H$

**مثال ۱.** $\sigma$ که در بخش قبل (۶.۲) معرفی گردید یک کنش گزینشگر برای $(R^{2m},\omega_0)$ است.

برای آشنایی با نمونه‌های دیگری از کنش گزینشگر، می‌توان به منابع [۲۵، ۲۶، ۲۹] مراجعه کرد.

**تعریف ۴.۲.** خمینه همتافته $(M,\omega)$ را به طور ضعیف دقیق[2] هرگاه $[\omega]$ روی $\pi_2(M)$ صفر شود.

**لم ۵.۲.** اگر $(M,\omega)$ به طور ضعیف دقیق باشد آنگاه هر کنش گزینشگر ضعیف برای آن، یک کنش گزینشگر است.

اثبات. تابع $H\in\mathcal{S}^\circ_{HZ}(M)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این که $H$ مستقل از زمان است و $\varphi_H^t$ نیز هیچ مدار متناوب ناثابت و انقباض پذیر، با دوره تناوب ۱ ندارد، پس $\mathcal{P}^\circ(H)$ فقط شامل تمام مدارهای ثابت $x(t)=x$ است که $h$ در $x$ بیشترین و یا کمترین مقدار خود را دارد. لذا با توجه به فرض

$$\mathcal{A}_H(\overline{x})=-\int_{\overline{x}}\omega+\int_0^1 H(t,x(t))dt=0+H(t,x)=0 \quad \text{یا} \quad \max H.$$

---

1) weak action selector  2) weakly exact

پس $\Sigma^\circ(H) = \{\circ, \max H\}$ . اکنون شرط‌های اول و دوم تعریف نشان می‌دهند $\sigma(H) = \max H$. $\square$

**تعریف ۶.۲.** ([۳۱]) فرض کنید $\sigma$ یک کنش گزینشگر ضعیف برای $(M,\omega)$ باشد. برای $A \subseteq M$ گنجایش‌های طیفی $c_\sigma$ و $c^\sigma$ چنین تعریف می‌شود

$$
\begin{aligned}
c_\sigma(A,M) &= \sup\{\sigma(H) : H \in \mathcal{S}(A)\},\\
c^\sigma(A,M) &= \sup\{\sigma(H) : H \in \mathcal{H}(I \times A)\}.
\end{aligned}
$$

بنا بر تعریف، آشکار است که $c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M)$ . قضیه زیر ارتباط بین گنجایش‌های معرفی شده را بیشتر نمایان می‌کند.

**قضیه ۷.۲.** ([۸]) $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته و $A$ زیرمجموعه‌ای از $M$ است.

الف) اگر $\sigma$ یک کنش گزینشگر برای $(M,\omega)$ باشد،

$$c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M) \leq e(A,M).$$

ب) اگر $\sigma$ یک کنش گزینشگر باشد، $c^\circ_{HZ}(A,M) \leq c_\sigma(A,M)$ و لذا

$$c_G(A) \leq c_{HZ}(A) \leq c^\circ_{HZ}(A,M) \leq c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M) \leq e(A,M).$$

برای اثبات این قضیه ابتدا دو گزاره زیر ثابت می‌شود.

**گزاره ۸.۲.** اگر $\tau : [\circ,\text{۱}] \longrightarrow [\circ,\text{۱}]$ تابع هموار با شرایط $\tau(\circ) = \circ, \tau(\text{۱}) = \text{۱}$ بوده و برای $H \in \mathcal{H}$ تابع $H^\tau$ به صورت $H^\tau(t,x) = \tau'(t)H(\tau(t),x)$ تعریف شود آنگاه $\sigma(H^\tau) = \sigma(H)$.

اثبات. چون $H^\tau$ مضربی از $H$ است پس شار همیلتونی $\varphi^t_{H^\tau}$ بازپرمایشی از شار همیلتونی $\varphi^t_H$ است

$$\varphi^t_{H^\tau}(x) = \varphi^{\tau(t)}_H(x), \qquad x \in M.$$

بنابراین با توجه به شرط‌های آغازی $\tau$، مدار $x^\tau \in \mathcal{P}^\circ(H^\tau)$ با مدار $x \in \mathcal{P}^\circ(H)$ متناظر می‌شود که در آن

$$x^\tau(t) = x(\tau(t)).$$

افزون بر این با کمک یک تغییر متغیر داریم

$$\int_\circ^{\text{۱}} H^\tau(t,x^\tau(t))dt = \int_\circ^{\text{۱}} \tau'(t)H(\tau(t),x(\tau(t)))dt = \int_\circ^{\text{۱}} H(t,x(t))dt.$$

همچنین چون تصویر $x^\tau$ و مدار متناظر آن $x$ در $M$ یکسان است، پس $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(x^\tau)$. بنابراین $\mathcal{A}_{H^\tau}(\overline{x}^\tau) = \mathcal{A}_H(\overline{x})$ و لذا $\Sigma^\circ(H) = \Sigma^\circ(H^\tau)$ . اکنون برای $s \in [\circ,\text{۱}]$ نگاشت هموار

$\tau_s : [\circ, \text{۱}] \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ را با ضابطه $\tau_s(t) = (\text{۱} - s)t + s\tau(t)$ تعریف می‌کنیم. بنا بر آنچه گفته شد $\Sigma^\circ(H^{\tau_s}) = \Sigma^\circ(H)$. سرانجام چون $\sigma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{R}$ پیوسته بوده و اندازه لبگ $\Sigma^\circ(H)$ صفر است، نگاشت

$$[\circ, \text{۱}] \longrightarrow \Sigma^\circ(H) \qquad s \mapsto \sigma(H^{\tau_s})$$

باید ثابت باشد. پس $\sigma(H^\tau) = \sigma(H)$.

**گزاره ۹.۲.** $H, K \in \mathcal{H}$ بوده و $\varphi_K^\text{۱}$ مجموعه $SuppH = \overline{\bigcup_{t\in[\circ,\text{۱}]}\{x \in M : H_t(x) \neq \circ\}}$ را جابه‌جا می‌کند. در این صورت $\sigma(H) \leq \|K\|$.

اثبات. با توجه به گزاره ۸.۲، بدون آن که از کلیت مسأله کاسته شود می توان فرض کرد

$$H_t = \circ, \quad t \in [\circ, \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}], \qquad K_t = \circ, \quad t \in [\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}, \text{۱}].$$

پس

$$sH \ast K(t,x) = sH(t,x) + K(t,x), \qquad s \in [\circ, \text{۱}], (t,x) \in I \times M.$$

$x \in \mathcal{P}^\circ(K)$ را در نظر می‌گیریم. چون $\varphi_K^\text{۱}$ مجموعه $Supp(sH) = SuppH$، $s \in (\circ, \text{۱}]$ را جابه‌جا می‌کند، پس $x(\circ)$ در $SuppH$ نیست. بنابراین $H(t, x(\circ)) = \circ$ و لذا $\varphi_{sH}^t(x(\circ)) = x(\circ)$ و از آنجا

$$\varphi_{sH}^\text{۱} \circ \varphi_K^\text{۱}(x(\circ)) = \varphi_{sH}^\text{۱}(x(\circ)) = x(\circ).$$

اما $\varphi_{sH}^\text{۱} \circ \varphi_K^\text{۱}$ شار همیلتونی $sH \ast K$ در لحظه $t = \text{۱}$ است. این نشان می‌دهد $x \in \mathcal{P}(sH \ast K)$. برعکس برای $y \in \mathcal{P}^\circ(sH \ast K)$ در لحظه $t = \text{۱}$ داریم $\varphi_{sH}^\text{۱} \circ \varphi_K^\text{۱}(y(\circ)) = y(\circ)$. اگر $y(\circ) \in Supp(sH)$ آنگاه بنا بر فرض $\varphi_K^\text{۱}(y(\circ))$ در $Supp(sH)$ نیست؛ لذا $\varphi_K^\text{۱}(y(\circ)) = \varphi_{sH}^\text{۱} \circ \varphi_K^\text{۱}(y(\circ)) = y(\circ)$. اگر $y(\circ)$ در $Supp(sH)$ نباشد آنگاه $\varphi_{sH}^{-\text{۱}}(y(\circ)) = y(\circ)$ و بنابراین $\varphi_K^\text{۱}(y(\circ)) = \varphi_{sH}^{-\text{۱}}(y) = y(\circ)$. پس در هر صورت $y \in \mathcal{P}^\circ(K)$. بحث فوق نشان می‌دهد $\mathcal{P}^\circ(K) = \mathcal{P}^\circ(sH \ast K)$. پس $\Sigma^\circ(sH \ast K) = \Sigma^\circ(K)$.
اکنون مانند اثبات گزاره قبل می‌توان نتیجه گرفت $\sigma(H \ast K) = \sigma(K)$.
از آنجا که $\varphi_K^{-\text{۱}}$ توسط $\overline{K}(t,x) = -K(t, \varphi_K^t(x))$ تولید شده [۱۹] و $K \ast \overline{K} = \circ$ شرط پنجم تعریف ۳.۲ نتیجه می‌دهد

$$\sigma(H) = \sigma(H \ast K) \leq \sigma(H \ast K) + E^+(\overline{K}) = \sigma(K) + E^+(\overline{K}).$$

سرانجام با توجه به این که $\max \overline{K}(t,x) = -\min K(t,x)$ و شرط سوم تعریف ۳.۲ داریم

$$\sigma(H) \leq \sigma(K) + E^+(\overline{K}) \leq \int_\circ^\text{۱} (\max_{x\in M} K(t,x) - \min_{x \in M} K(t,x))dt = \|K\|.$$

اثبات قضیه ۷.۲. الف) برای $e(A,M)=\infty$ حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم $e(A,M)<\infty$. عدد $\delta>0$ را در نظر گرفته $K\in\mathcal{H}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\|K\|\leq e(A,M)$ و $\varphi_K^1$ نیز مجموعه $A$ را جابه‌جا کند. بنابراین $\varphi_K^1$ تکیه‌گاه هر نگاشت $H\in\mathcal{H}(I\times A)$ را جابه‌جا می‌کند. پس بنا به گزاره ۹.۲ داریم

$$\sigma(H)\leq\|K\|\leq e(A,M)+\delta.$$

با توجه به این که $\delta>0$ دلخواه است، سوپریمم گرفتن بر $H\in\mathcal{H}(I\times A)$ نشان می‌دهد

$$c^{\sigma}(A,M)\leq e(A,M).$$

ب) چون $\mathcal{S}_{HZ}^{\circ}(A,M)\subseteq\mathcal{S}(A)$ و برای هر $H\in\mathcal{S}_{HZ}^{\circ}(A,M)$ طبق شرط ششم تعریف ۳.۲ داریم $\max H\leq\sigma(H)$. اکنون به سادگی دیده می‌شود که $c_{HZ}^{\circ}(A,M)\leq c_{\sigma}(A,M)$.

**نتیجه ۱۰.۲.** اگر $\sigma$ یک کنش گزینشگر برای $(\mathbf{R}^{2m},\omega_0)$ باشد آنگاه

$$c_{\sigma}(B^{2m}(r),\omega_0)=c_{\sigma}(Z^{2m}(r),\omega_0)=\pi r^2,\qquad c^{\sigma}(B^{2m}(r),\omega_0)=c^{\sigma}(Z^{2m}(r),\omega_0)=\pi r^2.$$

## ۳ وجود مدارهای بسته

در این بخش $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته دلخواه است. یک ابررویه $S$ در $M$ عبارت است از یک زیرخمینه بسته (فشرده و بدون مرز) از $M$ با نقص بعد ۱ که همبند و جهت‌پذیر بوده و مشمول در $M\setminus\partial M$ است. طیف کنش انقباض پذیر $S$ چنین

$$\Sigma^{\circ}(S)=\{\int_{\overline{x}}\omega : x\in\mathcal{P}^{\circ}(S),\overline{x}\in\mathcal{D}(x)\}$$

تعریف می‌شود. اگر ۱ ـ فرم $\lambda$ روی $S$ وجود داشته باشد که $\omega|S=d\lambda$، طیف کنش کامل نیز به صورت

$$\Sigma(S,\lambda)=\{\int_{x}\omega : x\in\mathcal{P}(S)\}$$

تعریف می‌شود. $\Sigma(S,\lambda)$ در صورتی که اولین گروه کوهومولوژی $S$ بدیهی باشد، مستقل از انتخاب $\lambda$ است (مجموعه‌های $\Sigma^{\circ}(S)$ و $\Sigma(S,\lambda)$ دو مجموعه مهم از ناورداهای $S$ هستند). اگر $\mathcal{P}^{\circ}(S)$ یا $\mathcal{P}(S)$ ناتهی باشد، بگیرید

$$\alpha_1^{\circ}(S)=\inf\{|a| : a\in\Sigma^{\circ}(S)\},\qquad \alpha_1(S,\lambda)=\inf\{|a| : a\in\Sigma(S,\lambda)\}.$$

**مثال ۲.** خمینه همتافته $(\mathbf{R}^{2m},\omega_0)$ را در نظر گرفته و فرض کنید $S=S^{2m-1}$، کره $2m-1$ بعدی باشد. میدان برداری $X_0$ و ۱ ـ فرم $\lambda_0$ را به ترتیب بر $\mathbf{R}^{2m}$ و $S^{2m-1}$ چنین تعریف کنید

$$X_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i\frac{\partial}{\partial y_i}+y_i\frac{\partial}{\partial x_i}),\qquad \lambda_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_idy_i-y_idx_i).$$

چون $\iota_{X_\circ}\omega_\circ = \lambda_\circ$ پس $S^{2m-1}$ یک ابر رویه سایاگونه است. به سادگی می‌توان تحقیق نمود $\Sigma^\circ(S^{2m-1})$ و $\Sigma(S^{2m-1},\lambda_\circ)$ ناتهی هستند. توجه شود که چون $S^{2m-1} = H^{-1}(\circ)$، $H(x,y) = \pi(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + y_i^2 - 1)$ پس $x(t) = (z_1,...,z_m).e^{2\pi it}$ یک عضو $\mathcal{P}^\circ(S^{2m-1})$ است که در آن $(z_1,...,z_m) \in S^{2m-1}$ ، $z_j = x_j + iy_j$ .

**مثال ۳.** فرض کنید $\omega$ یک فرم سطح بر کره $S^2$ بوده و $S$ یک دایره هموار نشانده شده در $S^2$ باشد. چون بعد $S$ برابر ۱ است پس $\omega|S = \circ$ و بنابراین $S$ سایاگونه است. $S$ مرز دو دیسک با مساحت‌های $a_1$ و $a_2$ است و $\alpha_1^\circ(S) = \min\{a_1,a_2\}$.

**گزاره ۱.۳.** [۸] فرض کنید $U$ یک دامنه در $(M,\omega)$ با بستار فشرده باشد که مرز آن $S$ یک ابررویه سایاگونه ضعیف است. اگر $\mathcal{P}'(S)$ ناتهی باشد آنگاه

$$\circ < \alpha_1^\circ(S) \leq c_{HZ}^\circ(U,M),$$

واگر $\mathcal{P}(S)$ ناتهی باشد آنگاه

$$\circ < \alpha_1(S,\lambda) \leq c_{HZ}(U),$$

که در آن ۱ـفرم $\lambda$ ر همه $M$ تعریف شده است.

**قضیه ۲.۳.** [۹] فرض کنید $S$ در $(M,\omega)$ جابجاپذیر باشد ( $e(S,M) < \infty$). اگر $\psi : S\times(-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow U\subseteq M$ یک قطور شده $S$ باشد آنگاه $\{\delta\in(-\epsilon,\epsilon) : \mathcal{P}^\circ(S_\delta)\neq\emptyset\}$ در $I$ چگال است.

این قضیه را می‌توان با قضیه هوفر ـ زندر مقایسه کرد که در آن گنجایش انرژی جابجایی، جایگزین گنجایش هوفر ـ زندر شده است.

**نتیجه ۳.۳.** اگر $S$ در $(M,\omega)$ سایاگونه و جابجاپذیر باشد آنگاه $\mathcal{P}^\circ(S)$ ناتهی است. به ویژه حدس واینشتاین در مورد این گونه ابررویه‌ها درست است.

اثبات. فرض کنید $X$ یک میدان لیوویل باشد که در نزدیکی $S$ تعریف شده است و $X(x)$ برای $x\in S$ در $T_xM$ نیست. اگر $\varphi^t$ شار $X$ باشد آنگاه نگاشت $\psi : S\times(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow U\subseteq M$ با ضابطه $\psi(t,x) = \varphi^t(x)$ برای $\epsilon$ به قدر کافی کوچک، یک وابرریختی است. بنابراین $\psi^t$ یک تناظر یک به یک $\mathcal{P}^\circ(S)\longrightarrow\mathcal{P}^\circ(\psi^t(S))$، $x\mapsto\psi^t(x)$ ، القا می‌کند [۱۹]. اکنون حکم از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود.

گزاره ۴.۳. ([۸]) $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته به طور ضعیف دقیق بوده و $S$ یک ابررویه سایاگونه در $M$ است.

**الف)** اگر $S$ همبند ساده باشد، $\Sigma^\circ(S)$ بسته بوده و شامل صفر نیست. بنابراین اگر $\mathcal{P}^\circ(S)\neq\emptyset$ آنگاه $\alpha_1^\circ(S) > \circ$ .

ب) برای هر ۱ ــ فرم $\lambda$ با شرط $\omega|S = d\lambda$ ، $\Sigma(S,\lambda)$ بسته بوده و شامل صفر نیست. بنابراین اگر $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$ آنگاه $\alpha_1(S,\lambda) > 0$ .

اثبات. ۱ ــ فرم $\lambda$ را بر $S$ انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که $\omega|S = d\lambda$ . چون $S$ همبند است برای $x \in S$ می‌توان $\overline{x} \in \mathcal{D}(x)$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که تصویر $\overline{x}$ مشمول در $S$ بوده و بنابراین $\int_{\overline{x}}\omega = \int \overline{x} d\lambda = \int_x \lambda$. فرض کنید R میدان ریب[1] وابسته به $\lambda$ باشد که با شرایط زیر تعریف می‌شود.

$$\iota_R\omega = 0, \quad \lambda(R) = 1.$$

یک متریک ریمانی روی $S$ انتخاب می‌کنیم که نسبت به آن طول R یک باشد. $x$ را به گونه‌ای باز پرمایش می‌کنیم که $x'(t) = R$ . در این صورت $\int_x \lambda = \int \lambda(x'(t)dt$ برابر طول $x$ بوده و لذا مثبت است. اگر $\{x_j\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{P}^\circ(S)$ باشد که $\int_{x_j}\lambda \longrightarrow a$ آنگاه $\{\int_{x_j}\lambda\}$ کراندار بوده و بنابراین طبق قضیه‌ای در [۱۹] $x \in \mathcal{P}^\circ(S)$ با طول $a$ وجود دارد که زیردنباله‌ای از $\{x_j\}$ به آن همگراست. این نشان می‌دهد $\Sigma^\circ(S)$ بسته است. قسمت دوم نیز به طور مشابه ثابت می‌شود.

در آخرین قضیه، هدف یافتن کران بالایی برای $\alpha_1^\circ(S)$ است که در آن $S$ یک ابررویه سایاگونه است و ممکن است کاهش یافته یا مرز یک دامنه نباشد. در این قضیه گنجایش‌های طیفی با وجود مدارهای پیوسته پیوند می‌خورند. البته چون $c_\sigma(S,M) = 0$ (درون $S$ تهی است)، از گنجایش طیفی بیرونی

$$\widehat{c}_\sigma(S,M) = \inf c_\sigma(U,M)$$

استفاده می‌شود که در آن اینفیمم بر زیرمجموعه‌های باز شامل $S$ گرفته می‌شود.

**تعریف ۵.۳.** خمینه همتافته $(M,\omega)$ را گویا[2] گویند هرگاه $\omega(\pi_2(M))$ در $\mathbf{R}$ گسسته باشد. اگر $(M,\omega)$ گویا باشد، شاخص گویایی $\rho(M,\omega) \in (0,+\infty]$ از $(M,\omega)$، اگر $\omega$ به طور ضعیف دقیق باشد $+\infty$ و در غیر این صورت مولد مثبت زیرگروه دوری $\omega(\pi_2(M))$ از $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود.

**قضیه ۶.۳.** ([۸]) فرض کنید $(M,\omega)$ یک خمینه همتافته گویا، $\sigma$ یک کنش گزینشگر ضعیف برای $M$ و $S$ یک ابررویه سایاگونه در $M$ است. در این صورت

الف) $\widehat{c}_\sigma(S,M) \leq e(S,M)$

ب) اگر $\widehat{c}_\sigma(S,M) < \rho(M,\omega)$ آنگاه $\mathcal{P}^\circ(S)$ ناتهی بوده و

$$\alpha_1^\circ(S) \leq \widehat{c}_\sigma(S,M) \leq e(A,M).$$

اثبات. قسمت اول حکم، نتیجه سرراستی از قضیه ۷.۲ و تعریف گنجایش طیفی بیرونی است. برای اثبات قسمت دوم حکم، نشان می‌دهیم اگر $\psi : S \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow U \subseteq M$ یک قطور شده $S$ باشد آنگاه برای هر $\tau > 0$، عدد $\delta \in [-\tau,\tau]$ وجود دارد که $\mathcal{P}^\circ(S_\delta)$ ناتهی بوده و

1) Reeb 2) rational

$$\alpha_1^\circ(S_\delta) \leq \widehat{c}_\sigma(S,M) + \tau \leq e(S,M) + \tau.$$

عدد $\tau > \circ$ را آنقدر کوچک در نظر می‌گیریم که

$$C = \widehat{c}_\sigma(S,M) + \tau < \rho = \rho(M,\omega).$$

همچنین $\varepsilon \in (\circ, \tau)$ را آنقدر کوچک انتخاب می‌کنیم که برای همسایگی $U_\varepsilon = \psi(S \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ از $S$ داشته باشیم $c_\sigma(U_\varepsilon, M) < C$. نگاشت هموار $f : \mathbf{R} \longrightarrow [\circ, C]$ را با شرط‌های زیر اختیار می‌کنیم

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & \circ, & t \in (\frac{-\varepsilon}{۲}, \frac{\varepsilon}{۲}), \\ f(t) & = & C, & t \in [\frac{-\varepsilon}{۲}, \frac{\varepsilon}{۲}), \\ |f'(t)| & \neq & \circ, & t \in (\frac{-\varepsilon}{۲}, \frac{-\varepsilon}{۴}) \cup (\frac{\varepsilon}{۴}, \frac{\varepsilon}{۲}). \end{array}$$

اکنون نگاشت $H \in \mathcal{S}(M)$ را با ضابطه

$$H(x) = \begin{cases} f(t), & x \in S_t, \\ \circ, & x \in M \backslash S_t \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون $H \neq \circ$ پس $\sigma(H) > \circ$ و لذا

$$\circ < \sigma(H) \leq c_\sigma(U_\varepsilon, M) < C < \rho.$$

پس بنا بر شرط اول تعریف ۳.۲، $(x, \overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}^\circ(H)$ وجود دارد که $\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x})$. ادعا می‌کنیم $x$ ثابت نیست. اگر $x$ ثابت باشد آنگاه بنا به تعریف $H$، $H(x) \in \{\circ, C\}$. اگر $H(x) = \circ$ آنگاه

$$\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x}) = -\int_{\overline{x}} \omega$$

و چون $\circ < \sigma(H) < C$ پس

$$\circ < \int_{\overline{x}} \omega < C. \qquad (۱.۳)$$

به طور مشابه، اگر $H(x) = C$ آنگاه $\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x} = -\int_{\overline{x}} \omega + C$ و لذا

$$\circ < -\int_{\overline{x}} \omega + C < C. \qquad (۲.۳)$$

اما چون $(M, \omega)$ گویاست پس $\int_{\overline{x}} \omega \in \rho\mathbb{Z}$. بنابراین (۱.۳) و (۲.۳) هر دو با این که $C < \rho$ در تناقض بوده و لذا $x$ ثابت نیست.

سرانجام، با توجه به ساخت $H$ می‌تون گفت $\delta \in (-\varepsilon,\varepsilon) \subset [-\tau,\tau]$ وجود دارد که $(x,\overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}^{\circ}(S_\delta)$ و $\circ < f(\delta) < C$ (نگاشت $H$ روی مدارهای $\varphi_H^t$ ثابت است). افزون بر این

$$\circ < \sigma(H) = -\int_{\overline{x}} \omega + f(\delta) < C.$$

بنابراین $|\int_{\overline{x}}\omega| \leq C$ و لذا $\alpha_{۱}^{\circ}(S_\delta) < \overline{c}_\sigma(S,M) + \tau$.

در پایان، خواننده را برای آشنایی با پژوهش‌هایی که اخیراً در این زمینه انجام شده است به مرجع‌های [۲۸] و [۳۰] ارجاع می‌دهیم.

# مراجع


[1] W. Chen, *Pseudo-holomorphic curves and the Weinstein conjecture*, Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 115-131.

[2] K. Cieliebak, *Symplectic bounndaries: Closed characterirstics and action spectra*, Diss. ETH No. 11610. Zurich 1996.

[3] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer and K. Wysocki, *Applications of symplectic homology. II. Stability of the action spectrum*, Math. Z. 233 (1996), 27-45.

[4] K. Cieliebak, H. Hofer, J. Latschev and F. Schlenk, *Quatitative symplectic geometry*, math.SG/0506191.

[5] I. Ekeland and H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. 200 (1989), 355-378.

[6] I. Ekeland and H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II*, Math. Z. 203 (1990), 553-567.

[7] A. Floer, H. Hofer and C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in $P \times \mathbb{C}^l$*, Math. Z. 203 (1990), 469-482.

[8] U. Frauenfelder, V. Ginzburg and F. Schlenk, *Energy capacity inequalities via an action selector*, math. DG/0402404v2.

[9] U. Frauenfelder and F. Schlenk, *Applications of Hofer's geometry to Hamltonian dynamics*, math. SG/030514v1.

[10] R. Gompf, *Some new symplectic manifolds*, Turk. Math. J. 18 (1994), 7-15.

[11] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. Math. 142 (1995), 527-595.

[12] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[13] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990), 25-38.

[14] H. Hofer, *Estimates for the energy of a symplectic map*, Comment. Math. Helv. 68 (1993), 48-72.

[15] H. Hofer and C. Viterbo, *The Weistein conjecture in cotangent bundles and related results*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. IV 15 (1988), 411-445.

[16] H. Hofer and C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres*, Comm. Pure App. Math. 45 (1992), 583-622.

[17] H. Hofer and E. Zehnder, *Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo*, Invent. Math. 90 (1987), 1-9.

[18] H. Hofer and E. Zehnder, *A new capacity for symplectic manifolds*, Analysis, et cetra, 405-427, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[19] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhauser, Basel, 1994.

[20] T. Hwang and D. Y. Suh, *The Gromove width from Hamiltonian circle actions*, math. SG/1305.2989v1.

[21] F. Lalonde and D. McDuff, *The geometry of symplectic energy*, Ann. Math. 122 (1995), 349-371.

[22] A. Loi, R. Mossa and F. Zuddas, *Symplectic capasities of hermitian symmetric spaces*, math. SG/1302.1984v1.

[23] G. Lu, *The Weinestein conjecture on some symplectic manifolds containing the holomorphic spheres*, Kyushu J. Math. 52 (1998), 331-351.

[24] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Second edition. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, NewYork, 1998.

[25] Y.-G. Oh, *symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle*, J. Differ. Geom. 46 (1997), 499-577.

[26] Y.-G. Oh, *symplectic topology as the geometry of action functional. II. Pants product and cohomological invariants*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 1-54.

[27] M. Pabiniak, *Gromove width of non-regular coadjoint orbits of $U(n)$, $SO(۲n)$, and $SO(۲n+۱)$*, math. SG/1302.7213v1.

