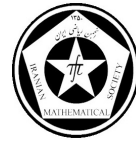


بسم الله الرحمن الرحيم



فرهنگ و اندیشه ریاضی

علمی-ترویجی

ISSN: 1022-6443

سال ۳۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۴

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۹۴)

شماره پیاپی: ۵۶

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسئول: سید منصور واعظپور

سردبیر: احمد صفاپور

ویراستار ارشد: ابوالفضل رفیعپور

مدیر اجرایی: شیوا زمانی

هیأت تحریریه:

عین‌اله پاشا، دانشگاه خوارزمی

ابوالفضل رفیعپور، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رشید زارع نهندی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم

پایه زنجان

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

عبدالعزیز عبداللہی، دانشگاه شیراز

سعید مقصودی، دانشگاه زنجان

احسان ممکن، دانشگاه یاسوج

بهنام هاشمی، دانشگاه صنعتی شیراز

حروفچینی: XqPersian - دفتر انجمن ریاضی

تهیه و تنظیم: فریده صمدیان

نشانی: تهران - صندوق پستی: ۴۱۸-۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۷۷۷۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۸۸۵۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir

نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir

سامانه نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشه ریاضی نشریه علمی-ترویجی انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشار مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفی ریاضیات را ترویج می‌دهند و هم بازگوکننده فرهنگ و روند ریاضیات حاکم بر جامعه ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائه موضوعی فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیری موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمه مقاله‌هایی از نوع یادشده در بالا یا ترجمه مقالات کلاسیک ریاضی (ترجمه آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائه موضوعات آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.
- علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقاله خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:
- مقالات با استفاده از نرم‌افزار «زی‌پرشین» تهیه شده و نسخه پی‌دی‌اف آن از طریق سامانه نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال شود. در صورتی که مقاله فرستاده شده، پس از طی مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «زی‌پرشین» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقاله ترجمه شده همراه با ترجمه آن الزامی است.
- نام و نشانی اصل مقاله ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحه اول ترجمه مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی آورده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشه ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشند.

فهرست مطالب

سرمقاله؛

احسان ممکن ۱

جبرهای عملگری؛

ناجل هیگسون، و جان رو، برگردان: سمیه رحیمی، و بامداد

یاحقی ۷

تعمیم در ریاضیات؛

مارال روئین، رستم محمدیان و نوراله نژاد صادقی ۳۷

یادداشتی بر مجموعه های حدی در سیستم های

دینامیکی؛

ابوالحسن رزمی نیا ۴۹

نرمال سازی نوتر و پایه گرینر؛

امیرهاشمی و نازنین رحمانی ۶۹

مجموعه دست آورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد

فیبناتچی؛

صدیقه بلادی، جواد بهبودیان، و پریسا ترابیان ۸۳

قدردانی. از آقایان دکتر روح اله جهانی پور و دکتر

سید احمد موسوی که در ویرایش و آماده سازی این شماره

همکاری صمیمانه ای داشته اند تقدیر و تشکر می شود.

سردبیر



عکس روی جلد: شادروان دکتر منصور معتمدی

- مقاله ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده (گان) یا مترجم (ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.
- در ابتدای مقاله چکیده ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله آورده شود.
- پس از چکیده، واژه ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
- رده بندی موضوعی اولیه و ثانویه مقاله، بر مبنای رده بندی موضوعی انجمن ریاضی امریکا ذکر شود.
- اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی و در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
- به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش را در نوشتن مقالات رعایت فرمایید.
- فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید؛ نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب را رعایت کنید:
 ۱. اگر مرجع ذکر شده، مقاله لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شماره مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقاله مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
 ۲. اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
- توجه کنید که تعداد صفحات مقاله ارسالی در قالب صفحه بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
- هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.
- فرهنگ و اندیشه ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می شود.
- علاقه مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه ها، مؤسسات و کتابخانه ها که تمایل به عضویت حقوقی دارند می توانند با دبیرخانه انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.
- شماره های قبلی مجله را می توانید از دبیرخانه انجمن ریاضی خریداری فرمایید.

سرمقاله

احسان ممتحن

در سوگ دکتر منصور معتمدی

از پدر گر قالب تن یافتیم از معلم جان روشن یافتیم

۱. رفت. به یکباره اما آرام و بی‌هیاهو. چنان که خصلتش بود. به آنسوی در. به آنسوی «دری که کوبه ندارد». وقتی که رفت، روز پنج‌شنبه ۲۱ خرداد ۱۳۹۴ ساعت نه و نیم صبح بود. وقتی که رفت، زندگیم چیز بزرگی را از دست داد و مطمئنم که زندگی‌های دیگری هم چنین شدند.

۲. مهر ماه ۱۳۷۴ بود که برای اولین بار استاد نازنیم را دیدم. در دانشگاه شهید چمران اهواز. اتاق مشترکی با یکی از همکاران داشت. روی صندلیش آرام می‌نشست، بی‌حرکت، و در سکوت به فکر فرو می‌رفت. به استادان ذن می‌مانست به هنگام مراقبه. چهره‌ای دلپذیر داشت، صورتی گرد و بینی خوش تراش، موی سرش نقره فام بود، به گمانم کمی زودتر از وقت سپید شده بود. وارد اتاقش که می‌شدی با روی گشاده پذیرایت بود. به سؤال‌های مختلف واکنش‌های مختلف نشان می‌داد. اگر سؤال نوعی کنجکاوی فلسفی یا مفهومی بود وارد گفت و گو می‌شد. سعی می‌کرد موضوع را با تجربه خودش پیوند دهد. این باعث می‌شد که گفت و گوهایش همواره بهره‌ای وافیه از اصالت داشته باشد. اگر کلامش را قطع می‌کردی سکوت اختیار می‌کرد تا سخت به پایان رسد و آنگاه با متانت لب به سخن می‌گشود. احساس نمی‌کردی که گفت و گو با او صرفاً تبادل اطلاعات و آگاهی است. چیزی انسانی، جوهری از جنس خود آگاهی در همه آنها موج می‌زد. از همه مهم‌تر، مرا می‌پذیرفت نه چون استادی که شاگردی را، نه چون مهتری که کهتری را، بل چنان‌که دوستی دوستی را یا انسانی انسانی دیگر را درست همسنگ و هموزن خویش. در تمام این سال‌ها که در کنارش راهی دراز را از دانشجو

تا همکار طی کردم حتی یکبار هم نشد که حوصله‌ام را نداشته باشد یا از توجّه و دقتش به من کاسته شود. حتّی اکنون که این سطور را می‌نگارم از این شکیبایی والایی که در او بود به شگفت می‌آیم. اگر سؤال، ریاضی و به اندازه کافی جالب بود روی صندلیش کمی جابجا می‌شد چنان‌که بخواهد جای پایش را برای تفکر عمیق‌تر محکم کند. کمی سکوت و بعد از آن هر جوابی که می‌داد الهام بخش بود. اعم از این که منبعی معرفی کند یا تاریخچه موضوع را شرح دهد یا آن که خود مسئله را حل کند. علایش؟ به غایت گسترده. به نظریه اعداد، به هندسه مقدماتی، به نظریه مجموعه‌ها و به فیزیک عشق می‌ورزید. خودش برایم تعریف می‌کرد هنوز دانش آموز دبیرستان بوده که درباره نسبیت خوانده بود آن هم علیرغم کمبود منابع در آن زمان. ولی در تمامی مطالعاتش همواره رو بسوی بنیادها و مبانی داشت. نوعی عشق به فهم ژرفای یک مطلب در او می‌جوشید. به عنوان مثال، موضوع سمینار مرا مقاله‌ای از ویلفرد هوجز^۱ تعیین کرد: «کرول تسورن را نتیجه می‌دهد»^۲. مقاله‌ای که این منطقدان انگلیسی در آن ثابت می‌کرد که گزاره «هر حوزه تجزیه یکتا ایدآل ماکسیمال دارد» با لم تسورن معادل است. تخصص خودش اما جبر تعویض ناپذیر، نظریه حلقه و مدول و جبرهای شرکت‌پذیر بود. مدارک کارشناسی و کارشناسی ارشدش را به ترتیب از دانشگاه‌های اصفهان و شیراز اخذ کرده و سپس در سال ۱۳۵۲ به عنوان مربی در دانشگاه جندی شاپور اهواز مشغول به کار می‌شود. کمی بعد به دانشگاه لیدز می‌رود و در مکتب جبر لیدز با راهنمایی آلفرد گولدی^۳ دوره دکتری را آغاز می‌کند. آن هم در زمان اوج مکتب جبر لیدز به رهبری گولدی. همه استادان جبر لیدز را می‌شناخت؛ رابسن^۴، مک‌کانل^۵، لنگان^۶ و از همه آنها خاطرات جذابی داشت. به یاد می‌آورد زمانی لَنس دلبلیو اسمال^۷ به لیدز آمده بود و گلدی به کلاس درس دعوتش کرده بود و از او خواسته بود تا توضیح دهد ماتریس‌های صوری مثلثی^۸ - مثالی ممتکرانه که نشان می‌دهد بسیاری از پدیده‌های جبری فاقد تقارن چپ و راست‌اند- را چگونه کشف کرده است. انقلاب ۵۷، درست مانند بسیاری از هم‌نسلانش، حال و هوای او را هم دگرگون کرده بود. دوره دکتری را نیمه کاره رها می‌کند، به ایران باز می‌گردد و از نو در دانشگاه جندی شاپور (شهید چمران اهواز) مشغول به خدمت می‌شود. با همکاری دکتر کریمزاده که یکسال بعد از اکستر^۹ به گروه ریاضی اهواز ملحق می‌شود و جمعی دیگر که اکنون بعضی از آنها به خارج رفته‌اند یا روی در نقاب خاک کشیده‌اند گروه ریاضی استثنایی را پایه گذاشتند. گروهی که جو عاطفی حاکم بر آن انصافاً منحصر به فرد بود. واردش که می‌شدی انگار به خانه خودت پا گذاشتی. به همان اندازه دلسوز، به همان اندازه مهربان. باورت نمی‌شد که اعضای

^۱Wilfrid Hodges ^۲Krull implies Zorn ^۳Alfred Goldie ^۴James Robson ^۵John McConnell

^۶T. H. Lenagan ^۷Lance W. Smal ^۸Formal Triangular Matrices ^۹University of Exeter

این گروه مصیبت و وحشت جنگ را با گوشت و خون خود تجربه کرده و با مرغوای شوم آن سال‌ها زیسته‌اند. این‌ها زیر آتش و خون مقاله‌های خود را نوشته و سخنرانی‌های شان را ایراد کرده بودند. چقدر به تعبیر ارسطو دریادلی لازم است تا آدمی بدین پایه رسد. جنگ به هر حال نمی‌تواند آزار نرساند. به گمانم قلب بیمار استاد میراث شوم جنگ بود. بگذریم، شرح این هجران و این خون جگر این زمان بگذار تا وقت دگر. بعدها به همراه دکتر آذرپناه نخستین دانشجویان دکتری ریاضی دانشگاه چمران شدند که با راهنمایی دکتر کرمزاده پایان نامه‌شان را به رشته تحریر درآوردند و چه دانشجویان پرافتخاری.

۱.۲. علاوه بر دانش قابل تحسینش در جبر و ریاضیات، صیغه روشنفکری پر رنگی نیز داشت. ادبیات، فلسفه و رمان‌های جدی به ویژه ادبیات روسیه را دوست داشت. ادبیات خودمان را هم دنبال می‌کرد. کارهای هوشنگ گلشیری را خوانده بود و همیشه بحثی که میان بهاءالدین خرمشاهی و گلشیری بر سر ترجمه قرآن کریم در گرفته بود را مثال می‌زد تا نشان دهد که دانش زبانی گلشیری چه حیطه وسیعی داشته است. یک بار هم وقتی درباره «اسفار کاتبان» اثر ابوتراب خسروی و نثر زیبای آن سخن گفت از خودم خجالت کشیدم. هرگز نتوانستم این کتاب را به آخر برسانم. دستی در نقاشی هم داشت و کلاس دیده بود. علاوه بر انگلیسی فرانسه خوانده بود و تا حد رضایت بخشی به متون فرانسوی دسترسی داشت. از دانشمندان کلاسیک ایران به خیام و از جدیدترها به هشترودی علاقه داشت. شاگرد هشترودی بود و بعدها اثری از او - «کسرهای مسلسل» را - تصحیح کرد که به همت خانه ریاضیات اصفهان منتشر شده است. یک بار وقتی خواست از هشترودی تعریف کند گفت «خیام بود». از سال ۸۶ تا سال ۹۲ عضو هیأت تحریریه مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی بود و در سه سال آخر آن این افتخار نصیب من شد که با او همکاری شوم. خصوصیات ویژه او که در بالا به آن‌ها اشاره کردم از او ویراستار و داوری بی‌نظیر می‌ساخت. حتی پس از اتمام دوره‌اش باز هم به همکاری با مجله ادامه داد و چه به عنوان داور و چه در مقام مؤلف و مترجم، «فرهنگ و اندیشه» را تنها نگذاشت.

۳. باز نشسته که شد به اصفهان بازگشت. به زادگاهش. نخست در شاهین شهر مسکن گزید و سپس به اصفهان نقل مکان کرد. با خانه ریاضیات اصفهان همکاری زیادی داشت. «خداش خیر دهد آن که این عمارت کرد». همیشه می‌گفت خانه ریاضیات اصفهان فعال‌ترین خانه ریاضیات در سراسر ایران است. دست کم یک روزش را آنجا می‌گذرانند. معمولاً یک روز در هفته نیز به دانشگاه صنعتی اصفهان می‌رفت. یا به عنوان داور یا مشاور پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد و

دکتری. بعضی از جبردان‌های دانشگاه صنعتی از دانشجویان سابقش هستند. این‌ها به اندازه کافی مشغولش می‌کرد. با این حال برای مطالعات گسترده‌اش باز هم وقت پیدا می‌کرد. وه که برای آموختن چه شوری در سر داشت. انگار دانشجویی علاقمند و کنجکاو که تازه رشته مورد علاقه‌اش را یافته است. به جرأت می‌گویم که پس از بازنشستگی بیشتر می‌خواند و کار می‌کرد. با انگیزه‌ای که منشا آن همان کنجکاوای معصومانه دوران کودکی بود. همان کنجکاوای حیرت‌انگیزی که ما بعدتر جایی در طول تحصیل از دستش می‌دهیم. همانجا که حیرت را، این سرچشمه همه تجربه‌های عمیق انسانی را با کسالت تاخت می‌زنیم. هر چه بود اما استاد عزیزم تا آخرین روز زندگی کنجکاو ماند. از میان مرگ و زندگی دومی را برگزیده بود و بدان سخت احترام می‌گذاشت. هرگز ندیدم کسی را، هر کس که بود «تو» خطاب کند. هرگز ندیدم که صدایش را بلند کند. هرگز ندیدم کسی را بیازارد. اگر غمگین بود در خودش می‌ریخت. «انسان را رعایت می‌کرد خود اگر شاهکار خدا بود یا نبود».

۴. برتراند راسل در کتابش «مقدمه‌ای بر فلسفه ریاضیات» از دو جهتی سخن می‌گوید که ریاضیات در آن به پیش می‌رود. یکی رو به سوی پیچیده‌تر شدن دارد: از اعداد طبیعی شروع می‌کند و بعد اعداد گویا، اعداد حقیقی و اعداد مختلط. از جمع و ضرب شروع می‌کند و به تفریق و تقسیم می‌رسد و دیگری رو به سوی بنیادها دارد. رو سوی یافتن بنیادهایی که سادگی منطقی داشته باشند. و بعد راسل می‌گوید که فلسفه ریاضی با این مسیر دوم است که سروکار دارد. از این نظر و در معنای وسیع کلمه، استادام یک فیلسوف ریاضی بود. حتی پژوهش‌های فنی‌اش در جبر هم همواره رو به سوی بنیادها داشت. دوست داشت در موضوع مورد مطالعه‌اش وحدت ایجاد کند. تز دکترایش تعمیمی است از شرط‌های زنجیری در مدول‌ها. در کارش به اتفاق دکتر کرمزاده نشان داده بود که همواره عددی اصلی یافت می‌شود که مدول، زنجیری از زیر مدول‌ها با طول بیشتر از آن ندارد یا به طور معادل، هر زیر مدولی، با کمتر از آن عدد اصلی تولید می‌شود. در حقیقت برای هر مدولی، عددی اصلی وجود دارد که مدول، نسبت به آن عدد اصلی نوتری است یا دقیق‌تر بگوییم a -نوتری است. بر طبق این رویکرد بدیع، مدول‌های نوتری در حقیقت ω -نوتری‌اند. از علایق دیگرش تعمیم بعضی از قضایای جبر به شبکه‌ها بود. با جان دانس هم همکاری داشت و با یکدیگر مقاله‌ای نوشته بودند. وقتی که سیل بنیان‌کن نیواورلئان مردم را آواره دیگر ایالات کرده بود استادام تلاشی طولانی را آغاز کرده بود تا از حال جان دانس و از سلامتی او با خبر شود. وقتی بالأخره موفق به تماس می‌شود دانس از این که کسی از آن سوی آبها این چنین دل‌نگرانش بوده متعجب و در عین حال خوشحال شده بود.

۵. دربارهٔ مرگ بسیار کم می‌دانیم. به گمانم نخستین چیزی که واقعاً دربارهٔ مرگ می‌دانیم همان است که هایدگر و ویتگنشتاین هر یک به نوعی بیان کرده‌اند، که مرگ تا زنده‌ایم برای همهٔ ما یک امکان است، اما امکانی که تمام امکانات دیگر ما را تحت الشعاع قرار می‌دهد. از این نظر امکانی منحصر به فرد است و با وجود اهمیت فوق‌العاده‌اش هیچ یک از ما مرگ خود را به عنوان یکی از امور واقع این عالم تجربه نمی‌کند. هیچ یک از ما خبر درگذشتش را در بخش متوفیات روزنامه‌های محلی نخواهد خواند. و دیگر این که همهٔ ما با همان تصویری به یاد آورده می‌شویم که در هنگام مرگ دیده می‌شویم. یعنی با آخرین تصویر خود. به تعبیری ما با این تصویر آخر جاودانه می‌شویم. این‌ها به نظر همانگویی یا تاتولوژی می‌آیند اما بهره‌ای فراوان از حقیقت برده‌اند. به باور من از این مقدمهٔ به ظاهر بدیهی می‌توان نتایجی مهم گرفت. برخی از زنان و مردان بزرگ عالم چنین کرده‌اند. نخست آن که میان نیروهای مرگ و زندگی باید جانب زندگی را گرفت. این که زندگی علیرغم تمام شواهد و قرائنی که جز این را، مرگ و نیستی را، با هزاران دهان فریاد می‌زنند، سخت ستایش‌انگیز است، هرچند به قول ا. بامداد به طرز بی‌شرمانه‌ای کوتاه است. و دیگر آن که بکوشیم تا از زندگی خویش اثری زیبا بیافرینیم. این که در پایان راه زیباترین دستاوردمان نفسِ زندگی باشد. استاد هر دو را به کمال محقق ساخت. یادش بخیر و جایش همیشه سبز.

احسان ممحن: دانشگاه یاسوج، گروه ریاضی

رایانامه: momtahan_e@hotmail.com

استاد عبدالحسین زرین کوب:

خوش خوش به پایان می‌رسد این روز سرگردان ما

زود آ که در منزل شویم آرام گیر و جان ما

کردنیت این زندگی مرگ از چه دانش کند

زین درد جانم خسته شد تا کی رسد دمان ما

جبرهای عملگری*

نایجل هیگسون و جان رو

برگردان: سمیه رحیمی و بامداد یاحقی

۱. سرآغاز نظریه عملگرها

دربارۀ هر معادله یا دستگاه معادلات می‌توان دو سؤال اساسی پرسید: یکی اینکه آیا آن معادله جوابی دارد و دیگر اینکه اگر دارد، آیا جواب آن معادله یگانه است؟ تجربه در مورد دستگاه‌هایی با تعداد متناهی از معادلات خطی نشان می‌دهد که دو سؤال بالا به هم مربوط هستند. برای مثال، معادله‌های زیر را در نظر بگیرید

$$2x + 3y - 5z = a,$$

$$x - 2y + z = b,$$

$$3x + y - 4z = c.$$

توجه کنید که سمت چپ معادله سوم برابر با مجموع طرف‌های چپ دو معادله نخست است. در نتیجه دستگاه جواب ندارد مگر اینکه $a + b = c$. اما اگر $a + b = c$ ، آن‌گاه هر جواب برای دو معادله اول، یک جواب معادله سوم نیز هست و در هر دستگاه خطی که تعداد مجهول‌ها از تعداد معادله‌ها بیشتر

عبارت و کلمات کلیدی. جبرهای عملگری، نظریه عملگرها، معادلات انتگرال، فضای هیلبرت، ویژه‌مقدار، ویژه‌بردار، آنالیز تابعی، قضیه میانگین ارگودیک، نظریه کوانتمی، ساختار GNS، دترمینان و اثر، جبر فون‌نوی‌من، نمایش‌های تحویل(نا)پذیر، عامل‌ها، نمایش یکانی، نظریه پیمانه‌ای، جبرهای C^* ، عملگرهای فردهم، نظریه K ، هندسه ناجابه‌جایی.

*“Operator Algebras” by Nigel Higson and John Roe, pp. 510-523, in “The Princeton Companion to Mathematics” by T. Gowers, et al., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2008.

باشد، جواب‌ها، در صورت وجود، یگانه نیستند. در وضع حاضر، اگر (x, y, z) یک جواب دستگاه باشد، آن‌گاه به‌ازای هر t بردار $(x+t, y+t, z+t)$ نیز یک جواب دستگاه است. بنابراین همان پدیده‌ای (یعنی وجود یک رابطه خطی بین معادله‌ها) که در بعضی موارد مانع وجود جواب‌ها می‌شود، در موارد دیگر، مانع یگانگی جواب‌ها نیز می‌شود.

به‌منظور ایجاد ارتباطی دقیق‌تر بین وجود و یگانگی جواب‌ها، یک دستگاه کلی از معادلات خطی به‌شکل

$$k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \dots + k_{1n}u_n = f_1,$$

$$k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \dots + k_{2n}u_n = f_2,$$

⋮

$$k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 + \dots + k_{nn}u_n = f_n,$$

متشکل از n معادله و n مجهول را در نظر بگیرید. اسکالره‌های k_{ji} ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل می‌دهند و مسئله به‌دست آوردن u_i ها برحسب f_j هاست. قضیه کلی که در مثال عددی بالا ترسیم شد، این است که تعداد روابط خطی که f_j ها باید برای وجود جواب برآورده کنند، اگر معادله دارای جواب باشد، برابر با تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب کلی معادله است. به زبان فنی‌تر، بعد هسته ماتریس $K = \{k_{ji}\}$ [I.3 §4.1] با بعد هم‌هسته‌اش برابر است. در مثال بالا، هر دوی این اعداد یک هستند. کمی بیش از یک صد سال پیش، فردهلم^۲ [VI.66] معادلات انتگرال از نوع زیر را مورد مطالعه قرار داد:

$$u(y) - \int k(y, x)u(x)dx = f(y).$$

خاستگاه این معادلات پرسش‌هایی در فیزیک نظری بود و مسئله، یافتن جواب تابع u برحسب تابع f بود. از آنجا که انتگرال را می‌توان به‌عنوان حدی از مجموع‌های متناهی تصور کرد، معادله فردهلم، یک هم‌زاد نامتناهی بعد برای دستگاه بالا است که در آن، بردارهای n -مؤلفه‌ای با توابعی جایگزین شده‌اند که دارای مقادیری در بی‌نهایت نقطه x هستند. (به بیان دقیق، معادله فردهلم مشابه یک معادله ماتریسی از نوع $u - Ku = f$ به‌جای $Ku = f$ است. شکل تغییریافته سمت راست هیچ تأثیری بر رفتار کلی معادله ماتریسی ندارد اما به‌طور قابل ملاحظه‌ای رفتار معادله انتگرال را تغییر می‌دهد. همان‌طور^۱ در چنین مواردی، نگارندگان خواننده را به بخش‌های دیگری از کتابنامه ریاضی پرینستون ارجاع می‌دهند.

^۲Fredholm

که خواهیم دید، فردهلم خوش اقبال بود که با رده‌ای از معادلات کار می‌کرد که رفتارشان به گونه‌ای خیلی نزدیک، منعکس کننده رفتار معادلات ماتریسی بود.)

یک مثال خیلی ساده، معادله

$$u(y) - \int_0^1 u(x)dx = f(y).$$

است. برای حل این معادله، مشاهده کنید که چون $\int_0^1 u(x)dx$ به عنوان تابعی از y ، تابعی ثابت است، در حالت همگن ($f \equiv 0$)، تنها جواب‌های ممکن برای $u(y)$ توابع ثابت هستند. از طرف دیگر، به ازای یک تابع کلی f معادله دارای جواب است اگر و تنها اگر شرط خطی $\int_0^1 f(y)dy = 0$ برآورده شود. بنابراین در این مثال، بعد هسته و بعد هم هسته هر دو یک هستند. فردهلم مطالعه‌ای روشمند را از تشابه بین نظریه ماتریس‌ها و نظریه معادلات انتگرال که در این مثال دیده می‌شود، آغاز کرد. او توانست ثابت کند که در معادلاتی از این نوع، بعد هسته و بعد هم هسته همیشه متناهی و برابر هستند.

کار فردهلم، تخیل هیلبرت [VI.63] را برانگیخت. او مطالعه دقیقی از عملگرهای انتگرالی که $u(y)$ را به $\int_0^1 k(y, x)u(x)dx$ می‌برند در حالت خاصی که تابع حقیقی مقدار k تابعی متقارن است، یعنی $k(x, y) = k(y, x)$ انجام داد. همزاد متناهی بعد نظریه هیلبرت نظریه ماتریس‌های متقارن حقیقی است. حال اگر K چنین ماتریسی باشد، آنگاه نتیجه‌ای استاندارد در جبرخطی حکم می‌کند که یک پایه متعامدیکه متشکل از ویژه بردارهای [I.3 §4.3] K وجود دارد، یا به طور معادل، یک ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که $U^{-1}TU$ ماتریسی قطری است. (یکانی بودن U به این معنی است که U وارون پذیر است و طول بردارها را حفظ می‌کند، یعنی به ازای هر بردار v داریم $\|Uv\| = \|v\|$.) هیلبرت نظریه‌ای مشابه را برای همه عملگرهای انتگرالی متقارن به دست آورد. او نشان داد که توابعی مانند $u_1(y), u_2(y), \dots$ و اعدادی حقیقی مانند $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ وجود دارند به طوری که

$$\int k(y, x)u_n(x)dx = \lambda_n u_n(y).$$

بنابراین $u_n(y)$ یک ویژه تابع برای عملگر انتگرالی با ویژه مقدار λ_n می‌باشد.

در اکثر موارد محاسبه صریح u_n و λ_n بسیار دشوار است، اما در حالتی که به ازای تابعی متناوب مانند ϕ داشته باشیم $k(x, y) = \phi(x - y)$ انجام محاسبه امکان پذیر است. اگر بازه انتگرال گیری $[0, 1]$ و دوره تناوب ϕ برابر با ۱ باشد، آنگاه ویژه توابع عبارت اند از $\cos(2k\pi y)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) و $\sin(2k\pi y)$ ($k = 1, 2, \dots$). در این حالت، نظریه سری‌های فوریه [VI.27] به ما می‌گوید که

تابعی کلی مانند $f(y)$ روی $[0, 1]$ می‌تواند به صورت یک سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{k\pi}y + b_k \sin \sqrt{k\pi}y),$$

از کسینوس‌ها و سینوس‌ها بسط داده شود. هیلبرت نشان داد که به طور کلی، یک بسط مشابه

$$f(y) = \sum a_n u_n(y)$$

بر حسب ویژه توابع برای هر عملگر انتگرالی متقارن وجود دارد. به عبارت دیگر، ویژه توابع، درست مانند حالت متناهی بعد، یک پایه تشکیل می‌دهند. در حال حاضر این کارِ هیلبرت قضیه طیفی برای عملگرهای انتگرالی متقارن نامیده می‌شود.

۱.۱. از معادلات انتگرال تا آنالیز تابعی. از آنجا که عملگرهای انتگرالی در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضی (از جمله در مسأله دیریکله [IV.12 §1] در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و نظریه نمایش گروه‌های فشرده [IV.9 §3]) رخ می‌دهند، قضیه هیلبرت منجر به انفجاری از فعالیت‌ها شد. خیلی زودی مشخص شد که بهترین شکل نگرش به این عملگرها به عنوان تبدیلات خطی روی فضای هیلبرت [III.37] همه توابع $u(y)$ است به طوری که $\int_0^1 |u(y)|^2 dy < \infty$. چنین توابعی مربع-انتگرال پذیر نامیده می‌شوند و مجموعه همه آنها با $L^2[0, 1]$ نشان داده می‌شود.

با دسترسی به مفهوم مهم فضای هیلبرت، بررسی طیف بسیار گسترده تری از عملگرها نسبت به عملگرهای انتگرالی که در ابتدا توسط فردhelm و هیلبرت در نظر گرفته شده بودند، حاصل شد. از آنجا که فضاهای هیلبرت هم فضاهای برداری [I.3 §2.3] و هم فضاهای متریک [III.58] هستند، معقول بود که نخست عملگرهایی را از یک فضای هیلبرت به خودش در نظر بگیرند که هم خطی و هم پیوسته هستند. چنین عملگرهایی معمولاً عملگرهای خطی کراندار نامیده می‌شوند. شرط تقارن $k(x, y) = k(y, x)$ در ارتباط با عملگرهای انتگرالی به شرط خودالحاقی بودن عملگر خطی کراندار T تبدیل می‌شود به این معنی که $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ به ازای هر بردار u و v در فضای هیلبرت (قلاب‌های زاویه‌ای، ضرب داخلی را نشان می‌دهند). مثال ساده‌ای از یک عملگر خودالحاقی عبارت است از عملگر ضرب در یک تابع حقیقی مقدار $m(y)$ ؛ این عملگر M توسط دستور $(Mu)(y) = m(y)u(y)$ تعریف می‌شود. (همزاد متناهی بعد عملگر ضرب، یک ماتریس قطری K است که j امین مؤلفه بردار را در درایه k_{jj} ماتریس ضرب می‌کند.)

قضیه طیفی هیلبرت برای عملگرهای انتگرالی متقارن بیان می‌کند که هر عملگری از این نوع را می‌توان به شکل خوبی درآورد: نسبت به یک پایه مناسب برای فضای $L^2[0, 1]$ ، یعنی پایه‌ای مرکب از ویژه‌بردارها، این عملگر یک ماتریس قطری نامتناهی خواهد داشت. به علاوه بردارهای پایه را می‌توان طوری انتخاب کرد که نسبت به هم متعامد باشند. به طور کلی این امر برای یک عملگر خودالحاقی درست نیست. برای مثال، عملگر ضرب از $L^2[0, 1]$ به خودش را در نظر بگیرید که هر تابع مربع-انتگرال‌پذیر $u(y)$ را به تابع $yu(y)$ می‌برد. این عملگر ویژه‌بردار [I.3 §4.3] ندارد، زیرا اگر λ یک ویژه‌مقدار [I.3 §4.3] باشد، آنگاه به ازای هر y باید داشته باشیم $yu(y) = \lambda u(y)$ که برای y ‌هایی که برابر λ نیستند ایجاب می‌کند $u(y) = 0$ و لذا $\int_0^1 |u(y)|^2 dy = 0$. اما این مثال نگران کننده نیست، زیرا یک عملگر ضرب از این دست به نوعی همتای پیوسته‌ای از عملگر تعریف شده توسط یک ماتریس قطری است. معلوم می‌شود که اگر درک‌مان را از مفهوم «قطری» گسترش دهیم تا شامل عملگرهای ضرب هم بشود، آنگاه همه عملگرهای خودالحاقی «قطری‌پذیرند» به این معنی که پس از تغییر پایه‌ای مناسب، عملگرهای خودالحاقی، عملگرهای ضرب می‌شوند.

برای بیان دقیق این امر، به مفهوم طیف [III.88] یک عملگر T نیاز داریم. طیف یک عملگر T عبارت است از مجموعه همه اعداد مختلط λ به طوری که عملگر $T - \lambda I$ وارون کراندار ندارد (در اینجا I عملگر همانی روی فضای هیلبرت است). در ابعاد متناهی، طیف دقیقاً مجموعه ویژه‌مقادیر است، اما در ابعاد نامتناهی همیشه این طور نیست. در واقع، در حالی که هر ماتریس متقارن حداقل یک ویژه‌مقدار دارد، همان طور که دیدیم، یک عملگر خودالحاقی لازم نیست هیچ ویژه‌مقداری داشته باشد. در نتیجه، قضیه طیفی برای عملگرهای کراندار خودالحاقی نه بر حسب ویژه‌مقادیر بلکه بر حسب طیف بیان می‌شود. یکی از راه‌های فرمول‌بندی قضیه طیفی این است که هر عملگر خودالحاقی T به طور یکانی با یک عملگر ضرب $(Mu)(y) = m(y)u(y)$ هم ارز است، که در آن بستر برد تابع $m(y)$ طیف T است. درست همانند حالت متناهی بعد، یک عملگر یکانی عبارت است از یک عملگر وارون‌پذیر U که طول بردارها را حفظ می‌کند. اینکه T و M به طور یکانی هم ارز هستند به این معنی است که یک نگاشت یکانی U ، که به آن به عنوان همتایی از ماتریس تغییر پایه می‌نگریم، موجود است به طوری که $T = U^{-1}MU$. این مطلب تعمیمی است از اینکه هر ماتریس متقارن حقیقی به طور یکانی هم ارز با یک ماتریس قطری است که ویژه‌مقادیرش روی قطر اصلی‌اش واقع هستند.

۲.۱. قضیه میانگین ارگودیک^۱. یک کاربرد زیبا از قضیه طیفی توسط فون نوی من^۲ [VI.91] پیدا شد. یک صفحه شطرنجی را تصور کنید که در آن تعداد معینی مهره^۳ توزیع شده باشد. تصور کنید که برای هر مربع، مربع «جانشین»^۴ معین شده باشد (به طوری که هیچ دو مربعی جانشین یکسانی نداشته باشند) و در هر دقیقه مهره‌ها با انتقال هر مهره به مربع جانشینش بازچین می‌شوند. حال بر یک مربع متمرکز شوید و هر دقیقه با توجه به بودن یا نبودن مهره‌ای^۵ روی مربع اعداد ۱ یا ۰ را ثبت کنید. این امر دنباله‌ای از خوانش‌های $R_1, R_2, R_3, \dots$ مانند

۰۰۱۰۰۱۱۰۰۱۰۱۱۰۱۰۰۱۰۰۰۰

تولید می‌کند. با گذشت زمان ممکن است انتظار داشته باشیم که میانگین خوانش‌های مثبت، یعنی $R_j = 1$ ، به تعداد مهره‌های روی تخته تقسیم بر تعداد مربع‌ها همگرا شود. اگر قاعده بازآرایی به اندازه کافی پیچیده نباشد، این اتفاق نخواهد افتاد. برای مثال، در افراطی‌ترین حالت، اگر قاعده جانشین هر مربع را خود آن مربع تعیین کند، بسته به این که مربع را با یک مهره آغاز کرده باشیم یا نه، در بازخوانی خواهیم داشت ۰۰۰۰۰۰۰۰ یا ۱۱۱۱۱۰۰۰. اما اگر قاعده به اندازه کافی پیچیده باشد، آنگاه در واقع همان طور که انتظار داریم «میانگین زمانی» $(1/n) \sum_{j=1}^n R_j$ به تعداد مهره‌های روی تخته تقسیم بر تعداد مربع‌ها همگرا خواهد شد.

مثال تخته شطرنجی مقدماتی است، چرا که در واقع در این حالت متناهی قواعد به «اندازه کافی پیچیده» تنها جایگشت‌های دوری از مربع‌های تخته هستند و بنابراین همه مربع‌ها به طور متوالی از منظر نگاه ما حرکت می‌کنند. اما مثال‌های مرتبطی وجود دارند که در آنها، فرد بخش کوچکی از اطلاعات را مشاهده می‌کند. برای مثال، مجموعه مربع‌های روی یک تخته شطرنجی را با مجموعه نقاط روی یک دایره عوض کنید و به جای مهره‌ها تصور کنید که زیرمجموعه‌ای مانند S از دایره با عنوان اشغال‌شده بر چسب زده شود. فرض کنید قاعده بازآرایی نیز چرخش نقاط روی دایره به اندازه عددی گنگ در مقیاس درجه باشد. با قرار گرفتن در یک نقطه مانند x از دایره، ثبت می‌کنیم که آیا x متعلق به S است، متعلق به نسخه اول دوران یافته S است، متعلق به نسخه دوم دوران یافته S است، و همین طور الی آخر. بدین ترتیب دنباله‌ای از صفر و یک مانند مثال قبل می‌یابیم. می‌توان نشان داد که (تقریباً به ازای هر x) میانگین زمانی مشاهدات ما به نسبت بخشی از دایره که توسط S اشغال شده است همگراست.

^۱Mean Ergodic Theorem ^۲von Neumann ^۳checker ^۴successor ^۵piece

سؤال‌های مشابهی در مورد رابطه بین میانگین‌های زمانی و فضایی در ترمودینامیک و دیگر جاها پیش آمده بود و این انتظار که هرگاه قاعدهٔ بازآرایی به اندازهٔ کافی پیچیده باشد، باید میانگین‌های زمانی و فضایی یکی باشند، به عنوان فرض ارگودیک شناخته شده است.

فون نوی من نظریهٔ عملگرها را دخیل کرد تا این پرسش را به صورت زیر پاسخ گوید. فرض کنید H فضای هیلبرت توابع روی مربع‌های تخته شطرنجی یا فضای هیلبرت توابع مربع-انتگرال‌پذیر^۱ روی دایره باشد. قاعدهٔ بازآرایی، یک عملگر یکانی U روی H را با فرمول

$$(Uf)(y) = f(\phi^{-1}(y)),$$

به دست می‌دهد که در آن، ϕ تابعی است که بازآرایی را توصیف می‌کند. قضیهٔ ارگودیک فون نوی من بیان می‌کند که اگر هیچ تابع غیرثابتی روی H توسط U ثابت نگه داشته نشود (این یکی از راه‌های بیان این مطلب است که قاعدهٔ بازآرایی «به اندازهٔ کافی پیچیده است»)، آنگاه به ازای هر تابع $f \in H$ ، حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U^j f$$

وجود دارد و برابر با تابع ثابتی است که مقدار آن همه جا برابر با مقدار میانگین f است. (برای اعمال این حکم روی مثال‌های ما، $f(x)$ را تابعی بگیرید که اگر نقطهٔ x اشغال شود ۱ و در غیر این صورت، ۰ باشد.)

قضیهٔ فون نوی من را می‌توان از یک قضیهٔ طیفی برای عملگرهای یکانی نتیجه گرفت که مشابه قضیهٔ طیفی برای عملگرهای خودالحاقی است. هر عملگر یکانی را می‌توان به یک عملگر ضرب نه با توابع حقیقی مقدار بلکه با توابعی مختلط مقدار که قدرمطلق مقادیر آنها ۱ هستند، تحویل کرد. در این صورت کلید برهان، حکمی در باب اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ خواهد شد: اگر z یک چنین عدد مختلط مخالف ۱ باشد، آنگاه عبارت $\sum_{j=1}^n z^j$ (به $1/n$) به صفر میل می‌کند هرگاه $n \rightarrow \infty$. این امر به نوبهٔ خود به آسانی با استفاده از دستور مجموع یک سری هندسی، یعنی $\sum_{j=1}^n z^j = \frac{z(1-z^n)}{1-z}$ ، ثابت می‌شود. جزئیات بیشتر را می‌توان در قضیه‌های ارگودیک [V.11] یافت.)

۳.۱. عملگرها و نظریهٔ کوانتمی. فون نوی من دریافت که فضاهای هیلبرت و عملگرهای روی آنها ابزار مناسب ریاضی را برای فرمول‌بندی قوانین مکانیک کوانتمی که توسط هایزنبرگ^۲ و شرودینگر^۳ در دههٔ ۱۹۲۰ معرفی شده بودند، فراهم می‌آورند.

^۱square-integrable functions ^۲Heisenberg ^۳Schrödinger

حالت یک سیستم فیزیکی در هر لحظه داده شده، فهرست تمام اطلاعات مورد نیاز برای تعیین رفتار آینده آن است. برای مثال، اگر سیستم متشکل از تعدادی متناهی ذره باشد، آن‌گاه به‌طور کلاسیک حالت آن سیستم شامل فهرست بردارهای وضعیت و بردارهای تکانه (اندازه حرکت) همه ذرات تشکیل‌دهنده آن است. در مقابل، در صورت‌بندی مکانیک کوانتومی فون نوی‌من، به هر دستگاه فیزیکی یک فضای هیلبرت H مربوط می‌شود و یک حالت از دستگاه با یک بردار واحد u از H نمایش داده می‌شود. (اگر u و v بردارهای واحد باشند و v مضرب اسکالری از u باشد، آن‌گاه u و v حالت یکسانی را معین می‌کنند.)

به هر مقدار مشاهده‌پذیر (مانند انرژی کل دستگاه یا تکانه یک ذره درون دستگاه) یک عملگر خودالحاقی Q در H متناظر می‌شود که طیف آن، مجموعه همه مقادیر مشاهده شده آن است (که این ریشه واژه طیف^۱ را توجیه می‌کند). حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها به شرح زیر با هم مرتبط هستند: وقتی که یک دستگاه در حالتی است که توسط یک بردار واحد $u \in H$ توصیف می‌شود، امید ریاضی مقدار مشاهده‌پذیر متناظر به یک عملگر داده شده خودالحاقی Q برابر با ضرب داخلی $\langle Qu, u \rangle$ است. ممکن است این مقداری نباشد که در واقع اندازه‌گیری می‌شود بلکه میانگین مقادیری است که در آزمایش‌های مکرر با دستگاه به‌دست می‌آیند وقتی که دستگاه در حالت داده شده u است. رابطه بین حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها رفتار تناقض‌آمیز مکانیک کوانتومی را منعکس می‌کند: برای یک دستگاه این امری ممکن و در واقع نوعی است که در یک حالت «برهم‌نesh^۲» باشد که تحت آن، آزمایش‌های مکرر یکسان نتایج متمایزی ایجاد می‌کنند. اندازه‌گیری مقدار یک مشاهده‌پذیر برآمدی قطعی و معین را ایجاد خواهد کرد اگر و تنها اگر حالت دستگاه یک ویژه‌بردار عملگر مرتبط با آن مقدار باشد.

یکی از ویژگی‌های مشخص نظریه کوانتومی این است که به‌طور معمول عملگرهای مرتبط با مشاهده‌پذیرهای متفاوت با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. اگر دو عملگر با هم جابه‌جا نشوند، آن‌گاه به‌طور نوعی ویژه‌بردارهای مشترکی نخواهند داشت و در نتیجه اندازه‌گیری همزمان دو مشاهده‌پذیر مختلف به‌طور معمول منجر به مقادیر معینی برای هر دوی آنها نمی‌شود. یک مثال معروف توسط عملگرهای P و Q ارائه می‌شوند که متناظر به مکان و تکانه یک ذره در حال حرکت در امتداد یک خط هستند. این عملگرها در رابطه جابه‌جاری هایزنبرگ صدق می‌کنند:

$$QP - PQ = i\hbar I$$

^۱Spectare به لاتین به معنی «مشاهده کردن» است. ری.

^۲superposed

که در آن $\hbar$ یک ثابت معین فیزیکی است. (این مثالی از یک اصل کلی است که ناجابه‌جایی مشاهده‌پذیرها در مکانیک کوانتومی را به گروه پواسون مشاهده‌پذیرهای متناظر در مکانیک کلاسیک مربوط می‌کند. به تقارن آینه‌ای^۱ [IV.16 §§2.1.3, 2.2.1] مراجعه کنید.) در نتیجه غیرممکن است که یک ذره به‌طور همزمان یک مکان و تکانه معین داشته باشد. این اصل عدم قطعیت^۲ است.

معلوم می‌شود که یک راه اساساً یگانه نمایش دادن رابطه جابه‌جاری هایزنبرگ با استفاده از عملگرهای خودالحاقی روی فضای هیلبرت وجود دارد. فضای هیلبرت H باید $L^2(\mathbb{R})$ باشد؛ عملگر P باید $-i\hbar d/dx$ باشد و عملگر Q باید ضرب در x باشد. به‌کمک این قضیه می‌توان عملگرهای مشاهده‌پذیر برای دستگاه‌های فیزیکی ساده را به‌طور صریح تعیین کرد. برای مثال، در یک سیستم متشکل از یک ذره بر روی یک خط که در معرض یک نیروی جهت‌دار به سمت مبدأ که مقدارش با فاصله‌اش از مبدأ متناسب است در حال حرکت است (مثل اینکه ذره به یک [سر] فنر متصل شده باشد که [سر دیگرش] در مبدأ ثابت شده است)، عملگر انرژی کل عبارت است از

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2} x^2$$

که در آن، k ثابتی است که تعیین کننده توان کلی نیرو است. طیف این عملگر عبارت است از مجموعه

$$\{(n + \frac{1}{2})\hbar(k/m)^{1/2} : n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

در نتیجه این مقادیر تنها مقادیر ممکن برای انرژی کل سیستم هستند. توجه کنید که انرژی‌های دستگاه اعضای یک مجموعه گسسته هستند. این، یکی دیگر از ویژگی‌های برجسته و اساسی نظریه کوانتومی است.

یک مثال مهم دیگر عملگر انرژی کل اتم هیدروژن است. همانند عملگر بالا، انرژی کل این دستگاه به‌صورت یک عملگر دیفرانسیلی با مشتقات جزئی صریح توصیف می‌شود. می‌توان نشان داد که ویژه‌مقادیر این عملگر یک دنباله متناسب با $\{-1, -1/4, -1/9, \dots\}$ را تشکیل می‌دهد. یک اتم هیدروژن، اگر آشفته شود، یک فوتون آزاد می‌کند که منجر به افتی در انرژی کل آن می‌شود. انرژی فوتون آزادشده برابر با اختلاف بین انرژی‌های حالات اولیه و نهایی اتم خواهد بود و لذا با یک عدد به‌شکل $1/n^2 - 1/m^2$ متناسب است. هنگامی که نور ناشی از اتم هیدروژن از یک منشور یا توری پراش^۳ گذر داده می‌شود، خطوط روشن در واقع در طول موج‌های مربوط به این انرژی‌های ممکن مشاهده می‌شوند. مشاهدات طیفی از این دست تأیید تجربی برای پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی را فراهم می‌کنند.

^۱mirror symmetry ^۲uncertainty principle ^۳diffraction grating

تاکنون حالت‌های یک دستگاه کوانتمی را تنها در یک لحظه مورد بحث قرار داده‌ایم. با این حال، دستگاه‌های کوانتمی درست مانند دستگاه‌های کلاسیک، تحول زمانی دارند. برای توصیف این تحول نیاز به یک قانون حرکت داریم. تحول زمانی یک دستگاه کوانتمی توسط یک خانواده از عملگرهای یکانی $U_t : H \rightarrow H$ ، که با اعداد حقیقی پارامتری شده‌اند، نمایش داده می‌شود. اگر دستگاه در حالت اولیه u باشد، بعد از t واحد زمانی، حالت آن $U_t u$ خواهد بود. از آنجا که حالت دستگاه پس از گذشت s واحد زمانی بعد از t واحد، با حالت آن پس از گذشت $s + t$ واحد یکسان است، عملگرهای یکانی U_t در قانون گروهی $U_s U_t = U_{s+t}$ صدق می‌کنند. قضیه مهمی از مارشال استون^۱ حکم می‌کند که یک تناظر یک‌به‌یک بین عملگرهای یکانی U_t و عملگرهای خودالحاقی E ، که توسط فرمول زیر داده می‌شود، وجود دارد

$$iE = \left(\frac{dU_t}{dt} \right)_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U_t - I).$$

قانون کوانتمی حرکت، این است که مولد متناظر E که به‌صورت بالا به‌دست می‌آید، عملگر مربوط به مشاهده‌پذیر «انرژی کل» است. هنگامی که E (همانند مثال بالا) عملگر دیفرانسیلی روی یک فضای هیلبرت از توابع مناسب باشد، قانون کوانتمی حرکت، معادله شرودینگر^۲، می‌شود.

۴.۱. ساختار GNS. عملگرهای تحول زمانی U_t در مکانیک کوانتمی در قانون $U_s U_t = U_{s+t}$ صدق می‌کنند. به‌طور کلی بنا به تعریف، یک نمایش یکانی^۳ از یک گروه G عبارت است از خانواده‌ای از عملگرهای یکانی U_g یک عملگر به‌ازای هر $g \in G$ ، به‌طوری که $U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$ به‌ازای هر $g_1, g_2 \in G$. نظریه نمایش [IV.9]، که نخستین بار توسط فروبنیوس^۴ [VI.58] به‌عنوان ابزاری برای مطالعه گروه‌های متناهی معرفی شد، در ریاضیات و فیزیک آنجا که تقارن‌های یک سیستم باید در نظر گرفته شود، اجتناب‌ناپذیر می‌شود.

اگر U یک نمایش یکانی از G و v یک بردار باشد، آن‌گاه $\langle U_g v, v \rangle : g \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع روی G تعریف می‌کند. رابطه $U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$ ایجاب می‌کند که σ دارای ویژگی مهم زیر به‌ازای هر اسکالر $a_g \in \mathbb{C}$ باشد

$$\sum_{g_1, g_2 \in G} \overline{a_{g_1}} a_{g_2} \sigma(g_1^{-1} g_2) = \left\| \sum a_g U_g v \right\|^2 \geq 0.$$

به تابع تعریف شده روی G که دارای این ویژگی است، معین مثبت^۵ می‌گویند. برعکس، از یک تابع معین مثبت می‌توان یک نمایش یکانی ساخت. این ساخت GNS (به افتخار اسرائیل گلفند^۶، مارک

^۱Marshall Stone ^۲Schrödinger ^۳unitary representation ^۴Frobenius ^۵positive definite ^۶Israel Gelfand

نای مارک^۱، و ایروینگ سیگال^۲ با در نظر گرفتن عناصر گروه به عنوان بردارهای پایه در یک فضای برداری مجرد، شروع شد. می توان با استفاده از فرمول زیر روی این فضای برداری یک ضرب داخلی تعریف کرد:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sigma(g_1^{-1} g_2).$$

شیء (فضای) حاصل از دو جنبه با یک فضای هیلبرت متفاوت است. اول ممکن است بردارهای ناصفری موجود باشند که طولشان که توسط ضرب داخلی اندازه گرفته می شود، صفر باشد. (هر چند این فرض که σ معین مثبت است احتمال وجود بردارهایی با طول منفی را رد می کند). دوم، اصل تمامیت^۳ [III.64] نظریه فضای هیلبرت ممکن است برقرار نباشد. به هر حال یک فرآیند «کامل سازی» وجود دارد که هر دوی این کاستی ها را رفع می کند. با اعمال فرآیند کامل سازی در مورد کنونی، یک فضای هیلبرت H_σ ایجاد می شود که یک نمایش یکانی از G را داراست.

روایت های ساخت GNS در زمینه های مختلفی از ریاضیات به وجود می آیند. این روایت ها دارای این برتری هستند که توابعی که روی آنها ساخت های GNS پایه گذاری می شوند به آسانی دستکاری می شوند. برای مثال، ترکیب های محذب از توابع معین مثبت خود نیز معین مثبت هستند و این امکان ایجاد می شود که بتوان روش های هندسی در مطالعه نمایش ها را به کار گرفت.

۵.۱. **دترمینان ها و اثرها**^۴. آثار اصلی فردhelm و هیلبرت به شدت از مفاهیم سنتی جبرخطی به ویژه نظریه دترمینان ها [III.15] وام گرفته اند. با توجه به تعریف پیچیده دترمینان حتی برای ماتریس های متناهی، تعجب برانگیز نیست که نظریه نامتناهی بعد، چالش های خارق العاده ای را ایجاد کرد. خیلی زود، روش های خیلی ساده دیگری یافت شد که در آنها کاملاً از نظریه دترمینان ها اجتناب می شد. اما جالب است توجه کنید که دترمینان، یا به طور دقیق تر مفهومی که مرتبط با اثر بوده است، نقش مهمی در تحولات اخیر داشته است که بعداً در این مقاله شرح خواهیم داد.

اثر یک ماتریس $n \times n$ عبارت است از حاصل جمع درایه های قطری آن. همانند دترمینان، اثر یک ماتریس A با اثر BAB^{-1} به ازای هر ماتریس وارون پذیر B برابر است. در واقع اثر توسط فرمول $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ با دترمینان در ارتباط است (به دلیل ویژگی های پایایی اثر و دترمینان، کافی است این برابری را برای ماتریس های قطری که آسان تر است بررسی کنید.^۵) در ابعاد نامتناهی، لازم نیست اثر با معنی باشد چراکه حاصل جمع درایه های قطری یک ماتریس $\infty \times \infty$

^۵ احتمالاً منظور نگارندگان از ماتریس های قطری ماتریس های بالامثلثی بوده است. ری.

ممکن است همگرا نباشد. (اثر عملگر همانی می‌تواند مثالی از آن باشد: همه درایه‌های قطری ماتریس همانی ۱ هستند و اگر تعدادی نامتناهی از آنها وجود داشته باشد، مجموع آنها خوش‌تعریف نیست.) یک راه مقابله با این مشکل این است که خود را به عملگرهایی محدود کنیم که برای آنها این مجموع خوش‌تعریف است. یک عملگر T از ردهٔ اثردار نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر دو دنباله مانند $\{u_j\}$ و $\{v_j\}$ از بردارهای دوه‌دو متعامد با طول واحد، سری $\sum_{j=1}^{\infty} \langle Tu_j, v_j \rangle$ مطلقاً همگرا باشد. عملگر اثردار T دارای اثری خوش‌تعریف و متناهی است که عبارت است از جمع $\sum_{j=1}^{\infty} \langle Tu_j, u_j \rangle$ (که مستقل از انتخاب پایهٔ متعامد یکهٔ $\{u_j\}$ است).

عملگرهای انتگرالی مانند آنهایی که در معادلهٔ فردهلم ظاهر شدند، مثال‌هایی طبیعی از عملگرهای اثردار فراهم می‌کنند. اگر $k(y, x)$ یک تابع هموار^۱ باشد، آنگاه عملگر $Tu(y) = \int k(y, x)u(x)dx$ عملگری اثردار است و اثر آن برابر است با $\int k(x, x)dx$ که می‌توان آن را به‌عنوان «مجموع» عناصر قطری «ماتریس پیوستهٔ^۲» k در نظر گرفت.

۲. جبرهای فون نوی من

جابه‌جاشوندهٔ^۳ یک مجموعهٔ S از عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت H عبارت است از گردایهٔ S' از عملگرهای خطی روی H که با هر عملگر S جابه‌جا می‌شود. جابه‌جاشوندهٔ هر مجموعه، یک جبر از عملگرها روی H است. یعنی اگر T_1 و T_2 در جابه‌جاشونده باشند، T_1T_2 و هر ترکیب خطی $a_1T_1 + a_2T_2$ نیز در آن خواهند بود.

همان طور که در بخش قبل ذکر شد، یک نمایش یکانی از یک گروه G روی یک فضای هیلبرت H عبارت است از مجموعه‌ای از عملگرهای یکانی U_g ، که توسط عناصر G اندیس‌گذاری شده‌اند با این ویژگی که به‌ازای هر دو عنصر مانند g_1 و g_2 از G ترکیب $U_{g_1}U_{g_2}$ با $U_{g_1g_2}$ برابر است. یک جبر فون نوی من عبارت است از یک جبر از عملگرها روی یک فضای هیلبرت مختلط H که جابه‌جاشوندهٔ نمایشی یکانی از یک گروه روی H است. هر جبر فون نوی من نسبت به عمل الحاق‌گیری و تقریباً تحت هر نوع عمل حدگیری بسته است. برای مثال، نسبت به حد نقطه‌ای بسته است: اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرها در یک جبر فون نوی من M باشد و اگر به‌ازای هر بردار $v \in H$ داشته باشیم $T_nv \rightarrow Tv$ ، آنگاه $T \in M$.

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که هر جبر فون نوی من M برابر با جابه‌جاشوندهٔ مرتبهٔ دومش، یعنی M'' (جابه‌جاشوندهٔ جابه‌جاشوندهٔ M)، است. فون نوی من ثابت کرد که اگر یک جبر خودالحاقی M

^۱smooth function ^۲continuous matrix ^۳commutant

از عملگرها تحت حدگیری نقطه‌ای بسته باشد، آن‌گاه M با جابه‌جاشونده گروه عملگرهای یکانی در جابه‌جاشونده‌اش برابر است، و لذا یک جبر فون نوی من است.

۱.۲. نمایش‌های تجزیه‌شونده.^۱ فرض کنید $g \rightarrow U_g$ یک نمایش یکانی از گروه G روی فضای هیلبرت H باشد. اگر یک زیرفضای بسته مانند H_0 از H توسط همه عملگرهای U_g به‌توی خودش نگاشته شود، آن را زیرفضای پایا برای نمایش می‌خوانیم. اگر H_0 پایا باشد، آن‌گاه از آنجا که عملگرهای U_g زیرفضای H_0 را به خودش می‌نگارند، تحدید آنها به H_0 نمایش دیگری از G را تشکیل می‌دهد که یک زیرنمایش از نمایش اصلی نامیده می‌شود.