[28] A. S. Salomao and J. Weber, *An almost existence theorem for non-contractible periodic orbits in cotangent bundles*, math. SG/1302.7282v1.

[29] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math. 193 (2000), 419-461.

[30] S. Suhr and K. Zehmisch, *Linking and closed orbits*, math. DS/1305.2799v1.

[31] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann. 292 (1992), 685-710.

[32] A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz periodic orbit theorems*, J. Diffe. Equa. 33 (1979) 353-358.

[33] M. Zoghi, *The Gromov Width of Coadjoint Orbits of Compact Lie Groups*, Ph.D thesis, University of Toronto.

محمد شفیعی
دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان، گروه ریاضی
mshafiee@vru.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۶۹ تا ۸۳

# گشتی در گلستان جانی فون نویمان*

فریمن دایسون

مترجمین: علیرضا الفتی و رستم محمدیان

## مبانی ریاضیات

جانی فون نویمان از خود شش جلد عظیم از مجموعه آثار را به جای گذاشت که توسط آبراهام توب[1] جمع‌آوری و ویرایش گردید[۱]. مجموعهٔ آثار، گلستان او هستند که شامل مجموعه‌ای وسیع و گوناگون از نهال‌هایی است که او آن‌ها را کاشت. هر کدام از آن‌ها از یک دانه رشد یافت، از یک ایده یا یک مسأله که به ذهنش خطور کرد. او آن ایده را گستراند و یا مسأله را حل کرد و سپس نوشت و منتشر ساخت. او به سرعت می‌نوشت و به سرعت منتشر می‌ساخت آن‌چنان که گل‌ها هنوز هم با طراوتند. برای صحبت امروز تصمیم دارم در میان این گلستان، گردشی کنم تا ببینم چه چیزی عایدم می‌گردد. خوشبختانه تنها دو مقاله از این مقالات به زبان مجاری است. او اغلب به زبان آلمانی می‌نوشت تا این‌که در سن سی سالگی، برای زندگی دائمی به ایالات متحده آمد، و پس از آن به انگلیسی می‌نوشت.

جانی از ده‌سالگی تا هجده‌سالگی در دبیرستان لوتری در بوداپست تعلیم داده شد. آنجا او معلمانی عالی و حتی هم‌کلاسی‌هایی عالی‌تر داشت. یکی از همکلاسیانش یوجین ویگنر[2] بود که یک فیزیک‌دان معروف و یک دوست مادام‌العمری برای او گشت. اما پدرِ جانی، متوجه شد که در دبیرستان لوتری، تمام چیزهایی را که جانی نیاز داشت به او داده نمی‌شود.

---

*) Freeman Dyson, A Walk through Johnny Von Neumann's Garden, Notices of the American Mathematical Society, 60(2013), 154-161

فریمن دایسون استاد بازنشسته مؤسسه مطالعات پیشرفته در پرینستون است. آدرس رایانامه او عبارت است از dyson@ias.edu

1) Abraham Taub 2) Eugene Wigner

جانی در ریاضیات شوری داشت که وراء آنچه در مدرسه درس داده می‌شد، می‌رفت. بنابراین پدرش، مایکل فکته[1] را که ریاضی‌دانی از دانشگاه بوداپست بود، استخدام کرد تا با جانی در منزل کار کند. اولین گل در گلستان جانی، یک مقاله تحت عنوان «در مورد مکان صفرهای چندجمله‌ای‌های کمینه خاص»[۲] بود که به طور مشترک به وسیله فکته و فون نویمان، زمانی که هجده سال داشت منتشر گردید. سبکِ مقاله حرفه‌ای و خشک و در پیروی از سنتی است که اقلیدس دو هزار سال قبل آن را بنا نهاد. تقریباً تمام نوشته‌هایی که جانی به عنوان ریاضی‌دان نوشت در سبکِ اقلیدسی بود که قضایا یکی پس از دیگری و بدون کلمه‌ای اضافی بیان و اثبات می‌شدند.
اگرچه موضوع مقاله‌ی اول او احتمالاً توسط فکته پیشنهاد شده بود، سبکِ آن در حال حاضر به عنوان سبکِ جانی شناخته می‌شود. استعداد منحصر به فرد جانی به عنوان ریاضی‌دان، تبدیل مسائل در همه شاخه‌های ریاضی به مسائلی از منطق بود. او قادر بود به طور شهودی رایحه‌ی منطقی مسائل را دریابد و سپس با بکار بردن قوانین ساده‌ی منطقی به حلِ آن‌ها بپردازد.
مقاله‌ی اول او مثال جالبی از شیوه‌ی تفکر اوست. قضیه‌ای که به نظر به هندسه تعلق داشت، یعنی محدود کردن موقعیت‌های ممکن از نقاطی که توابعی خاص با متغیر مختلط در آن نقاط صفر می‌شوند، به گزاره‌ای از منطق محض تبدیل می‌گردد. تمام پیچیدگی‌های هندسی ناپدید می‌گردند و اثبات قضیه کوتاه و ساده می‌شود. در سراسر مقاله، خبری از محاسبه نیست، فقط تعاریف کلامی و استنباط‌های منطقی را شامل می‌شود.
ثمره‌ی بعدی او در این گلستان، اولین مقاله انفرادیش با عنوان «در آشنایی با اعداد ترتیبی»[۳] می‌باشد که آن را در سن نوزده سالگی منتشر ساخت. این مطلب جایگاهی را نشان می‌دهد که قوی‌ترین علاقه‌ی او در آن در ابتدای کارش و آن هنگام که پرنده‌ی جوانی آماده ترک گفتن لانه و گستردن بال‌های ریاضی‌اش بود، در آن قرار داشت. اشتیاق چیره بر او سپس و برای پنج سال بعدی در یافتن و بازسازی مبانی منطقی ریاضیات بود. او خوش‌شانس بود که در لحظه‌ای تاریخی به صحنه وارد شد که ابهامات در مبانی ریاضیات به اوج رسیده بود. جورج کانتور[2] در قرن نوزدهم به طور وسیعی دامنه ریاضیات را با خلق نظریه‌ی شگفت‌انگیز اعداد ترتیبی[3] گستراند. سپس در ابتدای قرن بیستم، برتراند راسل و سایر منطق‌دانان متوجه شدند که نظریه‌ی کانتور منجر به یک تعارض منطقی می‌گردد. پارادوکس راسل نه تنها تردید را به جانِ ابتکار کانتور در واژه‌ی جدید «نامتناهی‌ها» انداخت بلکه در مفاهیم اثبات شده در ریاضیات کلاسیک نیز تردیدهایی به وجود آورد. جانی به محض این‌که شروع به صحبت با فکته و مطالعه‌ی متون ریاضی نمود متوجه شد که ریاضیات در وضعیتی بحرانی به سر می‌برد. از آنجا که دلایل ریاضی کانتور، منجر به تعارضاتی در منطق می‌گردید، هیچ کس نمی‌دانست که چطور می‌توان خطی بین ریاضیات موثق و تخیلی و بی‌اساس کشید. جانی در نوزده‌سالگی مصمم گردید که حل این بحران و برگرداندن ریاضیات

1) Michael Fekete 2) Georg Cantor 3) Ordinal Numbers

به مبنای منطقی محکم وظیفه اوست. اولین پاراگراف از نخستین اثر انفرادی جانی، از یک جمله‌ی تنها تشکیل شده است: «هدفِ این کار شفاف سازی ایده اعداد ترتیبی کانتور و استحکام پایه‌های آن است». باقی مقاله تعریف جدیدی از اعداد ترتیبی را فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که تعریف جدید منجر به نتایجی یکسان با تعریف قدیمی کانتور می‌گردد. جانی ادعا نکرد بحرانی که از نظریه‌ی کانتور نشأت گرفته بود را حل کرده است. او با دادن تعریفی دقیق‌تر از مفاهیم کانتور فقط بحران را شدیدتر ساخته بود. شدیدتر ساختن بحران، به معنی درکِ بهتر آن و درک بهتر اولین گام به سمت حل آن می‌باشد.

دومین مقاله‌ی انفرادی جانی «اصولی‌سازی نظریه مجموعه‌ها»[۴] دو سال بعد زمانی که او بیست و یک ساله و دانشجوی دانشگاه برلین بود پدید آمد. نظریه‌ی مجموعه‌ها، یعنی نظریه‌ی اشیاء و خانواده‌هایی از اشیاء، تنها با در نظرگرفتن روابطِ منطقی بین آن‌ها و چشم‌پوشی از کیفیتِ ذاتیشان. از دیدگاه نظریه‌ی مجموعه‌ها من، شما، ستارگان، سیارات، کلمات و اعداد فقط شی هستند و رفتار مشابهی با آن‌ها می‌شود. اصولی‌سازی، یعنی تشریح نظریه‌ی مجموعه‌ها به سبکِ مشابه با سبکی که اقلیدس در دوهزار سال قبل، آن را برای تشریح هندسه به کاربرد، یعنی ساختن نظریه‌ای برمبنای استنتاجات منطقی از تعداد کمی فرض‌های پایه‌ای که او آنها را اصول می‌نامید. جانی اصولی جدید برای نظریه‌ی مجموعه‌ها یافت. او امیدوار بود که اصول جدیدش می‌تواند به عنوان پایه منطقی سازگاری، برای تمام قسمت‌های مفیدِ ریاضیات قرار گیرد در حالی که از پارادوکس اجتناب می‌کند. او به خوبی از این‌که شالوده‌ی سازگار او برای ریاضیات یک آرزو بود و نه یک حقیقت اثبات شده آگاهی داشت. تازگی اصول جانی در معرفی دو گونه از اشیاء بود که او آنها را «یک ـ چیزها[1]» و «دو ـ چیزها[2]» می‌نامید. او این نام‌های مجرد را برای اجتناب از اثرات گمراه کننده احتمالی که ممکن بود از استعمال کلمات مشابه‌تر ایجاد گردند به کار برد. برای این‌که ایده‌ی جانی آسان‌تر قابل فهم گردد از نام مجموعه‌ها برای «یک—چیزها» و کلاس‌ها برای «دو—چیزها» استفاده می‌کنم. بنابراین جانی تفسیری از نظریه مجموعه‌ها با دو نوع از اشیاء ارائه نمود: مجموعه‌ها که از برخی جهات به قدر کافی کوچک هستند که با قوانین معمول قابل حصول باشند و کلاس‌ها که بزرگتر از آن هستند که به طور جمعی به کار برده شوند.

اصول موضوع به گونه‌ای ساخته شده‌اند که «کلاس همه مجموعه‌ها» به عنوان یک شی خوش‌تعریف وجود دارد. آن یک کلاس است ولی نه یک مجموعه. نه مجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها و نه کلاسِ تمام کلاس‌ها در این نظریه جایی ندارند. این حقه‌ی ساده « استفاده از اسامی و قوانین مختلف برای تجمعات بزرگ و کوچک» به جانی اجازه می‌دهد تا از ایجاد پارادوکس جلوگیری کند. تناقضات در تفسیرهای قدیم نظریه مجموعه‌ها، به واسطهٔ استعمال مفهوم «مجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها» به آسانی نمایان می‌گشت. در تفسیر جدیدِ جانی این مفهوم ممنوع است، ولی کلاسِ تمام مجموعه‌ها قابل پذیرش است در حالی که چارچوبی برای ساختار منطقی ریاضیات فراهم می‌سازد. کلاسِ تمام مجموعه‌ها جهان ریاضیات است، چارچوبی که در آن تمام تجمع‌های ریاضی قابل تعریفند.

1) One-things 2) Two-things

جانی قبل از نوشتن مقاله‌اش با داوید هیلبرت[1] در گوتینگن گفتگو کرده بود. هیلبرت چهل سال از جانی بزرگ‌تر و معروف‌ترین ریاضی‌دان جهان بود. هیلبرت قویاً برنامه‌ای را برای حل بحران در ریاضیات به وسیله‌ی حل «مسأله‌ی تصمیم[2]» ترویج می‌کرد. حل کردن مسأله‌ی تصمیم، به معنی یافتن روشی نظام‌مند برای تصمیم‌گیری در درستی یا نادرستی گزاره‌های ریاضی است. اگر او می‌توانست مسأله‌ی تصمیم را حل کند، در حقیقت نشان می‌داد که اصول ریاضیات هم سازگار هستند و هم قطعی. سازگاری به این معنی است که آن‌ها هرگز نمی‌توانند یک گزاره و نقیض آن را به اثبات رسانند. قطعی به این معنی است که اصول یا گزاره را اثبات می‌کند و یا نقیض آن را. هیلبرت با تمام قدرتی که به عنوان پدر معنوی ریاضی‌دانان داشت اعلام کرد که برای حل بحران در ریاضیات ضروری است که مجموعه‌ای از اصول یافت شوند که سازگاری و قطعی‌بودنشان اثبات شود. ریاضیات بر بنیان مستحکم منطقی می‌آساید اگر درستی یا نادرستی هر گزاره معنی‌دار ریاضی قابل اثبات می‌شد.

جانی در پایان مقاله‌ی اصولی سازی‌اش یک خلاصه کوتاه و معتدل از ادعاهایش قرار می‌دهد. او ادعا نکرده که بحران را از ریاضیات زدوده است. او فقط ادعا می‌کند که راه را برای حلِ ممکن، به وسیله تعریف مجموعه‌ای از اصول که معلوم نیست خود ـ متناقض[3] باشند، باز کرده است. او ثابت نکرده است که اصولش سازگار هستند و همچنین ثابت نکرده است که اصولش قطعی هستند. او مقاله‌اش را با دو جمله به پایان می‌برد که تردیدش را نسبت به برنامه هیلبرت به طور غیر رسمی بیان می‌کند: «حتی دیدگاه‌های هیلبرت در اینجا ناتوان هستند، برای این که این ایراد مربوط است به قطعیت در نظریه مجموعه‌ها و نه سازگاری. تمام آنچه که در حال حاضر می‌توانیم انجام دهیم تشخیص این است که استدلال دیگری در مقابل نظریه‌ی مجموعه‌ها قد علم کرده است و این‌که هیچ راهی در برابر خودمان که منجر به توانمندسازی گردد نمی‌بینیم». سه سال بعد جانی، دو مقاله مفصل‌تر درباره مبانی ریاضیات منتشر ساخت. یکی از آنها «در نظریه‌ی اثباتِ هیلبرت»[5] و دیگری رساله‌ی دکترایش با عنوان «اصولی‌سازی نظریه‌ی مجموعه‌ها» [6] بود و تفسیر مقاله‌ی ۱۹۲۵ راگسترش داد. این دو مقاله نشان می‌دهند که جانی هنوز به شدت تلاش می‌کرد تا ریاضیات را به وسیله پیروی از برنامه‌ی هیلبرت نجات دهد. جانی گیر کرده بود. او مجموعه‌ای از اصول ساده و زیبا را خلق کرده بود که بعدها توسط کورت گودل[4] نشان داده شد دقیقاً آن ابزاری بودند که برای فهم سرشت واقعی ریاضیات نیاز بود، اما او نمی‌دانست با آنها چه کند. در آن مرحله او از تلاش برای نجات ریاضیات منصرف گشت و باقی عمر خود را به کارهای دیگری اختصاص داد.

سه سال بعد در ۱۹۳۱ کورت گودل در وین دو قضیه ثابت کرد که به کلی برنامه‌ی هیلبرت را ویران نمود. گودل ثابت کرد که هیچ دستگاهی از اصول برای ریاضیات نمی‌تواند قطعی باشد و همچنین هیچ دستگاهی از اصول قادر به اثبات سازگاری خودش نیست. بعد از گودل ریاضیات هرگز نتوانست خلاصه‌ای یکتا از حقیقت مطلق باشد که ریاضی‌دانان از اقلیدس تا هیلبرت تصور می‌کردند.

---

1) David Hilbert 2) Entscheidungs Problem 3) Self-contradictory 4) Kurt Gödel

بعد از گودل ریاضیات مخلوق آزاد ذهن بشر بود که درستی و نادرستی‌اش به ذائقه‌ها و سلیقه‌های بشر بستگی داشت. برای هیلبرت و دیگر معاصران اکتشاف گودل یک مصیبت بزرگ تلقی می‌شد. آرزوهای آن‌ها برای ساختن یک شالوده منحصر به فرد و مستحکم برای ریاضیات فرو پاشیده بود. اما جانی به سرعت دریافت آزادی جدیدی که توسط گودل خلق شده بود یک منفعت است و نه یک فقدان. جانی در یک سخنرانی عمومی بیان کرد که گودل بزرگترین منطق‌دان از زمان ارسطو تاکنون است. جانی از اینکه خودش اکتشاف گودل را سه سال زودتر به دست نیاورده بود ابراز تأسف کرد، اما خوشحال بود که گودل از دستگاه اصول موضوع ۱۹۲۵ او با نام‌هایی مجزا برای مجموعه و کلاس استفاده کرد. جانی مفتخر بود که سهمی اساسی در بنیادهای ریاضیات نوین ایجاد کرده است.

## بازی‌ها و کوانتا

ثمره‌ی بعدی «نظریه‌ی بازی‌های بزمی»[۷] از کنج دیگری از گلستان او می‌آید. در سن بیست و چهار سالگی، جانی ریاضی‌دانی حرفه‌ای با سمت آموزشیار در دانشگاه برلین بود. او از شب زنده داری در برلین لذت می‌برد و مجذوب منطق بازی‌هایی چون پوکر و باکارا[۱] (نوعی بازی ورق) که در آن‌ها نتیجه بستگی به ترکیبی از شانس و مهارت داشت، شده بود. این سوال که آیا استراتژی منطقی برای بازیکن وجود دارد که بهترین شانس برای پیروزی در این قبیل بازی‌ها را داشته باشد، توسط ریاضی‌دان فرانسوی «امیل بورل[۲]» مطرح شده بود. بورل سوال را طرح کرد ولی قادر به پاسخ‌گویی آن نبود. جانی پاسخ را یافت که این پاسخ یک قضیه‌ی عمیق ریاضی از کار در آمد. برای بازی با تنها دو بازیکن، استراتژی منحصر به فردی وجود دارد که به هرکدام از آن‌ها به‌طور متوسط بهترین نتیجه را می‌بخشد. اثباتِ وجود چنین استراتژی مثال جالب دیگری از سبک جانی است؛ تقلیل یک مسأله از حساب به مسأله‌ای از منطق.

استراتژی بهینه معمولاً به پارامتر احتمالی بزرگی نیازمند است، چنان که حرکات بازیکنان به درستی غیر قابل پیش بینی باشند. بازیکن $A$ باید تاس را بریزد تا تصمیم بگیرد چگونه حرکتش را انجام دهد چنان‌که بازیکن $B$ نتواند با پیش‌بینی حرکت او برنده شود. در بازی پوکر گاهی ریختن تاس نیازمند این است که بازیکن $A$ روی دستی ضعیف، شرطی بالا ببندد؛ حرکتی که «بلوف» نامیده می‌شود. اگر بازیکن $A$ هرگز بلوف نزند، بازیکن $B$ می‌تواند با به دقت حدس زدن توانایی کارت‌های بازیکن $A$، پیروز گردد. جانی در پایان مقاله‌اش نوشت، سازگاری نتایج ریاضی با قوانین تجربی شناخته شده در شرط‌بندی موفقیت آمیز، برای مثال ضرورت بلوف زدن دربازی پوکر، می‌تواند به عنوان تاییدات تجربی از نظریه‌مان در نظر گرفته شود. برای بازی‌هایی با سه یا تعداد بیشتری بازیکن، جانی جوابی با این ظرافت نیافت. برای داشتن بهترین شانس پیروزی در یک بازی با سه بازیکن، بازیکن $A$ برای تشکیل ائتلاف بر علیه بازیکن $C$، باید به بازیکن $B$ رشوه دهد و یا او را بترساند. بازیکنان باید برای به دست آوردن نقش‌های برنده«$A, B$» رقابت کنند و سعی کنند تا از

1) baccarat 2) Emile Borel

نقش بازنده یعنی $C$ بگریزند. نتیجه‌ی مسابقه با قدرت اراده شخصی و یا غرض‌ورزی معلوم می‌شود، نه به وسیله ریاضیات. جانی در پایان توضیحاتش برای بازی سه نفره می‌افزاید: عامل تعیین کننده که در بازی منظم و منصفانه دو نفره وجود ندارد، نبرد است.

در گوشه‌ی دیگری از گلستان او ثمره‌ی کوچکی که تماماً از آن خود اوست، وجود دارد. مقاله کوتاهی با عنوان «تقسیم یک بازه به تعداد شمارای نامتناهی قسمت‌های همسان»[۸]. این مقاله مسأله‌ای را حل می‌کند که توسط هوگو اشتاین‌هاوس مطرح شده بود. من اشتاین‌هاوس را بعد از جنگ جهانی دوم در آمریکا ملاقات نمودم. او یکی از معدود بازماندگان از نسل طلایی ریاضی‌دانانی است که در بین دو جنگ در لهستان ظهور کردند. نیمی از آنها یهودی و نیمی دیگر غیر یهودی[۱] بودند. شانس بقا برای هردوی آنها تقریباً یکسان بود، زیرا آن‌هایی که مهاجرت کرده بودند اکثراً یهودی و آن‌هایی که در لهستان زنده ماندند تماماً غیر یهودی بودند. جانی به سرعت مسأله‌ی اشتاین‌هاوس را حل کرد و پس از آن هرگز به سمت آن باز نگشت. قضیه‌ای که او ثابت کرد غیر شهودی با اثباتی حیرت‌انگیز است. قضیه در مورد مجموعه‌هایی از نقاط در یک بازه است. یک بازه، یعنی قطعه‌ای متناهی از یک خط مستقیم. شمارای نامتناهی یعنی مجموعه‌ای از اشیاء که می‌توان آن‌ها را با تمام اعداد ۱، ۲، ۳،... برچسب گذاری کرد. قضیه بیان می‌کند که یک دسته از مجموعه‌های $S_1$، $S_2$،... با این ویژگی‌ها وجود دارند که: ۱) هر نقطه از بازه دقیقاً به یکی از $S_j$ها متعلق باشد. ۲) مجموعه‌های $S_j$ از تمامی جهات همسانند، مگر در مکان قرار گرفتن‌شان، هر کدام از $S_j$ها با تغییر مکانِ دیگری در فاصله معینی روی خط قابل حصول است.

قضیه غیر شهودی است، زیرا ممکن نیست $S_j$ها را تجسم کرد. اگر تلاش کنید تا تصور کنید که چطور نقاط مجموعه $S_j$ در نزدیکی دو انتها مرتب شده‌اند، موفق نخواهید شد. موفق نمی‌شوید زیرا $S_j$ها اندازه ناپذیرند و هیچ کس هرگز یک مجموعه اندازه‌ناپذیر از نقاط را تجسم نکرده است. مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر نمی‌توانند با استفاده از هیچ یک از ابزارهای آشنای هندسه ساخته شوند. اثبات جانی از قضیه، حیرت‌انگیز بود زیرا کاملاً مجرد بود. او حتی هرگز به هندسه‌ی مجموعه‌های $S_j$ اشاره نمی‌کند. او نشانی از ظاهر و ساختار آنها نمی‌دهد. او وجودشان را با تقلیل قضیه به منطق مجرد و اثبات قضیه به وسیله استدلال‌های منطقی مجرد نشان می‌دهد. این مقاله‌ی کوتاه بارزترین تجلی سبک جانی است.

جانی در طول سال‌های زندگی‌اش در برلین گوتینگن را بسیار ملاقات کرد. جایی که هایزنبرگ اخیراً مکانیک کوانتم را ابداع کرده بود و هیلبرت در کسوت ریاست بر ریاضی‌دانان بود. هیلبرت به شدت به مکانیک کوانتم علاقمند بود و ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان را به همکاری ترغیب می‌کرد. از دیدگاه هیلبرت مکانیک کوانتم آمیزه‌ای درهم و برهم بود. هایزنبرگ از ریاضیات دقیقی استفاده نکرده بود و علاقه‌ای به یادگیری آن نیز نداشت. دیراک به طور آزادانه تابع دلتای معروفش را که به وسیله یک مفهوم نا معقول ریاضی تعریف شده بود، به کار گرفته بود: در یک نقطه‌ی تنها نامتناهی

1) Gentile

و در سایر جاها صفر. وقتی هیلبرت به دیراک اظهار داشت که تابع دلتا می‌تواند به یک تناقض ریاضی منجر شود، دیراک در پاسخ بیان کرد: آیا من به یک تناقض دست یافته‌ام؟ دیراک می‌دانست که تابع دلتایش ابزار مناسبی برای محاسبه در فرآیندهای کوانتمی است و آن تمام چیزی بود که نیاز داشت. بیست سال بعد، لوران شوارتز شالوده دقیقی برای تابع دلتا فراهم کرد و نشان داد که دیراک راست می‌گفت. در این میان جانی با هیلبرت کار می‌کرد و مجموعه‌ای از مقالات را منتشر ساخت که شلوغ‌کاری‌ها و ابهامات را می‌زدود. برای چندین سال مکانیک کوانتم علاقه‌ی اصلی جانی بود. در سال ۱۹۳۲ او کتاب «مبانی ریاضی مکانیک کوانتم»[۹] را منتشر ساخت که ناحیه مهمی از گلستانش را اشغال نموده است.

کتاب جانی نخستین تفسیر از مکانیک کوانتمی است که این نظریه را از لحاظ ریاضی آبرومند می‌سازد. مفاهیم به دقت تعریف شده‌اند و نتایج به دقت استنتاج گردیده‌اند. بیشتر کتاب به ویژه فصل‌های مربوط به مکانیک کوانتمی و اندازه ابتکاری بود. من کتاب را در ۱۹۴۶ زمانی که هنوز یک ریاضی‌دان محض بودم خواندم، اگر چه پیش از این بر آن شدم تا توجه خود را به فیزیک معطوف کنم. من کتاب را فوق‌العاده مفید یافتم. به من آن چیزی را که نیاز داشتم داد، یعنی مبانی نظریه مکانیک کوانتم را با بیان دقیق ریاضی تشریح می‌کرد و حاوی نکات جالبی بود که فیزیک در توضیح آن‌ها آشفته عمل می‌کرد. بیشتر آنچه که من درباره مکانیک کوانتم آموختم از آن کتاب فرا گرفتم. اما بعد از این که به سوی فیزیک متمایل شدم و شروع به مطالعه مجلات اخیر فیزیک کردم، از این‌که متوجه شدم کسی در مجلات فیزیک هرگز به کار جانی ارجاع نداد، شگفت زده شدم. تا آنجا که به فیزیک‌دانان مربوط می‌شد جانی وجود نداشت. البته بی‌اطلاعی آنان از کار جانی تا حدی به خاطر مشکلِ زبان بود. کتاب به زبان آلمانی بود و اولین ترجمه انگلیسی آن فقط در ۱۹۵۵ انتشار یافت. اما به نظر من حتی اگر کتاب هم به انگلیسی قابل دسترسی می‌بود، فیزیک‌دانان دهه‌ی چهل آن را مفید نمی‌یافتند. در ایام آن سال‌ها فرهنگ فیزیک و فرهنگ ریاضیات به طور گسترده ای از هم متمایز شده بود. فرهنگ فیزیک تحت تأثیر افرادی نظیر اوپنهایمر بود که با شاعران و مورخانِ هنر رفاقت داشت، اما نه با ریاضی‌دانان. فرهنگ ریاضیات از توطئه بورباکی تأثیر پذیرفته بود که سعی بر آن داشت تا هر آن چه را که به طور خاص مجرد نبود از ریاضیات حذف کند. فاصله‌ی بین فیزیک و ریاضیات به پهنای فاصله‌ی دانش[۱] و علوم انسانی می‌بود که توسط سی. پی. اسنو[۲] در سخنرانی معروفش در مورد دو فرهنگ ایراد شده بود. جانی یکی از معدود افرادی بود که در هر چهار فرهنگ می‌گنجند: در فیزیک و ریاضیات، همچنین در دانش و علوم انسانی.