زیرفضای H_0 برای یک نمایش پایاست و در نتیجه یک زیرنمایش تعیین می‌کند، اگر و تنها اگر عملگر تصویر متعامد $P : H \rightarrow H_0$ متعلق به جابه‌جاشونده آن نمایش باشد. این امر به ارتباطی نزدیک بین زیرنمایش‌ها و جبرهای فون نوی من اشاره دارد. در واقع، نظریه جبرهای فون نوی من را می‌توان مطالعه روش‌هایی دانست که در آنها نمایش‌های یکانی می‌توانند به زیرنمایش‌ها تجزیه شوند. یک نمایش، تحویل‌ناپذیر^۲ است اگر زیرفضای پایای غیربدیهی نداشته باشد. اگر یک نمایش، زیرفضای پایای غیربدیهی H_0 داشته باشد، می‌توان آن را به دو زیرنمایش تقسیم کرد: آنهایی که به H_0 مربوط می‌شوند و آنهایی که به مکمل متعامد آن یعنی $H_0^\perp$ مربوط می‌شوند. در حالتی که هر دو زیرنمایش مربوط به H_0 و $H_0^\perp$ تحویل‌ناپذیر باشند، دوباره می‌توان یکی از H_0 یا $H_0^\perp$ و یا هر دوی آنها را با تکرار روندی که برای H داشتیم، به بخش‌های کوچکتری تقسیم کنیم. اگر فضای هیلبرت اولیه یعنی H متناهی‌بعد باشد، با ادامه چنین روندی؛ سرانجام آن را به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه خواهیم کرد. به زبان ماتریس‌ها، یک پایه برای H به‌دست می‌آوریم که نسبت به آن همه عملگرهای گروه به‌طور همزمان قطری بلوکی می‌شوند به گونه‌ای که هر بلوک، یک گروه تحویل‌ناپذیر از عملگرهای یکانی روی یک فضای هیلبرت کوچکتر را نشان می‌دهد.

تحویل کردن یک نمایش یکانی روی یک فضای هیلبرت متناهی‌بعد به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر کمی شبیه تجزیه یک عدد صحیح به حاصلضرب عامل‌های اول آن است. همانند تجزیه به حاصلضرب اعداد اول^۳، فرآیند تجزیه برای یک نمایش یکانی متناهی‌بعد فقط یک هدف دارد: صرفنظر از ترتیب، فهرستی یگانه از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر وجود دارد که یک نمایش یکانی داده شده به آنها تجزیه می‌شود. اما در ابعاد نامتناهی، فرآیند تجزیه با چندین مشکل مواجه می‌شود. شگفت‌انگیزترین مشکل این است

^۱decomposing representations ^۲irreducible ^۳prime factorization

که ممکن است دو تجزیه یک نمایش، به مجموعه‌هایی کاملاً متفاوت از زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه شوند.

برخلاف این مشکل، شکل جدیدی از تجزیه که به‌طور غیردقیق شبیه تجزیه یک عدد صحیح به حاصلضرب توان‌های اعداد اول به‌جای حاصلضرب اعداد اول است، خود را نمایان می‌کند. به توان‌های اولی که یک عدد صحیح به حاصلضرب آنها تجزیه می‌شود، مؤلفه می‌گوئیم. آنها دو ویژگی بارز دارند: هیچ دو مؤلفه‌ای دارای یک عامل مشترک نیستند و هر دو عامل (سره) یک مؤلفه دارای یک عامل مشترک هستند. به‌طور مشابه، می‌توان یک نمایش یکانی را به مؤلفه‌های یک‌نوع^۱ تجزیه کرد. مؤلفه‌های یک‌نوع دارای این ویژگی مشابه هستند که هیچ دو مؤلفه یک‌نوعی دارای یک زیرنمایش مشترک، یعنی یکریخت، نیستند، و هر دو زیرنمایش یک مؤلفه یک‌نوع دارای یک زیر-زیرنمایش مشترک یکسان هستند. هر نمایش یکانی (متناهی یا نامتناهی‌بعد) می‌تواند به مؤلفه‌های یک‌نوع تجزیه شود، و این تجزیه یگانه است.

در ابعاد متناهی، هر نمایش یک‌نوع به تعدادی (متناهی) از زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر یکسان (مانند عامل‌های اول توانی از یک عدد اول) تجزیه می‌شود. در ابعاد نامتناهی چنین نیست. در واقع، بیشتر نظریه جبر فون نوی‌من با تجزیه و تحلیل حالت‌های بسیاری که به‌وجود می‌آیند مرتبط است.

۲.۲. عامل‌ها. جابه‌جاشونده یک نمایش یکانی یک‌نوع، یک عامل نامیده می‌شود. به‌طور مشخص، یک عامل عبارت است از یک جبر فون نوی‌من M که مرکز (مجموعه همه عملگرها در M که با هر عضو M جابه‌جا می‌شوند) شامل چیزی بیشتر از ضرب‌های اسکالر عملگر همانی نیست. سبب این است که تصاویر در مرکز M به تصاویر به‌روی ترکیبات زیرنمایش‌های هم‌نوع، متناظر می‌شوند. هر جبر فون نوی‌من به‌طور یکتایی به عامل‌ها تجزیه می‌شود.

یک عامل از نوع I نامیده می‌شود اگر جابه‌جاشونده یک نمایش یک‌نوع باشد که تکراری متناهی از یک نمایش تحویل‌ناپذیر است. هر عامل نوع I با جبر عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت یکریخت است. در بعد متناهی، هر عامل از نوع I است، زیرا همان گونه که اشاره کردیم هر نمایش یک‌نوع به تکراری متناهی از یک نمایش تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌شود.

وجود نمایش‌های یکانی با بیش از یک تجزیه به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر به وجود عامل‌هایی که از نوع I نیستند مربوط می‌شود. فون نوی‌من، همراه با فرانسیس موری^۲، این مطلب را در یک سری از مقالات، که پایه و اساس نظریه جبرهای عملگری را بنیان نهاد، بررسی کرد. آنها یک ساختار ترتیبی

^۱isotypical components ^۲factors ^۳Francis Murray

روی گردایه زیرنمایش‌های یک نمایش یک‌نوع داده شده یا، بر حسب جابه‌جاشونده، روی گردایه تصاویر در یک عامل داده شده معرفی کردند. اگر H_0 و H_1 زیرنمایش‌های نمایش یک‌نوع H باشند و H_0 با یک زیرنمایش از H_1 یکرخت باشد، آنگاه می‌نویسیم $H_0 \preceq H_1$. موری و فون نوی من ثابت کردند که این ترتیب، یک ترتیب کلی است، یعنی یا $H_0 \preceq H_1$ یا $H_1 \preceq H_0$ ، و یا هر دوی آنها برقرار هستند که در این صورت H_0 و H_1 با هم یکرخت هستند. برای مثال، در یک وضعیت متناهی بعد از نوع I که H تکراری از n نسخه یک نمایش تحویل‌ناپذیر است، هر زیرنمایش مجموع $m \leq n$ نسخه از نمایش تحویل‌ناپذیر است و ساختار ترتیبی^۱ (کلاسهای یکرختی) زیرنمایش‌ها همانند ساختار ترتیبی اعداد صحیح $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ است.

موری و فون نوی من نشان دادند که تنها ساختارهای ترتیبی که می‌توانند از عامل‌ها ناشی شوند، موارد بسیار ساده زیر هستند: نوع I، $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ یا $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ ؛ نوع II، $[0, 1]$ یا $[0, \infty]$ ؛ نوع III، $\{0, \infty\}$. نوع یک عامل با توجه به ساختار ترتیبی تصاویرش بر طبق این جدول معین می‌شود.

در مورد عوامل از نوع II منظور از ساختار ترتیبی، ساختار ترتیبی یک بازه اعداد حقیقی است نه اعداد صحیح. هر زیرنمایش یک نمایش یک‌نوع از نوع II می‌تواند باز هم به زیرنمایش‌های کوچکتر تقسیم شود: در این حالت هرگز به یک «اتم»^۲ تحویل‌ناپذیر نخواهیم رسید. با وجود این، زیرنمایش‌ها را همچنان می‌توان از نظر بزرگی توسط «بعد حقیقی مقدار»، که به وسیله قضیه موری و فون نوی من فراهم شده است، مقایسه کرد.

یک مثال قابل توجه از یک عامل نوع II به این شرح است. فرض کنید G یک گروه و $H = \ell^2(G)$ یک فضای هیلبرت با بردارهای پایه $[g]$ متناظر به عناصر $g \in G$ باشد. در این صورت یک نمایش طبیعی از G روی H برگرفته از قانون ضرب گروه وجود دارد که نمایش منظم^۳ نامیده می‌شود: به ازای عضو داده شده g از G ، نگاشت یکانی متناظرش U_g یک عملگر خطی است که هر بردار پایه $[g']$ در $\ell^2(G)$ را به بردار پایه $[gg']$ می‌برد. جابه‌جاشونده این نمایش یک جبر فون نوی من M است. اگر G یک گروه جابه‌جایی باشد، آنگاه همه عملگرهای U_g در مرکز M هستند؛ اما اگر G از جابه‌جایی خیلی دور باشد (به عنوان مثال یک گروه آزاد^۴ باشد)، آنگاه M مرکز بدیهی خواهد داشت و بنابراین یک عامل خواهد بود. می‌توان نشان داد که این عامل از نوع II است. یک فرمول صریح ساده برای بعد حقیقی مقدار یک زیرنمایش متناظر به یک تصویر متعامد $P \in M$ وجود دارد. تصویر P را با

^۱order structure ^۲atom ^۳regular representation ^۴free group

یک ماتریس نامتناهی نسبت به پایه $\{[g]\}$ از H نشان دهید. از آنجا که P با نمایش جابه‌جا می‌شود، به‌آسانی دیده می‌شود که عناصر قطری P همگی یکسان‌اند، یعنی برابر با عددی حقیقی بین ۰ و ۱ هستند. این عدد حقیقی بعد زیرنمایش متناظر با P است.

اخیراً نظریه بعد موری-فون نوی من کاربردهای غیرمنتظره‌ای در توپولوژی [I.3 §64] پیدا کرده است. بسیاری از مفاهیم مهم توپولوژی، مانند اعداد بتی^۱، به‌عنوان ابعاد (صحیح-مقدار) فضاهای برداری خاصی تعریف می‌شوند. با استفاده از جبر فون نوی من، می‌توان همزاد حقیقی مقدار این مقادیر را تعریف کرد که دارای ویژگی‌های مفید بیشتری هستند. به این ترتیب، می‌توان از نظریه جبر فون نوی من برای به‌دست آوردن نتیجه‌گیری‌های توپولوژیکی استفاده کرد. جبرهای فون نوی من که در اینجا استفاده شده‌اند به‌طور نوعی توسط روش ساخت پاراگراف قبلی از گروه بنیادی [IV.6 §2] فضای فشرده مناسبی به‌دست می‌آیند.

۳.۲. نظریه پیمانه‌ای^۲. عامل‌های نوع III برای مدت زمان طولانی خیلی مرموز و ناشناخته باقی ماندند؛ در واقع، در ابتدا موری و فون نوی من قادر نبودند تعیین کنند که آیا چنین عامل‌هایی وجود دارند. آنها سرانجام موفق به انجام این کار شدند اما پیشرفت‌های غیرمنتظره و اساسی در این زمینه مدت‌ها بعد از کارهای پیشگامانه^۳ آنها به وجود آمد؛ آن‌گاه که متوجه شدند که هر جبر فون نوی من دارای یک خانواده خاصی از تقارن‌ها، موسوم به گروه خودریختی پیمانه‌ای آن جبر است.

برای توضیح ریشه و منشأ نظریه پیمانه‌ای، بگذارید یک بار دیگر جبر فون نوی من به‌دست آمده از نمایش منظم یک گروه G را در نظر بگیریم. عملگر U_g روی $\ell^2(G)$ را با ضرب از سمت چپ به‌وسیله عناصر G تعریف کردیم، اما می‌توانیم نمایشی تعریف شده با ضرب از سمت راست را هم در نظر بگیریم. این امر یک جبر فون نوی من متفاوتی به‌دست خواهد داد.

تا زمانی که تنها با گروه‌های گسسته G سر و کار داریم این تفاوت بی‌اهمیت است، زیرا نگاشت $[g^{-1}] : [g] \mapsto S$ یک عملگر یکانی روی H است که نمایش‌های منظم چپ و راست را با هم عوض می‌کند. اما برای گروه‌های پیوسته معینی، مشکل از اینجا ناشی می‌شود که ممکن است تابع $f(g)$ مربع-انتگرال‌پذیر باشد در حالی که تابع $f(g^{-1})$ اینچنین نباشد. در این وضعیت، یکرختی یکانی ساده‌ای مشابه با یکرختی بالا برای گروه‌های گسسته وجود ندارد. برای اصلاح این موضوع باید یک عامل اصلاحی به نام تابع پیمانه‌ای G را معرفی کرد.

^۱Betti numbers ^۲modular theory ^۳pioneering work

برنامه نظریه پیمانه‌ای این است که نشان دهیم می‌توان چیزی مشابه با تابع پیمانه‌ای را برای هر جبر فون نوی من ساخت. این تابع پیمانه‌ای به عنوان پایایی برای عامل‌های از نوع III به کار گرفته می‌شود، چه آن عامل‌ها به طور صریح از گروه‌ها به دست آمده باشند و یا نیامده نباشند.

نظریه پیمانه‌ای نوعی از ساخت GNS را مورد استفاده قرار می‌دهد^۱ (بخش ۴-۱). فرض کنید M یک جبر خودالحاقی از عملگرها باشد. یک تابع خطی $\phi: M \rightarrow \mathbb{C}$ یک حالت^۲ نامیده می‌شود اگر مثبت باشد، به این معنی که $\phi(T^*T) \geq 0$ به ازای هر $T \in M$ (این اصطلاح از ارتباط پیشتر شرح داده شده بین نظریه فضای هیلبرت و مکانیک کوانتومی برگرفته شده است). برای اهداف نظریه پیمانه‌ای توجه‌مان را به حالت‌های وفادار^۳ محدود می‌کنیم، یعنی آن حالت‌هایی که برای آنها $\phi(T^*T) = 0$ برابری $T = 0$ را ایجاب می‌کنند. اگر ϕ یک حالت باشد، آن‌گاه فرمول

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \phi(T_1^* T_2)$$

یک ضرب داخلی روی فضای برداری M تعریف می‌کند. با اعمال فرآیند GNS، یک فضای هیلبرت H_M به دست می‌آوریم. نخستین واقعیت مهم در مورد H_M این است که هر عملگر T در M یک عملگر روی H_M تعیین می‌کند. در واقع یک بردار $V \in H_M$ حدی $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ از عضوهای M است و می‌توانیم یک عملگر $T \in M$ را بر بردار V با استفاده از فرمول

$$TV = \lim_{n \rightarrow \infty} TV_n$$

اعمال کنیم که در سمت راست برابری بالا از عمل ضرب در جبر M استفاده می‌کنیم. به همین دلیل می‌توانیم به M به عنوان جبری از عملگرها روی H_M بنگریم نه به عنوان جبری از عملگرها روی فضای هیلبرتی که با آن آغاز کردیم.

سپس عملگر الحاقی، فضای هیلبرت را به یک عملگر طبیعی «پادخطی» $S: H_M \rightarrow H_M$ با فرمول $S(V) = V^*$ مجهز می‌کند^۴. از آنجا که برای نمایش منظم داریم $U_g^* = U_{g^{-1}}$ ، این شبیه عملگر S ای است که در بحث گروه‌های پیوسته با آن مواجه شدیم. قضیه مهمی از مینورو تومیتا^۵ و ماسامیچی تاکساکا^۶ حکم می‌کند به اینکه تا زمانی که حالت اصلی ϕ یک شرط پیوستگی را برآورده می‌کند، توان‌های مختلط $U_t = (S^* S)^{it}$ به ازای هر t دارای ویژگی $U_t M U_{-t} = M$ هستند.

^۴ تعبیر این دستور درباره کامل‌سازی H_M از M مطلبی ظریف است.

^۵ Minoru Tomita ^۶ Masamichi Takesaki ^۳ faithful states ^۲ state ^۱ exploit

تبدیلات M با دستور $T \mapsto U_t T U_{-t}$ خودریختی‌های پیمانه‌ای M نامیده می‌شوند. آلن کن^۱ ثابت کرد که آنها تنها به حالت وفادار ϕ بستگی دارند. به طور دقیق، تغییر ϕ خودریختی‌های پیمانه‌ای را تنها به خودریختی‌های داخلی تغییر می‌دهد، یعنی تبدیلات به شکل $T \mapsto U T U^{-1}$ که در آن، U یک عملگر یکانی روی M است. نتیجه قابل توجه این است که هر جبر فون نوی من M یک گروه متعارف^۲ یک-پارامتری از «خودریختی‌های بیرونی» دارد که تنها توسط M تعیین می‌شود، نه توسط حالت ϕ که برای تعریف جبر فون نوی من استفاده می‌شود.

گروه پیمانه‌ای یک عامل نوع I یا نوع II تنها شامل تبدیل همانی است، اما گروه پیمانه‌ای یک عامل نوع III بسیار پیچیده‌تر است. برای مثال، مجموعه

$$\{t \in \mathbb{R} : T \mapsto U_t T U_{-t} \text{ یک خودریختی داخلی است.}\},$$

زیرگروهی از $\mathbb{R}$ و پایایی از M است که می‌تواند برای تمیز دادن بین تعداد بی‌شماری عامل‌های نوع III مورد استفاده قرار گیرد.

۴.۲. رده‌بندی^۳. یک دستاورد مهم نظریه جبر فون نوی من، رده‌بندی عامل‌هایی است که به طور تقریبی^۴ متناهی بعد هستند. اینها عامل‌هایی هستند که به یک معنی، حدهای جبرهای متناهی بعد هستند. علاوه بر برد تابع بعد که عامل‌ها را به انواع آنها تفکیک می‌کند، تنها پایا پیمانه (مدول) است. پیمانه، یک شار روی فضای معینی است که از گروه خودریختی پیمانه‌ای گرد آمده است. در حال حاضر توجه زیادی به مسأله دیرینه تشخیص عوامل نوع II مرتبط با نمایش‌های منظم گروه‌ها می‌شود. یکی از موارد مورد علاقه ویژه، مورد گروه‌های آزاد [IV.10 §2] است که از آن، موضوع نظریه احتمال آزاد شکوفا شده است. با وجود تلاش شدید، برخی از پرسش‌های اساسی باز باقی مانده‌اند: در زمان نگارش این مقاله معلوم نیست که آیا عامل‌های مرتبط با گروه‌های آزاد روی دو و روی سه مولد یکریخت هستند یا نه.

یکی دیگر از پیشرفت‌های مهم، نظریه زیرعامل^۵ بوده است که تلاش می‌کند تا روش‌هایی را رده‌بندی کند که می‌شود عامل‌ها در درون سایر عامل‌ها می‌توانند تحقق یابند. قضیه‌ای قابل توجه و شگفت‌آور از وان جونز^۶ نشان می‌دهد که در وضعیت نوع II که در آن، نرم مقادیر پیوسته ابعاد است، در وضعیت‌های معینی ابعاد زیرعامل‌ها می‌توانند تنها مقدارهای گسسته‌ای را بپذیرند. ترکیبیات مرتبط با این نتیجه،

^۱Alain Connes ^۲canonical group ^۳classification ^۴approximately ^۵subfactor theory ^۶Vaughan Jones

همچنین در دیگر بخش‌های به‌ظاهر کاملاً نامربوط از ریاضیات، به‌ویژه در نظریهٔ گره‌ها^۱ [III.46] ظاهر شده‌اند.

۳. جبرهای C^*

نظریهٔ جبرهای فون نوی من به توصیف ساختار یک نمایش از یک گروه روی فضای هیلبرت کمک می‌کند. اما بسیاری از اوقات هدف، به‌دست آوردن درکی از تمامی نمایش‌های یکانی ممکن است. برای روشن کردن این مسأله، به بخشی مرتبط اما متفاوت از نظریهٔ جبرهای عملگری باز می‌گردیم. مجموعهٔ $\mathcal{B}(H)$ از همه عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت H را در نظر بگیرید. این مجموعه دارای دو ساختار کاملاً متفاوت است: یکی اعمال جبری، نظیر جمع، ضرب، و تشکیل الحاقی‌ها؛ دیگری ساختارهای تحلیلی، نظیر نرم عملگری

$$\|T\| = \sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}.$$

این ساختارها مستقل از یکدیگر نیستند. برای مثال، فرض کنید $\|T\| < 1$ (یک فرض تحلیلی). در این صورت سری هندسی

$$S = I + T + T^2 + T^3 + \dots$$

در $\mathcal{B}(H)$ همگراست و حد S آن در برابری زیر صدق می‌کند:

$$S(I - T) = (I - T)S = I.$$

در نتیجه $I - T$ در $\mathcal{B}(H)$ وارون‌پذیر است (یک نتیجهٔ جبری). از این مطلب به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که شعاع طیفی هر عملگر T ، یعنی $r(T)$ (که عبارت است از بزرگترین قدرمطلق اعداد متعلق به طیف T) کوچکتر یا برابر با نرم آن است.

فرمول جالب مربوط به شعاع طیفی، خیلی بیشتر در این جهت به پیش می‌رود [که این ساختارها از هم مستقل نیستند]. این دستور حکم می‌کند که $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$. اگر T نرمال باشد $(TT^* = T^*T)$ ، و به‌ویژه اگر T خودالحاقی باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که $\|T^n\| = \|T\|^n$. در نتیجه شعاع طیفی T دقیقاً برابر با نرم T است. بنابراین رابطهٔ بسیار نزدیکی بین ساختار جبری $\mathcal{B}(H)$ ، مخصوصاً ساختار جبری مرتبط با عملگر الحاقی و ساختار تحلیلی وجود دارد.

^۱knot theory ^۲ C^* -Algebras

همه ویژگی‌های $B(H)$ دربارهٔ این ارتباط جبری و آنالیزی نیست. یک جبر C^* مانند A ساختاری مجرد است که به اندازهٔ کافی ویژگی دارد تا استدلال دو پاراگراف قبلی معتبر باقی بماند. جای آن نیست که تعریفی دقیق از جبرهای C^* ارائه کنیم، اما شایان گفتن است که یک شرط بسیار مهم که نرم، ضرب، و عمل $*$ را به هم مربوط می‌کند عبارت است از

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, a \in A$$

که اتحاد C^* ^۱ برای A نامیده می‌شود. همچنین توجه می‌کنیم که رده‌های خاصی از عملگرها روی فضای هیلبرت (عملگرهای یکانی، تصاویر متعامد و غیره) همگی همزاد خود را در یک جبر C^* کلی دارند. برای مثال، یک عضو یکانی $u \in A$ در $1 = u^*u = uu^*$ صدق می‌کند و تصویر p در $p = p^2 = p^*$ صدق می‌کند.

یک مثال ساده از یک جبر C^* به وسیلهٔ تنها یک عملگر $T \in B(H)$ به دست می‌آید. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای $S \in B(H)$ که حدهای چندجمله‌ای‌هایی از T و T^* هستند جبر C^* تولید شده توسط T نامیده می‌شود. جبر C^* تولید شده توسط T جابه‌جایی است اگر و تنها اگر T نرمال باشد؛ این امر یکی از دلایل اهمیت عملگرهای نرمال است.

۱.۳. جبرهای C^* جابه‌جایی. اگر X یک فضای توپولوژیک [III.92] فشرده [III.9] باشد، آنگاه مجموعهٔ $\mathcal{C}(X)$ مرکب از توابع پیوستهٔ $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ به اعمال جبری طبیعی (موروثی از اعمال جبری در $\mathbb{C}$) و یک نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ مجهز می‌شود. در حقیقت، این اعمال $\mathcal{C}(X)$ را به یک جبر C^* تبدیل می‌کند. عمل ضرب در $\mathcal{C}(X)$ جابه‌جایی است، زیرا ضرب اعداد مختلط جابه‌جایی است.

یک نتیجهٔ اساسی از گلفند و نای‌مارک حکم می‌کند که هر جبر C^* جابه‌جایی با یک $\mathcal{C}(X)$ یکرخت است. به‌ازای یک جبر C^* جابه‌جایی داده شدهٔ A ، X را به‌عنوان گردایهٔ همهٔ هم‌ریختی‌های جبری $\mathbb{C} \rightarrow A : \xi$ بسازید. در این صورت تبدیل گلفند به هر $a \in A$ تابع $\xi(a) \in X$ از X به $\mathbb{C}$ را نسبت می‌دهد.

قضیهٔ گلفند-نای‌مارک یک نتیجه بنیادین نظریهٔ عملگرها است. برای مثال، اثباتی جدید از قضیهٔ طیفی، ممکن است به شرح زیر باشد. فرض کنید T یک عملگر خودالحاقی یا نرمال روی یک فضای هیلبرت H است و فرض کنید A جبر C^* جابه‌جایی تولید شده توسط T باشد. بنا به قضیهٔ گلفند-نای‌مارک، A با $\mathcal{C}(X)$ به‌ازای یک فضای X یکرخت است که در واقع این فضا را می‌توان با طیف

^۱ C^* -identity

T یکی گرفت. اگر v برداری واحد در H باشد، آنگاه فرمول $S \mapsto \langle Sv, v \rangle$ یک حالت ϕ روی A تعریف می‌کند. فضای GNS مربوط به این حالت، یک فضای هیلبرت از توابع روی X است و اعضای $A = \mathcal{C}(X)$ همانند عملگرهای ضرب در آن اعضا، عمل می‌کنند. به‌ویژه، T به‌عنوان یک عملگر ضرب رفتار می‌کند. با کمی تلاش آشکار می‌شود که T به‌طور یکانی با این عملگر ضرب یا دست‌کم با جمع مستقیمی از چنین عملگرهایی (که خود هر یک، یک عملگر ضرب روی یک فضای بزرگتر است) هم‌ارز است.

توابع پیوسته می‌توانند ترکیب شوند: اگر f و g توابع پیوسته (با برد g مشمول در دامنه f) باشند، آنگاه $f \circ g$ نیز تابعی پیوسته است. از آنجا که قضیه گلفند-نایمارک می‌گوید هر عنصر خودالحاقی a از یک جبر C^* مانند A در یک جبر یکرخت با توابع پیوسته روی طیف a می‌نشیند، نتیجه می‌گیریم که اگر $a \in A$ خودالحاقی باشد و اگر f یک تابع پیوسته تعریف شده روی طیف a باشد، آنگاه عملگر $f(a)$ در A موجود است. این حسابان تابعی^۱ یک ابزار تکنیکی کلیدی در نظریه جبرهای C^* است. مثلاً، فرض کنید $u \in A$ یکانی است و $\|u - 1\| < 2$. در این صورت طیف u زیرمجموعه‌ای از دایره واحد در $\mathbb{C}$ است که شامل -1 نیست. می‌توان شاخه‌ای پیوسته از تابع لگاریتم مختلط را روی چنین زیرمجموعه‌ای تعریف کرد و نتیجه گرفت که یک عنصر $a = \log u$ از جبر وجود دارد به‌طوری که $u = e^a$ و $a = -a^*$. بنابراین مسیر $t \mapsto e^{ta}$ ، $0 \leq t \leq 1$ مسیر پیوسته‌ای از عضوهای یکانی در A است که u را به عضو همانی وصل می‌کند. لذا هر عضو یکانی که به اندازه کافی به عضو همانی نزدیک باشد، به‌وسیله یک مسیر از عضوهای یکانی به عضو همانی متصل می‌شود.

۲.۳. مثال‌های بیشتری از جبرهای C^* .

۱.۲.۳. عملگرهای فشرده. یک عملگر روی یک فضای هیلبرت دارای رتبه متناهی است اگر برد آن زیرفضایی متناهی‌بعد باشد. عملگرهای با رتبه متناهی تشکیل یک جبر می‌دهند و بستار این جبر یک C^* -جبر به نام جبر عملگرهای فشرده است و با $\mathcal{K}$ نشان داده می‌شود. همچنین می‌توان به $\mathcal{K}$ را به‌عنوان «حد» جبرهای ماتریسی

$$M_1(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_3(\mathbb{C}) \rightarrow \dots$$

^۱functional calculus

نگاه کرد که در آن هر جبر ماتریسی مشمول جبر بعد از خود توسط

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

است. بسیاری از عملگرهای طبیعی از جمله عملگرهای انتگرالی که از نظریهٔ فِردهلم برآمدند، فشرده هستند. عملگر همانی روی یک فضای هیلبرت فشرده است اگر و تنها اگر آن فضای هیلبرت متناهی بعد باشد.