مفهوم محوری در تفسیر جانی از مکانیک کوانتم، فضای هیلبرت مجرد است. فضای هیلبرت فضایی با بعد نامتناهی است که در آن وضعیت‌های کوانتمی، بردارها و کمیت‌های قابل مشاهده، عملگرهای خطی هستند. هیلبرت این فضا را خیلی قبل‌تر از زمانی که مکانیک کوانتم آن را سودمند

---

1) Science 2) C. P. Snow

یابد، تعریف و بررسی کرده بود. مفید بودن غیرقابل تصور فضاهای هیلبرت، از این حقیقت که معادلات مکانیک کوانتم دقیقاً خطی هستند ناشی می‌شود. عملگرها تشکیل یک جبر خطی می‌دهند و وضعیت‌ها [1] می‌توانند در ذرات [2] تعریف شده به وسیله نمایش‌های خطیِ جبر، مرتب گردند. جانی علاقه داشت تا مسأله‌های فیزیک را در زبان مجرد و عمومی فرمول‌بندی کند، بنابراین مکانیک کوانتم را به عنوان یک نظریه از حلقه‌ی عملگرهای خطی روی یک فضای هیلبرت فرمول‌بندی کرد. حلقه یعنی مجموعه‌ای از عملگرها که می‌توانند باهم جمع، از هم کم و یا در هم ضرب گردند اما ممکن است عمل تقسیم امکان پذیر نباشد. هر سیستم فیزیکی که از قوانین فیزیک کوانتم پیروی کند می‌تواند به وسیله‌ی یک حلقه از عملگرها تشریح گردد.

جانی شروع به مطالعه‌ی حلقه عملگرها کرد تا دریابد چه تعداد از انواع مختلفی از سیستم‌های کوانتمی می‌تواند وجود داشته باشد. بعد از این‌که جانی کتاب مکانیک کوانتمش را انتشار داده بود، برای چندین سال بسط نظریه‌ی حلقه‌ی عملگرها را ادامه داد. جلد سوم از مجموعه آثارش به طور کامل شامل مقالات مربوط به حلقه‌ی عملگرها است. او هفت مقاله طولانی با مجموع حدود پانصد صفحه منتشر ساخت. در اینجا در مورد این مقالات به یادماندنی بحث نخواهم کرد. آنها کارهای عمیق جانی را به عنوان ریاضی‌دان محض دربر دارند. او ثابت کرد که هر حلقه از عملگرها حاصل‌ضربی است از حلقه‌های تحویل‌ناپذیر که او آن‌ها را «عامل [3]» می‌نامید. او متوجه شد که پنج نوع عامل وجود دارد که دو تای آن‌ها پیش‌تر شناخته شده بودند. هرکدام از آن انواع دارای خصوصیات منحصربه فرد و غیرمنتظره می‌باشند. در حالیکه او اقیانوس حلقه‌ی عملگرها را واکاوی می‌کرد، متوجه قاره‌های جدیدی شد که زمان برای بررسی مفصل آن‌ها نداشت. او مطالعه آن سه نوع جدید از عامل‌ها را پایان نیافته رها نمود. قصد داشت روزی تلفیقی گسترده از کارهایش روی حلقه‌ی عملگرها را منتشر کند. این تلفیق گسترده یک شاهکار نانوشته از او همانند سمفونی هشتم سیبلیوس [4] باقی گذاشت.

کتاب مکانیک کوانتم آخرین مورد از ثمره‌هایی است که جانی به زبان آلمانی منتشر کرد. آن اثر در سال ۱۹۳۲ زمانی که وی وقت خود را به طور یکسان بین برلین و پرینستون تقسیم می‌نمود انتشار یافت. در همان سال، شروع به نوشتن مقالاتی به‌زبان انگلیسی کرد. یکی از مقالاتش که به انگلیسی پدیدار گشت « اثبات فرضیه شبه ارگودیک»[۱۰] بود که او آن را در مجموعه مقالات آکادمی ملی علوم [5] منتشر کرد تا مطمئن شود ریاضی‌دانان آمریکایی آن را خواهند خواند. این مقاله مسأله‌ی مهمی در مکانیک کلاسیک را با استفاده از همان مفهوم فضای هیلبرت که او برای حل مسائل مکانیک کوانتم به کار گرفته بود، حل نمود. یک سیستم دینامیکی کلاسیک را ارگودیک گوییم اگر پس از آن‌که آن را در حالت اولیه قرار داده و برای مدت نامتناهی به حال خود رها کنیم، به طور دلخواهی به هر حالت نهایی با استقلال احتمالی نسبت به حالت اولیه نزدیک گردد. جانی ثابت کرد که تحت شرایط کاملاً خاص معین، یک سیستم ارگودیک است اگر و تنها اگر هیچ ثابتی از حرکت

1) States   2) Multiplets   3) Factor   4) Sibelius   5) Proceedings of the National Academy

وجود نداشته باشد. ثابتِ حرکت، کمیتی است وابسته به حالت سیستم که تغییر نمی‌کند آن هنگام که سیستم نسبت به زمان رو به جلو حرکت می‌کند.
قضیه‌ی جانی بنیان مستحکم ریاضی را برای فرضیاتی که توسط فیزیک‌دانان در استعمال مکانیک آماری به طور عادی ساخته می‌شد، فراهم می‌کرد. با بیانی درهم و آشفته که توسط فیزیک‌دانان استفاده می‌شد قضیه بیان می‌کند که زمانِ متوسط یک مسیرِ تنها از سیستم، در یک زمان طولانی، با میانگین آماری تمام مسیرها برابر است. حتی باز هم آشفته‌تر، فیزیک‌دانان می‌گویند: میانگین‌های زمانی با اثر کلی[۱] میانگین‌ها برابرند؛ منظور ما از اصطلاح اثر کلی مجموعه تمام حالات یک سیستم است.
یکی از ریاضی‌دانانی که مقاله‌ی جانی را در مجموعه‌ی «مقالات آکادمی ملی» خواند گرت بیرکاف[۲] بود. گرت پسر جورج بیرکاف بود و پدر و پسر ریاضی‌دانان معروفی بودند. گرت و جانی دوستانی صمیمی شدند و گرت برای ملاقات‌های فراوانی به پرینستون می‌آمد. بعد از مرگ جانی، گرت یادنامه‌ای درباره کارهای جانی در دهه ۱۹۳۰ نوشت. در اینجا یک جمله از یادداشت گرت را می‌آوریم. هرکس که مایل است به احساسی فراموش ناشدنی از لبه تیغ ذهن فون نویمان دست یابد، تنها نیازمند این است که سعی کند این زنجیر از دلایل دقیق را پیگیری کند تا بفهمد که بیش از پنج صفحه‌ی آن قبل از صبحانه، با لباس حمام و نشسته پشت میز تحریر در اتاق نشیمن نوشته شده بود.
شاخه‌ی کوچکی از تفکر جانی در مورد عملگرها در فضاهای هیلبرت اکتشاف او در «هندسه‌ی پیوسته» بود. نوع جدیدی از هندسه که در آن بُعد یک زیرفضا متغیری پیوسته است. دو مقاله‌ی کوتاه با عناوین «هندسه‌ی پیوسته»[۱۱] و «مثال‌هایی از هندسه‌ی پیوسته»[۱۲] در گلستان او یافت می‌شود. این مقالات در ۱۹۳۶ انتشار یافتند، آن هنگام که جانی در پرینستون اقامت داشت. جانی در ابتدا نوشته است: تنها اصول و کمی تفسیر در مورد آن‌ها و سپس تعاریف اصلی و نتایج را ارائه خواهیم کرد. جزئیات محاسبه به زودی در نشریات ریاضی ظاهر خواهند شد. این عهدی بود که هرگز به آن وفا نشد. از این لحظه به بعد در زندگی، او از این وعده‌های شکسته شده زیاد داد. او به کارکردن روی مسئله، حل‌کردن آن برای رضایت خاطر خودش و نگذاشتن وقت برای انتشار نتایج با جزئیات عادت کرده بود. جانی یک سخنرانی درباره‌ی هندسه پیوسته در پرینستون ارائه داد. یادداشت‌های سخنرانیش در کتابِ هندسه‌ی پیوسته انتشار یافت که در ۱۹۶۰ و بعد از مرگش چاپ شد. کتاب کسالت‌آور است. احتمالاً کسالت‌بارترین چیزی است که تا آن زمان تحت نام جانی انتشار یافت. از روی کتاب می‌توانید حدس بزنید که جانی نیز زمانی که هندسه‌ی پیوسته را تشریح می‌کرده، کسل شده بود. او دلایل موجهی برای انتشار ندادن یادداشت‌هایش در زمانی که زنده بود، داشت. نیازی به انتشار و یا حذف و نابودی نداشت. او در کسوت استاد رسمی مؤسسه مطالعات پیشرفته بود. بعد از ۱۹۳۶ او تنها چیزی را منتشر می‌کرد که آن را مهم می‌یافت و نه کسالت‌آور. همچنین جانی به طور فزاینده‌ای به طیف گسترده‌ای از موضوعات بیرون ریاضیاتِ مجرد علاقمند

1) Ensemble 2) Garret Birkhoff

شد. زمانی که در بوداپست ریاضیات می‌خواند، در نهایت مدرکی در مهندسی شیمی از ETH در زوریخ دریافت کرد.

## بمب و رایانه

ثمره‌ی بعدی او گزارشی بود که در ۱۹۴۲ نوشته شد[۱۳] و تحلیلی دقیق و علمی از آنچه در هنگامِ انفجار مواد منفجره‌ی شیمیایی اتفاق می‌افتد، ارائه می‌کرد. جانی دیده بود که کشورش، مجارستان، به عنوان نتیجه‌ای از شکست نظامی ۱۹۱۸ تجزیه گردید. او حتی مشتاق‌تر از یهودیان اروپایی برای شرکت در جنگ بر علیه هیتلر بود. او محظوظ بود تا مهارت‌های ریاضی و دانشش در مهندسی را برای مسائل نظامی به کار برد و قبل از ورود ارتش آمریکا به جنگ در ۱۹۴۱، مشاور آن‌ها گردید. گزارش سال ۱۹۴۲ او یکی از سلسله کارهایی است که شالوده‌ای نظری برای بهبود عمل‌کرد مواد منفجره نظامی را فراهم می‌آورند. مواد منفجره‌ی نظامی سازشی ظریف بین دو نیاز مخالف هستند: آن‌ها باید وقتی با خشم شلیک می‌شوند، با بیشترین بازده منفجر شوند و زمانی که در معرض تیراندازی و یا انفجارهای تصادفی قرار می‌گیرند، باید با ایمنی بالا مقاومت کنند. زمانی که برای یافتن بهترین مصالحه تلاش می‌کنید، داشتن مشاوری که هم ریاضیات و هم شیمی را به خوبی درک کرده است، کمکی بسیار بزرگ است. گزارش جانی در مورد سلاح‌های خاصی بحث نمی‌کند اما نظریه‌ی ریاضی‌ای را فراهم می‌آورد تا طراحان سلاح‌ها برای بهینه سازی طراحی‌های خود از آن استفاده کنند. زمانی که او شروع به کار برای ارتش کرد، کاربردهایش در گلوله‌های توپ‌خانه و تغییرات عمق ضد زیردریایی‌ها بود. در ۱۹۴۳ توسط دوستش رابرت اوپنهایمر برای بازدید از لوس‌آلاموس [۱] و عملی ساختن نقشه‌اش برای طراحی سلاح اتمی دعوت شد. درک او از امواج شوک [۲] سهم بزرگی برای موفقیت در پروژه‌ی لوس‌آلاموس را به وجود آورد. در لوس‌آلاموس او محاسبات عددی غول‌آسایی را می‌دید که توسط تلاش بی وقفه دسته‌هایی از محاسبان انسانی انجام می‌گرفت. او با جدیت شروع به فکر کردن در مورد امکان ایجاد رایانه‌های الکترونیکی نمود که این قبیل محاسبات را بهتر و سریع‌تر از بشر انجام می‌دهند. در ۱۹۴۴ او هرمان گلداشتاین [۳] را در دانشگاه پنسیلوانیا ملاقات کرد، که به عنوان افسر ارتشی جوان در پروژه ساخت رایانه الکترونیکی واقعی انیاک [۴]، شرکت کرد. جانی و هرمان دوستانی صمیمی شدند. هرمان بعداً درباره‌ی جانی گفت: با این‌که او در واقع یک شخص والامقام [۵] بود، با دقت انسان‌ها را مطالعه کرده بود و می‌توانست از آن‌ها به طور کامل تقلید کند. در واقع او روابط اجتماعی قوی داشت، خیلی خون‌گرم، دارای شخصیت انسانی و به شدت شوخ‌طبع بود. به محض اتمام جنگ، آنها طرحی را برای انجام دادن کاری غیر عادی با رایانه‌ها آغاز کردند. در گلستان جانی مقاله‌ای تحت عنوان «بررسی اصول ماشین‌های محاسباتی مقیاس بزرگ»[۱۴] وجود دارد که طرحشان را تشریح می‌کند.

1) Los Alamos 2) Shock Waves 3) Herman Goldstine 4) ENIAC 5) Demi-God

در مورد این مطلب چیز بیشتری نخواهم گفت، زیرا کار جانی روی رایانه‌ها توسط سخن‌رانان دیگر پوشش داده شده است.
من زمانی که در ۱۹۴۸ به مؤسسه مطالعات پیشرفته آمدم، شخصیت جانی را به طور حضوری شناختم. او سپس به طور فعال مشغول ساخت رایانه‌ی موسسه و دریافتن نحوهٔ استفاده از آن بود. او از ابتدا دریافته بود که دو مورد از مهم‌ترین کاربردهای این ماشین، پیشگویی هوا و مدل‌سازی اقلیم[۱] خواهد بود. او مهندسان را برای ساختن ماشین و هواشناسان را برای استفاده از آن استخدام نمود. مهندس ارشد ژولین بیگلو[۲] و هواشناس ارشد، ژول چارنی[۳] بودند. هرکدام از آنها دسته‌ای از افراد جوان، برای انجام کارهای سنگین داشتند، که تولید نوع کاملاً جدیدی از یک ماشین را که می‌تواند کمی دانش واقعی تولید کند، ترغیب می‌کردند. من از آن افراد جوان با داد و فریادها و رفتارهای به دور از نزاکتشان بسیار لذت بردم. تلاقی سرگرم‌کننده‌ای از فرهنگ‌ها بین این اراذل و اوباش جوان و اعضای مسن‌تر موسسه وجود داشت. همان گونه که اینشتین به دوستش، یعنی ملکه بلژیک، زمانی که او در ۱۹۳۳ به موسسه آمد، می‌نویسد: پرینستون دهکده‌ای رسمی و جالب بود که اهالی آن والا مقامانی ایستاده بر روی چوب‌پاها[۴] بودند. فرهنگ اعضای مسن‌تر بر مبنای آداب رسمی و احترام به سلسله مراتب دانشگاهی بود. من و جانی در طرف اراذل و اوباش بودیم.
زمانی که جانی درگذشت، موسسه به سرعت از پروژه رایانه دست کشید و به نظم سابق خود بازگشت. هیچ اوباش دیگری استخدام نشد و نسیم هوای تازه که آن‌ها با خود برای موسسه به ارمغان آورده بودند با رفتن‌شان به UCLA[۵] و MIT[۶] وزیده شد. در ۱۹۸۰ موسسه تولد پنجاه سالگی‌اش را با انتشار یک جلد کتاب تحت عنوان «انجمنی از دانشمندان، ۱۹۸۰ — ۱۹۳۰» که شامل شرح حال و کتاب‌شناسی اعضا بود، جشن گرفت. در کتاب به هیچ یک از این اراذل و اوباش که ماشین را ساختند و هوا را پیش‌بینی کردند اشاره‌ای نشد. آن‌ها به اندازه کافی علمی نبودند که عضویت‌شان در موسسه به رسمیت شناخته شود. اما نهال دیگری که در گلستان جانی وجود داشت، یک مقاله با عنوان «انتگرال‌گیری عددی از معادله گردابی[۷] باروتروپیک * به وسیله چارنی، فیورتوفت[۸]، و فون نویمان بود که اولین تلاش‌های آن‌ها برای پیش‌بینی هوا را تشریح می‌کند. از آنجا که رایانه‌ی موسسه هنوز به کار نیفتاده بود، آن‌ها محاسباتشان را با انیاک انجام دادند. در استفاده از انیاک، شبیه‌سازی عددی در زمان، از هوایی که برای شبیه‌سازی در نظر گرفته شده بود آهسته‌تر پیش می‌رفت. از این رو پیش‌بینی واقعی وجود نداشت. در پایان آن‌ها ابراز امیدواری کردند که رایانه‌ی مؤسسه به قدر کافی سریع خواهد بود تا از زمان واقعی پیش افتد. چهار سال بعد، زمانی که ماشین جانی و ماشین‌های مشابه به کار افتادند، آرزویشان برآورده شد. سپس جانی اعلام کرد که پیش‌بینی هوای بیست و چهار ساعت آینده ظرف کمتر از یک ساعت قابل انجام است.

---

1) Climate 2) Julian Bigelow 3) Jules Charney 4) On stilts 5) Univercity of California Los Angles 6) Massachusetts Institute of Technology 7) Vorticity 8) Fjortoft

*) جریانی را باروتروپیک [Barotropic] گویند که در آن چگالی تنها به فشار بستگی داشته باشد و برعکس. م

آن نقطه دورترین مکانی بود که او برای رفتن به سوی آرزویش در درک اقلیم پیمود. یک سال بعد سرطانی بدخیم[1] وجود او را فرا گرفت و سه سال بعد درگذشت.

## جمع بندی

جانی در دهه‌ی آخر زندگی‌اش زمان برای نوشتن مقالات ریاضی رسمی نداشت. در عوض مقالاتِ غیر رسمی می‌نوشت که گاهی همکارانش در سازمان‌های دولتی را که حامی کارش بودند مخاطب قرار می‌داد و گاهی عموم مردم را. در دو ثمره آخر در سیاحت من از گلستان او روی سخنش به عموم است. آن‌ها نوشته‌هایی متفکرانه و زیبا هستند. او رنج فراوانی برای شفاف فکر کردن و ساده نوشتن کشید. اولینِ آن دو «ریاضی‌دان»[۱۶] نام نهاده شده است که در ۱۹۴۷ به عنوان فصلی از یک کتاب مقالات با عنوان «کارکردهای ذهن»، با نویسندگانی گوناگون، انتشار یافت. آن یک وداع بود که به عبارت ساده این نتیجه که جانی به انتهای زندگی خود به عنوان ریاضی‌دان رسیده بود را خلاصه می‌کرد. او بهترین سال‌های زندگی‌اش را به ریاضیات محض اختصاص داد، زمانی که او هم‌چنان که نیوتن از سال‌های آغازینش می‌گفت، در ابتدای زندگیش در ابداع و نوآوری، بود. از نوزده‌سالگی تا بیست و هفت سالگی او برای ساختن شالوده‌ی مستحکم منطقی برای ریاضیات در کشمکش بود و جهان را برای کشف گودل که هیچ مجموعه از بنیان‌ها نمی‌توانند کامل باشند، آماده ساخت. بعد از انقلاب گودل او مزیت این آزادی جدید را دنبال کرد تا مکانیک کوانتم و رشته‌ای که بعدتر علوم کامپیوتر نام نهاده شد را با بنیان‌های منطقی بیازماید. مقاله‌ی او «ریاضی‌دان» توسعه ریاضیات را به عنوان مخلوق آزاد ذهن بشر، با بنیان‌هایی که یا از دانش‌های تجربی به عاریت گرفته شده‌اند و یا به طور آزاد خلق گشته‌اند، توصیف می‌کند.

پیغام اصلی مقاله‌ی جانی در پایانْ با کلماتی که در میان ریاضی‌دانان معروف شده است بیان می‌کند که:« همان‌طور که یک شاخه‌ی ریاضیات به خیلی دورتر از منبع تجربی‌اش سفر می‌کند، و یا حتی بیشتر، اگر از نسل دوم یا سومی باشد که فقط به طور غیر مستقیم از ایده‌هایی که از حقیقت می‌آیند الهام گرفته باشد، با خطرات وخیمی احاطه می‌گردد... یک موضوع ریاضی در یک فاصله دور از منبع تجربی‌اش، یا بعد از تولید و تناسل مجرد در خود، در خطر انحطاط قرار می‌گیرد. سبکْ معمولاً در ابتدا کلاسیک است. مادامی که علائمِ بی‌تناسبی را نشان دهد، علامتِ خطر رو به بالاست. آوردن مثال‌هایی برای دنبال کردن این تکَامل‌های خاص به بی‌تناسبی و بی‌تناسبی خیلی زیاد، آسان خواهد بود. اما این دوباره بیش از حد فنی خواهد بود. در هر رویداد، هر زمان که این مرحله فرا می‌رسد، برایم تنها راه درمان بازگشت به مبدأ و از سرگیری مجدد، با تزریق کم یا زیاد ایده‌های تجربی مستقیم است. من متقاعد شده‌ام که این شرط برای نگاه داشتن تازگی و پویایی موضوع ضروری است و این در آینده به همان اندازه درست خواهد بود.» احتمالاً جانی پیچیده‌سازی بیهوده‌اش با هندسه‌ی پیوسته را به عنوان مثالی برای بی‌تناسبی خیلی زیاد و غوطه‌ور شدن در جهان

1) Terminal Cancer

تجربی علوم رایانه را به عنوان شروع مجدد از مبدأ در ذهن داشت.

بعد از این وداع با ریاضیات، هفت سالِ آخر زندگی جانی بین اجرای پروژه رایانه پرینستون و مشاوره با دولت در واشنگتن تقسیم شده بود. در طول این ایام او برای عموم به عنوان یک تندروی نظامی شناخته شده بود. برای سال‌های معدودی به طور عمومی از یک جنگ پیش‌گیرانه بر علیه اتحاد جماهیر شوروی حمایت می‌کرد. او عمیقاً وارد کمیته‌های سطح بالا شد که مسائل استراتژی نظامی را بررسی می‌کردند. یکی از این کمیته‌ها، که برای مورخان به عنوان کمیته فون نویمان شناخته شده است، از مبنا قرار دادن استراتژی ایالات متحده بر نیروی موشک‌های قاره پیمای بالستیک، که از ترکیب تکنولوژی‌های موشک‌های چند مرحله‌ای و بمب‌های هیدروژنی حاصل می‌شود، حمایت می‌کرد. این تصمیم از لحاظ تکنولوژی به آمریکا امکان می‌داد تا اتحاد شوروی را در ظرف چهل دقیقه نابود سازد، البته با این پی‌آمدِ غیر قابل اجتناب که شوروی نیز قادر می‌شد با نیروی موشکی مشابهی چند سال بعدتر آمریکا را نابود سازد.

ایده‌ی یک جنگ هسته‌ای پیش‌گیرانه امروز احساس یک جنگ طلبی دیوانه‌وار را می‌رساند. اما برای نسلی که در دهه ۱۹۳۰ می‌زیست و رنج می‌برد معنای دیگری داشت. این ایده به طور گسترده‌ای، به خصوص توسط روشن‌فکران لیبرال، جاافتاده بود که دولت مردان فرانسه و بریتانیا آنگاه که در جلوگیری از پیشروی هیتلر برای نظامی کردن مجدد سرزمین راین[1] شکست خوردند، به طرزی بزدلانه و غیراخلاقی رفتار کرده بودند. جنگ پیش‌گیرانه در ۱۹۳۶، زمانی که آلمان هنوز به طور مؤثری خلع سلاح و ناتوان از مقاومت جدی در مقابل حمله آن‌ها بود، می‌توانست رژیم هیتلر را در مدت محدودی محو نماید و پنجاه میلیون انسان را که در جنگ جهانی دوم کشته شدند، نجات می‌داد. ما نمی‌توانیم بفهمیم که آیا یک جنگ پیش‌گیرانه در ۱۹۳۶ می‌توانست عملی و تأثیر گذار باشد. ما تنها می‌دانیم که ایده‌ی جنگ پیش‌گیرانه به عنوان یک گزینه‌ی قابل قبولِ اخلاقی، به طور گسترده‌ای توسط نسل جانی پذیرفته شده بود، همان‌هایی که به سال ۱۹۳۶ به عنوان زمان از دست رفته غم انگیزی می‌نگریستند. برای آن‌ها ایده‌ی پیش‌گیری کردن از یک فاجعه هولناک به وسیله یک اقدام جسور پیش‌گیرانه، نه دیوانگی بود و نه جنایی.

جانی در دهه‌ی ۱۹۴۰ ادعا کرد که آمریکا با همان انتخابی رو به رو می‌گردد که فرانسه و بریتانیا در ۱۹۳۶ با آن مواجه شدند. اتحاد شوروی در حال شروع به ساخت یک پایه صنعتی برای تولید انبوه سلاح‌های هسته‌ای بود. جانی دهه‌ی ۱۹۴۰ را به عنوان آخرین شانس آمریکا در سرنگونی رژیم استالین می‌دید، همان‌طور که ۱۹۳۶ آخرین شانس سرنگونی هیتلر بدون جنگی برای نابودی و کشتار بود. او جنگ پیش‌گیرانه در دهه‌ی ۱۹۴۰ را نه فقط برای آمریکا بلکه برای کل‌بشریت، از جنگ برای نابودی در ادامه مطلوب‌تر می‌دانست. نمی‌گویم که او درست می‌گفت. من آن را غیر محتمل می‌دانم که جنگ پیش‌گیرانه می‌توانست به اهدافش در ۱۹۳۶ و یا در دهه ۱۹۴۰ برسد. من تنها می‌گویم که برای صحبت کردن در مورد حمایتِ جانی از جنگ پیش‌گیرانه بدون اشاره به

1) Rhineland

حوادث ۱۹۳۶ که بر درک او از مسائل اخلاقی چیره شده بود، از دست دادن نکته اصلی در استدلالات او می‌باشد.
آخرین ثمره‌ی گلستان جانی در گشت و گزار من، مقاله‌ای است که برای عموم نوشته شده و در مجله Fortune در ژوئن ۱۹۵۵، دو ماه قبل از شروع بیماری وخیم او انتشار یافت. عنوانش بود« آیا می‌توانیم تکنولوژی را زنده نگهداریم؟[۱۷]». جانی حالا دیگر نگران مسائل روشن‌فکرانه ریاضی‌دانان نیست. امانگرانی او بیشتر در مسائل بشر در جنگ و صلح، سلاح‌های هسته‌ای و توان هسته‌ای، گرمایش جهانی [1] و کنترل اقلیم، همچنین رایانه‌ها که قوانین اقتصادی و سیاسی را تغییر می‌دهند، می‌باشد. در هفت سال آخر زندگی‌اش، زمانی که به مرکز قدرت در واشنگتن نقل مکان نمود و با سیاست‌مداران و ژنرال‌ها رابطه‌ی دوستی برقرار کرد، دریافت که مشکلات مبرم جامعه بیشتر انسانی بود تا فنی. تصویر او از سرشت بشر غم‌افزا بود. «در حال حاضر شکایت کردن در مورد این‌که مردم خودخواه و خیانتکارند به همان اندازه احمقانه است که از این‌که میدان مغناطیسی افزایش نمی‌یابد مگر آن‌که میدان الکتریکی دارای حلقه باشد، شکایت شود. هر دوی آن‌ها قوانین طبیعت هستند». نقطه نظر او در مورد آینده به همان اندازه غم‌افزا بود. «احتمال جنگ هسته‌ای هولناک اخیر، ممکن است راه به مراتب هولناک تری را به دیگران نشان دهد. بعد از میسر شدن کنترل اقلیم جهانی، شاید تمام مشغله‌های اخیر ما ساده به نظر خواهند رسید. ما نباید خودمان را فریب دهیم. زمانی که این قبیل احتمالات قطعی گردند، مورد سوء استفاده قرار خواهند گرفت... یک حقیقت ثابت این است که مشکلات به خاطر سیر تکاملی است که با این حال که مفید و سازنده هستند، خطرناک نیز می‌باشند. آیا می‌توانیم اصلاحات مورد نیاز را با سرعت لازم تولید کنیم؟ جوابِ دلگرم‌کننده‌تر، این است که نوع بشر قبلاً در معرض آزمایش‌های مشابه قرار گرفته است و به نظر می‌رسد دارای توانایی مادرزادی برای به میان آمدن، بعد از تغییر یافتن اندازه مشکلات، می‌باشد. طلب کردن دستورالعملی کامل در پیشرفتْ غیر منطقی خواهد بود. ما تنها می‌توانیم صفات انسانی مورد نیاز را مشخص کنیم: صبر، انعطاف و هوش.» جانی خودش این صفات را داشت. آن‌ها هنوز صفاتی هستند که هنگام کوچ به جهانی که او خلقش کرده است، برای داشتن بهترین شانس بقاء نیاز داریم.

# مراجع


[1] JOHN VON NEUMANN, *Collected works*, A.H.Taub, ed., Pergamon Press, New York, 1961-1963.

[2] Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimalpolynomen (with M. Fekete), *Jahresbericht* 31, 125-138 (1922).

[3] Zur Einfüberhrung der transfiniten Zahlen, *Acta Szeged.*1, 199-208 (1923).


1) Global Warming

[4] Eine Axiomatisierung der Mengenlehr, *J.für.Math* 154, 219-240 (1925).

[5] Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math.Zeitschr.* 26, 1-46 (1927).

[6] Die Axiomatisierung der Mengenlehr, *Math.Zeitschr.* 27, 669-752 (1928).

[7] Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* 100, 295-320 (1928).

[8] Die Zerlegung eines intervalles in abzählbar viele kongruente Teilmengen, *Fund. Math* 11, 230-238 (1928).

[9] *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[10] Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat . Acad. Sci.* 18, 70-82 (1932).

[11] Continuous geometry, *Proc. Nat . Acad. Sci. U.S.A.* 22, 92-100 (1936).

[12] Examples of continuous geometries, *Proc. Nat . Acad. Sci. U.S.A.* 22, 101-108 (1936).

[13] *Theory of Detonation Waves, A progress report to April 1, 1942*, Office of Scientific Research and Development Section B-1, report 549, 34pp. (1942).

[14] On the principles of large-scale computing machines (with H.H. Goldstine), Office of Research and Inventions, Navy Department, unpublished (1946).

[15] Numerical integration of the barotropic vorticity equation (with J.G.Charney and R.Fjortoft), *Tellus* 2, 237-254 (1950).

[16] The mathematician. In *The Works of the Mind*, R.B. Heywood, ed., University of Chicago Press, 180-196, (1947).

[17] Can we survive technologhy? *Furtune*, (June 1955).

مترجم: علیرضا الفتی alireza.olfati@yu.ac.ir ، olfati.alireza@gmail.com
دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی
رستم محمدیان mohamadian_r@scu.ac.ir
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۸۵ تا ۹۷

# پایاها و نامساوی‌های جدید در هندسهٔ ریمانی

اعظم اعتماد دهکردی

چکیده

در بعضی از موارد اطلاعات زیادی از یک خمینهٔ ریمانی با درنظر گرفتن آن به عنوان زیرخمینه‌ای از یک فضای اقلیدسی و استفاده از رابطه‌های بین خواص ذاتی و خارجی آن به دست می‌آید. در این نوشتار براساس نتایج به دست آمده در طی ۴۰ سال اخیر توسط چن[1] دربارهٔ زیرخمینه‌ها، پایاها و نامساوی‌هایی را در هندسهٔ ریمانی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۱ ورود به بحث

حساب دیفرانسیل و انتگرال درآمدی بر نظریهٔ زیرخمینه‌ها است که با انحنای خم‌های مسطح شروع می‌شود. همچنین در هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی برای یک رویه در فضای اقلیدسی سه بعدی، دو کمیت مهم انحنای میانگین و انحنای گاوسی وجود دارد. انحنای میانگین به عنوان یک پایای خارجی، تنش رویهٔ پدید آمده از فضای زمینه را محاسبه می‌کند و همان‌گونه که در قضیه‌ی شگفت‌انگیز[2] گاوس بیان شده است، انحنای گاوسی تحت تغییر شکل‌های ایزومتری تغییر ناپذیر است، از اینرو یک پایای ذاتی و درونی برای رویه محسوب می‌شود. اما وقتی فضاهای ریمانی مطرح شدند، هندسهٔ رویه‌ها در فضای اقلیدسی سه بعدی به هندسهٔ دیفرانسیل زیرخمینه‌های با بعد بالاتر از خمینه‌های ریمانی تعمیم یافت. در ادامه، بینش دسته‌بندی خواص رویه به ذاتی و خارجی در مورد رویه‌ها با دو نمونه‌ی انحنای گاوسی و انحنای میانگین به خمینه‌های ریمانی تسری پیدا کرد که یکی از آثار آن فراهم شدن پایه‌های ریاضی نظریهٔ نسبیت اینشتین است.

---

1) B.Y. Chen  2) Gauss's Theorema Egregium

به گفتهٔ چن پایاهای ریمانی به عنوان مشخصات ذاتی خمینه‌های ریمانی در رفتار کلی آنها موثر هستند، همانگونه که DNA در رفتار موجودات زنده مؤثر است. از این پایاهای ریمانی می‌توان پایاهای انحنا، مانند انحناهای مقطعی، ریچی و عددی را نام برد که در فیزیک نیز نقشی اساسی برعهده دارند. برای مثال بنابه گفتهٔ اینشتین، حرکت هر جسم در یک میدان جاذبه توسط انحنای فضا—زمان تعیین می شود. همچنین همهٔ انواع سطوح هندسی در طبیعت از حباب صابون گرفته تا سلول‌های قرمز خون با انحناهای مختلف تعیین می‌شوند. یکی از مسائل اساسی مطرح در زمینهٔ پایاهای اصلی ذاتی و خارجی یک زیرخمینه، یافتن رابطه‌ای ساده بین آنها است. اهمیت این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که طبق قضیهٔ نشانندگی نش[۱]، هر خمینهٔ ریمانی $n$ ـ بعدی را همواره می‌توان به عنوان زیرخمینه‌ای از یک فضای اقلیدسی با بعد $m$ در نظر گرفت که $m = \frac{۳}{۲}(n + ۱)(۳n + ۱)$. پس وجود ارتباط سادهٔ بین پایاهای ذاتی و خارجی یک زیرخمینه منتج به یافتن اطلاعاتی در مورد خواص ذاتی هر خمینه به کمک خواص خارجی آن نسبت به فضای اقلیدسی می‌گردد. البته مسئله به این سادگی هم نیست، برای مثال یک خمینهٔ سه بعدی در یک فضای اقلیدسی با بعد ۱۲۰ نشانده می‌شود که دارای اختلاف بعد ۱۱۷ با فضای زمینه است و این اختلاف بعد، درک رابطهٔ بین آنها را مشکل می‌سازد. از طرف دیگر غیر از معادلات اساسی گاوس، کدآزی و ریچی، نتیجهٔ عملی دیگری برای زیرخمینه‌های ریمانی دلخواه وجود ندارد. علاوه بر این چنان که یائو[۲] می‌گوید

«با این که قضیهٔ نشانندگی ایزومتری نش شهرت فروان کسب کرده است، هنوز ما چگونگی نشانندگی ایزومتری خوب یک خمینه به مفهوم مطلق را نمی‌دانیم. کنترل کمیت‌های خارجی در رابطه با کمیت‌های ذاتی چیزی است که قضیهٔ نش فاقد آن است.»

## ۲ پایاهای ریمانی چن

بنابر معادلهٔ گاوس، تانسور انحنای ریمانی $R$ و دومین فرم اساسی $h$ مربوط به زیر منیفلد ریمانی $(M, g)$ از یک فضای اقلیدسی در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند،

$$R(X, Y; Z, W) = g(h(X, W), h(Y, Z)) - g(h(X, Z), h(Y, W))$$

که در اینجا $W, Z, Y, X$ میدان‌های برداری دلخواه مماس بر $M$ هستند.

از این معادله فوراً نتیجه می‌شود که شرط لازم برای این که یک خمینهٔ ریمانی یک غوطه‌وری مینیمال در هر فضای اقلیدسی را بپذیرد این است که انحناهای ریچی و عددی آن روی $M$ غیر مثبت باشد. طی سال‌های متمادی، مثبت بودن انحنای ریچی در مورد یک خمینه، تنها مانع کشف شده برای وجود یک غوطه‌وری مینمال به یک فضای اقلیدسی بود. چن برای یافتن موانع جدید جهت وجود غوطه‌وری مینیمال، ابتدا نوع جدیدی از پایاهای ریمانی و عددی را معرفی کرد که به طور طبیعی متفاوت با پایاهای کلاسیک نظیر انحناهای ریچی هستند و آنها را $\delta$ ـ پایا نامید.

1) J. F. Nash  2) S.Y. Yau

فرض کنیم $M$ یک خمینهٔ ریمانی $n$ ــ بعدی، $p \in M$ و $K(\pi)$ انحنای مقطعی صفحهٔ $\pi \subset T_pM$ باشد. برای پایه‌ی متعامد یکهٔ $\{e_1, ..., e_n\}$ از $T_pM$، انحنای عددی $\tau$ در $p$ توسط فرمول $\tau(p) = \sum_{i<j} K(e_i, e_j)$ محاسبه می‌شود. اگر $L \subset T_pM$، برای $r \geq 2$ زیرفضایی از بعد $r$ با پایهٔ متعامد یکهٔ مفروض $\{e_1, ..., e_r\}$ باشد، انحنای عددی $L$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tau(L) = \sum_{\alpha<\beta} K(e_\alpha, e_\beta) \qquad 1 \leq \alpha < \beta \leq r$$

برای عدد صحیح $n \geq 2$ و عدد صحیح نامنفی $k$، $S(n,k)$ را مجموعه‌ی متناهی شامل همه‌ی $k$ ــ تایی‌های $(n_1, ..., n_k)$ از اعداد صحیح در نظر می‌گیریم که $2 \leq n_1, ..., n_k \leq n-1$ و $n_1 + ... + n_k \leq n$. اکنون $S(n)$ بصورت اجتماع $S(n,k)$ها برای $n$ ثابت و اعداد نامنفی ممکن $k$، تعریف می‌شود. قابل توجه است که تعداد اعضای $S(n)$ کاملاً سریع رشد می‌کند، چنان که $|S(2)| = 1$ و $|S(100)| = 190569291$.

حال برای هر $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، پایای $\delta(n_1, ..., n_k)$ در هر نقطه‌ی $p \in M$ به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \inf(\tau(L_1), ..., \tau(L_k))$$

که در آن $L_1, ..., L_k$ روی همه‌ی $k$ زیرفضاهای دوبدو متعامد $T_pM$ با $\dim L_i = n_i$ برای $i = 1, ..., k$، تغییر می‌کند. قراداد می شود $\delta(\oslash)(p) = \tau$ که به آن $\delta$ ــ پایای بدیهی گویند. ملاحظه می‌شود که $\delta(2)(p) = \tau(p) - \inf K(p)$ و $\delta(n-1)(p) = \mathrm{Max}\ Ric(p)$.

از آنجا که $\delta$ ــ پایاهای غیر بدیهی از تفریق مقدار معینی انحناهای مقطعی از انحنای عددی به دست می آیند با دو انحنای ریچی و مقطعی بعنوان «جمع‌های کلی» انحناهای مقطعی روی خمینه‌های ریمانی، متفاوت هستند. در واقع $\delta$ ــ پایاها، پایاهای ضعیف‌تری هستند که چنان که قبلاً اشاره شد می‌توانند به یک تعبیر DNA خمینه‌های ریمانی را تعیین کنند. لازم به ذکر است همانند $\delta$ ــ پایاهای آفین و کیلری هم برای خانواده‌های خاص از خمینه‌ها تعریف شده‌اند.

## ۳ نامساوهای چن

چن دو نامساوی مهم را به ثبت رسانده است. یکی از نامساوی‌ها که اهمیت کمتری دارد به ارتباط مستقیم بین $k$ ــ انحنای ریچی و عملگر شکل $A$ از یک زیرخمینهٔ ریمانی دلخواه در یک فضافرم ریمانی با اختلاف بعد دلخواه اختصاص دارد. برای خمینهٔ ریمانی $n$ ــ بعدی $M$ و هر عدد صحیح $k$ که $2 \leq k \leq n$، فرض کنیم $\theta_k$ نمادی برای پایای ریمانی است که به صورت $\theta_k = (\frac{1}{k-1}) \inf Ric_L(X)$ تعریف می‌شود، که $L$ روی همهٔ $k$ ـ صفحه‌ها در $T_pM$ برای $p \in M$ و $X$ روی همهٔ بردارهای یکه در $L$ تغییر می‌کند. چن در [۴] ثابت کرد برای هر غوطه‌وری ایزومتری از یک خمینهٔ ریمانی $M$ به یک فضافرم ریمانی با انحنای مقطعی ثابت $c$، هرگاه $\theta_k \neq c$

خواهیم داشت،

$$A > \frac{n-1}{n}(\theta_k - c)I$$

که در اینجا $I$ نمایش نگاشت همانی روی کلاف مماس است. همچنین وی ثابت کرد که اگر $\theta_k = c$ آنگاه $A \geq 0$. نامساوی اول نتیجه می‌دهد که اگر در یک نقطه از $M$، $\theta_k > c$ آنگاه مقادیر ویژه‌ی عملگر شکل در آن نقطه بزرگتر از $\frac{n-1}{n}$ خواهد بود. همچنین نامساوی دوم برای حالت $\theta_k = c$، نتیجه می‌دهد که هر ابررویه با $k$ ـ انحنای ریچی مثبت در یک فضافرم ریمانی محدب قرار دارد ([۴] و [۲]).

نامساوی دیگر و مهم چن حاصل بکارگیری $\delta$ ـ پایاها در قضیهٔ بعدی است که با هدف ارائهٔ جواب کلی بهینه برای تکلیف چرن به صورت زیر است.

«موانع ذاتی جدید برای وجود غوطه‌وری‌های مینیمال از یک خمینهٔ ریمانی به یک فضای اقلیدسی همراه با شرط انحنای ریچی مثبت را بیابید».

محور اصلی قضیه زیر یک نامساوی است که نامساوی چن نامیده می‌شود.

**قضیه ۱.** فرض کنیم $M$ زیرخمینهٔ $n-$بعدی از یک فضافرم ریمانی با انحنای ثابت $c$ باشد. اگر برای $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ قرار دهیم

$$C(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2(n+k-1-\sum_{j=1}^k n_j)}{2(n+k-\sum_{j=1}^k n_j)}$$

$$B(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}(n(n-1) - \sum_{j=1}^k n_j(n_j-1))$$

آنگاه

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq C(n_1, ..., n_k)H^2 + B(n_1, ..., n_k)c \qquad (1)$$

که در آن $H^2$ مربع انحنای متوسط است. همچنین شرط لازم و کافی برای حالت تساوی در (۱) آن است که شرط خاصی برای عملگر شکل $M$ برقرار باشد.

با توجه به این قضیه، مانع نشانندگی مینیمال $M$ در یک فضای اقلیدسی، مثبت بودن یکی از $\delta$ ـ پایاهای آن است. همچنین با توجه به وجود خمینه‌ای که حالت تساوی در رابطه‌ی (۱) برای آن برقرار است، بهینه بودن این رابطه احراز می‌شود.

قضیهٔ ۱ توسط چن و همکارانش تعمیم بیشتری یافت و از زیرخمینه‌های فضافرم‌ها به غوطه‌وری‌های بین دو خمینه ریمانی به صورت قضیهٔ زیر بیان شد. در قضیهٔ زیر فرض می‌شود $(n_1, ..., n_k)$، $H^2$، $C(n_1, ..., n_k)$ و $B(n_1, ..., n_k)$ همانند قضیهٔ۱ تعریف شده‌اند. همچنین نمادهای $\Delta_1, ..., \Delta_k$ را با تعریف‌های زیر درنظر می‌گیریم.

$$\Delta_1 = \{1, ..., n_1\}, \quad ... \quad \Delta_k = \{n_1 + ... + n_{k-1} + 1, ..., n_1 + ... + n_k\}, \quad ...$$

$$\Delta_{k+۱} = \{n_۱ + ... + n_k + ۱, ..., n\}$$

**قضیه ۲.** برای هر غوطه‌وری ایزومتری از یک خمینهٔ ریمانی $n$ ــ بعدی $M$ به هر خمینه ریمانی دیگر $\widetilde{M}$ داریم،

$$\delta(n_۱, ..., n_k) \leq C(n_۱, ..., n_k)H^۲ + B(n_۱, ..., n_k)\mathrm{Max}\ \widetilde{K} \qquad (۲)$$

که در آن $\mathrm{Max}\ \widetilde{K}(p)$، ماکزیمم انحناهای مقطعی $\widetilde{M}$ تحدید شده به برشهای صفحات دو بعدی از $T_pM$ است.

حالت تساوی در (۲) در یک نقطهٔ $p \in M$ برقرار است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند،

$(i)$ پایه‌ای متعامد یکه مثل $\{e_۱, ..., e_m\}$ برای $T_pM$ موجود باشد که عملگر شکل $A$ در $p$ به صورت زیر باشد.

$$A_{e_r} = \begin{pmatrix} A_۱^r & . & . & . & ۰ & \\ . & . & & . & & \\ . & & . & . & & ۰ \\ . & & & . & . & \\ ۰ & . & . & . & A_k^r & \\ & & ۰ & & & \mu_r I \end{pmatrix}, \quad r = n + ۱, ..., m \qquad (۳)$$

که در آن $I$ ماتریس همانی و $A_j^r$ یک زیر ماتریس متقارن $n_j \times n_j$ است که $\mathrm{trace}(A_۱^r) = ... = \mathrm{trace}(A_k^r) = \mu_r$.

$(ii)$ اگر هر $K$ زیرفضای دوبدو متعامد $L_۱, ..., L_k$ از $T_pM$ که در رابطهٔ

$$\delta(n_۱, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \sum_{j=۱}^{k} \tau(L_j)$$

در $p \in M$ صدق کند، آنگاه برای هر $\alpha_i \in \Delta_i$ و $\alpha_j \in \Delta_g$ که $۱ \leq i \neq j \leq k + ۱$، داشته باشیم $\widetilde{K}(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) = \mathrm{Max}\ \widetilde{K}(p)$.

برای رعایت اختصار بیشتر و فشردهٔ قضیه فوق در حالتی که $\widetilde{M}$ یک فضای اقلیدسی است، چن برای هر $k$ ــ تایی $(n_۱, ..., n_k) \in S(n)$، نماد $\delta$ ــ پایای نرمال شدهٔ $\Delta(n_۱, ..., n_k)$ از یک $n$ ــ خمینه را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta(n_۱, ..., n_k) = \frac{\delta(n_۱, ..., n_k)}{C(n_۱, ..., n_k)}$$

**نتیجه ۱** برای هر غوطه‌وری ایزومتری از هر $n$ ــ خمینهٔ ریمانی $M$ به یک فضای اقلیدسی با اختلاف بعد دلخواه و هر $(n_۱, ..., n_k) \in S(n)$ داریم،

$$H^۲ \geq \Delta(n_۱, ..., n_k) \qquad (۴)$$

برای نقطهٔ $p \in M$ تساوی در (۴) برقرار است اگر و فقط اگر یک پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_۱, ..., e_m\}$ برای $T_pM$ وجود داشته باشد که عملگر شکل $A$ در $p$ نسبت به این پایه به صورت بیان شده در

قسمت $(i)$ از قضیهٔ ۲ باشد.
نامساوی (۴) بهینه است، چون زیر خمینهٔ غیر مینیمالی وجود دارد که در حالت تساوی آن صدق می‌کند. بعلاوه می‌توان نتیجهٔ زیر را با فرض $\widetilde{\Delta}_{\circ} = \max\{\Delta(n_{1}, ..., n_{k}) : (n_{1}, ..., n_{k}) \in S(n)\}$، به عنوان $\delta$ ـ پایای نرمال شدهٔ ماکزیمم، به دست آورد.

**نتیجه ۲** برای هر غوطه‌وری ایزومتری از هر $n$ ــ خمینه ریمانی $M$ به یک فضای اقلیدسی با اختلاف بعد دلخواه داریم،

$$H^{2} \geq \widetilde{\Delta}_{\circ}(p) \tag{5}$$

در این مرحله چن به یک اصل ماکزیمال به عنوان نتیجه اشاره می‌کند.

**نتیجه ۳(اصل ماکزیمال)** اگر یک زیر خمینهٔ $n$ ــ بعدی از یک فضای اقلیدسی برای یک $k$ ــ تایی $(n_{1}, ..., n_{k}) \in S(n)$ در $H^{2} = \Delta(n_{1}, ..., n_{k})$ صدق کند، آنگاه برای هر $j$ و هر $(m_{1}, ..., m_{j}) \in S(n)$ داریم $\Delta(n_{1}, ..., n_{k}) = \tilde{\Delta}_{\circ} \geq \Delta(m_{1}, ..., m_{j})$.
درمورد خمینه‌های خاص، نامساوی چن به شکل واضحی یک کران پایین برای مربع طول انحنای میانگین به صورت زیر ارائه می‌کند.

**قضیه ۳.** اگر $M$ قسمتی باز از $S^{m}(1)$ باشد، آنگاه برای هر غوطه‌وری ایزومتری $M$ در یک $m$ ــ فضای اقلیدسی، $H^{2} \geq 1$ . بعلاوه حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $M$ به عنوان یک قسمت باز از یک ابرکرهٔ عادی در یک زیرخمینهٔ تماماً ژئودزی $\mathbb{E}^{n+1} \subset \mathbb{E}^{m}$ نشانده شود.

**قضیه ۴.** فرض کنیم $M$ قسمتی باز از استوانهٔ کروی $S^{n-n_{1}+1}(1) \times \mathbb{E}^{n_{1}-1}$ باشد، آنگاه برای هر غوطه‌وری ایزومتری $M$ در $\mathbb{E}^{m}$ با اختلاف بعد دلخواه داریم، $H^{2} \geq (\frac{n-n_{1}+1}{n})^{2}$. بعلاوه حالت تساوی رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $M$ بعنوان یک قسمت باز از یک ابر استوانهٔ کروی در $\mathbb{E}^{n_{1}-1} \times \mathbb{E}^{n-n_{1}+2} \subset \mathbb{E}^{m}$ نشانده شود.

## ۴ غوطه‌وری ایده‌آل

اصل ماکزیمال مطرح شده توسط چن، وسیله‌ای برای تعریف وی از غوطه‌وری ایده‌آل در سال ۱۹۹۰ شد. یک غوطه‌وری ایزومتری از یک $n$ ــ خمینهٔ ریمانی $M$ به یک فضای اقلیدسی، ایده‌آل نامیده می‌شود اگر در همهٔ نقاط $M$ رابطهٔ $H^{2} = \widetilde{\Delta}_{\circ}$ برقرار باشد. با تعریف غوطه‌وری ایده‌آل، اصل ماکزیمال نتیجه می‌دهد که هر غوطه‌وری ایزومتری از یک $n$ ــ خمینه ریمانی $M$ به یک فضای اقلیدسی، که در همهٔ نقاط برای یک $k$ـتایی $(n_{1}, ..., n_{k}) \in S(n)$ در $H^{2} = \Delta(n_{1}, ..., n_{k})$ صدق کند، یک غوطه‌وری ایده‌آل است. با توجه به نتیجه ۱، زیرخمینه‌های ایده‌آل در هر نقطه کمترین مقدار تنش را دریافت می‌کنند.
مثال برای زیرخمینه‌های ایده‌آل، زیرخمینهٔ تماماً نافی از یک فضافرم حقیقی است. همچنین برای

هر عدد صحیح نامنفی $k$ که کمتر از جزء صحیح نصف یک عدد طبیعی $n$ است، استوانه‌ی کروی $E^k \times S^{n-k}$ یک ابررویهٔ ایده‌آل از فضای اقلیدسی $(n+1)$ ـ بعدی است. هر ابررویهٔ کیلری حقیقی مینیمال از یک فضافرم حقیقی نیز ابررویهٔ ایده‌آل است.

فرض کنیم منظور از بهترین مدل جهان (هندسی)، یک فضای ریمانی با بیشترین درجهٔ همگنی به این مفهوم باشد که گروه ایزومتری‌های آن بیشترین بعد ممکن را دارد. طبق کارهای انجام شده توسط لی، کلاین و کیلینگ این جهان عضوی از خانواده‌ی فضافرم‌های حقیقی است.

چن با استفاده از دو مفهوم غوطه‌وری ایده‌آل و بهترین جهان، بهترین روش زندگی را نشانندگی ایزومتری ایده‌آل، برای یک خمینه ریمانی در بهترین جهان تعریف کرد. به گفتهٔ وی این نامگذاری از این جهت است که راحت‌ترین زندگی در جهانی است که بیشترین درجه‌ی آزادی در آن وجود دارد، شکل حفظ می‌شود و به خاطر نشانندگی، خمینه خود را قطع نمی‌کند. با این وصف همهٔ مثال‌های فوق بهترین روش زندگی (هندسی) را دارند.

اما این بهترین روش زندگی برای همهٔ خمینه‌ها امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال صفحهٔ تصویری حقیقی هیچ غوطه‌وری ایده‌آلی را به فضافرم‌ها نمی‌پذیرد. بنابراین تعیین غوطه‌وری‌های ایده‌آل از همهٔ خمینه‌های ریمانی به فضافرم‌ها، اولین قدم در یافتن خمینه‌هایی با بهترین روش زندگی است که خود می‌تواند یک مسئلهٔ جهانی باشد. جواب این مسئله در حالت کلی مشکل است، بنابراین در سالهای اخیر فقط جوابهایی درمورد خانواده‌های خاصی از خمینه‌های ریمانی به این مسئله داده شده است. برخی از این جواب‌ها که اکثراً توسط چن به دست آمده است به شرح زیر هستند.

خمینه‌های ریمانی ۲ بعدی، همهٔ فضافرم‌ها، فضاهای ریمانی همگن تحویل‌ناپذیر و فشرده، خانوادهٔ زیرخمینه‌های لاگرانژی در فضافرم‌های مختلط، خانواده‌ی ابررویه‌های ایده‌آل به طور همدیس تخت، خانواده‌ی زیرخمینه‌های لاگرانژی در کرهٔ شبه کیلری ٦ بعدی.

در سال‌های اخیر چن همچنان مطالعه روی غوطه‌وری‌های ایده‌آل را ادامه داده است و در این راه توجه خود را به حالات خیلی خاص نظیر غوطه‌وری ایده‌آل در فضای اقلیدسی از بعد ۴ معطوف کرده است [۱].

## ۵ کاربردهایی برای پایاهای چن

دسته‌ی عمده‌ای از کاربردهای پایاهای چن که توسط وی به دست آمده است به بیان موانعی برای غوطه‌وری‌های ایزومتری خمینه‌ای در خمینه‌های ریمانی دیگر اختصاص دارد. در اینجا به موارد مهمی از آنها اشاره می‌شود.