۲.۲.۳. جبر CAR نمایش K به عنوان حدی از جبرهای ماتریسی، ما را به این سمت هدایت می‌کند که «حدهای» دیگری از این دست را نیز در نظر بگیریم. (در اینجا تلاش نمی‌کنیم این حدها را به‌طور رسمی تعریف کنیم، اما مهم است که توجه داشته باشید حد یک دنبالهٔ

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$$

به هم‌ریختی‌های $A_i \rightarrow A_{i+1}$ و نیز جبرهای A_i بستگی دارد.) یک مثال مهم، حد

$$M_1(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_4(\mathbb{C}) \rightarrow \dots,$$

است که در آن، هر جبر ماتریسی توسط

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{bmatrix}$$

مشمول در جبر ماتریسی بعد از خود است. این جبر CAR ^۱ نامیده می‌شود، زیرا شامل عضوهایی است که روابط پادجاب‌جایی متعارف که از نظریهٔ کوانتومی برمی‌آیند را نمایش می‌دهد. جبرهای C^* دارای کاربردهای متعددی در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی و مکانیک آماری کوانتومی هستند که فرمول‌بندی فون نوی‌من از نظریهٔ کوانتومی برحسب فضای هیلبرت را تعمیم می‌دهند.

۳.۲.۳. جبر C^* گروهی. اگر G یک گروه و $U_g \rightarrow g$ یک نمایش یکانی از G روی فضای هیلبرت H باشد، می‌توان کوچکترین جبر C^* عملگرهای روی H را که شامل همهٔ U_g هاست در نظر گرفت؛ این جبر C^* تولید شده توسط این نمایش نامیده می‌شود. نمایش منظم روی فضای هیلبرت $\ell^2(G)$ تولید شده توسط G مثال مهمی است که در بخش ۲.۲ آن را تعریف کردیم. جبر C^* ای که G

^۱canonical anticommutation relations

تولید می‌کند با $C_r^*(G)$ نشان داده می‌شود. زیرنویس « r » اشاره به نمایش منظم دارد. در نظر گرفتن نمایش‌های دیگر به جبرهای C^* گروهی دیگری، که بالقوه متفاوت هستند، رهنمون می‌شود. برای مثال، حالت $G = \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که این یک گروه جابه‌جایی است، C^* -جبر آن نیز جابه‌جایی است و لذا طبق قضیهٔ گلفند-نایمارک به‌ازای یک X مناسب، با $\mathcal{C}(X)$ یکرخت است. در واقع، X دایرهٔ واحد S^1 است و یکرختی

$$\mathcal{C}(S^1) \cong C_r^*(\mathbb{Z})$$

هر تابع روی دایره را به سری فوریهٔ آن می‌برد.

حالت‌های تعریف شده روی جبرهای C^* گروهی به توابع معین مثبت تعریف شده روی گروه‌ها، و لذا به نمایش‌های گروه‌های یکانی، متناظر می‌شوند. به این ترتیب، نمایش‌های جدید ساخته و مطالعه می‌شوند. به‌عنوان مثال، با استفاده از حالت‌های جبرهای C^* گروهی می‌توان به مجموعهٔ نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G ساختار یک فضای توپولوژیک داد.

۴.۲.۳. جبر دورانی گنگ^۱. جبر $C^*(\mathbb{Z})$ با یک عضو یکانی U (متناظر با $1 \in \mathbb{Z}$) تولید می‌شود. علاوه بر این، این یک مثال جهانی برای چنین C^* -جبری است، به این معنی که به‌ازای هر C^* -جبر A و عضو یکانی $u \in A$ ، یک و تنها یک هم‌ریختی $C^*(\mathbb{Z}) \rightarrow A$ وجود دارد که U را به u می‌برد. در واقع این چیزی جز هم‌ریختی حسابان تابعی برای عضو یکانی u نیست.

اگر به‌جای مثال بالا، مثال جهانی یک C^* -جبر تولید شده با دو عضو یکانی U و V را در نظر بگیریم منوط به رابطهٔ

$$UV = e^{i\pi\alpha}VU,$$

که در آن، α یک عدد گنگ است، آنگاه یک C^* -جبر ناجابه‌جایی به‌دست می‌آوریم که آن را جبر دورانی گنگ A_α می‌نامیم. جبرهای دورانی گنگ از دیدگاه‌های متفاوتی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با استفاده از نظریهٔ K (پایین را ببینید) نشان داده شده است که A_{α_1} با A_{α_2} یکرخت است اگر و تنها اگر $\alpha_1 \pm \alpha_2$ یک عدد صحیح باشد.

می‌توان نشان داد که جبر دورانی گنگ ساده است که این امر ایجاب می‌کند که هر جفت از عضوهای یکانی U و V که در رابطهٔ جابه‌جاگری بالا صدق کند، یک نسخه از A_α را تولید خواهند کرد. (به تضاد در حالت یک عضو یکانی توجه کنید: ۱ یک عملگر یکانی است اما یک نسخه از $C^*(\mathbb{Z})$ را تولید

^۱the irrational rotation algebra

نمی‌کند). این به ما اجازه می‌دهد که یک نمایش ملموس از A_α روی فضای هیلبرت $(S^1)^2$ به دست دهیم که در آن، U عملگر دوران به اندازه زاویه $2\pi\alpha$ و V عملگر ضرب توسط $\mathbb{C} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ است.

۴. عملگرهای فردhelm

یک عملگر فردhelm بین فضاهای هیلبرت، یک عملگر کراندار T است که هسته و هم‌هسته آن متناهی‌بعد هستند. این مطلب به این معنی است که معادله همگن $Tu = 0$ تنها تعدادی متناهی جواب مستقل خطی دارد در حالی که معادله ناهمگن $Tu = v$ دارای جواب است اگر v تعدادی متناهی شرایط خطی را برآورده کند. این اصطلاحات از کار فردhelm در زمینه معادلات انتگرال ناشی می‌شود؛ او نشان داد که اگر K یک عملگر انتگرالی باشد، آن‌گاه $I + K$ یک عملگر فردhelm است.

برای عملگرهایی که فردhelm در نظر گرفته بود، بعدها هسته و هم‌هسته باید برابر باشند، اما به‌طور کلی لازم نیست که چنین باشد. عملگر شیفت یکطرفه^۱ S که «بردار سطری» نامتناهی $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ را به $(0, a_1, a_2, \dots)$ می‌نگارد یک مثال از این دست است. معادله $Su = 0$ تنها دارای جواب صفر است اما معادله $Su = v$ یک جواب دارد تنها اگر مختص اول بردار v صفر باشد. شاخص یک عملگر فردhelm با تفاضل زیر، که عددی صحیح است، تعریف می‌شود:

$$\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\text{coker}(T)).$$

مثلاً هر عملگر وارون‌پذیر یک عملگر فردhelm با شاخص ۰ است، در حالی که عملگر انتقال یکطرفه یک عملگر فردhelm با شاخص ۱- است.

۱.۴. قضیه اتکینسون^۲. دو دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array} \right\}.$$

هر چند که ضرایب این معادلات خیلی به هم نزدیک هستند، اما بعدها هسته‌های آنها کاملاً متفاوت هستند: دستگاه دست چپ تنها جواب صفر دارد، در حالی که دستگاه دست راست جواب غیربدیهی $(t, -2t)$ دارد. بنابراین بعد هسته یک ثابت ناپایدار دستگاه معادلات است. تبصره‌ای مشابه برای بعد هم‌هسته اعمال می‌شود. در مقابل، شاخص، برخلاف تعریفش به‌عنوان تفاضل دو مقدار ناپایدار، پایدار است.

^۱unilateral shift operator ^۲Atkinson's theorem

قضیه مهم فردریک اتکینسون به این خواص پایداری بیان دقیقی می‌دهد. قضیه اتکینسون بیان می‌کند که عملگر T فردهلم است اگر و تنها اگر به پیمانه عملگرهای فشرده وارون‌پذیر باشد. این ایجاب می‌کند که هر عملگری که به اندازه کافی نزدیک به یک عملگر فردهلم است خود فردهلم بوده و دارای شاخصی یکسان با آن عملگر فردهلم باشد. همچنین ایجاب می‌کند که اگر T یک عملگر فردهلم و K یک عملگر فشرده باشد، آن‌گاه $T + K$ نیز یک عملگر فردهلم با شاخصی یکسان با شاخص T است. توجه کنید از آنجا که عملگرهای انتگرالی عملگرهای فشرده هستند، این قضیه اصلی فردهلم را به عنوان یک حالت خاص در بر دارد.

۲.۴. قضیه شاخص توپلیتس^۱. توپولوژی [I.3 §6.4] آن دسته از ویژگی‌های دستگاه‌های ریاضی را مطالعه می‌کند که تحت اختلال‌های پیوسته آن دستگاه پایا باقی می‌مانند. قضیه اتکینسون می‌گوید که شاخص فردهلم، یک مقدار توپولوژیکی است. در زمینه‌های بسیاری، به دست آوردن فرمول برای شاخص یک عملگر فردهلم برحسب مقادیر توپولوژیک به ظاهر کاملاً متفاوت دیگر امکان‌پذیر است. این نوع فرمول‌ها اغلب نشان دهنده روابطی عمیق بین آنالیز و توپولوژی هستند و اغلب کاربردهای قدرتمندی دارند.

ساده‌ترین مثال شامل عملگرهای توپلیتس است. یک عملگر توپلیتس دارای ماتریسی به شکل خاص زیر است:

$$T = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ b_{-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_{-2} & b_{-1} & b_0 & b_1 & \dots \\ b_{-3} & b_{-2} & b_{-1} & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

به عبارت دیگر، درایه‌ها در طول هر قطر ماتریس ثابت باقی می‌مانند. دنباله ضرایب $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ تابع $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n}$ را روی دایره واحد در صفحه مختلط تعریف می‌کند که نماد عملگر توپلیتس نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد یک عملگر توپلیتس که نمادش تابعی پیوسته است که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، فردهلم است. شاخص آن چیست؟

جواب با نگاه کردن به نماد به عنوان نگاشتی از دایره واحد به اعداد مختلط غیر صفر داده می‌شود: به عبارت دیگر، به عنوان یک مسیر بسته در صفحه مختلط غیر صفر. ثابت توپولوژیکی بنیادی چنین مسیری

^۱Toeplitz index theorem

عدد چرخشی^۱ آن است: تعداد دفعاتی که دور مبدأ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد. می‌توان ثابت کرد که شاخص یک عملگر توپلیتس با نماد غیرصفر f قرینه عدد چرخشی f است. برای مثال اگر f تابع $f(z) = z$ (با عدد چرخشی $+1$) باشد، آنگاه عملگر توپلیتس مربوطه، انتقال یکطرفه S است که پیش‌تر با آن مواجه شدیم (با شاخص -1). قضیه شاخص توپلیتس یک مورد بسیار خاص از قضیه شاخص آتیا-سینگر^۲ [V.2] است که یک فرمول توپولوژیکی برای شاخص‌های عملگرهای مختلف فردهلم می‌دهد که در هندسه رخ می‌دهند.

۳.۴. عملگرهای اساساً نرمال^۳. قضیه اتکینسون نشان می‌دهد که اختلال‌های فشرده از یک عملگر به یک معنی “کوچک” هستند. این امر منجر به مطالعه خواصی از یک عملگر می‌شود که با اختلال فشرده ثابت باقی می‌مانند. برای مثال، طیف اساسی یک عملگر T عبارت است از مجموعه اعداد مختلط λ که $T - \lambda I$ فردهلم نیست (یعنی، وارون‌پذیر به پیمانه عملگرهای فشرده). دو عملگر T_1 و T_2 به‌طور اساسی هم‌ارز هستند اگر یک عملگر یکانی U وجود داشته باشد به‌طوری که $UT_1U^* = T_2$ و T_2 با تقریب یک عملگر فشرده یکی باشند (یعنی $T_2 - UT_1U^*$ فشرده باشد). قضیه‌ای زیبا از هرمان وایل^۴ [VI.80] حکم می‌کند که دو عملگر خودالحاقی یا نرمال به‌طور اساسی هستند اگر و تنها اگر دارای طیف اساسی یکسانی باشند.

ممکن است استدلال شود که محدود شدن به عملگرهای نرمال در این قضیه نامناسب است. از آنجا که با خواصی در ارتباط هستیم که با اختلال فشرده تغییر نمی‌کنند، آیا مناسب‌تر نیست که عملگرهای اساساً نرمال را در نظریه‌گیری – یعنی، عملگرهایی مانند T که برای آن $T^*T - T^*T$ فشرده است؟ این تغییر به‌ظاهر ناچیز منجر به نتیجه‌ای غیر منتظره می‌شود. انتقال یکطرفه S مثالی از یک عملگر اساساً نرمال است. طیف اساسی آن دایره واحد است، همان‌گونه که طیف اساسی الحاقی آن نیز اینچنین است؛ اما S و S^* نمی‌توانند اساساً هم‌ارز باشند، زیرا S شاخص -1 و S^* شاخص $+1$ دارد. بنابراین اجزای جدیدی، ورای طیف اساسی، برای رده‌بندی عملگرهای به‌طور اساسی نرمال مورد نیاز است. در واقع به‌راحتی از قضیه اتکینسون نتیجه می‌شود که اگر عملگرهای اساساً نرمال T_1 و T_2 اساساً هم‌ارز باشند، آنگاه نه تنها باید طیف اساسی یکسانی داشته باشند بلکه به‌ازای هر λ که در طیف اساسی نیست، شاخص فردهلم $T_1 - \lambda I$ باید با شاخص فردهلم $T_2 - \lambda I$ برابر باشد. عکس این گزاره در دهه ۱۹۷۰ توسط لری براون^۵، رون داگلاس^۶، و پیتر فیلمور^۷ با استفاده از روش‌های کاملاً جدیدی که منجر به عصر جدیدی از تعاملات بین نظریه C^* -جبر و توپولوژی گردید، ثابت شد.

^۱winding number ^۲Atiyah–Singer index theorem ^۳essentially normal operators ^۴Hermann Weyl

^۵Larry Brown ^۶Ron Douglas ^۷Peter Fillmore

۴.۴. نظریه K . یک ویژگی قابل توجه کار براون-داگلاس-فیلمور حضور ابزار توپولوژی جبری [IV.6] در کار آنها است؛ به ویژه نظریه K . به یاد داشته باشید که بر اساس قضیه گلفند-نایمارک، مطالعه فضاهای توپولوژیک (مناسب) و مطالعه C^* -جبرهای جابه‌جایی یکی و یکسان هستند؛ همه روش‌های توپولوژیکی را می‌توان از طریق یکرختی گلفند-نایمارک به C^* -جبرهای جابه‌جایی انتقال داد. با این مشاهده، طبیعی است که بپرسید کدام‌یک از این روش‌ها را می‌توان بیشتر تعمیم داد تا اطلاعاتی درباره همه C^* -جبرها اعم از جابه‌جایی یا ناجابه‌جایی فراهم آورد. اولین و بهترین مثال نظریه K است.

در ابتدایی‌ترین شکل آن، نظریه K به هر C^* -جبر A یک گروه آبلی $K(A)$ و به هر همریختی C^* -جبرها یک همریختی گروه‌های آبلی متناظر می‌سازد. بلوک‌های سازنده $K(A)$ را می‌توان به عنوان عملگرهای فردهم تعمیم‌یافته مرتبط با A نگریست؛ تعمیم این است که این عملگرها روی فضاهای هیلبرتی عمل می‌کنند که در آن اسکالرها مختلط با عناصر C^* -جبر A جایگزین شده‌اند. گروه $K(A)$ عبارت است از گردایه مؤلفه‌های همبندی فضای همه چنین عملگرهای فردهم تعمیم‌یافته. بنابراین اگر به عنوان مثال، $A = \mathbb{C}$ (که در این صورت با عملگرهای فردهم کلاسیک سر و کار داریم)، آنگاه $K(A) = \mathbb{Z}$. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که دو عملگر فردهم با یک مسیر از عملگرهای فردهم به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر دارای شاخص یکسانی باشند.

یکی از نقاط قوت بزرگ نظریه K این است که کلاس‌های نظریه K ممکن است از انواعی از اجزای گوناگون ساخته شده باشند. مثلاً هر تصویر $p \in A$ یک کلاس در $K(A)$ تعریف می‌کند که می‌توان آن را به عنوان یک “بعد” برای برد P در نظر گرفت. این امر نظریه K را به رده‌بندی عامل‌ها (بخش ۲.۲) ارتباط می‌دهد و ابزاری مهم در رده‌بندی خانواده‌های مختلف C^* -جبرها مانند جبرهای دورانی گنگ شده است. (زمانی تصور می‌شد که جبر دورانی گنگ ممکن است اصلاً شامل هیچ تصویری غیربدیهی نباشد: ساخت چنین تصاویری توسط مارک ریفل^۱ گامی مهم در توسعه نظریه K جبرهای C^* بود. یکی دیگر از مثال‌های زیبا، قضیه رده‌بندی جورج الیوت برای C^* جبرهای به‌طور موضعی متناهی‌بعد مانند جبر CAR است. چنین جبرهایی کاملاً توسط پایاهای نظریه K تعیین می‌شوند.

مشخص شده است که مسأله محاسبه گروه‌های نظریه K برای C^* -جبرهای ناجابه‌جایی مخصوصاً برای C^* -جبرهای گروهی، دارای ارتباط‌های مهمی با توپولوژی است. در واقع، برخی پیشرفت‌های کلیدی در توپولوژی از طریق نظریه جبرهای C^* به این صورت رخ داده‌اند. بدین طریق به متخصصین جبرهای عملگری این امکان را می‌دهد که بخشی از دینی را که به توپولوژی‌دان‌ها برای نظریه K داشتند،

^۱Marc Rieffel

ادا کنند. مشکل اصلی سازماندهی در این زمینه حدس باوم-کن^۱ است که توصیفی از نظریه K برای C^* -جبرهای گروهی بر حسب پایاهای آشنا در توپولوژی جبری پیشنهاد می‌کند. بسیاری از پیشرفت‌های این حدس تا به امروز نتیجه کارگنادی کاسپاروف^۲ است که به طرز چشمگیری اکتشافات براون، داگلاس، و فیلمور را گسترش داد؛ نه تنها برای پوشش دادن مجموعه‌های تک‌عضوی عملگرهای اساساً نرمال بلکه برای دستگاه‌های ناجابه‌جایی عملگرها، یعنی برای جبرهای C^* . کار کاسپاروف در حال حاضر مؤلفه مرکزی نظریه جبرهای عملگری است.

۵. هندسه ناجابه‌جایی

ابداع دکارت^۳ [VI.11] نشان داد که می‌توان هندسه را با فکر کردن در مورد توابع مختصاتی به جای فکر کردن مستقیم در مورد نقاط در فضا و روابط متقابل آنها انجام داد: این توابع مختصاتی آشنا x ، y ، و z هستند. قضیه گلفند-نای‌مارک را می‌توان به چشم نمونه‌ای از این ایده گذر از «تصویر نقطه‌ای» فضای X به «تصویر میدانی» جبر $C(X)$ متشکل از توابع پیوسته روی X نگریست. موفقیت نظریه K در جبرهای عملگری ما را به این امر فرا می‌خواند که ببینیم آیا تصویر میدانی ممکن است از تصویر نقطه‌ای قوی‌تر باشد، زیرا نظریه K را می‌توان بر جبرهای C^* ناجابه‌جایی که دارای هیچ «نقطه‌ای» (همریختی‌های به $\mathbb{C}$) نیستند، اعمال کرد.

یکی از هیجان انگیزترین بخش‌های پژوهش در نظریه جبرهای عملگری حرکت در امتداد راهی است که این افکار را گسترش داده است. در برنامه هندسه ناجابه‌جایی کن^۴ این ایده را که یک C^* -جبر کلی را باید به‌سان جبری از توابع روی یک «فضای ناجابه‌جایی» در نظر گرفت، می‌گیرد و پیش می‌رود تا روایت‌های «ناجابه‌جایی» بسیاری از ایده‌های هندسی و توپولوژیکی و همچنین ساختارهای کاملاً جدیدی که هیچ همزاد جابه‌جایی ندارند را ارائه دهد. هندسه ناجابه‌جایی از صورت‌بندی خلاق ایده‌های هندسه معمولی شروع می‌شود ولی تنها با عملگرها و توابع، نه با نقطه‌ها، سروکار دارد.

مثلاً دایره S^1 را در نظر بگیرید. جبر $C(S^1)$ همه ویژگی‌های توپولوژیکی S^1 را منعکس می‌کند، اما برای لحاظ کردن ویژگی‌های متریک (مربوط به فاصله) آن نه تنها به $C(S^1)$ بلکه به زوج متشکل از جبر $C(S^1)$ و عملگر $D = i \frac{d}{d\theta}$ روی فضای هیلبرت $H = L^2(S^1)$ می‌نگریم. توجه کنید که اگر f یک تابع روی دایره (به‌دیده یک عملگر ضرب روی H) باشد، آنگاه جابه‌جاگر $Df - fD$ نیز یک عملگر ضرب در $i \frac{df}{d\theta}$ است. در نتیجه فاصله زاویه‌ای بین نقاط روی دایره را می‌توان D و $C(S^1)$

^۱Baum-Connes conjecture ^۲Gennadi Kasparov ^۳Descarte ^۴Connes

به کمک فرمول زیر به دست آورد:

$$d(p, q) = \max\{|f(p) - f(q)| : \|Df - fD\| \leq 1\}.$$

کن استدلال می‌کند که عملگر $|D|^{-1}$ نقش «واحد طول قوس ds » را در این و بسیاری از وضعیت‌های پیچیده‌تر دیگر بازی می‌کند.^۱

جنبه دیگری از مثال‌هایی که کن در نظر می‌گیرد و اهمیتی مرکزی در هندسه ناچابه‌جایی دارد، این است که عملگر $|D|^{-k}$ یک عملگر اثر دار (بخش ۵.۱ را نگاه کنید) است وقتی که k به اندازه کافی بزرگ باشد. در مورد دایره، لازم است که k بزرگتر از ۱ باشد. محاسبات با اثرها، هندسه ناچابه‌جایی را به نظریه کوهمولوژی [IV.6 §4] مرتبط می‌کند. اکنون دو نوع «توپولوژی جبری ناچابه‌جایی» به نام‌های نظریه K و نوع جدیدی از همولوژی که کوهمولوژی دوری^۲ نامیده می‌شود را داریم؛ ارتباط بین این دو توسط یک قضیه شاخص بسیار کلی فراهم شده است.

فرآیندهای متعددی وجود دارند که C^* -جبرهای ناچابه‌جایی را (که روش‌های کن را می‌شود بر آنها اعمال کرد) از داده‌های کلاسیک هندسی می‌سازند. جبرهای دورانی گنگ A_θ نمونه‌هایی از آن هستند؛ تصویر کلاسیکی که به آن جبرهای دورانی گنگ اعمال می‌شوند فضای خارج قسمتی [I.3 §3.3] دایره نسبت به گروه دوران‌های با مضرب‌های [صحیح] θ است. در روش‌های کلاسیک هندسه و توپولوژی، قادر نیستیم این فضای خارج قسمتی را به کار ببریم، اما رویکرد ناچابه‌جایی از طریق A_θ بسیار موفق‌تر است.

یک امکان هیجان‌انگیز اما گمانه‌زنانه این است که باید قوانین اصلی فیزیک از دیدگاه هندسه ناچابه‌جایی مطالعه کرد. گذر به C^* -جبرهای ناچابه‌جایی می‌تواند مشابه گذر از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی باشد. به هر روی، کن استدلال کرده است که C^* -جبرهای ناچابه‌جایی نقشی در توصیف دنیای فیزیکی بازی می‌کنند حتی پیش از اینکه گذر به فیزیک کوانتومی انجام پذیرد.

مراجع

- [1] A. Connes, *Noncommutative Geometry*. (1995), Boston, MA: Academic Press.
- [2] K. Davidson, *C^* -Algebras by Example*. (1996), Providence, RI: American Mathematical Society.

^۱ عملگر D کاملاً وارون‌پذیر نیست، زیرا روی توابع ثابت صفر می‌شود. قبل از در نظر گرفتن عملگرهای وارون، اصلاحی مختصر باید انجام داد. عملگر $|D|$ ، بنا به تعریف، ریشه مثبت D^2 است.

^۲cyclic cohomology

- [3] P. Fillmore, A User's Guide to Operator Algebras. (1996), Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. New York: John Wiley.
- [4] P. R. Halmos, What does the spectral theorem say? American Mathematical Monthly (1963), 70: 241–247.

سمیه رحیمی: دانشگاه گلستان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

رایانامه: somiko1365@ymail.com

بامداد یاحقی: دانشگاه گلستان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

رایانامه: bamdad5@hotmail.com

تعمیم در ریاضیات

مارال روئین، رستم محمدیان، و نوراله نژاد صادقی

چکیده

هدف مقاله پیش‌رو، بررسی نقش و اهمیت تعمیم در یادگیری و آموزش ریاضیات است و این‌که چگونه تعمیم به‌عنوان یکی از راهیاب‌های معرفی شده توسط شونفیلد^۱، می‌تواند در حل مسئله و ایجاد تفکر ریاضی در یادگیرندگان کمک کند. در این مقاله، سعی شده است که مفهوم کلی تعمیم و تعریف آن، هم از دیدگاه منطقی و هم از دیدگاه روان‌شناختی مطرح گردد و با بیان الگوهایی، انواع آن مورد بحث قرار گیرد. در واقع به بررسی این گزاره که «تاریخ ریاضیات چیزی جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی نمی‌باشد» می‌پردازیم. نقش تجسم را در تعمیم ریاضی بررسی کرده و با ذکر مثال‌هایی از جبر و هندسه به کاربردهایی از تعمیم پرداخته و نشان می‌دهیم که استفاده از راهیاب «حالت خاص» همواره نمی‌تواند در حل مسائل، مورد استفاده قرار گیرد بلکه برعکس، گاهی اوقات با تغییر مسئله در حالت کلی‌تر و عمومی‌تر و با تعمیم آن، می‌توان مسئله را آسان‌تر حل کرد.

۱. مقدمه

یکی از راه‌های ایجاد تفکر ریاضی در دانشجویان و دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان این است که به آنها اجازه داده شود و آنها را ترغیب کنیم که خود، قضیه یا مسئله جدیدی را ارائه دهند. مهم نیست که قضیه یا مسئله ارائه شده چقدر ساده و ابتدایی است، بلکه مهم این است که فکری

عبارات و کلمات کلیدی: تعمیم، آموزش ریاضی، حل مسئله، راهیاب، تجسم.

تازه باشد، چون در علم، سؤال تازه و مناسب از پاسخ آن مهم‌تر است. یک راه رسیدن به این هدف این است که به آن‌ها فکر تعمیم دادن را بیاموزیم و تا آنجا که می‌توانیم مطالب را به صورت تعمیمی ارائه دهیم و بخواهیم که درباره تعمیم هر مطلب ریاضی قابل فهم فکر کنند. باید به آنها یاد داد که تمام تاریخ ریاضیات چیزی نیست جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی. باید برای دانشجویان و دانش‌آموزان خاطرنشان کرد که شاید راز تمام پیشرفت‌های علمی بشر، تاکنون به شکلی در مفهوم تعمیم نهفته است، البته در بیانی خاص‌تر، منظور تعمیم سیستم اعداد، از اعداد طبیعی به اعداد صحیح، به اعداد گویا، به اعداد جبری و سیستم‌های جبری نهفته است. بیشتر کارهای ریاضی حتی نتایج ریاضی‌دانان برجسته، معمولاً تعمیم کارها و مفاهیمی است که وجود داشته‌اند. البته بعضی افراد با مهارتی خاص، نتایج خود را طوری ارائه می‌دهند که این تعمیم آشکار نیست، در نتیجه کارشان مهم‌تر به نظر می‌رسد [۱]. ریاضیات با تعمیم ایده‌های انتزاعی سروکار دارد، بنابراین نقش تعمیم در پیشبرد دانش ریاضی در آموزش ریاضی بسیار مهم است [۱۲].

۲. مفهوم تعمیم

این بحث را با طرح این سؤال آغاز می‌کنیم:

مثلاً متساوی‌الاضلاعی داریم؛ هر ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم. چند پاره‌خط جدید ایجاد می‌شود؟

توجه می‌کنیم که هدف از طرح این پرسش، حل آن به وسیله شمردن پاره‌خط‌ها توسط دانش‌آموزان نیست زیرا با این روش، دانش‌آموزان به معلومات جدیدی دست پیدا نمی‌کنند و به تفکر واداشته نمی‌شوند. حال اگر هر یک از پاره‌خط‌های ایجاد شده را دوباره به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و این روند طرح پرسش را مرحله به مرحله ادامه دهیم تا دانش‌آموزان از شمردن پاره‌خط‌ها ناتوان شوند و تلاش کنند یک پاسخ کلی برای مرحله n ام پیدا کنند، در این حالت، می‌توان گفت که محصل به یک مسئله پایه‌ای و مفهوم‌دار دست پیدا کرده است. احساس رضایت از حل مسئله در حالت خاص و رسیدن به پاسخ، شرط ما نیست، بلکه یادگیرنده باید توان آن را پیدا کند که راه حل مسئله را در حالت کلی بیابد و تنها به یک یا چند حالت خاص بسنده نکند؛ در این حالت است که می‌توان با رضایت از حل مسئله سخن گفت [۱۵]. تعمیم، یکی از راهیاب‌های حل مسئله است و تاریخ ریاضیات را می‌توان از نتایج شناخت، توصیف و الگوهای تعمیم دانست. در واقع تعمیم، یک کنش منطقی است و دو مفهوم زیر را بیان می‌کند:

- (۱) از دیدگاه روان‌شناسی، یک عملیاتِ فکریِ انتزاعی است که توسط آن، کیفیت مشترک گروهی از اشیا یا پدیده‌ها، به صورت ذهنی بسط داده می‌شود [۷].
- (۲) از دیدگاه منطقی، حرکت از تصورات ریز یک حوزه‌ی محدود با محتوای غنی، به تصوراتی با حوزه‌ی وسیع‌تر و محتوای ضعیف‌تر می‌باشد [۷].

تعمیم، تعریفی است که شامل دسته بزرگ‌تری از اشیائی شود که از تعریف اولیه به دست آید. تعمیم یک قضیه مانند A ، قضیه‌ای است که با همان فرض قضیه، نتیجه وسیع‌تری بدهد، به طوری که قضیه A از آن به دست می‌آید، یا با فرض کمتری از قضیه A ، همان نتیجه قضیه A یا بیشتر از آن به دست آید (مانند تعمیم قضیه رول به قضیه مقدار میانگین یا اعداد حقیقی به اعداد مختلط). در این‌جا منظور از تعمیم، این موضوع نیز می‌باشد که بتوانیم یک قضیه یا نتیجه‌ای را از یک قسمت ریاضی به قسمت دیگری برده و در آن‌جا آن را بررسی و حل کنیم [۱]. به طور مثال، اثبات مسئله زیر مستلزم اثبات آن با اعداد مختلط می‌باشد:

«در یک چهارضلعی مفروض، مربعی روی هر ضلع ترسیم کنید، ثابت کنید خطوطی که از مرکز مربعات ترسیم می‌شوند، متقاطع و دارای طول برابر هستند (قضیه وان آبل)» [۵].

میچلمور^۲ معنی تعمیم را در سه گروه به نام‌های G_1 و G_2 و G_3 طبقه‌بندی کرده است:

G_1 : مترادفی برای تجرد یا مفهوم: دیویدوف^۳ آن را به عنوان «فهم مستقل از خواص اشیا یکسان در یک کلاس کامل» تعریف می‌کند [۸]. (به عنوان نمونه، هر حلقه تعویض‌پذیر و یکدار دارای ایده‌آل ماکسیمال است). و دریفوز^۴ آن را به عنوان اولین گام تجرید در نظر گرفته است. میچلمور و وایت^۵ همین معنی را برای مفهوم «تجرید-تعمیم»^۶ به کار می‌گیرند [۸].

G_2 : یک توسیع از مفهوم موجود: این بسط دادن‌ها سه نمود دارند:

- اولی، بسط تجربی است و هنگامی اتفاق می‌افتد که شخص، مواردی دیگر بیابد که مفهوم موجود را در بر بگیرد [۸].
- دومی، تعمیم ریاضی است و زمانی اتفاق می‌افتد که یک کلاس از اشیا ریاضی در کلاس بزرگ‌تر بر اساس تشابهات متفاوت جاسازی شده باشد [۸]. (به عنوان نمونه هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است.)

— سومی، ابداع ریاضی است و زمانی اتفاق می‌افتد که یک ریاضی‌دان با تأمل، مشخصات و ویژگی‌های یک مفهوم را تغییر دهد یا حذف کند، تا مفهوم جامع‌تری را به دست بیاورد [۸]. (به‌عنوان نمونه می‌توان به قضیهٔ کوشی که تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین است اشاره کرد).

G_3 : قضیه‌ای در ارتباط با مفاهیم موجود: دابینسکی^۱ تعمیم را به‌صورت روندی تعریف می‌کند که در آن یک الگوی موجود، دوباره بیان می‌شود و در شرایطی متفاوت به‌کار می‌رود. همچنین اسکمپ^۲ نوشته است: روند تعمیم ریاضی، فعالیتی پیچیده و قدرتمند است. پیچده به این دلیل که متأثر از ساختار سبک است، در حالی که موقتاً محتوای آن نادیده انگاشته می‌شود، قدرتمند به این دلیل که هوشیاری را کنترل می‌کند تا الگویی موجود را بازسازی کند [۸].

دو نوع الگو از تعمیم که در ریاضیات استفاده می‌شود به شرح زیر است:

۱.۲. تعمیم مبتنی بر نتیجه^۳. تعمیمی که با شناخت یک الگوی عمومی از خود نتیجه به دست می‌آید از تعمیم مبتنی بر نتیجه گویند. با محاسبهٔ یک سری از اعداد، دنبال کردن و مشاهدهٔ قاعده و نظمی مشخص، از نتیجهٔ محاسبات به دست می‌آید [۶]. مثلاً در محاسبهٔ مجموع تعداد متناهی از اعداد طبیعی، از ۱ تا عددی معلوم، فرمولی را برای چند حالت خاص به دست می‌آوریم و طبق آن، فرمول کلی‌تری را برای حالت n ام حدس می‌زنیم:

$$(۱.۲) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times (10 + 1)}{2}$$

$$(۲.۲) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

۲.۲. تعمیم مبتنی بر فرآیند^۴. تعمیم حاصل از فرآیندی که به نتیجه ختم می‌شود را تعمیم مبتنی بر فرآیند گویند، یعنی یک راه که زنجیری خاص از مراحل وابسته به نتایج قبلی را در خود دارد [۶]. برای مثال، در محاسبهٔ تعداد قطره‌های یک n ضلعی ابتدا از مثلث آغاز می‌کنیم، سپس آن را برای ۴ ضلعی و ۵ ضلعی محاسبه می‌کنیم، در طی این فرآیندها به نتایجی می‌رسیم که به فرآیندهای قبل وابسته است و از این‌رو می‌توانیم تعداد قطرها را برای یک n ضلعی نیز محاسبه کنیم.

^۱Dubinsky ^۲Skemp ^۳Result pattern generalisation ^۴Process pattern generalisation

۳. کاربرد تعمیم

نخست با ذکر مثال، کاربردهایی از تعمیم را در جبر و هندسه نشان می‌دهیم، سپس به بررسی نقش تجسم در تعمیم می‌پردازیم. در آخر به بیان تاریخچه‌ای از قضیه فیثاغورث و فکر تعمیم آن پرداخته و همچنین نشان می‌دهیم که استفاده از راهیاب «حالت خاص» همواره نمی‌تواند در حل مسائل، مورد استفاده قرار گیرد بلکه برعکس، گاهی اوقات با تغییر مسئله به حالت کلی‌تر و عمومی‌تر و با تعمیم آن، می‌توان مسئله را آسان‌تر حل کرد.

۱.۳. مثالی در جبر. یک فرمول کلی برای حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم بیابید. به‌طور معمول فرمول آشنای $\frac{c}{a}$ برای حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در کتاب‌های درسی آمده است که با استفاده از فرمول مزدوج دو ریشه و ضرب آن‌ها به نتیجه دلخواه می‌رسیم:

$$(۱.۳) \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مشکل اینجاست که این روش محدودیت دارد زیرا اگر بخواهیم حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه سوم، چهارم و یا بالاتر را بیابیم این روش نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به هر حال برای حل مسئله در حالت کلی‌تر، معادله درجه n ام را در نظر می‌گیریم:

$$(۲.۳) \quad a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n-1} = 0$$

فرض کنید که ریشه‌های معادله (۲.۳)، $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ باشند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(۳.۳) \quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) = 0$$

با ضرب کردن عوامل در معادله (۳.۳) به معادله زیر می‌رسیم:

$$(۴.۳) \quad \begin{cases} x^n + \dots - \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n = 0 & \text{برای } n \text{ های فرد؛} \\ x^n + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n = 0 & \text{برای } n \text{ های زوج؛} \end{cases}$$

با تقسیم معادله‌ی (۲.۳) بر a_1 داریم:

$$(۵.۳) \quad x^n + \frac{a_2}{a_1} x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{a_1} x + \frac{a_{n+1}}{a_1} = 0$$

با مقایسه‌ی جمله به جمله معادلات (۴.۳) و (۵.۳) به این نتیجه می‌رسیم که حاصل ضرب ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای برای n های فرد $\frac{-a_{n+1}}{a_1}$ و برای n های زوج $\frac{a_{n+1}}{a_1}$ می‌باشد. حال نه تنها یک فرمول کلی برای هر معادله چندجمله‌ای داریم، بلکه روش بالا به هیچ گونه دانش جبری خاص یا فرمولی نیاز ندارد [۵].

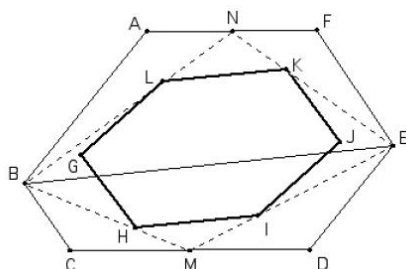
۲.۳. نقش تجسم در تعمیم. به طور کلی محققان ایده‌های مفید و متفاوتی از تجسم ارائه داده‌اند. تجسم قابلیت پیشرفت تدریجی و تولید خلاقیت است. تعبیر تجسم، به‌کارگیری عکس‌ها، تصاویر، نمودارها در ذهن، روی کاغذ یا هر وسیله و ابزار تکنولوژی، با هدف تشریح و مبادله اطلاعات و تفکر درباره ایده‌های ناشناخته پیشین و ترقی درک‌ها و گسترش آنهاست. پرسمگ^۱ بیان می‌کند که تجسم، کمکی است به درک یا حرکت به سوی یک نتیجه‌گیری نهایی. بنابراین می‌توان درباره تجسم یک مفهوم و یا یک مسئله صحبت کرد، اما نمی‌توان راجع به تجسم یک نمودار چیزی گفت. تجسم یک مفهوم یا یک مسئله، مربوط به تصویر فکری یک مسئله است و مجسم کردن مسئله به این معناست که مسئله در شرایط یک نمودار یا یک تصویر ادراک شود. بنابراین روند تجسم، آن است که شامل تصویرسازی با نمودار-یا بدون نمودار- به عنوان قسمتی از روش راه حل شود. تورنتون^۲ ذکر می‌کند که تفکر بصری، باید نقشی کامل در تجربه ریاضی دانش‌آموزان داشته باشد و به عنوان توسعه دهنده فهم جبری، وسیله‌ای قدرتمند برای حل مسئله و ارزشمند در روش‌های یادگیری متفاوت مطرح گردد. بنا به گفته‌های آرکاوای^۳ تجسم، هم محصول و هم حاصل خلاقیت، ترجمه و تأثیرات تصاویر و عکس‌هاست. فیشبین^۴ ادعا می‌کند که تجسم نه تنها اطلاعات را به صورت با معنایی منظم می‌کند، بلکه عامل مهمی در رسیدن به راه حل مسائل نیز هست و همچنین گفته شده که نقش تجسم حتی از این هم فراتر می‌رود: می‌تواند روندی باشد که به جوابی عمومی و رسمی ختم می‌شود [۱۲].

ییلماز^۵ و همکارانش برای بررسی نقش تجسم در تعمیم ریاضی، مسئله زیر را در اختیار تعدادی از دانش‌آموزان خود قرار دادند: «چند خط راست از n نقطه که سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست واقع نباشند می‌گذرد؟» این مسئله مستقیماً به دانش‌آموزان داده نشد، بلکه ابتدا دو نقطه، سپس سه نقطه و ... به آنها داده شد تا خودشان متوجه تعمیم مسئله شوند. از نظر ییلماز و همکارانش، برخی از دانش‌آموزان در فهم روابط و کشف تعمیم دچار مشکل شدند، بنابراین به سختی توانستند تعمیم‌ها را فرمول‌بندی کنند. این مسئله ساده به دانش‌آموزان داده شد تا بتوانند این موضوع را بررسی کنند

^۱Presmeg ^۲Tornton ^۳Arcavi ^۴Fishbien ^۵Yilmaz

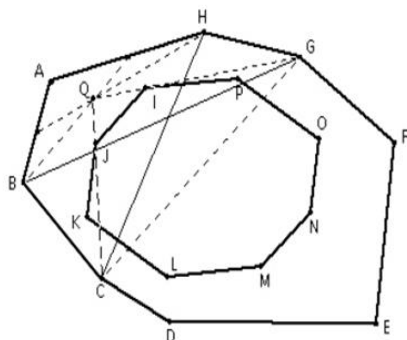
که چگونه از تجسم، در روند فکر خود استفاده می‌کنند تا بتوانند مسئله‌ای را تعمیم دهند و آن را فرمول‌بندی کنند. آنها به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان از طریق تجسم به مسائل انتزاعی فکر می‌کنند و تجسم، نقش مهمی در تعمیم ریاضی دارد. همان‌طور که فیشبین [۱۲] گفته است: تجسم عاملی ضروری برای ایجاد حس وضوح و ساختن تعمیم در کمترین زمان و به دست آوردن فرمول است.

۳.۳. مثالی در هندسه. حال مسئله زیر و تعمیم آن را مورد توجه قرار می‌دهیم: اگر $ABCDEF$ یک شش ضلعی با اضلاع مقابل موازی (نه لزوماً مساوی) باشد، آنگاه $GHIJKL$ مراکز ثقل مثلث‌های FAB ، EFA ، DEF ، CDE ، BCD و ABC ، تشکیل یک شش ضلعی با اضلاع روبروی با هم مساوی و موازی را می‌دهند. اثبات این مسئله با رسم قطر BE و استفاده از تشابه در مثلث‌ها خیلی ساده‌تر می‌شود.



حال از خود می‌پرسیم که آیا می‌توان این مسئله را به حالت‌های هشت ضلعی، ده ضلعی و ... تعمیم دهیم؟ اگر به جای شش ضلعی حالت قبل، هشت ضلعی $ABCDEFGH$ با اضلاع مقابل موازی را در نظر بگیریم، آنگاه یک هشت ضلعی با اضلاع مقابل موازی و مساوی حادث می‌شود.

در حقیقت نتیجه در حالت کلی برای $2n$ ضلعی‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) برقرار است که مراکز ثقل n ضلعی‌های $A_1A_2A_3 \dots A_n$ و $A_2A_3A_4 \dots A_{n+1}$ و ... زیرتقسیماتش، یک $2n$ ضلعی با اضلاع مقابل موازی و مساوی را تشکیل می‌دهند [۳]. در اینجا برای اثبات از قضیه‌ای که یاگلوم [۱۱]، در مورد مرکز ثقل n ضلعی‌ها اثبات کرده است استفاده می‌کنیم و مسئله را برای $2n$ ضلعی‌ها تعمیم می‌دهیم.



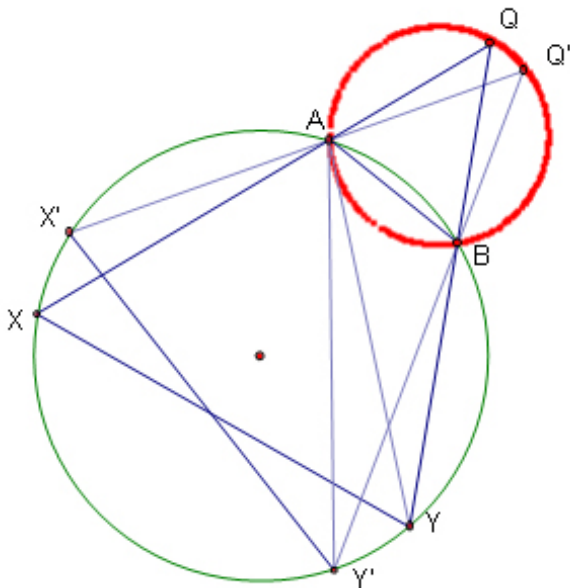
۴.۳. سیر هندسی و شکستن شروط^۱. گاهی در بحث تعمیم، بعضی از ایده‌ها و نتایج را از تحلیل و بررسی ساختار هندسی نتایج موجود استخراج می‌کنیم. به‌طور مثال، در قضیه رول که به خوبی شناخته شده است: «فرض کنید که $f \in C[a, b]$ و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$ ، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $c \in (a, b)$ و $f'(c) = 0$ است.» با شکستن شرط قضیه رول، به قضیه مقدار میانگین می‌رسیم: «اگر $f \in C[a, b]$ و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $c \in (a, b)$ به‌طوری‌که $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ». در اینجا با شکستن شرط $f(a) = f(b)$ در قضیه رول به این نتیجه رسیدیم. در نهایت به این فکر می‌افتیم که چه می‌توان گفت اگر مخرج کسر، تابع دلخواه g باشد؟ پاسخ را می‌توان در قضیه لاگرانژ جستجو کرد: «اگر $f, g \in C[a, b]$ و در (a, b) مشتق‌پذیر باشند و فرض کنیم که به‌ازای هر $x \in (a, b)$ و $g'(x) \neq 0$ ، $g(a) \neq g(b)$ ، آنگاه حداقل نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ » [۹].

۵.۳. تعمیم یا حالت خاص؟. در استفاده از راهیاب «حالت خاص» در حل بعضی مسائل ریاضی، ما معمولاً مسئله را در حالت خاص‌تر حل می‌کنیم و سپس حل مسئله اصلی را در آن جستجو می‌کنیم. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا حل مسئله با راهبرد حالت خاص همیشه راه حل را آسان می‌کند؟ در اینجا توجه‌مان را به گفته بعضی ریاضی‌دانان معطوف می‌کنیم: «بیایید ببینیم آیا می‌توان مسئله کلی‌تری مطرح کرد که شامل مسئله اصلی باشد و حل آن نیز آسان‌تر باشد؟» (لایب‌نیز^۲ به نقل از پولیا^۳) [۵].

^۱Breaking condition and geometric evolution ^۲Leibnitz ^۳Polya

«گاهی اوقات حل مسئله کلی‌تر از این که مسئله خاصی را مستقیم حل کنیم ساده‌تر است.» (دیریکله و ددکیند^۱ به نقل از پولیا) [۵].

ممکن است حل مسئله کلی‌تر آسان باشد؛ این گفته محال‌نما به نظر می‌رسد، در اینجا با یک مثال نشان می‌دهیم که دیگر در نظر ما محال نمی‌آید [۲]. به مسئله زیر توجه کنید: «اگر A و B نقاط ثابت روی دایره‌ی مفروض باشند و xy قطر همان دایره باشد، مکان هندسی نقاط تلاقی AX و BY را تعیین کنید (AB قطر نیست).» حل این مسئله در این حالت مشکل است. حال اگر مسئله را به شکل کلی زیر بیان کنیم اثبات آن بسی راحت‌تر از مسئله اصلی، که حالت خاصی از آن است می‌باشد: اگر A و B نقاط ثابت در نظر گرفته شده روی دایره مفروض باشند و XY وتر قابل حرکت روی همان دایره باشد، آنگاه مکان هندسی تلاقی خطوط AX و BY یک دایره است. (AB و XY در طول، نامساوی هستند) [۴].



اثبات این مسئله با رسم وترهای XY و $X'Y'$ و استفاده از تشابه مثلث‌ها امکان‌پذیر می‌باشد.

۶.۳. قضیه فیثاغورث. در ابتدا قضیه فیثاغورث (۵۰۰ سال قبل از میلاد) به تمام مثلث‌های درون صفحه تعمیم داده شد و تعمیم آن توسط پاپوس^۲ (۳۰۰ سال قبل از میلاد) بیان شد و بسط آن به فضای سه بعدی توسط دکارت (۱۶۱۹) انجام گرفت. شاگردان فیثاغورث یافتند که سه عدد

^۱Dirichlet & Dedekind ^۲Papus

صحیح را می‌توان یافت به‌طوری‌که $z^2 = x^2 + y^2$. سپس ریاضی‌دانان به دنبال سه‌تایی از اعدادی بودند که $z^3 = x^3 + y^3$ و چیزی نیافتند و فرما بیان کرد که هیچ سه‌تایی از اعداد طبیعی نیست که در معادله $z^n = x^n + y^n$ ($n > 2$) صدق کند؛ (قضیه آخر فرما^۱). (او در زیرتصویری از علم اعداد دیوفانت^۲ نوشت که اثبات جالبی کشف کرده‌ام ولی جای کافی برای نوشتن ندارم.) در طول ۳۵۸ سال، ریاضی‌دانان تلاش بسیاری برای اثبات آن کردند و قضیه بخش‌پذیری اعداد صحیح، در ارتباط با قضیه فرما به وجود آمد که برای جبر مدرن ضروری است. در نهایت در سال ۱۹۹۵ اندرو ویلز^۳ در مقاله‌ای ۱۳۰ صفحه‌ای قضیه فرما را اثبات کرد [۷]. توجه می‌کنیم که چگونه قضیه فیثاغورث و تعمیم آن چندین قرن ریاضی‌دانان را به کار واداشت و نتایج آن موجب پیدایش شاخه‌های جدیدی در ریاضیات گردید.

۴. نتیجه‌گیری

در آموزش ریاضیات، همواره سعی بر آن بوده که راهی آسان‌تر و قابل فهم را در حل مسائل، به دانش‌آموزان ارائه دهیم. به‌طور کلی اگر به خوبی روش حل‌های موفق و کاربردی را برای یک مسئله شناسایی کنیم و فکر دانش‌آموزان را به مسائل مشابه آن، با فرضیات کمتر سوق دهیم و این پرسش را مطرح کنیم که آیا مسئله داده شده قابل تعمیم است؟ یا می‌توان مسئله را در حالت عمومی‌تر حل نمود؟ آنگاه آن‌ها را با مسئله جدیدی مواجه کرده‌ایم و به این طریق یک مسئله ساده و چالش برانگیز برای دانش‌آموزان به وجود آورده‌ایم که موجب ایجاد تفکر ریاضی در آن‌ها می‌شود. تعمیم و فکر تعمیم دادن یک مسئله و حل آن، همواره در ریاضیات وجود داشته است، به‌طوری‌که تاریخ ریاضیات و بسیاری از شاخه‌های ریاضی چیزی جز تعمیم‌های متوالی و ایده‌های تعمیم دادن مسئله و نتایج نمی‌باشد.

مراجع

- [۱] ممتحن، احسان. نتایج باور نکردنی در ریاضیات: گزیده مقالات و گفتگوهای همگانی امیدعلی شهنی کرمزاده. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۰.
- [۲] پولیا، جورج. چگونه مسئله حل کنیم؟. ترجمه احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ نهم، ۱۳۸۸.
- [3] M. De Villirs, A Hexagon result and its generalization via proof, TMME 4 no. 2, (2007) 188.

^۱Fermat's last Theorem ^۲Diofant ^۳Andrew Wiles

- [4] M. De Villirs, Solving a locus problem via generalization, Published in Reflection, *Georgia Council of teachers of mathematics*, (2008) 20-21.
- [5] M. De Villirs, M. Garner, Problem solving and proving via generalization, *Learning and teaching mathematics*, no. 5, (2008) 19-25.
- [6] M. A. Mariotti, Proof and proving in mathematics education, *Handbook of research in the Psychology of Mathematics Education*, (2006) 173-204.
- [7] G. Miclaus, About generalization in mathematics, *Creative Math*, (2005) 117-120.
- [8] M. Mitchelmore, C. The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge, *EARCOME 2002 proceedings* 1, plenary and regular lectures, (2002) 157-167.
- [9] J. B. Ramundo de Sampaio, S. Yuan, J. Y. Yuan, Generalization: One technique of computational and applied mathematical methodology, *Applied Mathematics and Computation* 200, (2008) 574-582.
- [10] A. Sheonfeld, Mathematical Problem Solving, Published by Academic press, 1985.
- [11] I. M. Yaglom, Geometric Transformation II, Translated from the Russian by Allen Shelds, The L. W singer Company New Mathematical Library, 1968.
- [12] R. Yilmaz, Z. Argun, M. O. Keskin, What is the role of visualization in generalization processes: The case of preservice secondary teachers, *humanity and social science journal* 4(2), (2009) 130-137.

مارال روئین: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Maral.rooien@gmail.com

رستم محمدیان: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Mohamadian_R@scu.ac.ir

نوراله نژاد صادقی: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Sadeghi_n@scu.ac.ir

یادداشتی بر مجموعه‌های حدّی در دستگاه‌های دینامیکی

ابوالحسن رزمی‌نیا

تقدیم به برادرم کامبیز که ذهن خلاقش به روی همه زمینه‌ها همواره باز است.

چکیده

دستگاه‌های دینامیکی به عنوان یکی از مباحث مشترک در حوزه ریاضیات و مهندسی، امروزه به عنوان یکی از میدان‌های باز پژوهشی، توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف داشته است. از جمله ویژگی‌های مهم این دستگاه‌ها، وضعیت رفتار مانای آن‌ها در گذر زمان است که موضوع این نوشتار است. ما وضعیت حالت ماندگار این دستگاه‌ها را در چارچوب مجموعه‌های حدّی صورت‌بندی می‌کنیم. مجموعه‌های حدّی رفتار حالت مانای دستگاه‌های خطی یا غیرخطی را نشان می‌دهند و عمده تحقیقات، روی این بخش از رفتار دستگاه‌های فیزیکی (در مقابل رفتار گذرا) تمرکز یافته است. چهار نوع مجموعه حدّی عبارت‌اند از: نقطه تعادل، رفتار تناوبی، رفتار شبه‌تناوبی و آشوب. در این مقاله هر یک از این چهار نوع مجموعه را از دید فضای حالت، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. سرآغاز

مطالعه دستگاه‌های دینامیکی به سال‌های بسیار دور بر می‌گردد، اما طی چهار دهه اخیر که مطالعات جدی و گسترده‌ای در زمینه آشوب و کاربردهای آن انجام گرفته، این مبحث پررنگ‌تر از گذشته در جامعه علمی ظاهر گشته است. در آغاز، پدیده آشوب به عنوان یک مفهوم کاملاً ریاضی

عبارات و کلمات کلیدی. دستگاه دینامیکی، مجموعه‌های حدّی، آشوب.

در نظر گرفته می‌شد و یا در دستگاه‌های فیزیکی، بسیاری از رفتارهایی که امروزه آشوبی بودن آنها ثابت شده است، به‌صورت نوفه‌ها و سیگنال‌های ناخواسته تصادفی دیده و رفتارها یا ویژگی‌های نامطلوبی شناخته می‌شدند. متعاقب کارهایی که توسط لورنتس^۱، فایگن‌باوم^۲، اسمیل^۳ و مای^۴ انجام شد، مطالعات وسیعی در این حوزه به‌ویژه از نوع شبیه‌سازی صورت گرفت که به‌عنوان نمونه، کارهایی که یوندا^۵ در مهندسی برق انجام داد، نشان داد که پدیده آشوب برخلاف مشاهدات اولیه، یک پدیده قطعی^۶ است که در بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی با ماهیت غیرخطی می‌تواند رخ دهد. این فقط نمونه‌ای از صدها پیشرفتی بود که در مطالعه کیفی دستگاه‌های دینامیکی شکل گرفته است. همه داستان دستگاه‌های دینامیکی در سالهای ۱۹۶۰ تحت تأثیر کارهای موزر^۷ و اسمیل در ایالات متحده، پشوتو^۸ در برزیل و کولموگروف^۹، آرنولد^{۱۰} و سینای^{۱۱} در اتحاد جماهیر شوروی، به‌کلی دگرگون شد. روش‌های توپولوژی دیفرانسیلی، افراد میرزی همچون اسمیل و پشوتو و تابعین آن‌ها را قادر به درک ماهیت رفتار آشوبی در دسته وسیعی از دستگاه‌های دینامیکی موسوم به دستگاه‌های هذلولوی نمود. کولموگروف، آرنولد و موزر با استفاده از ایده‌ای مرکب از روش‌های هندسی و روش‌های آنالیزی سنگین، توانستند نخستین گام تحلیلی مهم را با توسعه نظریه معروف KAM بردارند. نظریه ارگودیک هموار، دینامیک‌های توپولوژیکی، مکانیک همیلتونی، و مطالعه هندسی و کیفی معادلات دیفرانسیل، همگی مولود تلاش‌هایی بود که طی شناخت ساختار دستگاه‌های دینامیکی توسط دانشمندان صورت می‌گرفت [۶].

ساختار این نوشتار به قرار زیر است: در بخش ۲ انواع دستگاه‌های دینامیکی خودگردان و غیرخودگردان و برخی ویژگی‌های مهم آن‌ها را به‌عنوان پیش‌نیاز، مرور خواهیم کرد. در بخش ۳ بعضی از نیازهای اولیه در قالب تعاریف و نکاتی در زمینه مجموعه‌های حدی بیان خواهد شد. نقطه تعادل به‌عنوان اولین مجموعه حدی در بخش ۴ معرفی خواهد شد. بخش ۵، به بحثی مختصر درباره دومین مجموعه حدی یعنی جواب‌های متناوب تخصیص یافته است. سومین و چهارمین مجموعه‌های حدی با نام‌های جواب‌های شبه‌متناوب و آشوب به‌ترتیب در بخش‌های ۶ و ۷ بررسی خواهند شد که احتمالاً پیچیده‌ترین ساختار مجموعه‌های حدی را در بین انواع چهارگانه مجموعه‌های حدی دارا می‌باشند.