**قضیه ۵.** فرض کنیم $M$ یک خمینهٔ ریمانی فشرده $n$ ـ بعدی با گروه بنیادی متناهی یا اولین عدد بتی صفر باشد. اگر برای $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، $\delta(n_1, ..., n_k) > 0$، آنگاه $M$ نمی‌تواند بطور ایزومتری در یک فضای اقلیدسی مختلط $n$ ـ بعدی $\mathbb{C}^n$، بعنوان یک زیرخمینه لاگرانژی غوطه‌ور شود.

نامساوی موجود در قضیهٔ فوق اکید است، چون یک غوطه‌وری لاگرانژی از کرهٔ ویتنی $n$ ــ بعدی به صفحهٔ مختلط $n$ ــ بعدی وجود دارد و شرط $\delta(n_1, ..., n_k) \geq 0$ برای هر $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ برقرار است. همچنین برای بعد بزرگتر از ۲، متناهی بودن گروه بنیادی یا صفر بودن اولین عدد بتی یک شرط لازم است [۳].

چن حالت کلی‌تر قضیهٔ ۳ یعنی وقتی که شرط فشردگی حذف شود را مورد بررسی قرار داد که حاصل آن قضیهٔ زیر است.

**قضیه ۶.** فرض کنیم خمینهٔ ریمانی $n$ ــ بعدی $M$ در یک نقطهٔ $p$ و برای یک $k$ ــ تایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، در شرط $\delta(n_1, ..., n_k)(p) > 0$ صدق کند. در این صورت این خمینه هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به خمینه‌های ریمانی با انحنای مقطعی غیر مثبت را نمی‌پذیرد. بخصوص $M$ هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به فضاهای اقلیدسی با هیچ اختلاف بعدی را نمی‌پذیرد.

قضیهٔ بعدی کاربرد دیگر $\delta$ ــ پایاها در اثبات وجود مانعی برای غوطه‌وری ایزومتری مینمال یک خمینه است که استغراق خاصی را می‌پذیرد.

**قضیه ۷.** اگر خمینهٔ ریمانی $M$ یک استغراق ریمانی غیر بدیهی با تارهای تماماً ژئودزی بپذیرد، آنگاه نمی‌تواند غوطه‌وری ایزومتری در هر خمینه ریمانی با انحنای غیر مثبت را بعنوان یک زیرخمینهٔ مینیمال بپذیرد.

یکی دیگر از مفاهیم مورد علاقهٔ چن که در مقالات زیادی به آن پرداخته است، لاپلاسین نگاشت‌های مختلف از جمله نگاشت گاوس است. در این بین بررسی شرایط برای هارمونیک بودن نگاشت‌ها و نیز نتایج آن از موارد مطرح برای چن است. با توجه به این مطلب موانعی نیز در مورد غوطه‌وری مینیمال حاصلضرب‌های پیچشی توسط چن به کمک $\delta$ ــ پایاها به دست آمده که مواردی از آن به صورت زیر است.

**قضیه ۸.** هرگاه $N_1 \times_f N_2$ یک حاصلضرب پیچشی از خمینه‌های ریمانی و نگاشت $f$ یک نگاشت هارمونیک باشد، آنگاه $N_1 \times_f N_2$ هیچ غوطه‌وری مینیمال به خمینه ریمانی از انحنای مقطعی منفی را نمی‌پذیرد. بعلاوه هر غوطه‌وری مینیمال $N_1 \times_f N_2$ به هر فضای اقلیدسی بی توجه به اختلاف بعد، یک حاصلضرب پیچشی است.

**نتیجه ۴** اگر $f \in C^\infty(N_1)$ یک تابع ویژه از عملگر لاپلاسین $\Delta$ با مقدار ویژه $\lambda > 0$ باشد، آنگاه حاصلضرب‌های پیچشی $N_1 \times_f N_2$ هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به یک خمینهٔ ریمانی با انحنای مقطعی غیر مثبت را نمی‌پذیرد.

چن همچنین نتیجهٔ ۴ را با جایگزینی فرض فشردگی $N_1$ بجای فرض درمورد $f$، اثبات کرد. ارتباط نزدیک بین مربع اندازهٔ دومین فرم اساسی و اولین مقدار ویژهٔ عملگر لاپلاسین، موجب شد که چن $\delta$ ــ پایاها را برای یافتن نتیجه‌ای ذاتی یعنی کران‌های پایین برای اولین مقدار ویژه به کار برد.

**قضیه ۹.** هرگاه $M$ خمینه‌ای ریمانی $n$ ـ بعدی، همگن، تحویل‌ناپذیر و فشرده باشد، آنگاه اولین مقدار ویژهٔ ناصفر $\lambda_1$ از عملگر لاپلاسین $\Delta$ برای هر $k$ ـ تایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ در نامساوی $\lambda_1 \geq n\Delta(n_1, ..., n_k)$ صدق می‌کند.

البته در حالت $k = 0$، قضیهٔ ۹ با نتیجه‌ای از ناگانو در [۲۰] یعنی $\lambda_1 \geq \frac{2n\tau}{n(n-1)}$ مطابقت دارد. همچنین با توجه به تعریف انحنای عددی نرمال شده، بیان دیگری از این نامساوی بصورت $\lambda_1 \geq n\widetilde{\Delta}_0$ است. در واقع نامساوی اخیر به همراه نتیجه‌ای از نظریهٔ خمینه‌های از نوع متناهی که تعریف آن در ادامه خواهد آمد، یک جواب برای این سؤال در قضیهٔ زیر (از مرجع [۷]) دارد که شرط لازم و کافی مجوز بهترین روش برای زندگی در بهترین جهان چیست؟

**قضیه ۱۰.** یک خمینهٔ ریمانی $n$ ـ بعدی، همگن، تحویل‌ناپذیر و فشرده، یک بهترین روش زندگی در فضایی اقلیدسی را می‌پذیرد اگر و فقط اگر در شرط ذاتی $\lambda_1 = n\widetilde{\Delta}_0$ صدق کند.

نتیجه‌ای مستقیم از این قضیه این است که چون برای فضای تصویری حقیقی $n$ ـ بعدی $\lambda_1 = 2(n+1)$ و $\widetilde{\Delta}_0 = 1$، از اینرو $\lambda_1 \neq n\widetilde{\Delta}_0$. درنتیجه این خمینهٔ ریمانی نمی‌تواند بهترین روش زندگی در هیچ فضای اقلیدسی را بپذیرد. چن جواب ساده‌ی دیگری نیز در [۷] به سوال شرط وجودی بهترین روش برای زندگی در بهترین جهان، به صورت زیر داده است.

**قضیه ۱۱.** هرگاه $v(M)$ نمایش حجم خمینهٔ ریمانی $n$ ـ بعدی فشرده $M$ باشد که در رابطهٔ

$$\lambda_1 > \frac{n}{v(M)} \int_M \widetilde{\Delta}_0 * 1$$

صدق می‌کند، آنگاه $M$ هیچگاه یک بهترین روش زندگی در فضایی اقلیدسی را نمی‌پذیرد.

## ۶ زیرخمینه‌های از نوع متناهی

گذشته از کارهایی در مورد زیرخمینه‌ها بطور عام، چن در زمینهٔ زیرخمینه‌های از نوع متناهی نیز مقالات متعددی منتشر کرده است. اولین مجموعهٔ مقالات چن در زمینه زیرخمینه‌های از نوع متناهی به صورت کتاب ([۹]) در سال ۱۹۸۴ به چاپ رسید که ارجاعات زیادی داشته است. چن همچنین در سال ۱۹۹۱ مسائل باز و حدس‌هایی در زمینه زیرخمینه‌های از نوع متناهی در [۶] منتشر کرد که تاکنون، پرداختن به مسائل باز و اثبات یا رد حدس‌های آن، دسته‌ای از محققان هندسهٔ ریمانی را به خود مشغول کرده است. البته نسخهٔ تجدید نظر شده‌ای از مقاله مذکور نیز در سال ۲۰۱۳ به چاپ رسیده است.

برای خمینهٔ ریمانی $n$ ـ بعدی همبند $(M, g)$، غوطه‌وری $x : M \to \mathbb{E}^m$ را از نوع متناهی گویند هرگاه میدان برداری موقعیت $M$ در $\mathbb{E}^m$ با همان نماد $x$، به صورت جمع متناهی از بردارهای ویژهٔ عملگر لاپلاسین قابل نمایش باشد. یعنی $x = c + x_1 + x_2 + ... + x_k$ که در آن برای $1 \leq i \leq k$، $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ و $c$ یک بردار ثابت است. بخصوص اگر مقادیر ویژهٔ $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ همگی متمایز باشند، غوطه‌وری (یا زیرخمینهٔ $M$) را از نوع $k$ گویند. حال اگر یکی از $\lambda_i$ها صفر باشد غوطه‌وری

را از نوع $k$ی پوچ نامند. هر زیرخمینه از نوع $k$ی پوچ، غیرفشرده است. همانند خمینه‌های مینیمال، خمینه‌های از نوع متناهی می‌توانند به عنوان نقاط بحرانی تغییر شکل‌های جهت‌دار توصیف شوند([۳]، [۱۳]، [۱۴]).

تاکاهاشی دسته‌بندی خمینه‌های از نوع یک را انجام داده است ([۲۲])، برای این خمینه‌ها، $k$ کمترین مقدار ممکن یعنی یک را اختیار می‌کند. تاکاهاشی ثابت کرد که یک زیرخمینه از فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^m$ از نوع یک است اگر و فقط اگر یک زیرخمینهٔ مینیمال از $\mathbb{E}^m$ یا زیرخمینه‌ای مینیمال از یک ابررویهٔ فضای اقلیدسی باشد.

اما دسته‌بندی ابررویه‌های از نوع متناهی در $\mathbb{E}^{n+1}$ و بخصوص $\mathbb{E}^3$ در حالت کلی یکی از پرسش‌های مطرح شده توسط چن است. جواب‌های جزئی به این سوال توسط خود چن و تعدادی از همکاران وی برای حالت‌های خاص مثل $k = 2$ و $n = 1$ داده شده است. بعلاوه حدس کره بودن رویه‌های فشردهٔ از نوع متناهی در $\mathbb{E}^3$، توسط چرن بیان شده است. این حدس در بعضی حالت‌های جزئی در چند مقاله تأیید شده است، ولی در حالت کلی هنوز به عنوان یک مسئله‌ی باز مطرح است. همچنین چن ادعا کرده است که ابرکره‌ها تنها ابررویه‌های فشردهٔ از نوع متناهی در فضای اقلیدسی هستند.

دستهٔ دیگری از مسائل و حدس‌های چن مربوط به خمینه‌های از نوع دو، زیرخمینه‌های از نوع متناهی در فضاهای همگن و زیرخمینه‌های هارمونیک دوگانه است. یک غوطه‌وری ایزومتری $x : M \to \mathbb{E}^m$ (یا یک زیرخمینه) هارمونیک دوگانه است اگر $\Delta^2 x = 0$ یا بطور معادل اگر $\Delta H = 0$.

مفهوم بیان شده برای یک غوطه وری از نوع متناهی برای هر نگاشت هموار $f$ از خمینه‌ای فشرده مثل $M$ به یک فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^m$ نیز تسری پیدا کرده است. یکی از مهم‌ترین مورد از این نوع نگاشت‌ها که مورد توجه چن واقع شده است، نگاشت گاوس است. نگاشت گاوس $v : M \to G(n, m)$ متناظر با غوطه‌وری $x$، نگاشتی هموار است که هر نقطهٔ $p \in M$ را به $n$ ـ صفحهٔ جهت‌دار در $\mathbb{E}^m$ متناظر می‌سازد که از انتقال موازی صفحه‌ی مماس بر $M$ در نقطه‌ی $p$، (در فضای $\mathbb{E}^m$)، به دست می‌آید. در اینجا $G(n, m)$ گراسمیان شامل همهٔ $n$ ـ صفحه‌های جهت‌دار گذرا بر مبدأ در $\mathbb{E}^m$ است. چون برای $N = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$، $G(n, m)$ بطور کانونی در $\mathbb{E}^N$ نشانده می‌شود، از اینرو بررسی نگاشت گاوس از نوع متناهی را می‌توان مطرح کرد. چن و همکارش در [۱۶]، با هدف پاسخ به این سوأل که نوع نگاشت گاوسی از یک زیرخمینه $\mathbb{E}^m$ تا چه حد تعیین کننده‌ی آن است، نتایج زیر را به دست آوردند.

الف) نوع غوطه‌وری هر خم بسته در $\mathbb{E}^m$ با نوع نگاشت گاوس آن یکسان است.

ب) یک قضیه رده‌بندی برای زیرخمینه‌ها با انحنای گاوسی از نوع یک ارائه شد که یک دسته‌بندی از چنین خمینه‌هایی را به دنبال داشت.

ج) غوطه‌وری ایزومتری استاندارد از یک کرهٔ دو بعدی دلخواه، نگاشت گاوس از نوع دو دارد اگر و فقط اگر اولین نشانده شدهٔ استاندارد نباشد.

د) دسته‌بندی کاملی برای توری مینیمال تخت در $S^{m-1}$، با نگاشت گاوس از نوع دوم ارائه شد.
ه) به عنوان کاربردی از نگاشت گاوس از نوع متناهی، رویه‌های مینیمال در $S^{m-1}$ دسته‌بندی شدند.

در انتها لازم به ذکر است که چن علاوه بر موضوعات بیان شده، تلاش زیادی هم در ایجاد ارتباط بین آنها داشته است. چن همچنین با هدف ارائه دسته‌بندی‌هایی برای زیرخمینه‌های مینیمال، به مسائل دیگری جز آنچه بیان شد، پرداخته است که به یک مورد آن اشاره می‌شود. مسائل فشار یکی از موضوعات کلاسیک در هندسه دیفرانسیل است که در واقع یک مسئلهٔ دسته‌بندی با توجه به ارائه‌ی کرانی برای پایاها است. مرجع [۷] یکی از مقالات پر ارجاع چن است که موضوع آن یک مسئله فشار است. در قضیه‌ای از این مقاله ثابت شده است که برای هر زیرخمینهٔ مینیمال $n$ـ بعدی $M$ از یک فضای اقلیدسی $m$ـ بعدی، برای هر $p \in M$ و هر صفحه $\pi \subset T_pM$، داریم $K(\pi) \geq \frac{1}{2}\tau(p)$. در ادامهٔ همین قضیه، چن زیرخمینه‌های مینیمال با شرط $\inf K(\pi) = \frac{1}{2}\tau(p)$ را به طور کامل دسته‌بندی کرده است.

# مراجع


[1] B.Y. Chen, *Ideal hypersurfaces of Euclidean four-space*, preprint. arXiv:1307.47772v1 [math.DG] Jul 2013.

[2] B.Y. Chen, *Ideal Lagrangian immersions in complex space forms*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128**(2000), 511-533.

[3] B.Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, $\delta$-invariants and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Heckensack, New Jersey, 2011.

[4] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimension*, Glasgow Math. J., **41**(1999), 33-41.

[5] B.Y. Chen, *Some new obstruction to minimal and Lagrangian isometric immersion*, J. Math. Japan, **26**(2000), 105-127.

[6] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17**(1991), 169-188.

[7] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math, **60**(1993), 568-578.

[8] B.Y. Chen, *Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal immersions and their applications*, *Third Pacific Rim Geom. Conf.* Seoul 1996, 7-60, Intern. Press, MA(1998).

[9] B.Y. Chen, *Total mean Curvature and submanifolds of finite type*, World Scientific Publisher, 1984.

[10] B.Y. Chen, F. Dillen, *Optimal general inequalities for Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Proceedings RIGA 2011, 75-94, Ed. Univ. Bucuresti, Bucharest, 2011.

[11] B.Y. Chen, F. Dillen, *$\delta$-invariants for Lagrangian submanifolds of complex space forms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[12] B.Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *An exotic totally real minimal immersion of $S^3$ in $CP^3$ and its characterization*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Math.**126**(1996), 153-165.

[13] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *A variational minimal principle and its applications*, Kyungpook Math. J. **317**(1993), no.3, 435-444.

[14] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *A variational minimal principle characterizes submanifolds of finte type*, C.R. Acad. Sc. Paris **35**(1995), 961-965.

[15] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *Curvature inequalities for Lagrangian submanifolds: the final solution*, preprint.

[16] B.Y. Chen, P. Piccinni, *Submanifolds with finite type Gauss map*, Bull. Austral. Math. Soc. **44**(1987), 161-186.

[17] B.Y. Chen, A. Prieto-Martin, *Classification of Lagrangian submanifolds in complex space forms satisfying a basic equality involving $\delta$(2,2)*, Differ. Geom. Appl. **30**(2012), 107-123.

[18] B.Y. Chen, A. Prieto-Martin, X. Wang, *Lagrangian submanifolds in complex space forms satisfying an improved equality involving $\delta$(2,2)*, Publ. Math. Debrecen **82**(2013), 193-217.

[19] S. S. Chern, *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas(1968).

[20] T. Nagano, *On the miniumum eigenvalues of the Laplacian in Riemannian manifolds*, Sci. Papers College Gen, Edu. Univ. Tokyo, **11** (1961), 177–182.

[21] J. F. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. **63**(1956), 20-63.

[22] T. Takahashi, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18**(1966), 380-385.

اعظم اعتماد دهکردی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
ae110mat@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۹۹ تا ۱۲۳

# نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک: از اویلر تا لنگلندز( بخش دوم)

آنتونی دبلیو نپ

مترجم: احمد صفاپور

اساس آنالیز هارمونیک تجزیه عبارات پیچیده به اجزایی است که عمل یک گروه را، به شرط وجود عملی، باز نمایاند. در واقع هدف آن به فهم درآوردن تجزیه و تحلیل های دشوار است.

در قرون هفده و هجده گروه‌هایی که در این خصوص ظاهر می‌شدند عبارت بودند از گروه دایره $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$، خط حقیقی $\mathbb{R}$، و گروه‌های آبلی متناهی. آنچه در کاربردها اتفاق می‌افتاد عبارت بود از تجزیه توابع بر حسب کاراکترهای ضربی، یعنی همریختی‌های پیوسته از گروه مربوطه به توی اعداد مختلط غیرصفر. در حالتی که گروه مورد بحث گروه دایره باشد، تجزیه‌ی مذکور چیزی جز بسط سری فوریه‌ی یک تابع روی $(-\pi,\pi)$ نیست،

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \qquad (1)$$

در حالت خط حقیقی، این تجزیه توسط تبدیل فوریه و فرمول وارون فوریه به دست می‌آید که برای توابع به اندازه کافی خوب، آن را به صورت

1) Anthony W. Knapp, Group representation and harmonic analysis from Euler to Langlands, Part II, Notoces of the AMS, 43(5)(1996), 537-549.

بخش اول این مقاله در شماره ۳۴، سال ۲۹ (بهار ۱۳۸۹) مجله‌ی «فرهنگ و اندیشه ریاضی» با ترجمهٔ همین مترجم به چاپ رسیده است.

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy}dx, \qquad (2)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy,$$

می‌نویسیم، و درحالت گروه آبلی متناهی $G$، این بسط به صورت خیلی ساده‌ی

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\omega}[\sum_{y\in G} f(y)\overline{\omega(y)}]\omega(x), \qquad (3)$$

در می‌آید که در آن جمع روی تمام کاراکترهای ضربی گروه گرفته می‌شود.

هنگام به کار گرفتن گروه‌های غیرآبلی از تقارن‌ها، کاراکترها چندان مفید نیستند زیرا هر جابه‌جاگر باید $xyx^{-1}y^{-1}$ را به ۱ بفرستد. برای داشتن آنالیز هارمونیک روی گروه‌های غیرآبلی، تعمیم چند بعدی کاراکترهای ضربی را معرفی می‌کنند یعنی نمایش گروه.

یک نمایش برای گروه $G$ روی فضای برداری مختلط $V$ عبارت است از عمل گروه $G$ روی $V$ از طریق تبدیل‌های خطی یعنی یک همریختی از $G$ به توی گروه تبدیل‌های خطیِ وارون پذیر روی $V$. غالباً گروه $G$ و فضای برداری $V$ دارای توپولوژی هستند، و در نتیجه معمولاً فرض می‌شود که عمل گروه پیوسته است. یک کاراکتر ضربی $\omega$ نمایشی ۱ بعدی روی فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به دست می دهد که در اینجا عمل عنصر $g \in G$ به صورت ضرب در $\omega(g)$ است.

اواخر قرن نوزدهم دوره‌ای بود که در آن لی و کلاین ریاضیدانان پیشروی آن بودند و نیز در این دوره عمل‌های گروه از جمله عمل گروه توسط تبدیل‌های خطی وسیعاً مورد مطالعه قرار گرفت. در چنین فضایی طبیعی است انتظار داشته باشیم که برخی به عمل گروه توسط تبدیل خطی نیز توجه کنند و از همین طریق نیز نمایش گروه کشف شود. اما نمایش گروه به هیچ وجه به این صورت به‌وجود نیامد.

## گروه‌های متناهی

ددکیند به هنگام کار بر روی نظریه‌ی جبری اعداد متوجه چیزی غیرعادی درباره‌ی گروه‌های آبلی متناهی شد. فرض کنید $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_h\}$ یک گروه متناهی از مرتبه‌ی $h$ بوده و فرض کنید $\chi_{g_1}, \dots, \chi_{g_h}$ متغییرهای مستقلی باشند که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند و توسط عناصر $G$ پارامتری شده‌اند. ددکیند با دترمینان از ماتریس $(\chi_{g_i g_j^{-1}})$ کار کرد و در حالت آبلی ثابت نمود که $\theta$ قابل تجزیه به شکل

$$\theta(\chi_{g_1}, \dots, \chi_{g_h}) = \prod_{\chi}(\sum_{j=1}^{h} \chi(\chi_{g_j})\chi_{g_j}),$$

است که در آن حاصل ضرب روی تمام کاراکترهای ضربی $G$ گرفته می‌شود.

ددکیند در فکر تعمیم این نتیجه به حالت غیرآبلی بود و این نتیجه را با فروبنیوس درمیان گذاشت. فروبنیوس، کار خود در نظریهٔ نمایش را از سال ۱۸۹۶ با معرفی کاراکترهای

(تحویل ناپذیر[1]) یک گروه متناهی دلخواه و به منظور حل مسئله‌ی ددکیند آغاز نمود([۴]، جلد ۳). امروزه یک کاراکتر، اثر یک نمایش است، اما فروبنیوس نمایش‌ها را به این صورت معرفی نکرد. در عوض با استفاده از ریاضیاتی که امروزه عجیب می‌نماید، او در ابتدا مستقیماً با کاراکترها کار کرد و نمایش‌های متناهی بُعد را تنها در مقاله‌ای دیگر که بعداً منتشر شد معرفی نمود. برنساید[2] در ۱۹۰۴ و آی. شور[3] جوان ([۱۳]، جلد ۱) در ۱۹۰۵، مجدداً کار بر روی این نظریه را شروع کردند که دستاوردهای اولیه هر یک از این مطالعات نمایش‌های ماتریسی بود (همریختی‌های به توی گروه ماتریس‌های وارون پذیر با اندازه‌ی مشخص). بر اساس نظر ای. آرتین[4] ([۱]، ص. ۵۲۸) «این امی نوتر بود که گام تعیین کننده را برداشت. این کار با جایگزین کردن یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری به جای ماتریس انجام شد.» از این رو تعریف نوتر اساساً همان تعریف کلی و مدرنِ مفهوم نمایش بود که در بالا ارائه شد. برای برنساید و شور، فضاهای نمایش‌ها، فضای $V = \mathbb{C}^n$ مرکب از بردارهای ستونی بود و به نمایش‌ها به چشم ماتریس نگریسته می‌شد. بعدها زمانی که نظریه‌ی نمایش به گروه‌های لی تعمیم پیدا کرد و زمانی که مکانیک کوانتمی مطالعه‌ی نمایش‌های نامتناهی بعد را ضروری نمود، ادامه‌ی راه بدون استفاده از دیدگاه نوتر دشوار گردید. دو نمایش متناهی بعد $\pi$ روی $V$ و $\pi'$ روی $V'$ از $G$ هم ارز هستند اگر نگاشت خطی وارون پذیر $E : V \to V'$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in G$ ، $\pi'(g)E = E\pi(g)$. یک زیرفضای ناوردای $U$ برای $\pi$ ، یک زیرفضای برداری است به گونه‌ای که به ازای هر $g \in G$، $\pi(g)U \subseteq U$. نمایش متناهی بعد $\pi$ تحویل ناپذیر نامیده می‌شود اگر $V$ دارای هیچ زیرفضای سره‌ی ناوردای غیرصفر نباشد.

دستاورد کار برنساید و شور که بخشی از آن برحسب تبدیل‌های خطی از نو بیان شده است، نظریه‌ی مجردی بود که برای گروه‌های متناهی پی ریزی شده بود و با در نظر گرفتن سابقه‌ی موضوع می‌بینیم چیزی است که برای وضعیت‌های دیگر انتظار آن را داشتیم.

(P1) (یکانی بودن و تحویل پذیری کامل[5]) هر نمایش متناهی بعد، هم‌ارز با نمایشی توسط ماتریس‌های یکانی است. بنابراین متمم متعامد هر زیرفضای ناوردا، ناوردا است واز اینجا نتیجه می‌شود که هر نمایش متناهی بُعد مجموع مستقیم نمایش‌های تحویل ناپذیر است. (این نتایج قبلا شناخته شده بود. نقش برنساید نشان دادن این مطلب بود که تحویل پذیریِ کامل نتیجه‌ای از یکانی بودن است.)

(P2) (لم شور). اگر $\pi$ روی $V$ و $\pi'$ روی $V'$ نمایش‌های تحویل ناپذیری بوده و $E : V \to V'$ نگاشتی خطی باشد به گونه‌ای که برای هر $g \in G$ ، $\pi'(g)E = E\pi(g)$، آن گاه $E = 0$ یا $E$ وارون پذیر است. اگر $V = V'$، آن گاه $E$ اسکالر است. (نخستین نتیجه منسوب به برنساید و دومی منسوب به شور است.)

(P3) (تعامد شور). اگر $\pi$ و $\pi'$ نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز باشند، آن گاه

1) Irreducible 2) Burnside 3) I. Schur 4) E. Artin 5) Unitarity and complete reducibility

$$\sum_{g\in G}\pi_{ij}(g)\overline{\pi'_{kl}(g)} = 0.$$

(P4) (وارون فوریه). فرض کنید $\pi$ روی مجموعه‌ی کاملی از نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز $G$ تغییر کند. اگر $f$ یک تابع مختلط مقدار روی $G$ باشد تعریف کنید

$$\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x).$$

در این صورت

$$f(1) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi}(\dim\pi)Trace(\pi(f)).$$

(P5) (تمامیت). فرض کنید $\pi$ روی مجموعه‌ی کاملی از نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز تغییر کند. اگر $f$ یک تابع مختلط مقدار روی $G$ باشد، تعریف کنید

$$\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x).$$

در این صورت

$$\sum_{\chi\in G}|f(x)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi}\dim\pi||\pi(f)||^2,$$

که در آن $||.||$ نرم هیلبرت ـ اشمیت است (ریشه‌ی دوم مجموع مربع‌های قدر مطلق درآیه‌ها).