^۱Lorenz ^۲Figenbaum ^۳Smale ^۴May ^۵Ueda ^۶Deterministic ^۷Moser ^۸Peixoto

^۹Kolmogrov ^{۱۰}Arnold ^{۱۱}Sinai

۲. انواع دستگاه‌های دینامیکی مورد مطالعه

معادلات دیفرانسیل معمولی یکی از اساسی‌ترین ابزارهای تحلیل دستگاه‌های فیزیکی به‌شمار می‌رود. در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل از مرتبه r به‌صورت ضمنی زیر بیان می‌شود:

$$(1.2) \quad F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) = 0; \quad y \in \mathbb{R}^m$$

که در آن، F روی یک مجموعه باز از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m(r+1)}$ تعریف شده و مقداری در $\mathbb{R}^m$ را به‌دست می‌دهد. قضیه تابع ضمنی ما را قادر می‌سازد تا m معادله بیان شده در ۱.۲ را (دستکم به‌صورت موضعی) به‌شکل یک معادله دیفرانسیل عادی صریح مانند زیر بنویسیم به این شرط که ژاکوبین میدان برداری F غیرصفر باشد:

$$(2.2) \quad y^{(r)} = G(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})$$

تعریف ۱.۲. (جواب) یک جواب برای معادله $\dot{x} = f(t, x)$ با شرط آغازی $x(t_0) = x_0$ در واقع هر تابع پیوسته مانند ϕ است که روی مجموعه ناتهی $I(t_0, x_0) \subset I \subset \mathbb{R}$ به همراه t_0 با خصوصیات زیر تعریف می‌گردد:

$$(3.2) \quad \phi : I(t_0, x_0) \subset I \subset \mathbb{R} \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

$$(4.2) \quad t \mapsto \phi(t; t_0, x_0)$$

جواب با نماد $\phi(t)$ نشان داده می‌شود و به‌ازای هر $t \in I(t_0, x_0)$ در معادله $\dot{x} = f(t, x)$ صدق می‌کند و $\phi(t_0) = x_0$.

در این مقاله، ما دستگاه‌های دینامیکی پیوسته‌زمان را در قالب دو رده کلی بحث می‌کنیم: دستگاه‌های دینامیکی خودگردان^۱ و غیرخودگردان^۲. در اینجا فقط به معرفی سریعی از مفاهیم می‌پردازیم؛ برای مطالعه بیشتر به [۷] و [۵] رجوع کنید. در زیر برای سادگی، از نمادهایی استفاده می‌کنیم که در نوشتجات مهندسی بیشتر کاربرد دارند.

تعریف ۲.۲. یک دستگاه دینامیکی خودگردان با معادله $\dot{x} = f(x)$ همراه با شرط آغازی $x(t_0) = x_0$ تعریف می‌شود که در آن، $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ نگاشت

$$(5.2) \quad \phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

^۱autonomous ^۲nonautonomous

که بر اساس رابطه $x(t) = \phi_t(x(t_0))$ به جواب این معادله نسبت داده می‌شود، شار یا جریان این دستگاه دینامیکی نام دارد و در دو ویژگی $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$ و $\phi_0 = x$ صدق می‌کند. همچنین مجموعه $\{\phi_t(x_0) : -\infty < t < \infty\}$ را مسیر^۱ گذرنده از نقطه x_0 می‌خوانیم.

در این تعریف از آنجا که میدان برداری $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وابسته به زمان نیست، همواره می‌توان زمان آغازی را $t_0 = 0$ در نظر گرفت. علاوه بر این، اگر میدان برداری خطی باشد، دستگاه دینامیکی را خطی و در غیر این صورت، غیرخطی می‌نامیم.

تعریف ۳.۲. یک دستگاه دینامیکی غیرخودگردان با معادله $\dot{x} = f(t, x)$ همراه با شرط آغازی $x(t_0) = x_0$ تعریف می‌شود که در آن، $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ نگاشت

$$\phi_t : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (۶.۲)$$

که بر اساس رابطه $x(t) = \phi_t(t_0, x(t_0))$ به جواب این معادله نسبت داده می‌شود، شار یا جریان این دستگاه دینامیکی نام دارد.

در دستگاه‌های غیرخودگردان، میدان برداری به زمان وابسته است و بنابراین زمان آغازی را نمی‌توان در حالت کلی صفر در نظر گرفت. همچنین دستگاه غیرخودگردان را خطی می‌گوییم هرگاه میدان برداری نسبت به x خطی باشد؛ در غیر این صورت، دستگاه را غیرخطی می‌خوانیم.

تعریف ۴.۲. دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ را متناوب گوییم هرگاه وجود داشته باشد یک $T > 0$ به طوری که برای همه x ها و t ها داشته باشیم

$$f(t, x) = f(t + T, x) \quad (۷.۲)$$

کوچکترین $T > 0$ ممکن را دوره تناوب دستگاه متناوب می‌نامیم.

به دیگر سخن، جواب $\phi_t(t_0, x_0)$ را متناوب با دوره تناوب T گوییم هرگاه دامنه تغییرات زمان برابر $\mathbb{R}$ بوده و عددی حقیقی مانند $\nu > 0$ وجود داشته باشد که برای همه زمان‌های t داشته باشیم: $\phi_{t+\nu}(t_0, x_0) = \phi_t(t_0, x_0)$. همچنین کوچکترین مقدار برای چنین $\nu > 0$ هایی را با T نشان می‌دهیم و آن را دوره تناوب می‌نامیم. در این صورت، مدار متناظر را مدار متناوب با دوره تناوب T -متناوب می‌نامیم.

^۱trajectory

تعریف ۵.۲. منحنی γ را یک مدار بسته^۱ می‌نامیم اگر γ یک مدار منحنی ژردان^۲ باشد. منظور از منحنی ژردان، منحنی است که همسانریخت با یک دایره باشد.

بدین ترتیب هر مدار متناظر با یک جواب T -متناوب، یک مدار بسته است. همچنین برای دستگاه‌های خودگردان، عکس این نکته نیز صحیح است.

ملاحظه ۶.۲. در این نوشتار، همه دستگاه‌های دینامیکی غیرخودگردان را متناوب فرض می‌کنیم مگر این که به‌طور صریح غیر از این گفته شود.

یکی از نکات مهم در مطالعه دستگاه‌های دینامیکی، ارتباط تنگاتنگی است که بین دستگاه‌های خودگردان و غیرخودگردان وجود دارد. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ با دوره T متناوب باشد. حال متغیر جدیدی به صورت $\theta = 2\pi t/T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت می‌توان فرم فضای حالت دستگاه غیرخودگردان مذکور را به شکل زیر نوشت:

$$(۸.۲) \quad \dot{x} = f(\theta T/(2\pi), x); \quad x(t_0) = x_0.$$

$$(۹.۲) \quad \dot{\theta} = 2\pi/T; \quad \theta(t_0) = 2\pi t_0/T$$

به روشنی دیده می‌شود که با این تبدیل، می‌توان دستگاه غیرخودگردان از مرتبه n با نگاشتی به یک دستگاه خودگردان از مرتبه $n+1$ ، تبدیل نمود. توجه کنید که در معادله ۸.۲ چون f نسبت به زمان، با دوره T متناوب است، دستگاه تبدیل‌شده نیز نسبت به θ با دوره 2π متناوب است. بنابراین فضای حالت اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ ، با این تبدیل، به فضای حالت استوانه‌ای $\mathbb{R}^n \times S^1$ تبدیل می‌شود که در آن، $S^1 = [0, 2\pi)$ مبین یک دایره است. بدین ترتیب با این تبدیل، همه ایده‌هایی که در مطالعه دستگاه‌های خودگردان وجود دارد را می‌توان روی دستگاه‌های غیرخودگردان متناوب نیز اعمال کرد.

۳. پیش‌نیازهای اساسی

به زبانی ساده، منظور از حالت مانای یک دستگاه دینامیکی، رفتار آن دستگاه برای $t \rightarrow \infty$ است. در واقع نوعی از حالت مانای یک دستگاه برای ما محل توجه است که کراندار باشد. به

^۱closed orbit ^۲Jordan curve

عبارت دیگر، رفتار دستگاه در $t \rightarrow \infty$ که به صورت بی‌کران بزرگ می‌شود به عنوان حالت مانا در نظر نمی‌گیریم. همچنین تفاضل یک جواب از دستگاه دینامیکی و حالت مانای آن جواب را حالت گذرا می‌نامیم.

تعریف ۱.۳. نقطه‌ای مانند y را یک نقطه ω -حدی از x می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی U از y ، شار $\phi_t(x)$ برای $t \rightarrow \infty$ به صورت مکرر به این همسایگی (U) وارد شود. به عبارت دیگر، یک دنباله از زمان مانند $\{t_n\}$ چنان موجود باشد که

$$(۱.۳) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$$

مفهوم شهودی این تعریف این است که منحنی جواب گذرنده از نقطه x با گذشت زمان سرانجام به نقطه y میل کند.^۱

تعریف ۲.۳. مجموعه $\Omega(x)$ مرکب از همه نقاط ω -حدی از x را مجموعه ω -حدی از x می‌نامیم. چنان‌که از نماد بر می‌آید، مجموعه $\Omega(x)$ به x وابسته است.

تعریف ۳.۳. یک مجموعه ω -حدی مانند Ω را جاذب^۲ گوئیم اگر یک همسایگی باز مانند U از Ω چنان وجود داشته باشد که برای هر $x \in U$ داشته باشیم $\Omega(x) = \Omega$

بنابراین در حالت کلی یک مجموعه حدی در $\mathbb{R}^n$ بسته است و تحت جریان شار جواب، ناورداست. در واقع همین مجموعه‌های حدی جاذب هستند که از نظر کاربردی محل توجه ویژه هستند، زیرا مجموعه‌های حدی غیرجاذب را نمی‌توان مستقیماً در شبیه سازی‌ها یا دستگاه‌های فیزیکی مشاهده نمود.

تعریف ۴.۳. پهنه جذب^۳ یک مجموعه مانند L که با نماد B_L نشان داده می‌شود را به صورت اجتماع همه همسایگی‌هایی مانند U (گفته شده ۳.۳) تعریف می‌کنیم. در واقع B_L مجموعه همه شرایط آغازی است که در نهایت به L همگرا می‌شوند.

ذکر این نکته خالی از فایده نیست که تعریف مجموعه حدی برای یک دستگاه غیرخودگردان در حالت کلی بی‌معنی است مگر این که بتوانیم این دستگاه را با تبدیلاتی به دستگاه خودگردانی تبدیل^۱ چنان‌که بعداً خواهیم دید، هر نقطه تعادل مجموعه ω و α حدی خودش است

^۲ Attracting ^۳ Basin of attraction

نماییم. گفتنی است در مقابل نقاط w -حدی، نقاط α -حدی نیز قابل تعریف است که در واقع نقاط حدی زمان معکوس هستند. به زبانی گویاتر، این نقاط همانند نقاط w -حدی هستند جز این که در تعریف آن باید داشته باشیم $t \rightarrow -\infty$. بدین ترتیب مجموعه همه نقاط α -حدی از نقطه x را با نماد $A(x)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۳. مجموعه $J \subset I$ مفروض است. یک مجموعه فشرده ناتهی مانند $A \subset X$ را J -ناورد^۱ گوییم هرگاه

$$\forall t_0 \in J, \forall x_0 \in I(t_0, x_0) : \phi_t(t_0, x_0) \in A \quad (۲.۳)$$

ملاحظه ۶.۳. در پایان این قسمت چند نکته مهم را فهرست وار بیان می‌کنیم:

- (آ) اگر x و z روی یک منحنی جواب باشند، آنگاه $\Omega(x) = \Omega(z)$ و $A(x) = A(z)$.
- (ب) یک مجموعه ناوردا^۱ بسته، به‌ویژه یک مجموعه حدی، مجموعه‌های w -حدی و α -حدی هر نقطه خودش را شامل می‌شود.
- (پ) برای هر لحظه مانند t داریم $\phi_t(x) = \phi_t(z)$ اگر و فقط اگر $x = z$. بیان شهودی این نکته این است که یک مسیر از یک دستگاه خودگردان از روی شرایط آغازی به‌صورتی یکتا قابل محاسبه است و مسیرهای مجزا هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند.

چنان‌که از نظریه دستگاه‌های خطی به‌خاطر داریم، برای یک دستگاه خطی پایدار مجانبی، تنها یک مجموعه حدی وجود دارد [۳]. علاوه بر این، پهنه جذب یک چنین مجموعه حدی نیز تمام فضای حالت است که این بیانگر این نکته است که پایداری مجانبی برای دستگاه خطی، سرتاسری است. به عبارت دیگر، حالت مانا برای این دسته دستگاه‌ها، مستقل از شرایط آغازی است. اما برای دستگاه‌های غیرخطی این ویژگی وجود ندارد و همین انگیزه اصلی نگارش این مقاله است. در واقع وجود مجموعه‌های حدی مختلف، یکی از وجوه تمایز دستگاه‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. به عبارت دیگر، در یک دستگاه غیرخطی می‌توان چندین مجموعه حدی با نواحی جذب گوناگونی یافت که محل شرایط آغازی در فضای حالت، معین‌کننده ناحیه جذب نهایی است. در حالی که برای دستگاه خطی چنین وضعی وجود ندارد. برای دستگاه‌های غیرخطی نوعاً چهار نوع مجموعه حدی قابل مشاهده است که در این مقاله به بررسی اجمالی هر یک می‌پردازیم. نحوه ارائه این مجموعه‌ها، به‌ترتیب از ساده به پیچیده خواهد بود. البته برخی از این مفاهیم در [۱] بحث شده است.

^۱ J -invariant

۴. نقطه تعادل

تعریف ۱.۴. برای دستگاه دینامیکی خودگردان $\dot{x} = f(x)$ نقطه x^* را یک نقطه تعادل^۱ گوئیم اگر در هر زمان داشته باشیم $\dot{x}^* = \phi_t(x^*)$.

این تعریف به زبان شهودی می‌گوید با شروع از نقطه تعادل، همواره در همان نقطه باقی خواهیم ماند که این خود بیانگر عدم تغییرات زمانی این نقطه می‌باشد یعنی: $\dot{x}^* = 0$. بنابراین برای یافتن نقطه تعادل دستگاه مزبور کافی است معادله جبری $f(x) = 0$ را حل کنیم^۲. علاوه بر این، در حالت کلی نقطه تعادل با این تعریف نمی‌تواند به صورت یک مجموعه حدی برای دستگاه‌های غیرخودگردان در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر، برای دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ لزوماً نقطه تعادل از حل معادله $f(t, x) = 0$ به دست نمی‌آید [۹].

برای این مجموعه حدی خاص (یعنی نقطه تعادل)، طیف فرکانسی فقط شامل یک اسپایک در فرکانس صفر است. به عبارت دیگر، از آنجا که این نقطه یک جواب ثابت است، بنابراین از نظر فرکانسی فقط دارای مؤلفه DC بوده و در دیگر فرکانس‌ها، مقدار نداریم. همچنین مجموعه حدی متناظر با نقطه تعادل، به روشنی خود نقطه تعادل است. برای دستگاه $\dot{x} = f(x)$ اگر x^* نقطه تعادل باشد، این نقطه تعادل به یکی از اشکال زیر خواهد بود:

هذلولوی: نقطه تعادل x^* را هذلولوی گوئیم اگر ماتریس ژاکوبین میدان برداری f در این نقطه، دارای مقادیر ویژه موهومی خالص نباشد.

غیرهذلولوی: نقطه تعادل x^* را غیرهذلولوی گوئیم اگر ماتریس ژاکوبین میدان برداری f در این نقطه، دارای حداقل یک مقدار ویژه موهومی خالص باشد.

این دسته‌بندی برای دستگاه‌های خودگردان بسیار مهم و کاربردی است [۲].

۵. جواب‌های متناوب

جواب‌های متناوب را برای دستگاه‌های خودگردان و غیرخودگردان به صورت جداگانه تعریف می‌کنیم و در مورد هر کدام از این دو تعریف، به صورت اجمالی بحث خواهیم کرد.

^۱ البته می‌توان مثال‌های ویژه‌ای ارائه کرد که جواب‌های معادله $f(x) = 0$ ، نماینده نقطه تعادل نباشند. ولی از آنجا که این موارد در عمل به ندرت رخ می‌دهند و بیشتر جنبه آموزشی دارند از بررسی آن‌ها چشم‌پوشی کرده و فرض می‌کنیم همه جواب‌های معادله جبری بیانگر نقاط تعادل دستگاه است.

^۲equilibrium

۱.۵. دستگاه‌های خودگردان.

تعریف ۱.۵. برای یک دستگاه خودگردان، جواب $\phi_t(x^*)$ را متناوب گوییم هرگاه برای همه زمان‌ها و یک $T > 0$ کمینه، داشته باشیم

$$(۱.۵) \quad \phi_t(x^*) = \phi_{t+T}(x^*)$$

توجه به این نکته ضروری است که چون هر نقطه روی مسیر متناوب (در فضای حالت) خود جزء جواب است، نقطه x^* در تعریف فوق یکتا نیست. تغییر این x^* به تغییر در مبدا زمان می‌انجامد. این مسئله را می‌توان به‌سادگی از روی نمودار فضای حالت به‌صورت شهودی درک کرد.

تعریف ۲.۵. یک جواب متناوب را منفرد^۱ گوییم اگر بتوان یک همسایگی از آن را چنان یافت که آن همسایگی شامل هیچ جواب متناوب دیگر نباشد. برای دستگاه‌های دینامیکی خودگردان، یک جواب متناوب منفرد را یک چرخه حدی^۲ می‌نامند.

طیف فرکانسی یک چرخه حدی به‌عنوان یک جواب متناوب از یک دستگاه دینامیکی خودگردان شامل اسپایکی^۳ در فرکانس صفر (مؤلفه DC) و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح فرکانس پایه، با نماد $f := T^{-1}$ ، است. البته برخی از این مؤلفه‌های فرکانسی می‌توانند دارای اندازه دامنه صفر باشند^۴.

مجموعه حدی متناظر با یک چرخه حدی در واقع یک منحنی بسته است که توسط شار یا جریان مسیری $\phi_t(x^*)$ روی یک دوره تناوب پیموده می‌شود. این مجموعه حدی وابریخت با S^1 است و البته متداول است که چرخه‌های حدی را با نام دایره‌ها نیز بخوانیم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۵. معادله وندر پل^۵ به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

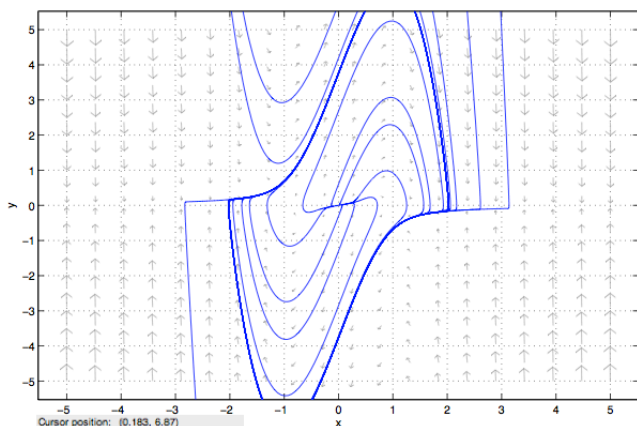
$$(۲.۵) \quad \dot{x} = y$$

$$(۳.۵) \quad \dot{y} = \epsilon(1 - x^2)y - x$$

^۴ این مسئله ممکن است برای خود فرکانس پایه نیز رخ دهد، یعنی اندازه دامنه اسپایک در فرکانس پایه صفر شود. نتیجه فوری این نکته این است که فرکانس یک شکل موج متناوب را نمی‌توان به‌تنهایی از روی اولین فرکانس غیرصفر آن محاسبه کرد؛ فاصله فرکانسی اسپایک‌های غیرصفر باقیمانده را نیز باید بررسی کرد.

^۱isolated ^۲limit cycle ^۳spike ^۵Van der Pol

نمودار فضای فاز آن در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱: نمودار فضای فاز دستگاه ون در پل

در مطالعه دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی، عموماً با دو دسته کلی مدار مواجه می‌شویم:

(۱) مدارهای بسته که در واقع تعمیمی از نقاط تعادل هستند.

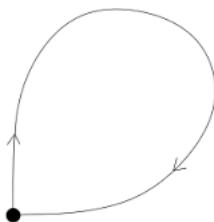
(۲) مدارهای هموکلینیک^۱ و هتروکلینیک^۲ که نقاط تعادل را به هم وصل می‌کنند.^۳

در این زیربخش، چرخه حدی را به عنوان یک مجموعه حدی برای دستگاه‌های خودگردان معرفی کردیم. دیدیم یک مدار بسته منفرد است. در ادامه کمی بیشتر در مدارها تعمق می‌کنیم.

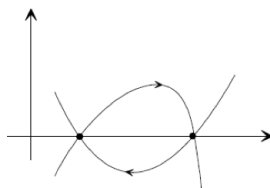
تعریف ۴.۵. یک مدار هموکلینیک مداری است که یک نقطه تعادل را به خودش وصل می‌کند. همچنین مداری را که دو نقطه تعادل را به هم وصل کند، هتروکلینیک می‌گوییم. نمونه‌هایی از این مدارها را می‌توان در شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده نمود.

۲.۵. دستگاه‌های غیرخودگردان. یک دستگاه غیرخودگردان متناوب را می‌توان با تبدیلی که پیش از این مطرح شد، به یک دستگاه خودگردان بازنویسی کرد. بنابراین می‌توان مطالب زیربخش قبل را مستقیماً به این دسته دستگاه‌ها اعمال نمود. با وجود این، از آنجا که خود این گونه دستگاه‌ها^۳ در واقع این دو نوع مدار، مدارهای خاصی هستند که به بحث نقاط تعادل مربوطند.

^۱Homoclinic ^۲Heteroclinic



شکل ۲: نمودار یک مدار هموکلینیک



شکل ۳: نمودار یک مدار هتروکلینیک

به وفور در موارد فیزیکی یافت می‌شوند، بجاست که به‌عنوان یک مورد، به‌صورت مجزا مورد بحث قرار گیرد.

تعریف ۵.۵. $\phi_t(x^*, t_0)$ را یک جواب متناوب از یک دستگاه غیرخودگردان متناوب مانند $\dot{x} = f(t, x)$ می‌نامیم هرگاه برای همه زمان‌ها داشته باشیم

$$(۴.۵) \quad \phi_t(t_0, x^*) = \phi_{t+T}(t_0, x^*)$$

که در آن، $T > 0$ دوره تناوب کمینه است.

هرگاه با تبدیلی که در بخش قبل معرفی شد، یک دستگاه غیرخودگردان متناوب با دوره تناوب کمینه T_f به یک دستگاه خودگردان تبدیل شود، جواب متناوب از این دستگاه، به یک چرخه حدی در فضای حالت استوانه‌ای تبدیل می‌شود که دوره تناوب این چرخه حدی ضربی صحیح از T_f خواهد بود، یعنی $T = KT_f$. در این صورت جواب $\phi_t(t_0, x^*)$ را یک جواب تناوب K -می‌نامیم.

یک جواب تناوب-۱ را اغلب جواب پایه می‌گوییم و اگر $K > 1$ از یک جواب تناوب- K با نام زیرهارمونیک مرتبه k م یاد می‌کنیم^۱.

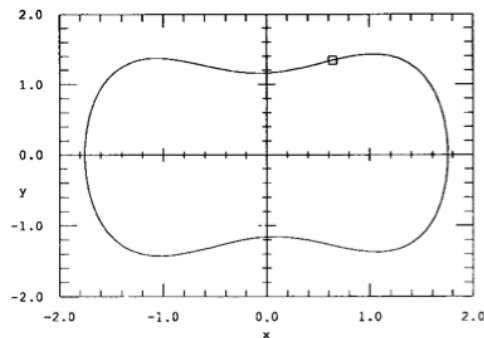
طیف فرکانسی هر مؤلفه از یک جواب تناوب-۱ شامل اسپایکی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح T_f^{-1} است. به همین ترتیب طیف یک زیرهارمونیک مرتبه K شامل اسپایکی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح $(KT_f)^{-1}$ می‌باشد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود هرچه مرتبه زیرهارمونیک بالاتر باشد، مؤلفه‌های فرکانسی غیرصفر در فواصل کمتری در طیف فرکانسی پخش می‌شوند. البته ممکن است دامنه برخی از مؤلفه‌های فرکانسی در طیف صفر باشد.

مثال ۶.۵. معادله دافینگ به صورت زیر است:

$$\dot{x} = y \quad (۵.۵)$$

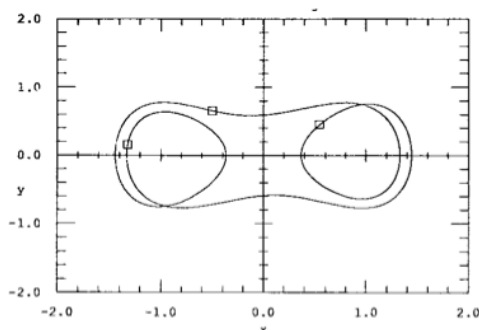
$$\dot{y} = x - x^3 - \epsilon y + \gamma \cos \omega t \quad (۶.۵)$$

نمودار فضای فاز این دستگاه به ازای $\epsilon = 0.15$, $\gamma = 0.3$ و $\omega = 1$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. نمودار دیگری از این دستگاه برای مقادیر $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ و $\omega = 1$ در شکل ۵ آورده شده است.



شکل ۴: نمودار فضای فاز دستگاه دافینگ برای $\epsilon = 0.15$

^۱ این وجه تسمیه با الهام از آنالیز فوریه انجام گرفته است.



شکل ۵: نمودار فضای فاز دستگاه دافینگ برای $\epsilon = 0.22$

توجه کنید که برای یک جواب پایه، x^* منحصر به فرد است. این در واقع نقطه‌ای است روی منحنی جواب متناوب که از $t = t_0$ عبور می‌کند. روی نمودار در شکل ۴ به صورت علامتی نشان داده شده است. در واقع برای یک زیرهارمونیک از مرتبه K که یک x^* داده شده است، تعداد $(K - 1)$ مقدار دیگر به صورت زیر وجود دارند:

$$(7.5) \quad x_j^* = \phi_{t_0 + (j-1)T_f}(t_0, x^*); \quad j = 1, \dots, K$$

که می‌توانند برای شناسایی زیرهارمونیک مورد استفاده قرار بگیرند. به زبانی ساده‌تر، هرکدام از این مقادیر به جابجایی در مبدأ زمان از دوره تناوب پایه T_f می‌انجامد؛ یعنی برای همه زمان‌ها

$$(8.5) \quad \phi_t(t_0, x^*) = \phi_t(t_0 + jT_f, x_j^*); \quad j = 1, \dots, K - 1$$

در شکل ۵ این x_j^* با نشانه‌هایی روی شکل مشخص شده‌اند.

ملاحظه ۷.۵. برای اغلب دستگاه‌های خودگردان مفهوم زیرهارمونیک بی‌معناست چراکه هیچ فرکانس پایه‌ای مانند T_f وجود ندارد. با وجود این، در بحث دوشاخگی تناوب مضاعف^۱، با این دید که می‌توان جواب را دارای دوره تناوبی با مقدار دو برابر جواب اولیه در نظر گرفت، می‌شود این جواب را یک زیرهارمونیک مرتبه دوم در نظر گرفت.

^۱Period-doubling bifurcation

۶. جواب‌های شبه‌متناوب

تعریف ۱.۶. یک تابع شبه‌متناوب، تابعی است که می‌توان آن را به صورت مجموع شمارایی از توابع متناوبی نوشت:

$$(۱.۶) \quad x(t) = \sum_i h_i(t)$$

که در آن، h_i دارای دوره تناوب کمینه T_i و فرکانس $f_i = T_i^{-1}$ است. علاوه بر این، یک مجموع متناهی از فرکانس‌های پایه مانند $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\}$ با ویژگی‌های زیر بایستی وجود داشته باشد:

(۱) این مجموعه مستقل خطی است.

(۲) برای هر i (اندیس توابع تشکیل دهنده مجموع)، وجود داشته باشد اعداد صحیحی مانند $\{k_i, \dots, k_p\}$ به طوری که $f_i = |\sum_{j=1}^p k_j \hat{f}_j|$.

به معنای شهودی، یک شکل موج شبه‌متناوب در واقع مجموعی از شکل موج‌های متناوب است که هر کدام از جمعوندها، دارای فرکانسی است که از مجموع و تفاضل یک مجموعه متناهی از فرکانس‌های پایه‌ای ساخته شده است.

تعریف ۲.۶. یک جواب شبه‌متناوب با تعداد فرکانس پایه p را p -متناوب می‌گوییم.

مثال ۳.۶. یک بار دیگر معادله وندر پل را در نظر بگیرید. چنان‌که دیدیم این دستگاه دینامیکی دارای یک چرخه حدی با دوره تناوب T_1 یا فرکانس $f_1 = T_1^{-1}$ است که به پارامترهای دستگاه بستگی دارد. حال با اضافه کردن یک جمله سینوسی زمانی، خواهیم داشت

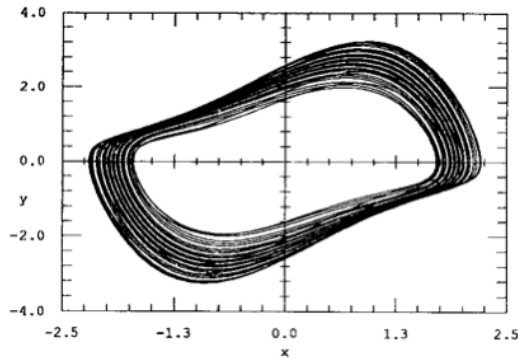
$$(۲.۶) \quad \dot{x} = y$$

$$(۳.۶) \quad \dot{y} = (1 - x^2)y - x + A \cos 2\pi f_2 t$$

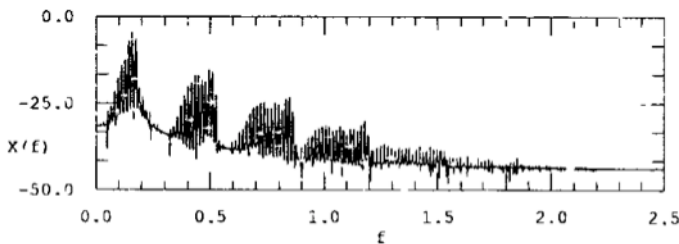
جواب این دستگاه جدید می‌تواند با برخی از مضارب دوره تناوب ورودی T_2 همزمان شود که به یک زیرهارمونیک منجر می‌شود.^۱ علاوه بر این، با فرض نامتناسب بودن^۲ فرکانس‌های f_1 و f_2 می‌توان به رفتاری شبه‌متناوب دست یافت. نمونه‌ای از نمودار فضای حالت و طیف فرکانسی این معادله تحریک شده وندر پل در شکل ۶ و ۷ آورده شده است.

^۱ خواننده آشنا با دستگاه‌های مخابراتی در می‌یابد این مشابه همان است که در حلقه قفل شده فاز رخ می‌دهد.

^۲ incommensurate



شکل ۶: نمودار فضای فاز معادله وندر پل تحریک شده با ورودی سینوسی



شکل ۷: طیف فرکانسی معادله وندر پل تحریک شده با ورودی سینوسی

چنان‌که از نمودار فضای فاز دیده می‌شود، مسیرها به یک منطقه حلقه مانند محدود شده‌اند و به صورت یکنواختی در این محدوده توزیع شده است. البته توجه کنید که همه مسیرهای ۲- متناوب چنین ویژگی ندارند ولی عموماً چنین نمایشی از مسیرها در فضای حالت می‌تواند نشانه‌ای خوب از رفتار ۲-متناوب باشد. همچنین با الهام از ایده مدولاسیون^۱ در دستگاه‌های مخابراتی، می‌توان دید که شکل موج زمانی توابع $x(t)$ و $y(t)$ از معادله وندر پل تحریک شده در دامنه مدوله شده‌اند و از آنجا که محل‌های عبور از صفر روی محور افقی به صورت نامنظمی پخش شده‌اند، می‌توان آن را به صورت مدولاسیون فرکانس نیز در نظر گرفت. با توجه به طیف فرکانسی این دستگاه، مشاهده می‌شود که طیف دستگاه تحریک شده از طیف دستگاه خودگردان به علاوه کنار باندهای توزیع شده‌ای متناظر با یک مدولاسیون نسبتاً ضعیف ناشی از یک جمله سینوسی، تشکیل شده است.

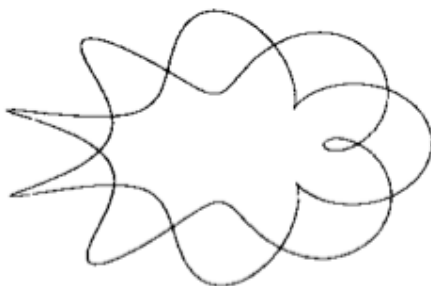
^۱Modulation

رفتار ۲-متناوب در دستگاه‌های خودگردان نیز می‌تواند ظاهر گردد. برای درک این موضوع دو نوسانگر با دوره تناوب نامتناسبی مانند T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. اگر این دو نوسانگر به صورت ضعیفی تزویج شده باشند، به دستگاهی خواهیم رسید که در آن دو فرکانس برای نمایش غالب در دستگاه مرکب، مبارزه می‌کنند که یکی خود را به عنوان فرکانس غالب دستگاه به نمایش بگذارد. اما اگر نوسانگرهای مذکور با یک دوره تناوب قفل شده باشند به طوری که این دوره تناوب نزدیک مضربی صحیح از T_1 و نزدیک مضربی صحیح از T_2 باشد، در این صورت جواب نهایی دستگاه مرکب، متناوب خواهد بود. بدین ترتیب اگر چنین دوره تناوبی وجود نداشته باشد که تولید رفتار متناوب نماید، بایستی منتظر بروز یک رفتار شبه‌متناوب باشیم.

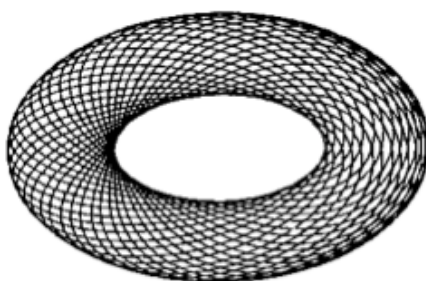
در یک دستگاه خودگردان یک مسیر ۲-متناوب در واقع روی نسخه وابریخت از ۲-چنبره $S^1 \times S^1 = T^2$ قرار می‌گیرد که در آن، S^1 نشان‌دهنده یکی از فرکانس‌های پایه است. از آنجا که مسیرها منحنی‌های تک بعدی هستند و ۲-چنبره یک رویه دو بعدی است، قاعدتاً همه نقاط این رویه نباید توسط منحنی پوشانده شود. با این همه می‌توان نشان داد که به ازای هر نقطه دلخواه روی چنبره، مسیر منحنی همواره به طور مکرر از کنار آن نقطه عبور می‌کند و بنابراین ۲-چنبره یک مجموعه حدی برای رفتار ۲-متناوب خواهد بود^۱.

حال اجازه دهید با نگاهی هندسی ببینیم چرا یک رفتار ۲-متناوب به فرکانس‌های نامتناسب نیازمند است. مسیری را در نظر بگیرید که روی یک چنبره می‌چرخد و در جهت‌های ω_1 با دوره تناوب T_1 و ω_2 با دوره تناوب T_2 دور می‌زند. اگر T_1 و T_2 متناسب باشند، آنگاه اعدادی صحیح مانند r و s وجود دارند به طوری که $rT_1 = sT_2$. این یعنی مسیر مذکور دقیقاً r دور در جهت اول و s دور در جهت دوم در هر ثانیه می‌زند و یک بار کامل منحنی بسته خواهد شد. نتیجه یک چرخه حدی است با دوره تناوب rT_1 . گفتنی است هر قدر زمان اجرای شبیه سازی زیاد باشد باز در شکل منحنی تغییری دیده نمی‌شود. این مسئله در شکل ۸ قابل مشاهده است. اما اگر T_1 و T_2 متناسب نباشند، چنین اعداد صحیح r و s وجود ندارند و مسیر مذکور هیچگاه بسته نخواهد شد و زمان اجرای شبیه سازی هر قدر زیاد باشد، منحنی به صورت چگال تری روی چنبره پخش می‌شود. این مورد در شکل ۹ قابل مشاهده است. مسیرهای شبه‌متناوب با مراتب بالاتر در دستگاه‌های مرتبه بالا رخ می‌دهد. یک جواب شبه‌متناوب با بعد پایه p دارای یک مجموعه حدی است اگر نسخه‌ای وابریخت از یک p -چنبره باشد.

^۱تا اینجا این اولین مثالی است که در آن یک مجموعه حدی یک مسیر تنها نیست. در ادامه بحث با مجموعه‌های حدی عجیب‌تری آشنا خواهیم شد.



شکل ۸: مسیر متناوب برای دوره‌های تناوب متناسب



شکل ۹: مسیر شبه‌متناوب برای دوره‌های تناوب نامتناسب

۷. آشوب

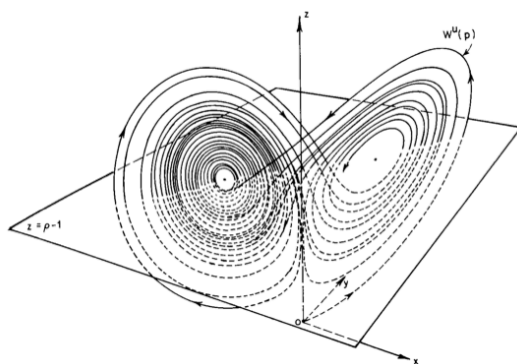
پس از گذشت سال‌ها از ظهور آشوب در دنیای مهندسی و علوم، هنوز تعریفی جامع از آشوب که مورد قبول همگان باشد، ارائه نشده است. ما در اینجا به معرفی آشوب از نگاهی عام می‌پردازیم که نیازهای مدل‌سازی در مهندسی را برآورده می‌کند. در واقع آشوب رفتار مانایی از یک دستگاه دینامیکی است که هیچ‌کدام از سه حالت مانای پیشین نیست. به عبارت دیگر، آشوب رفتار مانای کرانداری از یک دستگاه است که نه نقطه تعادل است، نه متناوب و نه شبه‌متناوب. در این بخش سعی می‌کنیم آشوب را بیشتر با خصوصیات فیزیکی آن تشریح نماییم.

مثال ۱.۷. نمودار فضای حالت دستگاه لورنز با معادله زیر در شکل ۱۰ رسم شده است که در آن،
 $\sigma, \rho, \beta > 0$

$$(۱.۷) \quad \dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$(۲.۷) \quad \dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$(۳.۷) \quad \dot{z} = -\beta z + xy$$



شکل ۱۰: نمودار فضای فاز سه بعدی معادله لورنز

چنان‌که از تصاویر این مثال برمی‌آید، مسیرهای دستگاه در عین کرانداری، نامتناوب هستند. واقعیت این است که از روی تصاویر نمی‌توان تشخیص داد که این رفتار، شبه‌متناوب است یا نه. از روی مثال‌های متنوعی که در [۵] آورده شده، دیده می‌شود یک طیف آشوبی از طیف‌های توابع متناوب و شبه‌متناوب کاملاً متمایز است. در واقع طیف یک سیگنال آشوبی دارای یک ماهیت پیوسته و پهن-باند است. این طیف شبه نویز مشخصه همه دستگاه‌های آشوبناک است. همچنین علاوه بر پهن-باند بودن، معمولاً در طیف یک تابع یا سیگنال آشوبی، اسپایک‌هایی دیده می‌شود که نشان‌دهنده فرکانس‌های غالب در طیف است.

تعریف ۲.۷. شی هندسی در فضای حالت که مسیرهای آشوبناک به آن جذب می‌شوند را یک راباینده غریب^۱ می‌نامیم.

^۱strange attractor

دلایل منطقی مبنی بر این که چرا تعریف یک مجموعه حدی جاذب برای تعریف آشوبناکی کافی نیست، از همان ابتدای مطالعه دستگاه‌های آشوبی مطرح شده است. به عنوان نمونه، مراجع [۴] و [۸] را ببینید. با این همه هنوز تعریفی که مورد اقبال همگن باشد ارائه نشده است. توجه شود نمی‌توان تفاوت جاذب‌ها و مجموعه‌های جذب کننده را نادیده گرفت.

جذب کننده یک دستگاه آشوبناک، به سادگی اشیاء هندسی مانند دایره یا چنبره نیست؛ اگر بخواهیم یک گام پیشتر بگذاریم، باید گفت جذب کننده‌های آشوبی حتی در حالت کلی منیفلد هم نیستند. پیچیدگی این اشیاء هندسی با وارد کردن مجموعه‌های کانتور و ابعاد غیر صحیح، به اوج می‌رسد.

یکی از ویژگی‌های اساسی دستگاه‌های آشوبناک علاوه بر طیف گسترده و مجموعه حدی پیچیده، حساسیت فوق العاده این دسته دستگاه‌ها به شرایط آغازی است. مفهوم این جمله این است: دو شرط اولیه به طور دلخواه نزدیک به هم (اما متمایز) را در نظر بگیرید. مسیرهای آغازشونده از این دو شرط آغازی در زمانی متناهی از هم واگرا می‌شوند به طوری که پس از کوتاه زمانی، برای اهداف فیزیکی مورد مطالعه، این دو مسیر کاملاً ناهمبسته می‌شوند.

تعریف ۳.۷. شار ϕ روی فضای متریک M را فوق حساس نسبت به شرایط اولیه روی M گوئیم هرگاه یک عدد حقیقی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in M$ و $\epsilon > 0$ ، وجود داشته باشد $y \in M$ و $T > 0$ به طوری که $d(x, y) < \epsilon$ و $d(\phi(T, x), \phi(T, y)) > \delta$.

به عنوان پایان بخش این نوشتار، تعریفی رسمی از آشوب ارائه می‌دهیم:

تعریف ۴.۷. شار ϕ را روی یک مجموعه ناوردای فشرده مانند Λ آشوبناک گوئیم اگر:

(آ) روی Λ به صورت توپولوژیکی متعدی باشد

(ب) روی Λ نسبت به شرایط اولیه فوق حساس باشد.

مراجع

[۱] ا. رزمی نیا، مروری بر نگاشت پوانکاره. فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۵۴، (۱۳۹۳) صص. ۷۷ تا ۹۹، انجمن ریاضی ایران.

[2] E. Canon, On some hyperbolic systems of temple class, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75(11), (2012), 4241-4250.

[3] C. T. Chen, Linear Systems, theory and design, Oxford University Press. (1999).

- [4] J. P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of Modern Physics*, 57 (3), (1985), 617-656.
- [5] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [6] B. Hasselblatt, H. W. Broer, F. Takens, *Handbook of Dynamical Systems*, 3, Elsevier, (2010) .
- [7] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, NJ, USA. (1996).
- [8] J. Milnor, On the concept of attractor, *Commun. Math. Phys.*, 99, (1985), 177-195.
- [9] J. J. Slotine, W. Li, *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, (1994).

ابوالحسن رزمی‌نیا: بوشهر، دانشگاه خلیج فارس، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق
ایانامه: razminia@pgu.ac.ir

نرمال سازی نوتر و پایه گربنر

امیر هاشمی و نازنین رحمانی

چکیده

یکی از روش‌هایی که در بهبود محاسبات مربوط به ایدآل‌های حلقه چندجمله‌ای‌ها مطرح است، قرار دادن یک ایدآل در موقعیتی است که یک مجموعه مولد مناسب برای آن به دست آید. به عنوان مثال برای محاسبه چندگونای متناظر، بعد و رادیکال یک ایدآل با قرار دادن آن در یک موقعیت مناسب به نام موقعیت نوتر می‌توان سرعت محاسبات را ارتقاء داد. در این مقاله، یک الگوریتم برای پیدا کردن تنک‌ترین ماتریس تغییر مختصات برای قرار دادن یک ایدآل در موقعیت نوتر معرفی می‌کنیم. برای این منظور، از مفهوم پایه گربنر که ابزاری قوی در علوم محاسباتی محسوب می‌شود، استفاده می‌کنیم. در این راستا ابتدا مفهوم‌های نرمال سازی نوتر و پایه گربنر را به تفصیل یادآوری و برخی از کاربردها و ارتباط‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. در پایان نیز الگوریتم مورد نظر را با ارائه مثال‌هایی شرح می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنید K یک میدان و $R = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ و با ضرایب در K و I یک ایدآل R باشد. برای محاسبه کمیت‌های مربوط به I ، شکل ارائه ایدآل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و در حجم محاسبات حائز اهمیت است. بنابراین یکی از مباحث مهم در هندسه جبری و جبر محاسباتی یافتن موقعیت مناسب ایدآل I عبارات و کلمات کلیدی. نرمال سازی نوتر، پایه گربنر.

برای محاسبه کمیت مورد نظر است. منظور از تغییر شکل ارائه یک ایدال، پیدا کردن یک موقعیت مناسب برای آن و در نتیجه یافتن یک مجموعه مولد مناسب برای ایدال است. لازم به ذکر است که برخی از کمیت‌های مربوط به یک ایدال مانند بعد آن تحت تغییر شکل ایدال پایا هستند. برای مثال ایدال $I = \langle xy - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $x + \tilde{y}$ به جای y در $xy - 1$ شکل ارائه ایدال به صورت $\langle x^2 + x\tilde{y} - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, \tilde{y}]$ خواهد بود، اما بعد ایدال تغییر نمی‌کند. یکی از شکل‌های مناسب برای یک ایدال، نرمال‌سازی نوتر^۱ یعنی قرار دادن یک ایدال در موقعیت نوتر^۲ است. نرمال‌سازی نوتر در محاسبه رادیکال یک ایدال، بعد ایدال و تصویر چندگونای مستوی^۳ کاربرد دارد. در این مقاله روش محاسباتی کارایی برای قرار دادن یک ایدال در موقعیت نوتر بیان می‌کنیم. در این روش به کمک پایه‌گربنر^۴ می‌توان یک الگوریتم قطعی برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر با تنک‌ترین ماتریس تغییر مختصات ارائه داد؛ در حالی که بقیه الگوریتم‌های محاسبه نرمال‌سازی نوتر از روش‌های تصادفی استفاده می‌کنند [۵]. مفهوم پایه‌گربنر یکی از مفهوم‌های اساسی در هندسه جبری و جبر محاسباتی است که حدود نیم قرن پیش توسط بوخبرگر^۵ در پایان‌نامه دکترایش معرفی شد. او بعدها به احترام استاد راهنمایش این مفهوم جدید را پایه‌گربنر نامید [۶]. با توجه به جنبه‌های محاسباتی، پایه‌گربنر به یکی از ابزارهای مهم در علوم و مهندسی تبدیل شده است. تاکنون ۶ کتاب و بالغ بر ۳۰۰۰ مقاله در زمینه پایه‌گربنر و کاربردهای آن نگاشته شده است که نشان از اهمیت و کاربردی بودن این مفهوم دارد.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم مفهوم‌های نرمال‌سازی نوتر و پایه‌گربنر را معرفی و برخی کاربردهای آن‌ها را بیان می‌کنیم. در پایان، در بخش سوم با ارائه یک الگوریتم ارتباط این دو مفهوم را بیان می‌کنیم.

۲. نرمال‌سازی نوتر، پایه‌گربنر و کاربردها

در این بخش ابتدا به بیان برخی مفهوم‌ها و اصطلاحات جبری می‌پردازیم که برای معرفی مفهوم نرمال‌سازی نوتر به آن‌ها نیاز داریم. برای مطالعه کامل‌تر این مفاهیم مرجع [۸] توصیه می‌شود. ابتدا مفهوم توسیع صحیح را با ارائه چند مثال معرفی می‌کنیم و در قسمت کاربردهای پایه‌گربنر محک مهمی را برای تشخیص صحیح بودن توسیع یک حلقه ارائه می‌دهیم. فرض کنید S

^۱Noether normalization ^۲Noether position ^۳Affine variety ^۴Groebner basis ^۵Buchberger

یک حلقه جابجایی و یکدار و R زیرحلقه‌ای از آن باشد. در این صورت S را یک توسیع حلقه‌ای R گوئیم و می‌نویسیم $R \subseteq S$. در ادامه، S را یک توسیع حلقه‌ای R در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲. عنصر $s \in S$ را روی R صحیح گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای $f \in R[x]$ وجود داشته باشد به طوری که ضریب بزرگترین توان x برابر ۱ باشد و $f(s) = 0$. اگر تمام اعضای S روی R صحیح باشند، S را یک توسیع حلقه‌ای صحیح R می‌نامیم.

مثال ۲.۲. برای هر $d \in \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{d} \in \mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ صحیح است.

مثال ۳.۲. $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ توسیع‌های حلقه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ هستند، اما صحیح نیستند، زیرا $\pi \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ریشه هیچ چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Z}$ نیست.

تعریف ۴.۲. فرض کنید R یک K -جبر مستوی باشد. در این صورت $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$ را روی K مستقل جبری می‌نامیم هرگاه به ازای هر چندجمله‌ای n متغیره مانند f که $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ داشته باشیم $f = 0$.

اکنون قضیهٔ نرمال‌سازی نوتر را (که اولین بار امی نوتر^۱ ریاضیدان آلمانی در سال ۱۹۲۶ معرفی کرد) بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۲. (نرمال‌سازی نوتر). فرض کنید K یک میدان، n یک عدد صحیح مثبت و I یک ایدئال سره در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. در این صورت $d \leq n$ و $y_1, \dots, y_n \in R$ وجود دارند به قسمی که

(آ) $\{y_1, \dots, y_n\}$ روی K مستقل جبری هستند،

(ب) R یک B -مدول متناهی مولد است که $B = K[y_1, \dots, y_n]$ ،

(پ) $I \cap B = \langle y_{d+1}, \dots, y_n \rangle \subseteq B$ ،

(ت) به علاوه اگر $|K| = \infty$ آن‌گاه $y_1, \dots, y_d$ چندجمله‌ای‌های خطی برحسب $x_1, \dots, x_n$ هستند.

تعریف ۶.۲. اگر $I \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدئال و $y_1, \dots, y_d \in R/I$ روی K مستقل جبری و R/I روی $K[y_1, \dots, y_d]$ صحیح باشد، آن‌گاه $K[y_1, \dots, y_d]$ را یک نرمال‌سازی نوتر برای R/I می‌نامیم.

^۱ Emmy Noether

مثال ۷.۲. $K[x]$ یک نرمال سازی نوتر برای $\langle x^3 - y^2 \rangle / K[x, y]$ است. واضح است که x روی K مستقل جبری است. از طرفی $\langle x^3 - y^2 \rangle$ و $x + \langle x^3 - y^2 \rangle$ به ترتیب ریشه های $X - x(1 + \langle x^3 - y^2 \rangle) = 0$ و $X^2 - x^3(1 + \langle x^3 - y^2 \rangle) = 0$ در نتیجه روی $K[x]$ صحیح هستند. بنابراین $\langle x^3 - y^2 \rangle / K[x, y]$ روی $K[x]$ صحیح است.

در بعضی مراجع از مفهوم موقعیت نوتر به جای نرمال سازی نوتر استفاده می شود که در ادامه به آن اشاره می کنیم. لازم به ذکر است که این مفهوم معادل نرمال سازی نوتر است. یادآوری می کنیم که طول بزرگترین زنجیر از ایدال های اول حلقه R که شامل ایدال I هستند را بعد ایدال I می نامیم.

تعریف ۸.۲. فرض کنید $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدال از بعد d باشد. ایدال I را در موقعیت نوتر می نامیم هرگاه

$$(\bar{A}) \quad K[x_1, \dots, x_d] \cap I = \{0\}$$

(ب) برای هر $i = 1, \dots, n - d$ یک چند جمله ای $h_{d+i} \in K[x_1, \dots, x_{d+i}] \cap I \setminus \{0\}$ بر حسب x_{d+i} وجود داشته باشد که ضریب بزرگترین توان x_{d+i} برابر ۱ باشد.

در ادامه، مفهوم پایه گریز را معرفی می کنیم و سپس به بیان برخی از کاربردهای مرتبط با موضوع این مقاله می پردازیم. برای توضیحات تکمیلی به [۳، ۱] مراجعه کنید. فرض کنید $\mathbb{M}$ مجموعه تمام تک جمله ای ها در $R = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. یک ترتیب تک جمله ای روی R یک ترتیب کلی $<$ روی $\mathbb{M}$ است که در شرایط زیر صدق کند:

$$(\bar{A}) \quad \text{برای هر } m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{M} \text{ که } m_1 < m_2 \text{ داشته باشیم } m_1 m_3 < m_2 m_3$$

(ب) به ازای هر $m, m \in \mathbb{M}$ ، $1 < m$.

مثال مهمی از ترتیب تک جمله ای ترتیب القایی است. فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ و x^α و x^β دو تک جمله ای باشند. x^α را نسبت به ترتیب القایی از x^β بزرگتر گوئیم (و می نویسیم $x^\alpha \succ_{lex} x^\beta$) هرگاه سمت چپ ترین مؤلفه ناصفر $\alpha - \beta$ مثبت باشد. برای هر $f \in R$ بزرگترین تک جمله ای f نسبت به ترتیب $<$ را تک جمله ای پیشرو، ضریبش را ضریب پیشرو و حاصل ضرب آن ها را جمله پیشرو می نامیم و به ترتیب با نمادهای $LM(f)$ ، $LC(f)$ ، $LT(f)$ نمایش می دهیم. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و $<$ یک ترتیب تک جمله ای روی R باشد. ایدال پیشروی I را با نماد $LT(I)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

تعریف ۹.۲. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و $\prec$ یک ترتیب تکجمله‌ای روی R باشد. زیرمجموعه متناهی $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq I$ را یک پایه گربنر I نسبت به $\prec$ می‌نامیم هرگاه $LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle$.

تعریف ۱۰.۲ (ایدال حذفی). فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و $0 \leq l < n$ یک عدد صحیح باشد. l -امین ایدال حذفی I عبارت است از $I_l = I \cap K[x_{l+1}, \dots, x_n]$.

قضیه ۱۱.۲ (قضیه حذف). اگر $I \subseteq R$ یک ایدال و G یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب $x_1 \succ_{lex} x_2 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} x_n$ باشد، آنگاه برای هر $0 \leq l < n$ مجموعه $G_l = G \cap K[x_{l+1}, \dots, x_n]$ یک پایه گربنر برای ایدال حذفی I_l است.

به‌عنوان کاربردی از قضیه حذف یک روش محاسباتی برای حذف متغیرها از دستگاه معادلات چندجمله‌ای برای یافتن جواب دستگاه ارائه می‌کنیم. در ادامه با یک مثال این روند را معرفی می‌کنیم.

مثال ۱۲.۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

ایدال متناظر با این دستگاه، یعنی $I = \langle x^2 + y + z - 1, x + y^2 + z - 1, x + y + z^2 - 1 \rangle$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت پایه گربنر I نسبت به ترتیب $x \succ_{lex} y \succ_{lex} z$ مجموعه چندجمله‌های زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z^2 - 1, & g_2 &= y^2 - y - z^2 - z, \\ g_3 &= yz^2 + z^4 - z^2, & g_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2. \end{aligned}$$

از طرفی جواب‌های دستگاه مورد نظر همان جواب‌های دستگاه بالا است. همان طور که مشاهده می‌شود، g_4 یک چندجمله‌ای برحسب z است. با حل معادله $z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 = 0$ مقدار z را $0, 1, \sqrt{2}, -1$ به‌دست می‌آوریم. با جایگزینی این مقادیر در g_3 و g_2 جواب‌های ممکن

برای y و در آخر نیز با جایگزینی مقادیر y و z در g_1 ، مقدار x را به دست می آوریم. به این ترتیب مجموعه زیر جواب دستگاه معادلات خواهد بود:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), \\ (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})\}$$

در حالت کلی جواب های یک دستگاه معادلات را به کمک دو مرحله زیر می توانیم به دست آوریم.

(مرحله حذف): در این مرحله همه متغیرها را جز یکی حذف می کنیم تا یک چندجمله ای تک متغیره به دست آوریم.

(مرحله توسیع): در این مرحله ابتدا ریشه چندجمله ای تک متغیره را به دست می آوریم. سپس با جایگزینی هر یک از این جواب ها در معادلات دیگر، مقدار بقیه متغیرها را به دست می آوریم.

همان طور که در بخش قبل گفتیم با استفاده از پایه گریتر محکی برای تشخیص صحیح بودن یک توسیع حلقه ای ارائه می دهیم. فرض کنید K یک میدان، $I \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدال و $f_1, \dots, f_k$ چندجمله ای در R باشد. برای هر $1 \leq i \leq k$ قرار می دهیم $\bar{f}_i = f_i + I$ و تعریف می کنیم $B = K[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k]$. در این صورت واضح است که B یک زیرحلقه R/I است. اکنون می خواهیم بررسی کنیم در چه صورت چندجمله ای $h \in R$ روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I صحیح است یا به عبارت دیگر، در چه صورت $h + I$ روی B صحیح است؟ محک زیر به این سؤال پاسخ می دهد.