پیچیدگی در آنالیز هارمونیک معمولی بر روی یک گروه متناهی خاص تنها اندکی بیشتر از حالت گروه‌های آبلی متناهی است. می‌توانیم برخی از اصول پنج‌گانه‌ی فوق را برای یک گروه تقارنی سه عضوی بررسی کنیم. برای این گروه $G$ سه نمایش تحویل ناپذیر از بعدهای ۱، ۱ و ۲ وجود دارد. آن‌ها عبارتند از نمایش بدیهی[1] ۱، نمایش علامت[2] و نمایش $\pi$ در صفحه که از قراردادن یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه و قرار دادن مرکز آن در مبدأ مختصات و بررسی اثر جایگشت‌های رئوس آن، به دست می‌آید. برای نمایش دو بعدی $\pi$، فرض کنید رئوس آن به مختصات قطبی $(1, 0^\circ)$ ، $(1, 120^\circ)$ و $(1, 240^\circ)$ باشند که با ۱، ۲ و ۳ شماره‌گذاری شده‌اند. با استفاده از پایه‌ی استانده، هر یک از تبدیل‌های خطی $\pi(g)$ را به یک ماتریس تبدیل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\pi((2\ \ 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \pi((1\ \ 2)) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \cos 30^\circ \\ \sin 120^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix},$$

1) Trivial representation 2) Sign representation

و $\pi$ برای هر یک از دو جایگشت دیگر با ضربی متناظر می‌شود. می‌توانیم درآیه‌ها را به عنوان توابعی روی $G$ به صورت زیر درنظر بگیریم:

| g\entry | $\pi_{۱۱}(g)$ | $\pi_{۱۲}(g)$ | $\pi_{۲۱}(g)$ | $\pi_{۲۲}(g)$ |
|---|---|---|---|---|
| (۱) | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| (۱۲۳) | $-$۱/۲ | $-\sqrt{۳/۲}$ | $\sqrt{۳/۲}$ | $-$۱/۲ |
| (۱۳۲) | $-$۱/۲ | $\sqrt{۳/۲}$ | $-\sqrt{۳/۲}$ | $-$۱/۲ |
| (۱۲) | $-$۱/۲ | $\sqrt{۳/۲}$ | $\sqrt{۳/۲}$ | ۱/۲ |
| (۲۳) | ۱ | ۰ | ۰ | $-$۱ |
| (۱۳) | $-$۱/۲ | $-\sqrt{۳/۲}$ | $-\sqrt{۳/۲}$ | ۱/۲ |

برای نمایش علامت، درآیه‌های مربوطه در اینجا به عنوان تابعی از $g$ عبارتند از ۱، ۱، ۱، ۱−، ۱− و ۱− و برای نمایش بدیهی، همگی برابر ۱ هستند. یک محاسبه‌ی سرراست نشان می‌دهد که هر شش ستون بالا بر یکدیگر عمود هستند. ستون‌های نشان داده شده در بالا هر یک دارای نرم مربعی برابر ۳ بوده و ستون‌های مربوط به نمایش‌های علامت و بدیهی دارای نرم مربعی ٦ هستند. این همان خاصیت (P3) است. به دلیل تعامد، این شش ستون پایه‌ای برای فضای ٦ بعدی توابع مختلط مقدار روی $G$ تشکیل می‌دهند و (P5) هم از آنچه در جبرخطی دیده‌ایم، نتیجه می‌شود. از دیدگاهی (P4) و (P5) هم ارز هستند: پیچش روی $G$ را با $f * h(x) = \sum_{y\in G} f(xy^{-۱})h(y)$ تعریف کنید. در این صورت (P5) به (P4) منتهی می‌شود اگر آن را برای تابع $f * f^*$ که $f^*(\chi) = \overline{f(x^{-۱})}$ به کار بگیریم. بنابراین (P5) حالت خاصی از (P4) است. اما توابع $f * f^*$ فضای همه توابع را تولید می‌کنند و بنابراین حالت خاص (P5)، حالت کلی (P4) رانتیجه می‌دهد. این مثال با جزئیات بیشتری در گراس[1] [۵] آمده است.

بخش دیگری از نظریه‌ی مجرد مورد بحث، ایده‌ی نمایش القا شده است که به فروبنیویس منسوب است. القا، روشی برای ساختن نمایشی از $G$ با استفاده از نمایش یک زیرگروه $H$ از آن است. فرض کنید $\varphi$ یک نمایش $H$ روی فضای $V^\varphi$ باشد. در این صورت نمایش القا شده‌ی[2] $\pi = ind_h^G\varphi$ در فضای برداری

$$\{f : G \to V^\varphi | f(xh) = \varphi(h)^{-۱}(f(x)), h \in H\}$$

به صورت $(\pi(g)f)(x) = f(gx^{-۱})$ عمل می‌کند. اگر $\varphi$ نمایش بدیهی از $H$ باشد، آن گاه $\pi$ نمایش منظم چپ[3] $G$ روی توابع تعریف شده بر $G/H$ است یعنی نمایش $l$ که توسط $l(g)f)(x) = f(g^{-۱})x$ به دست می‌آید.

1) Gross 2) Induced representation 3) Left regular representation

نمایش‌های القا شده‌ی گروه‌های متناهی در رابطه با توابع $L$ اهمیت پیدا می‌کنند که به طور مختصر به آن خواهیم پرداخت.

فروبینیوس[1]

به کار گرفتن آنالیز هارمونیک روی یک گروه متناهی خاص، نیازمند شناخت نمایش‌های تحویل ناپذیر آن گروه، یا حداقل شناخت کاراکترهای آن است. این موضوعات برای گروه‌های متقارن و متناوب به طور مستقل توسط فروبنیوس و یانگ[2] طی یک دوره‌ی زمانی مورد بررسی قرار گرفت. « نمودارهای یانگ[3]» به عنوان ابزارهایی استانده برای کار کردن با چنین نمایش‌هایی باقی مانده‌اند.

یکی از اولین کاربردهای مهم نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی برای موضوعی به جز نظریه نمایش، در قضیه‌ی زیر از فروبنیوس (۱۹۰۱) بود: یک گروه جایگشتی ترایایی روی $n$ عنصر که اعمال آن به جز عمل همانی، همه و یا همه به جز یک عنصر را انتقال می‌دهند، دارای یک زیرگروه بهنجار از مرتبه‌ی $n$ است. یکی دیگر از کاربردهای اولیه‌ی آن، قضیه‌ی برنساید(۱۹۰۴) بود به این مضون که هر گروه از مرتبه‌ی $p^aq^b$ ، زمانی که $p$ و $q$ اعداد اول باشند، حل پذیر است. پس از آن نتایج اولیه، نظریه‌ی نمایش همچنان در مراحل مختلف رده‌بندی گروه‌های متناهی ساده ایفای

1) Ferdinand George Frobenius    2) Young    3) Young diagrams

نقش می‌کرد. کاربرد دیگری از نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی در ارتباط با توابع $L$ آرتین است که آرتین آن‌ها را در سال‌های دهه‌ی ۱۹۲۰ معرفی کرد. یک تابع $L$ آرتین روی مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، چگونگی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای تکین تحویل ناپذیر روی $\mathbb{Z}$ وقتی به پیمانه‌ی هر عدد اول تحویل می‌یابد را بر حسب یک تابع مولد کدگذاری می‌کند. برای چند جمله‌ای $x^۲ + ۱$ تابع $L$ چنین است

$$L(s, \mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}, sgn) = \prod_{p \text{ عدد اول فرد}} \frac{۱}{۱ - (\frac{-۱}{p})p^{-s}}, \qquad (۴)$$

که در آن $(\frac{-۱}{p})$ نماد لژاندر است که اگر ۱− یک مانده مربعی برای $p$[1] باشد، این نماد مقدار ۱+ را اختیار می‌کند و در غیراین صورت ۱− را. این تابع $L$ با تابعی که اویلر معرفی کرد و در آن $(\frac{-۱}{p})$ با عبارت $\chi^-(p)$ که بسته به این $p$ همنهشت با ۱ باشد یا ۳ به پیمانه‌ی ۴، مقادیر ۱+ یا ۱− را اختیار می‌کند جایگزین شده است، تا حدودی متفاوت است. این واقعیت که $(\frac{-۱}{p}) = \chi^-(p)$، به درستی به عنوان حالتی مقدماتی از قانون تقابل مربعی شناخته شده است و لذا تابع $L$ اویلر و (۴) برابرند. این نقشِ تقابل، امکان تعمیم گسترده‌تری را فراهم می‌کند که در آن نظریه‌ی نمایش برجسته‌تر می‌شود و ما کمی بعد به این بحث برمی‌گردیم. اما اکنون اجازه دهید ببینیم نظریه نمایش از کجا وارد موضوع توابع $L$ آرتین شد. یک تابع کلی‌تر $L$ آرتین، اطلاعاتی اساسی درباره‌ی ایده‌آل‌های اول در حلقه‌ی اعداد صحیح یک میدان از اعداد (توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$) فراهم می‌کند. تابع $L$ به یک پارامتر مختلط $S$، یک توسیع متناهی گالوای $K/k$ از میدان‌های اعداد، و یک نمایش از گروه گالوای (متناهی) $K$ روی $k$ بستگی دارد. ما به تعریف دقیق، که (۴) را تعمیم می‌دهد کاری نداریم. با وجود این، زمانی که $k = K$ و نمایش بدیهی است، تابع $L$ به آن چیزی تحویل می‌شود که تابع $\zeta$ی $K$ نامیده می‌شود. نمایش‌های القا شده نقش مهمی در درک توابع $L$ ایفا می‌کنند. اگر $k$ با یک میدان کوچکتر $k_۰$ جایگزین شده و نمایش بالا با نمایش القا شده از $Gal(K/k)$ به $Gal(K/k_۰)$ جایگزین شود تابع $L$ تغییری نمی‌کند. با قرار دادن $k = K$ مشاهده می‌کنیم که تابع $\zeta$ی $K$ برابر می‌شود با تابع $L$ آرتین برای $K/k_۰$ و نمایش چپ منظم $Gal(K/k_۰)$ روی توابع تعریف شده بر $Gal(K/k_۰)$. تجزیه‌ی این نمایش به جمعوندهای تحویل ناپذیر، در تجزیه‌ی تابع $\zeta$ی $K$ به حاصل ضربی از توابع $L$ انعکاس می‌یابد. از این رو توابع $L$ آرتین عوامل کانونی توابع $\zeta$ی میدان‌های اعداد هستند و به طور طبیعی با بکارگرفتن نظریه‌ی نمایش گروه گالوا پدیدار می‌شوند.

## انتگرال لبگ، سری‌های فوریه و تبدیل فوریه

تقریباً هم زمان با پیشرفت نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی، رشد سریع نظریه‌ی سری‌های فوریه و تبدیل فوریه شروع شد. نقطه‌ی عطف در این زمینه، معرفی انتگرال لبگ در رساله لبگ درسال ۱۹۰۲ و کتاب او در سال ۱۹۰۴ بود. حالتی از (P4) که در آن $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

1) Square modulo p

به شرط آن که $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^۲ < \infty$ و $f$ پیوسته باشد، قبلاً شناخته شده بود زیرا مفهوم (P5) همان اتحاد پارسوال $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^۲ d\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^۲$ است که این خود محکی است برای کامل بودن دستگاه توابع نمایی. اما انتگرال لبگ راه را برای قضیه‌ی ریس ـ فشیر در سال ۱۹۰۷ که بیان می‌دارد هر دنباله‌ی مربع انتگرال پذیر$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$، دنباله‌ی ضرایب فوریه‌ی یک تابع عضو $L^۲$ بر $(-\pi,\pi)$ است، و در نتیجه برای درک کاملی از این که نگاشت ضرایب فوریه که $f \mapsto \{c_n\}$، یک نگاشت خطی یکریختی از یک فضای $L^۲$ به روی فضایی دیگر است، هموار نمود.

پلانشرال در سال ۱۹۱۰ حالتی از (P5) را برای تبدیل فوریه اثبات کرد و همه‌ی تعمیم‌های بَعدی این ویژگی، فرمول پلانشرال نامیده شده است. بر اساس نمادهای (۲)، نتیجه‌ی کار او این بود که نگاشت تبدیل فوریه $f \mapsto \hat{f}$ روی $L^۱ \cap L^۲$ در رابطه‌ی $||f||_۲^۲ = ||\hat{f}||_۲^۲$ صدق می‌کند و در نتیجه، تبدیل فوریه به یک نگاشت یکریختی از $L^۲$ به توی $L^۲$ تعمیم می‌یابد. چون فرمول وارون در (۲) به نوعی همانند خود تبدیل است، در نتیجه تبدیل فوریه به طور خودکار بروی $L^۲$ تعمیم یافته و صورت‌بندی مورد نیاز برای آنالیز هارمونیک مهیا بود.

از نظر تاریخی به نظر می‌رسد اولین عملگری که به طور مشخص با استفاده از انتگرال لبگ با سری فوریه‌ای به شکل

$$T(\sum c_n e^{inx}) = \sum b_n c_n e^{inx} \tag{۵}$$

نوشته شد، عملگر هیلبرت بود. در این جا $b_n = -isgnn$. این عملگر با در نظر گرفتن $f$ به عنوان تابعی روی دایره‌ی یکه، استفاده از فرمول انتگرال پواسون برای به دست آوردن یک تابع همساز روی قرص یکه، رفتن به تابع همساز مزدوج بهنجار شده‌ی آن که در مبدأ مقدار ۰ را اختیار کند، و بالاخره اختیار کردن مقادیر مرزی حاصل می‌شود. این مطالعه به طور مستقل توسط پریوالوف[۱] (۱۹۱۸) و پلسنر[۲] (۱۹۲۳) انجام شد، و به طریقی مشابه حالتی از تبدیل فوریه و نیم صفحه را می‌توان بررسی کرد. در سال ۱۹۲۷ م. ریس[۳] ثابت کرد که تبدیل هیلبرت سری فوریه روی $L^p$، که $۱ < p < \infty$، کراندار است، و به سادگی نتیجه می‌شود که اگر $۱ < p < \infty$ ، مجموع‌های جزئی سری فوریه‌ی توابع عضو $L^p$، در $L^p$ به همان تابع همگرا هستند. نتیجه‌ی کرانداری مشابهی برای حالت مناسبی از تبدیل هیلبرت برای تبدیل فوریه و نیم‌صفحه برقرار است. عملگرهای پیچیده‌تری که با انتقال ها جا به جا می‌شوند در ابتدا در سال‌های دهه ۱۹۳۰ مورد مطالعه قرار گرفتند و موضوع برای حالت‌های چند متغیره بسط یافت. به عنوان مثال برای تبدیل فوریه در $\mathbb{R}$، فرمول وارون همانند (۲) است اما با این تفاوت که انتگرال گیری روی $\mathbb{R}^n$ انجام شده و $xy$ با ضرب نقطه‌ای $x.y$ جایگزین می‌شود. کتاب‌های زیگموند[۴] [۱۸] و اشتاین[۵] [۱۴] شرح کاملی از این نظریه‌ها را ارائه می‌دهند. یک نتیجه در خور توجه ویژه قضیه بوخنر[۶] در سال ۱۹۳۲ برای توابع معین مثبت است که بعداً به نوعی مورد استفاده قرار گرفت. یک تابع معین مثبت $f$ روی یک گروه $G$ تابعی است که

1) Privalov 2) Plessner 3) M. Riesz 4) Zygmund 5) Stein 6) Bochner

برای آن ماتریس $\{f(x_i x_j^{-1})\}$ همواره هرمیتی نیمه معین مثبت است. قضیه به این صورت است که در بین توابع پیوسته روی $\mathbb{R}^n$، توابع معین مثبت دقیقاً آن توابعی هستند که تبدیل فوریه‌ی اندازه‌های متناهی هستند. گاردینگ در سال ۱۹۵۳ تبدیل فوریه روی $\mathbb{R}^n$ را با چیزی که قبلاً ابداع شده بود یعنی یک «اصل انجماد[۱]» ترکیب کرد تا توانایی تبدیل فوریه را به قلمروهایی گسترش دهد که در آن‌ها هیچ‌گونه تقارنی تحت یک گروه به چشم نمی‌خورد. «نامساوی گاردنیک» کران پایینی برای ضرب داخلی $< Lu, u >$ به دست می‌دهد که در آن $L$ یک عملگر دیفرانسیل حقیقی بیضوی از مرتبه‌ی $m$ بوده و $u$ دارای محمل فشرده می‌باشد. استفاده از فرمول پلانشرال حالتی را فراهم می‌کند که در آن تمامی جملات از مرتبه‌ی $m$ بوده و دارای ضرایب ثابت هستند.

هرمان ویل[۲]

رفتار یک عملگرِ کلی در نزدیکی یک نقطه، با کمک رفتار یکی از این عملگرهای خاص با ضرایب ثابتی که برابر مقدار ضرایب پیشرو در آن نقطه است، تقریب زده می‌شود (اصل انجماد)، و چنین تخمین‌هایی با کمک افراز یکانی کنار هم چیده می‌شوند. کتاب بِرز[۳]، جان[۴] و اسکچر[۵] [۳] جزئیات را ذکر کرده است. در این رابطه ایده‌ی یک اصل انجماد انگیزه‌ای است برای نظریه‌ی جدیدتر عملگرهای شبه دیفرانسیل و تعمیم‌های آن. زمانی که گروه‌های لی پوچتوان را در نظر می‌گیریم اصل انجماد دوباره مطرح می‌شود.

1) Freezing principle 2) Hermann Weyl 3) Bers 4) John 5) Schecher

## گروه‌های فشرده

در اوایل قرن بیستم تمامی آنچه برای تعمیم بخش‌هایی از نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی به گروه‌های فشرده مورد نیاز بود عبارت بود از انتگرال گیری ناوردا، و این کار قبلاً برای گروه‌های دَوَران[1] و گروه‌های یکانی در سال ۱۸۹۷ در مقاله‌ای از آ. هورویتس[2] انجام شده بود. نظریه‌ی مجرد و تعیین نمایش‌های تحویل ناپذیر شانه به شانه‌ی یکدیگر پیش می‌رفتند. شور در سال ۱۹۲۴ مشاهده نمود که چنانچه انتگرال گیری ناوردا داشته باشیم (P1)، (P2) و (P3) تعمیم پیدا می‌کنند، انتگرال‌ها جایگزین جمع‌های روی $G$ شده و اندازه کل جایگزین $|G|$ می‌شود. علاوه بر آن شور نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه‌های دَوَران و گروه‌های یکانی را به دست آورد.

ای. کارتان قبلاً در سال ۱۹۱۳ قضیه‌ی بالاترین وزن[3] را که نمایش‌های تحویل ناپذیر جبرهای لی نیم ساده‌ی مختلط را دسته‌بندی می‌کند، با استفاده از ابزارهای جبری ثابت کرده بود. اما این موضوع که او در آن زمان متوجه شده باشد که این نتیجه چقدر به یک دسته‌بندی از نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه‌های لی همبند فشرده نزدیک است (حداقل زمانی که آن‌ها همبند ساده هستند.) و یا حتی این که او یک مفهوم مهم را به این مسئله اضافه نموده باشد، مشکوک به نظر می‌رسد. ویل در سال‌های ۲۶ـ۱۹۲۴، تا حدودی با الهام از مقاله‌ی ۱۹۲۴ شور، این نظریه را به طور تحلیلی برای گروه‌های لی همبند فشرده به پیش برد. او از انتگرال گیری ناوردا برحسب فرم‌های دیفرانسیلی استفاده نموده، نشان داد که هر عضو گروه مزدوج یک عضو از یک چنبره ماکسیمال است، فرمولی برای انتگرال‌گیری برحسب انتگرال‌گیری از رده‌های تزویجی ارائه داد، و از کاراکترها و فرمول انتگرال‌گیری استفاده نمود تا حالتی از قضیه‌ی بالاترین وزن را به نظریه‌ی سری‌های فوریه روی چنبره‌های ماکسیمال فرو کاهد. قضیه‌ی معروف پیتر ـ ویل که (P5) را ثابت می‌کند و همچنین (P4) که نتیجه‌ای از آن برای توابع هموار است، در سال ۱۹۲۷ بدست آمد. برخلاف حالت گروه‌های متناهی، قضیه‌ی پیتر ـ ویل باید قدری از آنالیز استفاده کند و بدون تردید قضیه‌ی طیفی برای عملگرهای فشرده‌ی خودالحاق ابزار مورد نیاز آن است. در ۱۹۲۹ کارتان در مقاله‌ای با نشان دادن ارتباط کامل بین جبرهای لیِ نیم ساده‌ی مختلط و جبرهای لیِ حقیقی گروه‌های لی فشرده، نظریه‌های جبری و تحلیلی را به یکدیگر گره زد. در اوایل دهه‌ی ۱۹۳۰ اثبات وجود و یکتایی اندازه‌ی هار توسط هار و فون نویمان امکان تعمیم (P1) تا (P5) را به تمام گروه‌های توپولوژیک فشرده فراهم ساخت.

اولین کاربرد ریاضی آنالیز هارمونیک برای گروه‌های فشرده تفسیر مجدد کارتان از بخشی از نظریه توابع خاص به زبان فضاهای متقارن فشرده ریمانی در سال ۱۹۲۹ بود. در ساده‌ترین مثال این کار روشی را نمایان می‌کند که در آن هارمونیک‌های کروی و چند جمله‌ای‌های لژاندر، از عمل گروه دوران $SO(۳)$ روی کره‌ی $S^۲$ حاصل می‌شوند. گراس [۵] دقیقاً آنچه را نظریه‌ی کارتان درباره‌ی این مثال بیان می‌کند، شرح می‌دهد.

---

1) Rotation groups 2) A. Hurwitz 3) Theorem of the Highest Weight

تعداد نسبتاً معدودی از کاربردهای آنالیز هارمونیک برای گروه‌های فشرده وجود دارند که مشابه آن چیزی هستند که در (۵) اتفاق می‌افتد: این که ضرایب فوریه‌ی یک تابع روی گروه در چیزی ضرب شده و عملگر حاصل بررسی می‌شود. یکی از چنین کاربردهایی بررسی $L^p$ ـ همگرایی مجموع‌های جزئی بسط فوریه‌ی یک تابع روی یک گروه فشرده است که روی رده‌های تزویج ثابت باشد. هِرتس [1] و ر. اشتانتون [2] این مسئله را برای گروه‌های نیم ساده‌ی فشرده حل کردند و همگرایی در $L^p$ برای مقادیری از $p$ در بازه‌ای به شکل $1 + \frac{1}{\varepsilon} > p > 1 + \varepsilon$ اتفاق می‌افتد. برخلاف حالت سری‌های فوریه‌ی کلاسیک، بهترین $\varepsilon$ برای یک گروه نیم ساده‌ی فشرده‌ی مفروض، اکیداً مثبت است. در بسیاری از کاربردهای آنالیز هارمونیک گروه‌های فشرده، یک گروه فشرده به صورت غیرترایایی روی یک فضای اندازه‌ی $X$ عمل می‌کند و عملگری روی $L^2(X)$ بررسی می‌شود که با عمل $G$ جا به جا شود. یک مثال مناسب برای این مورد، تبدیل فوریه روی $L^2(\mathbb{R}^n)$ است که با دوران‌ها جا به جا می‌شود. از آنالیز هارمونیک روی گروه دوران $SO(n)$ انتظار می‌رود اطلاعاتی را به دست دهد. بوخنر در سال ۱۹۵۱ با استفاده از هارمونیک‌های کروی و تبدیل‌های ۱ ـ بعدیِ هنکل [3] چنین اطلاعاتی را به دست آورد. کتاب اشتاین [4] و وایز [5] [۱۵] این اطلاعات را با تأکید بیشتر بر نظریه گروه‌ها در اختیار می‌نهد.

کاربردهای گروه‌های فشرده در فیزیک از این نوع هستند. نظریه‌ی نمایش گروه‌های یکانی به‌ویژه $SU(n)$ برای مقادیر مشخص $n$، در مطالعه‌ی واکنش‌های هسته‌ای در نظریه ی ذرات بنیادی نقشی ایفا کرده است. در مکانیک کوانتمی آنچه که از آزمایشات مشاهده می‌شود مقادیر ویژه‌ی عملگرهای خودالحاق خاصی روی فضاهای هیلبرت هستند (یا عناصر طیف آن، اگر مقادیر ویژه گسسته نباشند). قوانین بقا متناظر با عملگرهای خود الحاقی مانند $A$ هستند که برای آن‌ها گروه یک پارامتری عملگرهای یکانی $e^{jtA}$ با هامیلتونی جا به جا می‌شوند. در نتیجه یک دستگاه از قوانین بقا، به یک گروه از تقارن‌ها یعنی یک گروه از عملگرهای یکانی که با هامیلتونی جا به جا می‌شوند، منجر می‌شوند. بخشی از این گروه تقارن، برخی انواع خاص $SU(n)$ ها هستند. مشاهده پذیرهای همزمان با گروه‌های تک پارامتری جا به جا شونده و در نتیجه با زیرفضاهای جا به جا شونده جبرهای لی متناظر هستند. برای $SU(n)$، یک زیرفضای جا به جا شونده از جبر لی دارای بعدی کوچکتر یا مساوی $n - 1$ است (و از این رو این زیرفضا می‌تواند قطری درنظر گرفته شود) و در نتیجه حداکثر $n - 1$ کمیت فیزیکی هم زمان مشاهده پذیر را می‌توان با استفاده از نظریه‌ی $SU(n)$ از یکدیگر تمیز داد. ذرات بنیادی، با بردارهای مشخصی در فضاهای نمایش‌های تحویل ناپذیر، یعنی ویژه بردارهای هم زمان زیرگروه قطری (که چنانچه مضرب اسکالری از یکدیگر باشند یکی گرفته می شوند) متناظر می‌شوند. کوارک ها با بردارهای پایه‌ی استاندارد برای نمایش استاندارد متناظر می‌شوند. قدرت نظریه ناشی از روشی است که طبق آن باید برهم‌کنش متقابل

1) Herz 2) R. Stanton 3) Hankel 4) Stein 5) Weiss

ذرات درک شود: ضرب تانسوری نمایش‌ها را در نظر می‌گیریم، سپس آن را بر اساس $(p1)$ تجزیه و نگاه می‌کنیم ببینیم چه ترکیب‌هایی از ذرات رخ می‌دهد.

## گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

در سال های ۳۵−۱۹۳۴ پونتریاگین و ون کمپن[1] قضیه‌ای دوگانی برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی را اثبات نمودند و کمی بعد وِیل[2] [۱۶] نظریه‌ای در آنالیز هارمونیک را بر اساس این قضیه‌ی دوگانی بنا نهاد. لزوماً تمام کاراکترهای یک گروه آبلی نافشرده‌ی موضعاً فشرده همانند $\mathbb{R}$ مورد توجه نیستند. برای $\mathbb{R}$، تابع $x \mapsto e^{-2\pi ixy}$ زمانی که $y$ یک عدد مختلط باشد، یک کاراکتر ضربی است اما تنها آن کاراکترهایی جالب توجه هستند که در آن ها $y$ حقیقی باشد. یک کاراکتر ضربی یکانی نامیده می‌شود اگر قدر مطلق آن برابر ۱ باشد. (به عبارت کلی‌تر یک نمایش $\pi$ در یک فضای هیلبرت یکانی است اگر هر عملگر $\pi(x)$ یکانی باشد.)

اگر $G$ یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد، آن گاه کاراکترهای ضربی یکانی تحت عمل ضرب نقطه‌ای یک گروه $\hat{G}$ را تشکیل می‌دهند و اگر $\hat{G}$ به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده مجهز شود، به یک گروه آبلی موضعاً فشرده (گروه دوگان) تبدیل می‌شود. زمانی که گروه $G$ چنبره‌ی $T^n$ یا گروه $\mathbb{R}^n$ باشد، $\hat{G}$ دقیقاً متشکل از آن کاراکترهای ضربی یکانی است که ما استفاده کردیم و توپولوژی آن همان توپولوژی معمولی است. از این رو در این دو حالت $\hat{G}$ با $\mathbb{Z}^n$ یا $\mathbb{R}^n$ یکریخت است. در کلی‌ترین حالت گروه $\hat{G}$ موضعاً فشرده آبلی بوده و دارای یک دوگان $\hat{\hat{G}}$ است، و یک همریختی پیوسته‌ی کانونی از $G$ به توی $\hat{\hat{G}}$ وجود دارد: اگر $g$ عضوی از $G$ باشد، آن گاه عنصر متناظر آن در $\hat{\hat{G}}$ در کاراکتر $\omega\epsilon\hat{G}$، همان مقداری را اختیار می‌کند که $\omega(g)$ اختیار کند. قضیه‌ی دوگانی بیان می‌کند که این همریختی $G \to \hat{\hat{G}}$ یک یکریختی توپولوژیکی پِرو است. پونتریاگین و ون کمپن قضیه‌ی دوگانی را به عنوان نتیجه‌ای از یک نظریه‌ی ساختاری که خودشان ارائه داده بودند، اثبات کردند. وِی به سوی تعریف تبدیل فوریه $f \mapsto \hat{f}$ی پیش رفت که توابع روی $G$ را به توابع روی $\hat{G}$ ببرد:

که در آن $dx$ اندازه‌ی هار روی $G$ است. فرمول وارون وِی ، که برای آن دسته از توابع پیوسته‌ی انتگرال پذیر $f$ برقرار است که تبدیل فوریه‌ی آن‌ها انتگرال پذیر باشد، بیان می‌دارد که یک بهنجارسازی برای اندازه‌ی هار $d\omega$ روی $\hat{G}$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\omega)\omega(x)d\omega.$$

فرمول پلانشرال $||f||_2^2 = ||\hat{f}||_2^2$ نتیجه‌ای از (P4) و (P5) و بنابراین نسخه‌ای از آن‌ها است که برای $G$ برقرار است. رودین [12] نشان داد که چگونه قضیه‌ی دوگانی و آنالیز هارمونیک را می‌توان با نادیده گرفتن نظریه‌ی ساختاری، بسط و گسترش داد.

1) Van Kampen   2) Weil

## اَدِل‌ها و آیدِل‌ها[۱]

آنالیز هارمونیک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده کاربرد مهمی در نظریه‌ی جبری اعداد دارد که منسوب به تِیت[۲] است. برای بیان این موضوع لازم است که نگاه دیگری به توابع $L$، همان گونه که در سال ۱۹۲۰ ظاهر شدند، بیندازیم. حتی پیش از آن که آرتین توابع $L$ خود را معرفی کند، هِکه[۳] انواع دیگری از آن‌ها را معرفی کرده بود. یکی از انواع توابعی که هِکه مورد بررسی قرار داد تعیمی از تابع $L$ اویلر و دیگر توابع $L$ دیریکله بود. این تابع $L$ وابسته به چیزی بود که کاراکتر گروسن[۴] نامیده می‌شد و ما به طور مختصر به آن می‌پردازیم. هِکه به طریقی پیچیده ثابت نمود که این $L-$ توابع که روی نیم صفحه‌ی راست همگرا هستند، به صورت مرومورفیک به صفحه‌ی مختلط تعمیم می‌یابند، در یک معادله تابعی صدق می‌کنند، مقادیر آن‌ها را در $s$ و $s-1$ به هم ربط می‌دهند و همگی تام هستند به جز حالتی که تابع مورد نظر خود $\zeta(s)$ باشد. به دلیل برخی کارهای تاکاجی[۵]، آرتین متوجه شد که توابع $L$ او در حالتی که گروه گالوا، آبلی باشد باید برابر توابع $L$ هِکه حاصل از گراسن کاراکترها باشند. این توقع آرتین را به سوی فرمول بندی و سپس اثبات قضیه تقابل آرتین[۶] هدایت نمود که تعمیمی فوق‌العاده قوی از تقابل مربعی بوده و یکی از ارکان نظریه‌ی ردهٔ میدان آبلی است. قضیه تقابل آرتین نیز آرتین را قادر نمود تا تساوی مورد انتظار برای توابع $L$ را اثبات نماید. از اینرو توابع $L$ آرتین در حالت گروه‌های گالوای آبلی درمعادلات تابعی صدق می‌کنند و برای کاراکترهای ضربی غیربدیهی این چنین گروه‌های گالوایی، آن ها تام هستند.

کاراکترهای گروسن در فرمول بندی اولیه‌شان به نوعی با گروه رده‌ی ایده‌آلی ددکیند مربوط بودند، اما چوالی[۷] فرمول بندی دیگری را در سال ۱۹۳۶ کشف کرد. یک مکان $v$ از یک میدان عددی $k$، یک رده‌ی یکریختی از نگاشت‌های میدان $k$ است بروی یک زیر میدان چگال از یک میدان موضعاً فشرده‌ی ناگسسته‌ی $K_v$. برای $k=\mathbb{Q}$، مکان‌ها عبارت‌اند از نشاندن‌های $\mathbb{Q}$ بتوی $\mathbb{R}$ و بتوی میدان $\mathbb{Q}_p$ از اعداد $p-$ اَدیک برای هر عدد اول $p$. هر یک از میدان‌های موضعاً فشرده یک نگاشت قدر مطلق دارند، عناصر $\mathbb{Q}_p$ با قدر مطلق ۱ بستار آن اعداد گویایی هستند که صورت و مخرج آن‌ها نسبت به $p$ اول هستند. چوالی گروه آیدل‌های $k$ را به عنوان زیرگروهی ضربی از تمام آن عناصری در گروه ضربی $K_v^\times$ معرفی کرد که قدر مطلق آن‌ها در همه به جز تعداد متناهی $v$ برابر ۱ است و با تعریف یک توپولوژی مناسب، این گروه آبلی را به یک گروه آبلی موضعاً فشرده تبدیل نمود. به نظر می‌رسد گروه ضربی $K^\times$ دارای یک نشاننده قطری بتوی گروه آیدل باشد. با این توضیحات یک کاراکتر گروسن، صرفاً یک کاراکتر ضربی از گروه آیدل‌هایی است که روی نشاننده قطری $K^\times$ بدیهی باشند.

تِیت دررساله‌اش در سال ۱۹۵۰ آنالیز هارمونیک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده را

---

1) Adeles and Ideles 2) Tate 3) Hecke 4) Grossen character 5) Takagi
6) Artin reciprocity 7) Chevally

امیل آرتین[۱]

در چنین وضعیتی به کار برد. ایدل‌های $k$ زیرگروه‌های جمعی تمام عناصری از $\prod k_v$ هستند که قدرمطلق آن‌ها در همه جز تعدادی متناهی از $v$ها کمتر یا مساوی ۱ باشد. آن‌ها با ضرب مؤلفه‌وار و یک توپولوژی مناسب، یک حلقه‌ی جا به جایی موضعاً فشرده تشکیل می‌دهند.

تِیت با استفاده از آنالیز هارمونیک و کشف ارتباط متقابل بین ایدل‌ها و آیدل‌ها، $L-$ تابع‌های هِکه را بازتعریف نمود و نشان داد که تداوم تحلیلی و معادله‌ی تابعی نتایجی از فرمول جمع‌بندی پواسون برای این حالت هستند. بزودی به حالت‌های غیرآبلی نظیر این نتیجه برمی‌گردیم.

## گروه‌های موضعاً فشرده

در پی پیشرفت‌های مکانیک کوانتم در حدود سال ۱۹۲۷، نظریه‌ی نمایش توسعه پیدا کرد و گروه‌های موضعاً فشرده‌ای را که نه فشرده بودند و نه آبلی دربرگرفت. دو مورد ملموس که قبل از ۱۹۴۰ مورد مطالعه قرار گرفتند آن چیزهایی بودند که امروزه گروه $n$ متغییره‌ی مختلط هایزنبرگ و گروه غیرهمگن لورنتس نامیده می‌شوند. به زبان آن روزگار، نظریه نمایش گروه هایزنبرگ در قالب نمایش‌های تصویری گروه $\mathbb{C}^n$ بررسی شده بود، و در آن توابع $\pi$ در شرط $\pi(x+y) = c(x,y)\pi(\chi)\pi(y)$ برای اسکالرهای غیر صفر $c(x,y)$ صدق می‌کنند. اما ما همچنان

---

1) Emil Artin

به نمایش‌های گروه می‌پردازیم.

گروه هایزنبرگ $H^n$ با $n$ متغییر مختلط، گروه تمام $(z,t)$هایی است که $z \in \mathbb{C}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ و دارای ضربی به صورت

$$(w,t)(z,t') = (w+z, t+t'+IMW^*z),$$

می‌باشد که در آن‌ها $W^*$ به معنای ترانهاده مزدوج $w$ است. این گروه با گروه ماتریس‌هایی که به شکل بلوکی

$$\begin{pmatrix} ۱ & z^* & \frac{۱}{۲}z^{۲}+it \\ ۰ & ۱ & z^* \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

هستند یکریخت و وارون در آن به صورت $(z,t)^{-۱} = (-z,-t)$ است. مرکز آن $Z$، مجموعه‌ی تمام عناصر به شکل $(۰,t)$ است و $H^n/Z \cong Bbbc^n$. اولین نظریه نمایش $H^n$ از پژوهش‌های هایزنبرگ، ویل (Weyl)، استون و فون نویمان سرچشمه گرفته است.

گروه $H^n$ دارای این ویژگی است که به دلیل بدیهی بودن هر نمایش یکانی متناهی بعد روی $Z$، به نمایش‌های خارج قسمتی $\mathbb{C}^n$ تجزیه می‌شود. در نتیجه، چنین نمایش هایی همه‌ی نقاط گروه را از یکدیگر متمایز می‌کنند. در واقع (P1) را برای چنین نمایش های $\varphi$ می‌توان به کار گرفت و می‌توانیم فرض کنیم که $\varphi$ یک نمایش یکانی تحویل ناپذیر با بعد متناهی $\dim\varphi$ است. خاصیت (P2) برقرار است، و لذا $\varphi(o,t)$ اسکالر است، در نتیجه به شکل مضرب $e^{۲\pi it\chi}$ از همانی می‌باشد. هم چنین یک محاسبه‌ی مختصر نشان می‌دهد که

$$(w,t)(z,t')(w,t)^{-۱}(z,t')^{-۱} = (۰, IM(w^*z - z^*w))$$

دترمینان $\varphi$ سمت چپ، برابر حاصل ضرب دترمینان $\varphi$ی هر یک از عامل‌ها بوده و لذا برابر ۱ است. بنابراین برای هر $w$ و $z$ $exp(۲\pi ilm(W'Z^* - z^*w)xdim\varphi) = ۱$ و در نتیجه $x = ۰$.

از این رو برای داشتن آنالیز هارمونیک معنی‌دار به اینجا می‌رسیم که آن دسته ازنمایش‌های یکانی را در نظر بگیریم که نامتناهی بُعد هستند. این تعدیل مستلزم اندکی اصلاح در تعریف‌های‌مان است. اکنون فضای کلی یک فضای هیلبرت خواهد بود، زیرفضاهای ناوردای مورد علاقه، زیرفضاهای بسته هستند، و یک نمایش تحویل ناپذیر است اگر شامل هیچ زیرفضای سره‌ی بسته‌ی ناصفر ناوردا نباشد. به این معنا، قضیه‌ی استون ــ فون نویمان بیان می‌کند که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر نامتناهی بعد $H^n$، با تقریب هم ارزی، توسط یک عنصر غیرصفر $\lambda \in \mathbb{R}$ پارامتری شده‌اند. نمایش $\pi_\lambda$ با پارامتر $\lambda$ روی $L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ به صورت

$$\pi_\lambda(x+iy,t)f(x') = e^{۲i\lambda y^*x'}e^{i\lambda(t+y^*x)}f(x'+x), \qquad (٦)$$

عمل می‌کند. در اینجا ما به حالت بینهایت کوچک $\pi_\lambda$ و ارتباط آن با مکانیک کوانتمی نمی‌پردازیم. این موضوع در مقاله مک کی [۱۱] به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است.

گروه موضعاً فشرده‌ی ناآبلی دیگری که پیش از ۱۹۴۰ مورد مطالعه قرار گرفت گروه غیرهمگن ۱۰ ـ بعدی لورنتس بود. باز هم انگیزه این مطالعه مکانیک کوانتمی بود. کار معروف ای. ویگنر[۱] روی نظریه‌ی نمایش این گروه در ۱۹۸۳ منتشر شد و در کار وایتمن[۲] [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

در سال ۱۹۳۶، پیش از آن که ویگنر این دومین گروه ناآبلی غیرفشرده را مورد مطالعه قرار دهد، موری[۳] و فون نویمان مطالعه‌ای روی حلقه‌های عملگرها انجام دادند که پیامدهایی را برای نظریه‌ی مجرد نمایش گروه دربرداشت. اگر $\pi$ نمایشی یکانی از $G$ روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $H$ باشد، فرض کنید $R(\pi)$ کوچک‌ترین جبر ضعیف ـ بسته ی عملگرهای خطی کراندار باشد که شامل تمام $\pi(g)$ها به ازای هر $g \in G$ است. گوییم $\pi$ اولیه[۴] است اگر مرکز $R(\pi)$ تنها از عملگرهای اسکالر تشکیل شده باشد. مجموع متعامد تعدادی متناهی یا شمارا از نسخه‌های یک نمایش تحویل ناپذیر، همواره یک نمایش اولیه است. اگر نمایش اولیه $\pi$ به این شکل خاص باشد، گوییم $\pi$ از نوع[۵] $I$ است. گروه $G$ از نوع $I$ است اگر تمام نمایش‌های اولیه‌ی آن از نوع $I$ باشند. یکی از کشفیات موری و فون نویمان آن است که گروه‌های موضعاً فشرده‌ای وجود دارند که از نوع $I$ نیستند: ثابت شده است که گروه (گسسته) آزاد با دو مولد چنین گروهی است. با کار مک کی و گلیم[۶] روشن شده است که یک گروه جدایی پذیر $G$ از نوع $I$ است اگر و تنها اگر فضای رده‌های هم‌ارزی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر یک فضای بورل استاندارد باشد. از این رو گروه‌هایی که از نوع $I$ نیستند مناسب بحث فعلی نیستند و آن‌ها را کنار می‌گذاریم.

دومین کار مهم در نظریه‌ی مجرد را گلفاند و رایکوف در سال ۱۹۴۳ انجام دادند. اگر $\pi$ یک نمایش یکانی از یک گروه موضعاً فشرده‌ی $G$ بوده و $v$ یک بردار باشد، آنگاه تابع $g \mapsto <\pi(g)v, v>$ معین مثبتِ پیوسته است. آنها عکس این مسئله را نیز مورد توجه قرار دادند (یعنی هر تابع معین مثبتِ پیوسته به ازای یک $\pi$ و یک $v$، همواره به این شکل است) و سپس ثابت نمودند که $\pi$ تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر $\pi(G)v$ تمام فضای هیلبرت $H$ را تولید کند و $<\pi(g)v, v>$ روی یک شعاع اکسترمم در مخروط تمام توابع معین مثبتِ پیوسته قرار داشته باشد. آنها با استفاده‌ی مناسب از قضیه‌ی کرین ـ میلمان قادر شدند نتیجه بگیرند که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر $G$ نقاط را جدا می‌کنند. بنابراین برای انجام آنالیز هارمونیک باید به اندازه‌ی کافی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر وجود داشته باشد.

در سال ۱۹۴۶، مک کی با الهام از کار وی [۱۶] مطالعه‌ی نظام‌مند نظریه‌ی نمایش گروه‌های موضعاً فشرده را شروع کرد: مک کی از طریق یک مسیر پیچ درپیچ که در [۱۸] صفحات ۸۹۲–۸۹۳ توصیف شده است متوجه این موضوع شد که نمایش‌های القا شده، که توسط فروبینوس برای گروه‌های متناهی معرفی شده بود، برای گروه‌های موضعاً فشرده جدایی پذیر با معنی بوده

---

1) E. Wigner 2) Wightman 3) Murray 4) Primary 5) type 6) Glimm

و دارای اهمیت است. تنها محدودیتی که وجود داشت این بود که زیرگروهی که القا باید از آن انجام شود، حتما باید بسته باشد. در واقع نمایش‌های (٦) از $H^n$ ، از نمایش‌های یک بعدی القا شده بودند. نمایش‌های ویگنر از گروه ناهمگن لورنتس نیز القا شده بودند و مثال های فراوان دیگری هم وجود داشتند. مک کی در این مسیر حرکت نمود که نظریه‌ای را در جهت دسته‌بندی نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ضرب‌های نیم مستقیم گروه‌ها، زمانی که نمایش‌های هر عامل ضرب شناخته شده‌اند و عمل چندان پیچیده نیست، تدوین نماید.

بخش پایانی نظریه‌ی مجرد، فرمول پلانشرال است. ماونتر[۱] و سِگال[۲] در سال ۱۹۵۰ و مستقل از یکدیگر ثابت نمودند که هر گروه نوع $I$ که تک پیمانه‌ای باشد (یعنی دارای اندازه‌ی هار چپی برابر با اندازه‌ی راست آن باشد) دارای اندازه‌ی یکتای $d\mu$ روی فضای رده‌های هم‌ارزی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر است به گونه‌ای که برای هر $f \in L^2(G)$، $||f||^2 = \int ||\pi(f)||^2_{HS} d\mu(\pi)$. توضیحات بیشتر درباره‌ی نظریه‌ی مجرد را می‌توان در مقاله‌ی مک کی [۱۰] مشاهده نمود.

از این رو در تکامل اولیه‌ی نمایش گروه‌های ناآبلی غیر فشرده، سه پرسش کلیدی درباره‌ی گروه‌های ویژه مطرح شد. آیا $G$ از نوع $I$ است؟ اگر چنین است، نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر $G$ چه هستند؟ اگر چنین است و اگر $G$ تک پیمانه‌ای است، اندازه‌ی پلانشرال آن به طور مشخص چیست؟ این پرسش‌ها برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی کلی بسیار دشوارتر است تا برای گروه‌های آبلی یا فشرده.

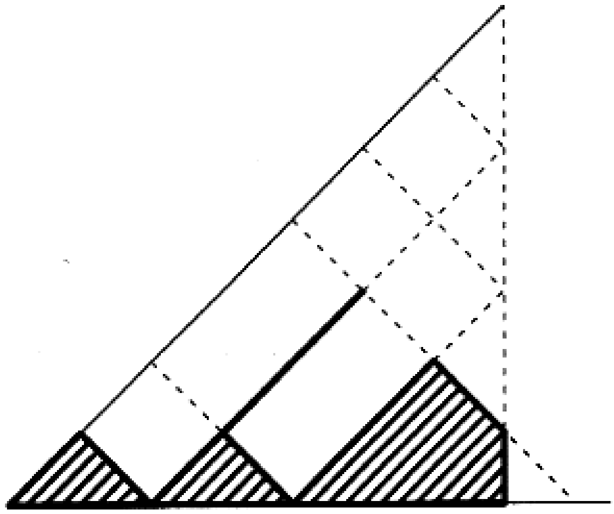
در بین رده‌هایی از گروه‌های موضعاً فشرده که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند گروه‌های لی پوچتوان، گروه‌های لی نوع $I$ حل پذیر، گروه‌های لی نیم ساده با مرکز متناهی، گروه‌های لی عام همبند نوع $I$ و گروه‌های $P-$ ادیک کُلی قرار دارند. ما فقط برخی از آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## گروه‌های حل پذیر و پوچتوان

یک گروه لی پوچتوان دارای یک گروه پوششی همبند همانریخت با $\mathbb{R}$ است و نمونه بارز آن، زیرگروه بسته‌ی همبند از ماتریس‌های مختلط بالا مثلثی است که درآیه‌های روی قطر آن ۱ است. گروه هایزنبرگ $H^n$ مثالی از این نوع است. هر گروه لی پوچتوان همواره تک پیمانه‌ای از نوع $I$ است. کیریلُف[۳] نشان داد که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر همواره از نمایش‌های ۱ بعدیِ زیرگروه‌های بسته القا می‌شوند، او این نمایش‌ها را طبقه‌بندی کرد و اندازه‌ی پلانشرال را به طور صریح به دست آورد. او در کارش یک «تصویر مداری[۴]». برای نمایش‌های تحویل ناپذیر فراهم ساخت که پیشتر توسط هریش ــ چاندارا[۵] برای حالت فشرده معرفی شده بود. تصویر مداری، نمایش‌ها را با داده‌های ضمیه شده به مدارهای عمل گروه روی فضای برداری دوگان جبری متناظر می‌کند. این موضوع به طور مفصل در اثر هو[٦] [٦] توصیف شده است.

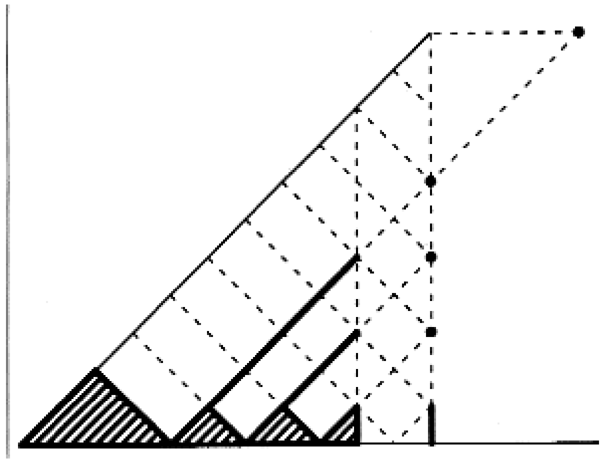
1) Maunter 2) Segal 3) Kirillov 4) Orbit picture 5) Harish-Chandra 6) Howe

فولند در سال ۱۹۷۳ از آنالیز هارمونیک روی گروه هایزنبرگ استفاده کرد تا تخمین جدیدی برای یک عملگر دیفرانسیل زیربیضوی در فضای اقلیدسی، که به عملگر $\Box_b = \bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b$ وابسته به مرز گوی یکه در $\mathbb{C}^n$، میل می‌کند، فراهم کند. به نظر می‌رسد که این عملگر را می‌توان به عنوان یک عملگر دیفرانسیلی با ضرایب ثابت روی $H^{n-1}$ در نظر گرفت، که از $H^{n-1}$ استفاده می‌کند و تخمینی دقیق‌تر از روش مرسوم اقلیدسی به دست می‌دهد. در سال ۱۹۷۴ فولند و اشتاین این ایده برای $H^{n-1}$ را با یک اصل انجماد تلفیق نمودند تا $\Box_b$ را برای دامنه‌های شبه محدب اکید بررسی کنند. روثشیلد[1] و اشتاین در سال ۱۹۷٦ نظریه‌ی نمایش برای دیگر گروه‌های لی پوچتوان را با یک اصل انجماد ترکیب کردند تا عملگرهای زیربیضوی $\sum X_i^2$ روی یک خمینه را، زمانی که $X_i$ها چنان میدان‌های برداری هستند که همراه با جابجاگرهایشان با یک ترتیب ثابت، فضای مماس کامل در هر نقطه از این خمینه را تولید می‌کنند، آنالیز کند. در ریاضیات هیچ مثال شناخته شده‌ای از یک تقارن شکسته شده که از طریق ترکیب یک اصل انجماد با نظریه‌ی نمایش یک گروه پوچتوان به دست آید وجود ندارد. یک گروه لیِ حل پذیر، دارای یک گروه پوششی همبند ساده است که با $\mathbb{R}^n$ همانریخت می‌باشد و هر زیرگروه بسته‌ی همبند از ماتریس‌های مختلط بالا مثلثی، نمونه‌ی خوبی برای این منظور است. چنین گروهی ممکن است تک پیمانه‌ای نباشد، و ممکن است از نوع $I$ نیز نباشد. در سال ۱۹٦۹ ل. آوسلندر[2] و کاستانت[3] برای دسته‌بندی کردن نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر نوع $I$ گروه‌های لی حل پذیر، تصویرمداری کریلف را تعمیم دادند. پوکانسزکی[4] حالتی از فرمول پلانشرال را ارائه نمود که در آن نیازی به تک پیمانه‌ای بودن و یا حتی نوع $I$ بودن گروه نبود.



شکل ۱. نقاط یکانی در یک سری یکانی غیرکروی $Sp(6,2)$ با یک کاراکتر حقیقی روی $A$

1) Rothschild 2) L. Auslander 3) Kostant 4) Pukanszky



شکل ۲. نقاط یکانی شناخته شده در سری اصلی کروی $Sp(6,2)$ با یک کاراکتر حقیقی روی $A$

## گروه‌های نیم ساده

وسیع‌ترین عرصه‌ی پژوهشی، گروه‌های لی نیم ساده‌اند که همواره تک پیمانه‌ای بوده و هریش چاندرا در مقاله‌ای در سال ۱۹۳۵ نشان داده است که آن‌ها از نوع $I$ هستند. ما روی آن گروه‌های لی نیم ساده‌ای تمرکز می‌کنیم که می‌توانند به عنوان گروه‌های ماتریس‌های حقیقی یا مختلط شناخته شوند. جدای از یکریختی، گروه‌های لی نیم ساده‌ی ماتریس‌ها، دقیقاً زیرگروه‌های بسته‌ی همبند ماتریس‌های مختلط هستند که تحت عمل ترانهاده ـ مزدوج بسته بوده و دارای مرکز گسسته (و در نتیجه لزوماً متناهی) هستند. گروه‌های خطی ویژه، گروه‌های سیمپلکتیک و انواع متفاوتی از گروه‌های طولپایی فرم‌های مربعی مثال‌هایی برای این ادعا می‌باشند. برای توصیف بیشتری از این نظریه در حد یک کتاب، [7] را ببینند. اولین گروه از این نوع که مورد توجه قرار گرفت، گروه $SL(2,\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس‌های حقیقی ۲ در ۲ با دترمینان یک بود. بارگمن[1]، شاید با انگیزه کامل کردن مقاله‌ی سال ۱۹۳۸ ویگنر، نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر این گروه را (و به طور دقیق‌تر، مزدوجی از آن را) در مقاله مشهوری در سال ۱۹۴۷ دسته‌بندی نمود. بارگمن اطلاعاتی در مورد تجزیه‌ی $L^2$ی این گروه ارائه نمود به گونه‌ای که حتی بر ایده‌ی فرمول پلانشرال پیشی گرفت. نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر در سری‌ها نمود پیدا می‌کند. یکی از این‌ها که امروزه سری اصلی کروی[2] نامیده می‌شود به ازای هر $v$ حقیقی شامل یک نمایش $P^{+,iv}$ می‌باشد. این نمایش روی $L^2(\mathbb{R})$ به صورت

$$P^{+,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = |bx+d|^{-1-iv} f(ax+c)(bx+d)^{-1}), \qquad (\text{آ}7)$$

1) Bargmann   2) Spherical *principle series*

عمل می‌کند و در رده‌بندی تنها نمایش‌هایی با $v \geq ۰$ مورد نیاز هستند. نمایش $P^{-,iv}$ از سری‌های اصلی ناکروی روی $L^۲(\mathbb{R})$ برای $v$ حقیقی به صورت

$$P^{-,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = sgn(bx+d)P^{+,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x), \qquad (\text{۷ب})$$

عمل می‌کند و در رده‌بندی تنها نمایش‌هایی با $v > ۰$ مورد نیاز هستند. بارگمن همچنین دو مجموعه از نمایش‌ها را که امروزه سری‌های گسسته نامیده می‌شوند کشف نمود. یکی از این‌ها شامل $D^{+,n}$ به ازای هر $n \geq ۲$ می‌باشد. این نمایش روی فضای توابع تحلیلی روی نیم صفحه‌ی بالایی که نسبت به $y^{n-۲}dxdy$ مربع آن‌ها انتگرال پذیر است، عمل می‌کند. این عمل به صورت زیر است:

$$D^{+,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = (bz+d)^{-n} f(az+c)(bz+d)^{-۱}). \qquad (۸)$$

نمایش متناظری نیز به صورت $D^{-,n}$ در فضای مزدوج‌های مختلط وجود دارد. سری دیگری به نام سری متمم[1]، همانند (۷آ) عمل می‌کند با این تفاوت که $iv$ با یک پارامتر حقیقی $u$ بین ۰ و ۱ و همچنین توسط یک ضرب داخلی پیچیده که به وضوح معین مثبت نیست جایگزین شده است. همچنین نمایش بدیهی یک بعدی و دو نمایشی که امروزه حدهای سری‌های گسسته نامیده می‌شوند، یعنی $D^{+,۱}$ و $D^{-,۱}$ وجود داشتند. این همه آنچه بود که وجود داشت. آن چه که بیش از هر چیز دیگری بارگمن را غافلگیر کرد مشاهده این پدیده بود که تنها سری‌های اصلی و سری‌های گسسته در نمایشِ منتظمِ چپ گروه یعنی $l(g)F(x) = F(g^{-۱}x)$ روی $L^۲$ی همان گروه نقش دارند. سری متمم هیچ نقشی بازی نکرد. علاوه بر آن، سری گسسته به صورت گسسته مشارکت می‌کرد. این پدیده‌ای جدید بود که پیش از آن در گروه‌های نافشرده مشاهده نشده بود.