گزاره ۱۳.۲ (محک صحیح بودن). فرض کنید $h, f_1, \dots, f_k \in R$

$$I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subseteq R,$$

یک ایدال و $t, y_1, \dots, y_k$ متغیرهای کمکی باشند. ایدال

$$J = \langle t - h, y_1 - f_1, \dots, y_k - f_k, g_1, \dots, g_s \rangle,$$

را در نظر می گیریم. فرض کنید $\prec$ یک ترتیب تک جمله ای به صورت

$$x_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} x_n \succ_{lex} t \succ_{lex} y_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} y_k,$$

روی $K[x_1, \dots, x_n, t, y_1, \dots, y_k]$ و G یک پایه گربنر برای J نسبت به این ترتیب باشد. در این صورت h روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I صحیح است اگر و تنها اگر یک $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که تک جمله ای پیشروی آن به صورت $LM(g) = t^p$ باشد که در آن، $p > 0$. به علاوه g یک چندجمله ای صحیح برای h روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I تعریف می کند.

مثال ۱۴.۲. فرض کنید $K = \mathbb{Q}$ ، $I = \langle x_1^2 - x_3^2 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ، $f_1 = x_3^2 - 1$ ، $f_2 = x_1^2 x_2$ و می خواهیم صحیح بودن x_3 و x_4 را روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I بررسی کنیم. ایدال های

$$I_1 = \langle t - x_3, y_1 - f_1, y_2 - f_2, I \rangle, \quad \text{و} \quad I_2 = \langle t - x_4, y_1 - f_1, y_2 - f_2, I \rangle,$$

را در $K[x_1, \dots, x_4, t, y_1, y_2]$ در نظر می گیریم. پایه گربنر این ایدال ها نسبت به ترتیب

$$x_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} t \succ_{lex} \dots \succ_{lex} y_2,$$

مجموعه های

$$G_1 = \{t^2 - y_1 - 1, x - 3 - t, x_2^4 - y_2, x_1^2 - x_2^3\},$$

$$G_2 = \{x_4 - t, x_2^4 - y_2, x_3^2 - y_1 - 1, x_1^2 - x_2^3\}$$

است. بنابراین با توجه به گزاره قبل، چون t^2 تک جمله ای پیشروی $t^2 - y_1 - 1$ است، پس x_3 روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I با $x_3^2 - f_1 - 1$ صحیح است در حالی که x_4 روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I صحیح نیست.

اکنون با توجه به تعریفی که برای بعد ایدال بیان می کنیم، به کمک پایه گربنر آن را محاسبه می کنیم.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال باشد. بعد ایدال I را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\dim(I) = \max\{|u| \mid u \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, I \cap K[u] = \{0\}\}.$$

برای محاسبه بعد یک ایدال I با استفاده از این تعریف، برای هر زیر مجموعه $u \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ یک ترتیب $u \prec_{lex} \{x_1, \dots, x_n\} \setminus u$ تعریف می کنیم و با استفاده

از این ترتیب، پایه گیر G_u را برای ایدال I به دست می آوریم. در این صورت اندازه بزرگترین زیرمجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ که $u \subseteq \{0\}$ $G_u \cap K[u] = \{0\}$ بعد ایدال I است. این تعریف از بعد ایدال با تعریفی که قبلاً از آن ارائه کردیم، معادل است (برای توضیحات بیشتر به مرجع [۴] قضیه ۱-۵-۳ مراجعه کنید).

در پایان این بخش، برخی از کاربردهای نرمال سازی نوتر را به طور مختصر بیان می کنیم. ابتدا به کاربرد آن در محاسبه رادیکال یک ایدال اشاره می کنیم (برای توضیحات بیشتر به [۶] مراجعه کنید). فرض کنید $I = \langle G \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدال از بعد d و G پایه گیر ایدال I باشد. فرض کنید I در موقعیت نوتر باشد. ضرایب چندجمله ای های G را در $K[x_1, \dots, x_d]$ در نظر می گیریم. $\mu = LCM(LC(g) \mid g \in G)$ را کوچکترین مضرب مشترک ضرایب پیشروی چندجمله ای های G و μ^* را $I : \mu^*$ را

$$\{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \exists N \in \mathbb{N} : \mu^N f \in I\},$$

تعریف می کنیم. چندجمله ای های ناصفر $h_{d+i} \in K[x_1, \dots, x_d, x_{d+i}]$ که $1 \leq i \leq n-d$ را در I به صورت

$$h_{d+i} = cont(h_{d+i}).pp(h_{d+i}),$$

در نظر می گیریم که در آن $cont(h_{d+i}) \in K[x_1, \dots, x_d]$ محتوای h_{d+i} (بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضرایب h_{d+i}) و $pp(h_{d+i})$ چندجمله ای اولیه h_{d+i} (چندجمله ای که بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضرایب آن یک است) باشد. فرض کنید $L_{d+i} = sqfr(pp(h_{d+i}))$ چندجمله ای خالی از مربع $pp(h_{d+i})$ باشد. قرار می دهیم $P_{d+i} = cont(h_{d+i})L_{d+i}$. اگر $P = \{P_{d+1}, \dots, P_n\}$ آن گاه

$$\sqrt{I} = \sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} \cap (I + \langle P \rangle) : \mu^*,$$

رادیکال ایدال I خواهد بود. با توجه به تعریف μ و P ، ایدال $I + \langle P, \mu \rangle$ یک ایدال از بعد صفر خواهد بود و در این صورت طبق لم سیدنبرگ^۱ [۴] اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ یک چندجمله ای خالی از مربع f_i که $(I + \langle P, \mu \rangle) \cap K[x_i] = \langle f_i \rangle$ را به ایدال اضافه کنیم، آنگاه رادیکال ایدال به دست می آید. برای مثال، اگر ایدال $I = \langle x^4y - 2x^2y + y, y^2 - y \rangle \subseteq K[x, y]$ را در نظر بگیریم با توجه به این که I از بعد یک است $I = \langle x^4y - 2x^2y + y, y^2 - y \rangle \cap K[x] = \{0\}$

^۱Seidenberg

و $y^2 - y$ یک چندجمله‌ای تکین برحسب y است، طبق تعریف، I در موقعیت نوتر است. اگر $\mu = x^4 - 2x^2 + 1$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$I + \langle P, \mu \rangle = \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1 \rangle,$$

یک ایدآل از بعد صفر است و در نتیجه

$$\sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} = \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1, x^2 - 1, y^2 - 1 \rangle.$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sqrt{I} &= \sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} \cap (I + \langle P \rangle) : \mu^* \\ &= \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1, x^2 - 1, y^2 - 1 \rangle \cap \langle y \rangle \\ &= \langle y^2 - y, xy^2 - y \rangle. \end{aligned}$$

کاربرد دیگر نرمال‌سازی نوتر در تصویر چندگونای مستوی است. می‌دانیم که تصویر یک چندگونای مستوی تحت نگاشت تصویر الزاماً یک مجموعه بسته جبری نیست. اما اگر ایدآل در موقعیت نوتر باشد، تصویر آن یک مجموعه بسته ضربی خواهد بود. برای مثال، ایدآل

$$I = \langle xy - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y],$$

و نگاشت تصویر $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y \mapsto (x, y)$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که تصویر مجموعه جبری $V(I)$ تحت π_1 مجموعه $\pi_1(V(I)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ است که یک مجموعه جبری نیست. اما با جایگذاری $x + \tilde{y}$ به جای y در $xy - 1$ ایدآل

$$\langle x^2 + x\tilde{y} - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, \tilde{y}],$$

را خواهیم داشت و در این صورت $\pi_1(V(x^2 + x\tilde{y} - 1)) = \mathbb{R}$ یک مجموعه جبری است.

۳. الگوریتم نرمال‌سازی نوتر

در مقدمه بیان کردیم که الگوریتم‌هایی که تاکنون برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر ارائه شده‌اند، با استفاده از روش‌های تصادفی ماتریس تغییر مختصات را پیدا می‌کنند که این مستلزم محاسبات طولانی و پیچیده است که قطعاً به زمان بیشتری نیز نیاز دارد. اما الگوریتمی که در این بخش ارائه

می شود با استفاده از یک روش قطعی، تغییر مختصاتی که یک ایدال نیاز دارد که با آن در موقعیت نوتر قرار بگیرد یا به عبارت دیگر، یک ماتریس تنک تر (نسبت به روشهای دیگر) برای ماتریس تغییر مختصات ایدال را محاسبه می کند.

الگوریتم ۱ نرمال سازی نوتر

- ورودی: ایدال $I = \langle F \rangle \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ و متغیرهای $V = [x_1, \dots, x_n]$.
- خروجی: یک مجموعه ψ از نگاشت های خطی طوری که $\langle \psi(I) \rangle$ در موقعیت نوتر باشد.
- ۱: ψ را مجموعه تهی در نظر می گیریم.
 - ۲: چند جمله ای $f \in F$ را از درجه m به صورت $f = f_m + \dots + f_0$ در نظر می گیریم که f_i از درجه i است.
 - ۳: $f_m(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \neq 0$ را طوری انتخاب می کنیم که
 - ۴: قرار دهید $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & -b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$
 - ۵: برای هر $i = 1, \dots, n-1$ را x_i با $M[i]$ در F جایگذاری می کنیم و آن را $\tilde{F}$ می نامیم.
 - ۶: با استفاده از پایه گریز $\langle \tilde{F} \rangle \cap K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ را محاسبه می کنیم و آن را F' می نامیم.
 - ۷: ψ را اجتماع ψ و نگاشت خطی $x_i \rightarrow x_i - b_i x_n$ برای $i = 1, \dots, n-1$ در نظر می گیریم.
 - ۸: اگر $F' \neq \{0\}$ آنگاه قرار می دهیم ψ برابر با اجتماع ψ و خروجی نرمال سازی نوتر روی $\langle F' \rangle$ و $[y_1, \dots, y_{n-1}]$ باشد.
 - ۹: ψ را برمی گردانیم.

روند الگوریتم ۱ به این صورت است که ابتدا $n-1$ متغیر y_i را برحسب متغیر x_n به صورت $y_1 = x_1 - b_1 \cdot x_n, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} - b_{n-1} \cdot x_n$ می سازیم و با جایگذاری در یک چند جمله ای $y_n = cx_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i x_n^i$ مقادیر مناسب برای b_i ها را به دست می آوریم. سپس به کمک پایه گریز ایدال $I' := I \cap K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ را محاسبه می کنیم و در هر مرحله یکی از تعداد متغیرها کم می کنیم. این روند را حداکثر $n-d$ بار که d بعد ایدال است تکرار می کنیم، زیرا

در این صورت با توجه به این که بعد ایدآل d است، خواهیم داشت

$$I' = I \cap K[y_1, \dots, y_d] = \{0\}.$$

لازم به ذکر است که بعد ایدآل با تغییر متغیر خطی تغییر نمی‌کند. از طرفی، $n - d$ چندجمله‌ای تکین روی $K[y_1, \dots, y_d]$ در ایدآل I می‌سازیم. بنابراین با توجه به تعریف نرمال‌سازی نوتر، ایدآل مورد نظر در موقعیت نوتر قرار می‌گیرد.

اثبات درستی الگوریتم ۱ از لم نرمال‌سازی نوتر نتیجه می‌شود. برای اثبات پایان‌پذیری الگوریتم از نتایجی استفاده می‌کنیم که در ادامه می‌آیند.

(۱) فرض کنید $R = K[x_1, \dots, x_n]$ و $f(x_1, \dots, x_n) \in R$ به صورت

$$f = f_0 + \dots + f_m,$$

باشد که در آن f_i ها چندجمله‌ای‌های همگن از درجه i باشند. متغیرهای جدید $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}$ را در نظر می‌گیریم که $\tilde{x}_i = x_i - b_i x_n$ و $b_i \in K$. در این صورت چندجمله‌ای‌های $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{m-1}$ در $K[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}]$ موجودند که

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_m(b_1, \dots, b_{n-1}, 1)x_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})x_n^i.$$

(۲) فرض کنید K یک میدان نامتناهی باشد و $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. در این صورت $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ ، $(b_1, \dots, b_n) \in K^n$ اگر و تنها اگر برای هر n

(۳) اگر K یک میدان نامتناهی و $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ $f \neq 0$ یک چندجمله‌ای همگن از درجه m باشد طوری که به‌ازای هر $(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \in K^n$ $f(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \neq 0$ آنگاه f یک چندجمله‌ای صفر است.

برای اثبات ادعاهای ۱ و ۳ به [۸] و ادعای ۲ به [۴] صفحه ۳ مراجعه کنید.

برای درک بهتر روند الگوریتم، مثال زیر را بیان می‌کنیم.

مثال ۱۰.۳. ایدآل

$$I = \langle y^2z - wxy^2, xyz - wz^2, y^2z - wx^2yz \rangle \subseteq R = \mathbb{R}[w, x, y, z],$$

و ترتیب $z \succ_{lex} \dots \succ_{lex} w$ را در نظر می گیریم. می خواهیم چندجمله ای تکینی بر حسب کوچکترین متغیر به دست آوریم. برای این منظور، ابتدا متغیرهای

$$w = y_1 + b_1 z, x = y_2 + b_2 z, y = y_3 + b_3 z,$$

را در یک چندجمله ای مانند $f = xyz - wz^2$ جایگزین می کنیم. با جایگذاری این تغییر متغیرها در f چندجمله ای زیر را خواهیم داشت:

$$(b_2 b_3 - b_1) z^3 + (y_1 b_3 + b_2 y_2 - y_1) z^2 + y_2 y_3 z.$$

حال b_1, b_2, b_3 را طوری انتخاب می کنیم که ضریب z^3 صفر نشود. قرار می دهیم $b_1 = 1$ و $b_2 = b_3 = 0$. اکنون با استفاده از روش حذفی، پایه گیر ایدال

$$I' = I \cap \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3] =$$

$$\langle y_1^5 y_2^3 y_3 - y_1^3 y_2 y_3, y_1^4 y_2^3 y_3 - y_1^2 y_2^3 y_3 + y_1^2 y_2^3 y_2, y_1^2 y_2^3 y_3^2 + y_1^3 y_2 y_3 - y_1^4 y_2^3 y_3 \rangle,$$

را محاسبه می کنیم. چون اشتراک ناتهی شد، پس طبق الگوریتم در مرحله بعد باید چندجمله ای تکینی بر حسب y_3 بسازیم. در این مرحله نیز متغیرهای $y_1 = z_1 + b_1 y_3$ و $y_2 = z_2 + b_2 y_3$ را در $g = y_1^2 y_2^3 y_3^2 + y_1^3 y_2 y_3 - y_1^4 y_2^3 y_3$ جایگزین می کنیم. در این صورت g به چندجمله ای زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & -b_1^4 b_2 y_3^5 + (b_1^2 b_2^2 - 4z_2 b_1^3 b_2 - b_1^4 z_1) y_3^6 \\ & + (2z_2 b_2 b_1^2 + 2b_1^2 z_1 b_1 + b_2 b_1 - 6z_1^2 b_1^3 b_2 - 4z_2 b_1^3 z_1) y_3^7 \\ & + (z_1^2 b_1^2 + 4z_2 b_2 z_1 b_1 + b_1^2 z_1^2 + z_2 b_1 + b_2 z_1 - 4z_1^2 b_2 b_1 - 6z_1^2 b_1^2 z_1) y_3^8 \\ & + (2z_1^2 z_1 b_1 + 2z_2 b_2 z_1^2 + z_2 z_1 - z_1^2 b_1 - 4z_1^2 b_2 z_1) y_3^9 \\ & + (z_1^2 z_1^2 - z_1^4 z_1) y_3^{10}. \end{aligned}$$

در این مرحله نیز مانند مرحله قبل برای این که ضریب y_3 صفر نشود قرار می دهیم $b_1 = b_2 = 1$ و به کمک پایه گیر برنر داریم $I'' = I' \cap \mathbb{R}[z_1, z_2] = \{0\}$. اگر تعریف کنیم

$$B = \mathbb{R}[w - y - z, x - y, f(w - y - z, x - y, y, z), g(w - y - z, x - y, y, z)],$$

آن‌گاه با توجه به این که $y_3 = y$ و $R = B[y, z]$ یک R -مدول متناهی مولد است. بنابراین

$$R/I = B[y, z] / \langle -y^4 + (w - z + x)y^3 + (z - (w - z)x)y^2, \\ z^3 + (-w + y)z^2 + (x - y)yz, y^2z - (w - y - z)(x - y)^2yz \rangle$$

روی $B/(I \cap B) = \mathbb{R}[w - y - z, x - y]$ صحیح است. در نتیجه طبق تعریف $\mathbb{R}[w - y - z, x - y]$ یک نرمال‌سازی نوتر R/I است.

مثال ۲.۳. در سال ۲۰۰۹، روبرتز [۷] الگوریتمی مؤثر با استفاده از پایه‌های تودرتو برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر ارائه کرد. به‌عنوان مثال، ایدآل I را به‌صورت

$$\langle yz - yc - xb + ab, zc - zx - yb + ab, yc - zb + ab, xy - zx - cb + ab \rangle \\ \subseteq \mathbb{Q}[a, b, c, x, y, z],$$

در نظر می‌گیریم. الگوریتم روبرتز تغییر متغیرهای

$$a \mapsto a, \quad b \mapsto b - a, \quad c \mapsto c - b, \quad x \mapsto x - c, \quad y \mapsto y - a, \quad z \mapsto z + c,$$

را برای قرار دادن I در موقعیت نوتر محاسبه می‌کند، در حالی که الگوریتم ارائه شده در این مقاله، تغییر متغیرهای

$$a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad c \mapsto c, \quad x \mapsto x - z - 2y, \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto z,$$

را به‌دست می‌دهد که به‌روشنی تنک‌تر از تغییر متغیرهای ارائه شده توسط الگوریتم روبرتز است.

مثال ۳.۳. ایدآل

$$\langle x_1x_3 + x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3, x_1u_3 - u_1u_3 - u_2u_3, \\ x_2u_3 + x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3, x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3 + u_2u_3, \\ x_3u_1u_3 - u_1u_3^2 \rangle \subseteq K[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3],$$

را با ترتیب $u_1 \succ_{drl} u_2 \succ_{drl} u_3 \succ_{drl} x_1 \succ_{drl} x_2 \succ_{drl} x_3$ در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم روبرتز برای قرار دادن ایدال بالا در موقعیت نوتر به تغییر متغیرهای زیر نیاز داریم

$$u_1 \mapsto u_1, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_3 - u_1, x_1 \mapsto x_1 + u_2, x_2 \mapsto x_2 - u_1, x_3 \mapsto x_3 - u_2,$$

در حالی که با الگوریتم بهبود یافته اخیر تنها با تغییر متغیرهای

$$u_1 \mapsto u_1, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_3 - u_1, x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_2, x_3 \mapsto x_3 - u_2.$$

ایدال در موقعیت نوتر قرار می گیرد که به روشنی تنک تر است.

مراجع

- [۱] رشید زارع نهندی، بوخبرگر و پایه های گریز، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۴، (۱۳۸۹).
- [2] B. Buchberger, *An algorithm for finding the bases elements of the residue class ring modulo a zero dimensional polynomial ideal (German)*, PhD thesis, Universität Innsbruck, 1965.
- [3] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, third edition, 2007.
- [4] G.M. Greuel, and G. Pfister, *A SINGULAR introduction to commutative algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [5] A. Hashemi, *Efficient algorithms for computing Noether normalization*, Lecture Notes in Computer Science, **5081**, (2008) 97–107.
- [6] T. Krick, and A. Logar, *An algorithm for the computation of the radical of an ideal in the ring of polynomials*, AAEC9, Springer LNCS 539, (1991) 195–205.
- [7] D. Robertz, *Noether normalization guided by monomial cone decompositions*, Journal of Symbolic Computation, **44** (2009) 1359–1373.
- [8] R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

امیر هاشمی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، کد پستی ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱

رایانامه: Amir.Hashemi@cc.iut.ac.ir

نازنین رحمانی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، کد پستی ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱

رایانامه: n.rahmani@math.iut.ac.ir

مجموعه دستاورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد فیوناتچی

صدیقه بلادی، جواد بهبودیان، و پریسا ترا بیان

چکیده

در این مقاله ضمن تعریف دنباله کامل، شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله از اعداد صحیح مثبت را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دنباله فیوناتچی یک دنباله کامل است. برای دنباله (x_n) از اعداد حقیقی، مجموعه دستاورد (x_n) را مجموعه همه مقادیر حقیقی $\sum_{i \in I} x_i$ که در آن I هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ می‌باشد، در نظر گرفته و با $AS(x_n)$ نمایش می‌دهیم. برای نمونه، با استفاده از بسط دودویی نشان می‌دهیم $AS(\frac{1}{\varphi}) = [0, 1]$. در ادامه، شرایط کافی را بررسی می‌کنیم که به موجب آن‌ها مجموعه دستاورد دنباله‌ای به صورت یک بازه و یا مجموعه اعداد حقیقی باشد. سرانجام، مجموعه دستاورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد فیوناتچی را به دست می‌آوریم.

۱. سرآغاز

دل‌بستگی دیرپای بشر به اعداد طبیعی تمایلی را برای نشان دادن آن‌ها به صورت نمادین فراهم کرده است. پس از تلاش‌هایی به وسیله مصری‌ها، بابلی‌ها، و رومی‌ها ریاضی‌دان‌های هندی در حدود ۱۰۰۰ سال بعد از میلاد مسیح، سیستمی شبیه به سیستم مدرن امروز و در دستگاه اعشاری

عبارات و کلمات کلیدی. دنباله کامل، عدد دست‌یافته، مجموعه دستاورد، دنباله دست‌آور برتر.

2010 Mathematics Subject Classification. 40A05; 11B50; 11B39.

ابداع کردند. هرچند که نفوذ این سیستم از علاقه برای ایجاد سیستم‌های دیگر نکاسته است. برای نمونه، سیستم دودویی توجه ریاضی‌دانان را از گذشته بسیار دور یعنی از زمان لایبنیتز (قرن ۱۷ میلادی) به خود جلب کرده است. از آن‌جا که این سیستم تنها ارقام صفر و یک استفاده می‌کند، نمایش دودویی یک عدد صحیح مثبت n ، معادل با نوشتن n به‌عنوان حاصل‌جمع از توان‌های دو می‌باشد. به عبارت دیگر، n را به‌عنوان حاصل‌جمع جملات زیر دنباله‌ای از $\{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$ می‌نویسند. این موضوع آشکار می‌سازد که می‌توان سیستم‌های دودویی بیشماری از نمایش اعداد را با استفاده از جایگزین کردن دنباله‌های دیگر با دنباله $\{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}$ ساخت. البته، نیاز اولیه یک سیستم نمایش اعداد برای این‌که ارزشمند باشد این است که اگر $\mathbb{M}$ را به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد در نظر بگیریم، هر عدد در این مجموعه قابل نمایش با آن سیستم باشد. از این جهت، دنباله $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ از اعداد صحیح مثبت را کامل^۱ می‌نامند هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n ، زیردنباله‌ای متناهی مانند $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که مجموع جملات آن مساوی n باشد [۵]. مایلم بدانیم چه شرایطی باعث می‌شود تا دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت، کامل باشد و در حالت کلی‌تر، چه نوع از دنباله‌ها مجموع جملات زیردنباله‌هایشان، همه اعداد حقیقی را تولید می‌کنند.

در راستای پاسخ‌گویی به سؤال اول، در بخش دوم این مقاله شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دنباله فیوناتچی یک دنباله کامل می‌باشد. در بخش سوم عدد دست‌یافته^۲ توسط دنباله حقیقی (x_n) ، یعنی عددی که بتوان آن را به‌صورت مجموع جملات زیردنباله‌ای (احتمالاً متناهی) از (x_n) نوشت، تعریف می‌کنیم. سپس مجموعه تمام این اعداد دست‌یافته را مجموعه دستاورد^۳ دنباله (x_n) می‌نامیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که به‌موجب آن‌ها مجموعه دستاورد یک دنباله، بازه باشد. سرانجام، در بخش چهارم به روشنی به سؤال دوم پاسخ می‌گوییم و مجموعه‌های دستاورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد فیوناتچی را تعیین می‌کنیم.

تعدادی از ریاضی‌دانان مطالبی را در خصوص دنباله کامل و مجموعه دستاورد بیان کرده‌اند. ابتدا، هگات^۴ و کینگ^۵ در [۱۱] دنباله کامل را تعریف و مسائلی را در این خصوص بیان کردند. سپس براون^۶ در [۴] به این مسائل به‌وضوح پاسخ گفت. افزون بر این، دیکین^۷ در [۱] نتایج مشخصی را درباره کامل بودن در ارتباط با معرفی و مطالعه دنباله فیوناتچی تعمیم‌یافته بررسی

^۱Complete ^۲Achieved Number ^۳Achievement set ^۴Hoggatt ^۵King ^۶Brown ^۷Daykin

نموده است. در خصوص مجموعه دستاورد، هورنیچ^۱ [۲]، کاکیا^۲ [۱۰] و ریبنبویم^۳ [۷] مطالبی در راستای بخش سوّم و چهارم بیان کرده‌اند. جونز^۴ در [۸] دو نوع مجموعه دستاورد را تعیین و با توجه به اختلاف در ماهیت این دو مجموعه، خواص توپولوژیک آن‌ها را مشخص کرده است. جونز شرایطی را بررسی می‌کند که به موجب آن‌ها، مجموعه دستاورد یک دنباله همبند باشد. وی همچنین شرایطی را که تحت آن مجموعه دستاورد دنباله‌ای مجموعه کانتور و در نتیجه کلاً ناهمبند باشد، تعیین می‌کند. جونز سرانجام نتیجه می‌گیرد که مجموعه دستاورد هر دنباله از اعداد حقیقی یا مجموعه‌ای از رسته اول می‌باشد و از این‌رو درون تهی دارد و یا درون مجموعه دستاورد در خودش چگال است.

۲. دنباله کامل

در این بخش نخست به معرفی دنباله کامل می‌پردازیم. سپس شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله را بررسی می‌کنیم. به دنبال آن، نشان می‌دهیم که دنباله فیوناتچی کامل است و این خاصیت را پس از حذف یک جمله دلخواه از دنباله حفظ می‌کند. اما هرگاه از این دنباله دو جمله دلخواه را حذف کنیم، ویژگی کامل بودن را از دست خواهد داد [۴]. افزون بر این، نشان می‌دهیم که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌طور یکتا، به صورت مجموع جملات زیردنباله خاصی از دنباله فیوناتچی نوشت [۵] و [۶].

تعریف ۱.۲ (دنباله کامل). دنباله (x_n) از اعداد صحیح مثبت را کامل می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت m ، زیرمجموعه I از اعداد صحیح مثبت وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$m = \sum_{i \in I} x_i$$

بدیهی است که تنها مجموع جملات زیردنباله‌های متناهی (x_n) به یک عدد صحیح همگرا می‌باشند؛ از این‌رو، مجموعه I متناهی می‌باشد.

لم ۲.۲. (x_n) را دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت (نه الزاماً با جملات متمایز) با شرط $x_1 = 1$ و به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ $x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$ در نظر می‌گیریم. در این صورت به‌ازای $0 < m < 1 + \sum_{i=1}^k x_i$ ، زیرمجموعه I از $\{1, 2, \dots, k\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$m = \sum_{i \in I} x_i.$$

اثبات. درستی لم به ازای $k = 1$ بدیهی است. فرض می‌کنیم لم به ازای $k \leq N$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که

$$0 < m < 1 + \sum_{i=1}^{N+1} x_i,$$

نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه J از $\{1, 2, \dots, N+1\}$ وجود دارد به طوری که $m = \sum_{j \in J} x_j$. برای این منظور تنها نیاز داریم که مقادیر m را در نظر بگیریم که در رابطه $m < 1 + \sum_{i=1}^{N+1} x_i$ صدق می‌کنند. زیرا حالت $m < 1 + \sum_{i=1}^N x_i$ با توجه به فرض استقرا پوشش داده می‌شود. بنابراین، با استفاده از فرض داریم:

$$m - x_{N+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^N x_i - x_{N+1} \geq 0.$$

اگر $m - x_{N+1} = 0$ ، نتیجه حاصل می‌شود. در غیر این صورت، $0 < m - x_{N+1} < 1 + \sum_{i=1}^N x_i$ وجود زیرمجموعه I از $\{1, 2, \dots, N\}$ را نتیجه می‌دهد به طوری که $m - x_{N+1} = \sum_{i \in I} x_i$. سرانجام با انتقال x_{N+1} به طرف دیگر تساوی و قرار دادن $J = I \cup \{N+1\}$ ، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۳.۲. (x_n) را دنباله‌ای نانرولی از اعداد صحیح مثبت با شرط $x_1 = 1$ در نظر می‌گیریم. در این صورت شرط لازم و کافی برای کامل بودن (x_n) این است که به ازای $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم:

$$x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

اثبات. فرض می‌کنیم به ازای $x_n, n = 1, 2, \dots$ $x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^n x_i$ در این صورت دنباله (x_n) با توجه به لم ۲.۲، یک دنباله کامل می‌باشد. برای اثبات شرط لازم قضیه، فرض می‌کنیم $n_0 \geq 1$ وجود دارد به طوری که $x_{n_0+1} > 1 + \sum_{i=1}^{n_0} x_i$. آنگاه،