هم چنین در سال ۱۹۴۷ گلفاند و نیمارک $SL(۲,\mathbb{C})$ را بررسی نمودند. آنها سری‌های اصلی و سری‌های متمم را به دست آورده و پی بردند که هیچ سری گسسته‌ای وجود ندارد. در سال ۱۹۵۰ گلفاند و نیمارک کتابی را منتشر کردند که اطلاعات گسترده‌ای درباره‌ی نظریه‌ی نمایش گروه‌های لیِ نیم ساده‌ی کلاسیکِ مختلط به دست می‌داد. هیچ سری گسسته‌ای در آن ظاهر نشد. کتابِ سال ۱۹۵۰ چگونگی استفاده از هندسه‌ی انتگرال برای به دست آوردن یک فرمول پلانشرال صریح برای $G = SL(n,\mathbb{C})$ (تجزیه $L^۲(G)$ ) را نیز نشان داد.

به نظر می‌رسد مک کی اولین فردی بود که پی برد نمایش‌های (۷)، نمایش‌های القا شده هستند، القا شده از نمایش‌های یک بعدی زیرگروه‌های بالا مثلثی. هریش ـ چاندار در سال ۱۹۵۲ فرمول پلانشرال برای $SL(۲,\mathbb{R})$ را به دست آورد، و گلفاند و رایکوف در سال ۱۹۵۳ آن را به $SL(n,\mathbb{R})$ تعمیم دادند. از این نتایج، تصویری از $L^۲(G)$ پدیدار شد متشکل از تعداد زیادی قطعه که هر یک از آن‌ها وابسته به آنالیز هارمونیک نوعی اساسی از زیرگروه‌های آبلی ماکسیمال به نام زیرگروه کارتان بود. برای $SL(n,\mathbb{C})$، با تقریب تزویج، تنها یک گروه اینچنینی (زیرگروه قطری)

---

1) Complementary series

هریش چاندرا[۱]

وجود دارد، و فرمول پلانشرال به آنالیز فوریه‌ی زیرگروه قطری تقلیل می‌یابد. برای $SL(n,\mathbb{R})$، دو زیرگروه کارتان غیرمزدوج (زیرگروه قطری و زیرگروه دوران) وجود دارد. آنالیزی که به فرمول پلانشرال منجر می‌شود دقیق است، اما قلب این آنالیز، آنالیز فوریه روی دو زیرگروه کارتان است. برای $SL(n,\mathbb{R})$ تعداد $[\frac{n}{2}]+1$ زیرگروه کارتان غیرمزدوج وجود دارد.

هریش ـ چاندار به این نکته پی برد که پیدا کردن نمایش متناظر با یک زیرگروه کارتان فشرده مهم است و این که این‌ها باید سری‌های گسسته باشند ـ نمایش‌هایی که مستقیماً در فرمول پلانشرال ظاهر می‌شوند. او ابتدا تعمیم‌هایی از (۸) به دیگر گروه‌هایی که روی دامنه‌های متقارن کراندار عمل می‌کنند را فراهم کرد، اما می‌دانست که این کافی نیست زیرا چنین گروه‌هایی شامل گروه‌های دارای زیرگروه‌های کارتانِ فشرده نبودند. بالاخره در پی رشته‌ای از مقالات عمیق که در مقاله‌ای ستایش برانگیز در مجله آکتامتمتیکا[۲] در سال ۱۹۶۶ به اوج خود می‌رسد، او یک رده‌بندی از سری گسسته را کامل نمود. او بعدها نشان داد که نمایش‌های مرتبط با فرمول پلانشرال، از زیرگروه‌های سهموی که با $MAN$ نشان داده می‌شوند القا می‌شوند، هر $MAN$ از یک رده‌ی تزویجی مجزا با استفاده از زیرگروه‌های کارتان، همراه با نمایش القا شده‌ای متشکل از یک سری گسسته روی $M$، یک کاراکتر ضربی یکانی گروه اقلیدسی $A$، و نمایش بدیهی روی گروه پوچتوان همبند ساده‌ی $N$ ساخته شده است. هریش ـ چاندار گام‌های پایانی اثبات فرمول پلانشرال را در سال ۱۹۷۶ منتشر نمود.

1) Harish-Chandra 2) Acta Mathematica

نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر دیگری به جز آنچه برای اندازه‌ی پلانشرال مورد نیاز است، همانند آنچه برای $SL(n,\mathbb{R})$ برقرار است، وجود دارند. رده‌بندی آن ها پیچیده‌تر است و حل نشده باقی مانده است. در سال ۱۹۷۳ یک جهش بسیار بزرگ توسط لنگلندز صورت گرفت، کسی که تمام نمایش‌های «پذیرفتنی [1]» تحویل ناپذیر، که شامل همه‌ی نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر می‌شود را، دسته‌بندی کرد. در شکل نهایی این دسته‌بندی مشاهده شده است که همانند بالا، نمایش‌های پذیرفتنی تحویل ناپذیر، خارج قسمت‌های نمایش القا شده از همان زیرگروه‌های $MAN$ هستند (به جز این که ممکن است لازم باشد برای $MA$ داده شده از بیش از یک $N$ استفاده نمود). یک سری گسسته یا حد یک سری گسسته روی $M$، و یک کاراکتر ضربی روی $A$ هست که لگاریتم مدول آن در یک مخروط اساسی واقع می‌شود. مجدداً روی $N$ از نمایش بدیهی استفاده می‌شود. در نتیجه پرسش درباره‌ی نمایش های یکانی به پرسشی در این باره تبدیل می‌شود که کدام یک از آن چه خارج‌قسمت‌های لنگلندز نامیده می‌شوند، می‌تواند با معرفی یک ضرب داخلی جدید، یکانی شود. برای $SL(۲,\mathbb{R})$، سری‌های متمم به این طریق به دست آمده‌اند، اما یک جواب کلی لازم است. پیشرفت در این مسیر کند بوده و مبتنی بر یافتن روش‌هایی برای حل و فصل یکانی بودن رده‌های خارج قسمت‌های لنگلندز است. این روش‌ها امروزه به قدر کافی قدرتمند هستند به گونه‌ای که وُگان [2] مسئله را برای $SL(n,\mathbb{C})$ و به ویژه $SL(n,\mathbb{R})$ به طور کامل حل و فصل کرده و بارباش [3] نیز همین کار را برای گروه های سیمپلکتیک و متعامد مختلط انجام داده است. اما این احتمال وجود دارد که پاسخ کلی برای تمام $G$ ها ممکن است بیش از آن پیچیده باشد که بتوان آن را به صورت مستدل بیان کرد. شکل های ۱ و ۲ که برگرفته از [۲] است دو وضعیت در یک گروه $SL(٦,۲)$ را نمایش می‌دهد؛ نمایشی از یک $M$ در هر دو حالت ثابت است، و شکل، تصویر دو بعدی لگاریتم‌های کاراکترهای ضربی حقیقی را در یک مخروط مناسب نشان می‌دهد.

نواحی، خطوط و نقاطی که پررنگ‌تر مشخص شده‌اند معرف پارامترهایی هستند که متناظر با نمایش‌های یکانی هستند. در حالت شکل ۱، تصویر کامل شده است و این اعتقاد وجود دارد که در حالت متناظر با شکل ۲ هم تصویر کامل می‌شود. می‌توان ثابت نمود که پارامترهای نمایش‌های یکانی یک گروه دلخواه $G$ مجتمع‌هایی چند وجهی از این نوع را تشکیل می‌دهند، اما توصیف پارامترهای نمایش‌های یکانی در این مثال‌ها به قدری پیچیده است که اکثر پژوهشگران این عرصه به جای جستجوی تمام نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر، تنها به دنبال نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر «مهم» هستند.

دو تا از کاربردهای آنالیز هارمونیک در گروه‌های نیم ساده را متذکر می‌شویم. یکی از آن‌ها تجزیه‌ی فضاهای تابعی روی فضاهای متقارن نیم ساده‌ی $G/H$ است که در آن $H$ یک گروه ثابت از یک گسترده‌ی [4] $G$ است. این نظریه در حال حاضر نسبتاً کامل است و می‌تواند به عنوان یک تعمیم هم زمان و قابل توجه از سه نظریه در نظر گرفته شود: نظریهٔ کارتان در سال ۱۹۲۹ برای

1) Admissible 2) Vogan 3) Barbasch 4) involution

حالت فشرده، نظریه‌ای در مورد فضاهای متقارن ریمانی که در سال ۱۹۵۸ توسط هریش ـ چاندرا آغاز شده و توسط هلگاسن در سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ تعمیم پیدا کرده، و همچنین نظریه هریش ـ چاندرا در سال ۱۹۷۶ برای گروهی به شکل $G \times G/diag(G)$.

## برنامه لنگلندز

کاربرد دیگر به برنامه لانگلندز در نظریه اعداد و هندسه محاسباتی مربوط می‌شود که وی به خاطر آن‌ها جایزه وُلف[1] را در سال ۱۹۹۶ دریافت نمود(Notices, February 1996, p. 221) برنامه لنگلندز جنبه‌های متعددی دارد و ما تنها یکی را ذکر می‌کنیم که عبارت است از جستجو برای تعمیمی از قاعده تقابل آرتین برای توسیع های گالوای ناآبلی میدان‌های عددی $k$. امید این است که بتوان تمام توابع $L$ آرتین را با انواع دیگری از توابع $L$ که دارای پیوستگی تحلیلی و معادلات تابعی هستند مشخص نمود. منبعی برای برخی انواع توابع $L$ با رفتار تحلیلی خوب، رده دیگری از توابع $L$ است که توسط هنکه معرفی شده و براساس فرم‌های هلالی[2] ارائه شده‌اند. در نظریه لاگلندز آن‌ها در تعمیمی از رساله‌ی تیت گنجانده شده‌اند که نتایج آن در بالا مورد بحث قرار گرفت. در نظریه لگلندز، رساله تیت به عنوان ابزاری برای کار با ماتریس‌های ۱ در ۱ در نظر گرفته شده است زیرا آیدل‌ها را می‌توان به عنوان $GL_1(A)$ در نظر گرفت که در آن $A$ حلقه ادل‌های $k$ هستند. توابع $L$ هکه در حالت ۲ در ۲ی نظریه لنگلندز پدیدار می‌شوند. به شکلی خاص‌تر، یک گروسن کاراکتر، کاراکتری از آیدل‌ها است که روی نشانده شده‌ی قطری میدان اعداد $k$ بدیهی است، و لنگلندز به هر نمایش «پذیرفتنی» تحویل ناپذیر از $GL_n(A)$ که مستقیماً در $L^2$ی $GL_n(A)/GL_n(k)Z$ (با فرض این که $k$ به طور قطری نشانده شده و $Z$ نیز همان مرکز باشد) پدیدار شده و در شرطی که صفر شدن در هلال‌هایی از فرم‌های مدولی کلاسیک را تعمیم می‌دهد صدق کند، یک تابع $L$ را متناظر می‌کند. کارهای انجام شده توسط تاماگاوا[3]، گادیمنت[4]، ژاک[5] ـ لنگلندز، سپس گودیمنت ـ ژاک، و بالاخره ژاک، رفتار تحلیلی خوب این $L$ تابع‌ها را نشان داد.

قاعده تقابل آرتین به این قضیه منجر شد که تابع $L$ آرتین از هر نمایش ۱ بعدی گروه گالوا، تابع $L$ی است که به همین طریق از $GL_1(A)$ به دست آمده است. تقابل لنگلندز[6] عبارت از این حدس است که تابع $L$ آرتین هر نمایشی از یک گروه گالوای $n$ بعدی، همان تابع $L$ به دست آمده از این طریق از $GL_1(A)$ است. زمانی که میدان اعداد $\mathbb{Q}$ باشد، تقابل لنگلندز به ادعایی در مورد انتخاب الگو برای تشخیص این که چگونه یک چندجمله‌ای یک متغیره تکین تحویل ناپذیر با ضرایب در $\mathbb{Z}$ زمانی که به پیمانه‌ی یک عدد اول تحویل یافته است، تجزیه می‌شود، منجر می‌گردد. لنگلندز در اثری که به خاطر آن در سال ۱۹۸۲ برنده جایزه کول[7] شد این حدس را برای رده‌ای از نمایش‌های گروه گالوای ۲ بعدی که با روش‌های قبلی قابل اثبات نبود، ثابت نمود. تونل[8] قضیه لنگلندز را

1) Volf Prize 2) Cusp forms 3) Tamagawa 4) Godement 5) Jacquent 6) Langlands reciprocity 7) Cole Prize 8) Tunnell

برای تمام نمایش‌های گروه گالوای ۲ بعدی که تصویر آن‌ها در $PGL_2(\mathbb{C})$ زیرگروهی از گروه متقارن با چهار عنصر است، تعمیم داد.

این قضیه ژرف ازلنگلندز و تونل، اگر چه بر اساس عبارات نمایش‌های گروه، توابع $L$، و ادل‌ها جمله‌بندی شده است، در نهایت قضیه‌ای درباره اعداد اول است. این قضیه سنگ بنای نظریه نمایشی کار وایلز[1] روی آخرین قضیه فرما است.

همچنان که لنگلندز در سال ۱۹۹۰ در [۹] درباره کل برنامه‌اش گفت: «ما با حدس‌های درهم تنیده‌ای سر و کار داریم که نمی‌توان به طور مستقیم آنها را مورد حمله قرار داد. کشش زیبای بین جنبه‌های فوری مسائل و عوامل به هم پیوسته از یک سو، و از سوی دیگر عملکرد آن‌ها به عنوان ابزاری برای بیان و ظاهر نمودن قوانینی نه چندان جهانشمول به عنوان پدیده‌ای از نوع دیگر، که برای آن‌ها این قوانین امکان وقوع زیادی دارند، احتمالاً در فیزیک به طور گسترده‌ای شناخته شده است، جایی که در آن مدت طولانی است که پذیرفته شده است که مفاهیم مورد نیاز برای درک یک واقعیت، ممکن است ارتباط اندکی با آن داشته باشد، تا در ریاضیات، که در آن به طرز عجیبی، به ویژه در بین متخصصان نظریه اعداد، نوآوریِ مفهومی، به دلیل اکراه از روبرو شدن با واقعیت و فرار از آن، مکرراً تقبیح شده است. همچنان که بررسی اثبات گرد فالتینگ[2] از حدس موردل[3] روشن می‌سازد، پیشرفت‌های نیم قرن اخیر ما را به بلوغ رسانده است، اما هنوز عرصه‌های زیادی وجود دارند که باید تسخیر شوند.»

## منابع


[1] E. Artin, *Collected papers*, Springer-Verlag, NewYork, 1965.

[2] M. W. Baldoni-Silva and A. W. Knapp. *A construction of unitary representations in parabolic rank two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1989), 579-601.

[3] L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Partial Differential Equations,* Interscience, New York, 1964.

[4] F. G. Frobenius, *Gesammelte Abhandungen,* 3 vol., Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[5] K. I. Gross *On the evolution of noncommutative harmonic analysis*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 525-548.

[6] R. Howe, *A century of Lie theory,* Mathematics into the Twenty-First Century, Proc. AMS Centennial Symposium (August 1988) vol. II, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 101-320.


1) Wiles 2) Gerd Falting 3) Mordell

[7] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An overview based on examples,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.

[8] A. W. Knapp and D. A. Vogan, *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[9] R. P. Langlands, *Representation theory: Its rise and its role in number theory,* Proc Gibbs Sympos (New Haven, CT, 1989), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 18-210.

[10] G. W. Mackey, *Infinite dimensional group representations*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 628-686.

[11] ——, *Harmonic analysis as the exploitation of symmetry- a historical survey*, Rice Univ. Stud. **64** (1978). No. 2 & 3, 73-228.

[12] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience, New York, 1962.

[13] I. Schur, *Gesammelte Abhandungen*, 3 vol., Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[14] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[16] A. Weil, *L'inte'gration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.

[17] A. S. Wightman, *Eugene Paul Wigner, 1902-1995, Notices* **42** (1995), 769-771.

[18] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2 vol., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

مترجم: احمد صفاپور
دانشگاه ولی عصر (عج) ـ رفسنجان
safapour@vru.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۱۲۵ تا ۱۲۷

# رابرت فیلن لنگلندز

احمد صفاپور

رابرت ف. لنگلندز[۱] ریاضیدان کانادایی و از ریاضیدانان پیشرو قرن بیستم در ٦ اکتبر ۱۹۳٦ در نیووست مینستر[۲] واقع در بریتیش کلمبیا در کشور کانادا به دنیا آمد. پدر او رابرت لنگلندز و مادرش کتلین فیلن بودند. او در ۱۳ اوت ۱۹۵٦ در ۱۹ سالگی و زمانی که در دانشگاه بریتیش کلمبیا[۳] دانشجوی دوره کارشناسی بود با شارلوت ل. شورِی[۴] ازدواج کرد. حاصل این ازدواج چهار فرزند به نام های ویلیام، سارا، رابرت و توماسین هستند. یک سال پس از ازدواج، موفق به اخذ درجه کارشناسی شد و با ادامه تحصیل در همان دانشگاه در سال ۱۹۵۸ درجه کارشناسی ارشد را دریافت نمود. لنگلندز در دانشگاه ییل[۵] به تحصیل در دوره دکتری پرداخت. در سال ۱۹٦۰ رساله دکتری‌اش را تحت عنوان «نیم گروه‌ها و نمایش‌های گروه‌های لی» ارائه نمود و موفق به اخذ درجه دکتری گردید. او درباره رساله‌اش نوشت:

«در این رساله دو بخش مرتبط با یکدیگر وجود دارد: یکی در مورد نمایش‌های گروه‌های لی و دیگری در مورد عملگرهای متناظر با نمایش‌های گروه‌های لی. بخش اول در مجله ریاضی کانادا[٦] منتشر شده است. اما بخش دوم تنها به صورت یک معرفی در گزارش آکادمی ملی علوم آمریکا[۷] انتشار یافته است. با این وجود، این بخش آن قدر خوش شانس بوده است که به طور جدی توسط دِرِک رابینسون[۸] مورد توجه قرار گرفته و برخی نتایج آن را در کتابش با عنوان عملگرهای بیضوی و گروه‌های لی[۹] ضمیمه نماید.»

پس از اتمام دوره دکتری، به عنوان مدرس به استخدام دانشگاه پرینستون درآمد. پس از هفت سال تدریس در آنجا، به مرتبه دانشیاری ارتقاء پیدا کرد. سال های ٦۵—۱۹٦۴ را به عنوان فرصت مطالعاتی در دانشگاه برکلی در کالیفرنیا گذراند. در سال ۱۹٦۷ به عنوان استاد تمام به دانشگاه ییل

1) Robert Phelan Langlands 2) New Westminister 3) Brithish Columbia University
4) Charlotte L. Cheverie 5) Yale University 6) Canadian Journal of Mathematics
7) Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA 8) Derek Robinson
9) Elliptic Operators and Lie Groups

برگشت. سال های ۶۸–۱۹۶۷ را در دانشگاه فنی خاورمیانه[۱] در آنکارای ترکیه گذراند. در طی این مدت دفتر او در کنار دفتر کاهیت آرف[۲] واقع شده بود. پس از ۵ سال تدریس در دانشگاه ییل، دوباره به پرینستون بازگشت، این بار به عنوان استاد ریاضی در انستیتو مطالعات پیشرفته[۳]. از سال ۱۹۷۲ به بعد، در همان انستیتو باقی ماند.

لنگلندز در سال ۱۹۸۸ جایزه آکادمی ملی علوم برای ریاضی را دریافت کرد. او اولین دریافت کننده‌ی این جایزه بود که توسط انجمن ریاضی آمریکا[۴] بنیاد نهاده شد. در تقدیرنامه‌ی این جایزه، در توصیف لنگلندز چنین آمده است:
«... دارای بینشی استثنایی که ارتباطی انقلابی و جدید بین نظریه‌ی نمایش‌های گروه با نظریه فرم‌های خودریخت و نظریه اعداد ایجاد کرده است.»

لازم است قدری در مورد کار لنگلندز که باعث شد این جایزه را دریافت کند، توضیح داده شود. لنگلندز به محض تکمیل کارهای رساله‌اش، کار کردن روی فرم‌های خودریخت را آغاز نمود. او در یک مقاله ارزشمند، آخرین نتایج هاریش ـ چاندرا را برای به دست آوردن فرمولی برای بُعد برخی فضاهای مهم فرم‌های خودریخت به کار برد. سپس در طی دو سال بعد، نتایج عمیقی را در مورد سری آیزنشتاین به دست آورد و این سری را برای اثبات حدسی در نظریه اعداد منسوب به ویل[۵] به کار برد. او در زندگی نامه کوتاهی که به قلم خود نگاشته و در سایت جایزه شاو[۶] آمده است چنین می‌نویسد:

«اگر چه رساله من در آنالیز تابعی و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بود، علائق من به سرعت، و تا حدودی تحت تأثیر درسی با استیون گال[۷] در دانشگاه ییل، به سمت ایده‌های هکه[۸] و سلبرگ[۹] و در نتیجه به توابع زتا، و به طرز موثری به نظریه سری‌های آیزنشتاین تغییر کرد. این علاقه همراه با علاقه‌ی در حال پیدایش (در من) به نظریه میدان‌های رده‌ای که در دانشگاه پرینستون شروع شد، مورد تشویق فراوان سالمون بوخنر[۱۰] قرار گرفت.»

او در سال ۱۹۶۷ نامه‌ای به ویل نوشت که حاوی ایده‌های ریاضی عمیقی بود. نامه‌ی ۱۷ صفحه‌ای او دستنویس بود و در ژانویه ۱۹۶۷ ارسال شد. این نامه آنچه را که مدتی بعد تبدیل به «برنامه لنگلندز» شد، مطرح می‌کرد. ویل از وی خواست که این نامه را تایپ کند. لنگلندز در این نسخه تایپ شده ایده‌های نامه را تا حدودی تعمیم داد. کَسِلمَن[۱۱] نوشته است که نامه حاوی چه مطالبی بود:

«...گردایه‌ای فوق‌العاده غنی و به طرز اعجاب‌آوری دقیق از حدس‌هایی که نظریه اعداد، فرم‌های خودریخت، و نظریه نمایش را به یکدیگر پیوند می‌زد. این ها هسته‌ی برنامه‌ای را تشکیل می‌دادند که هنوز هم ادامه دارد و نقشی محوری در هر سه مبحث ایفا می‌کند.»

---

1) Middle East Technical University 2) Cahit Arf 3) Institute for Advanced Study
4) American Mathematical Society 5) Weil 6) Shaw Prize 7) Steven Gaal 8) Hecke
9) Selberg 10) Salomon Bochner 11) Casselman

لنگلندز نامه‌هایی به برخی ریاضیدانان دیگر هم نوشت که از جمله آن‌ها می‌توان به نامه‌های او به سِر[1] و هاو[2] اشاره نمود. او دراین نامه‌ها هم موضوعات مهم و قابل توجهی را مطرح نمود. در سال های ٦٨—١٩٦٧، زمانی که در آنکارا بود، نامه‌ای به سِر نوشت و در آن ایده‌ای را مطرح نمود که بعدها به عنوان حدس دلین[3] ـ لنگلندز شناخته شد. این حدس مدتی بعد توسط کاژدان[4] و لوستیگ[5] ثابت شد. اثبات حدسی از لنگلندز در مورد گروه خطی عمومی توسط لوران لافورگ[6] مدال فیلدز را در سال ۲۰۰۲ برای او به همراه داشت.

جایزه آکادمی ملی علوم تنها جایزه مهمی نبود که لنگلندز به خاطر کارهای ارزشمندش دریافت کرد. در سال ۱۹۷۵ مدال ویلبر کراس[7] را از دانشگاه ییل دریافت کرد. در سال ۱۹۸۲ جایزه کول[8] در نظریه اعداد را به خاطر کارهای پیشتازانه‌اش روی فرم‌های خودریخت و سری آیزنشتاین از انجمن ریاضی آمریکا دریافت نمود. جایزه‌ی ریاضی وولف[9] را نیز در سال ۱۹۹۵ به طور مشترک همراه با وایلز[10] دریافت کرد. این جایزه به خاطر: «... دیدگاه‌های استثنایی و راهگشای او در حوزه نظریه اعداد، فرم‌های خودریخت، و نظریه نمایش،» به لنگلندز اهدا شد. علاوه بر این‌ها، در سال ۱۹۸۰ جایزه جفری ـ ویلیامز[11]، در سال ۲۰۰۵ جایزه استیل[12]، در سال ۲۰۰٦ جایزه نمرس[13] در ریاضیات، و در سال ۲۰۰۷ جایزه شاو در علوم ریاضی[14] را (به طور مشترک همراه با ریچارد تیلور) دریافت نموده است.

لنگلندز در سال ۱۹۷۲ به عنوان عضو انجمن سلطنتی کانادا، در سال ۱۹۸۱ به عنوان عضو انجمن سلطنتی لندن و در سال ۲۰۱۲ به عنوان عضو افتخاری انجمن ریاضی آمریکا انتخاب شد. او از دانشگاه‌های متعددی دکتری افتخاری دریافت نموده است که از جمله آن‌ها می‌توان به دانشگاه‌های بریتیش کلمبیا، مک مستر[15]، مک‌گیل[16]، تورنتو[17]، پاریس ۷[18]، واترلو[19] و دانشگاه شهری نیویورک[20] اشاره نمود. آثار او در قالب ده‌ها کتاب و مقاله توسط ناشرین معتبر به چاپ رسیده و یا در نشریات معتبر علمی جهان منتشر گردیده است.

**تشکر و قدردانی.** لازم می‌دانم از آقایان دکتر مهدی عسگری و دکتر بامداد یاحقی به خاطر تذکرات و راهنمایی‌هایشان برای اصلاح این متن تشکر نمایم.

---

احمد صفاپور
دانشگاه ولی عصر (عج) ـ رفسنجان
safapour@vru.ac.ir

---

1) Serre 2) Howe 3) Deligne 4) Kazhdan 5) Lusztig 6) Laurent Lafforgue 7) Wilbur Cross Medal 8) Cole 9) Wolf Prize in Mathematics 10) Wiles 11) Jeffry-Williams Prize 12) Steel Prize 13) Nemmers Prize in Mathematics 14) Shaw Prize in Mathematical Sciences 15) McMaster 16) McGill 17) Toronto 18) Paris VII 19) Waterloo 20) City University of New York

# FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

**Iranian Mathematical Society**

**ISSN 1022-6443**

**Vol. 33, No. 2, Fall 2015**



---

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir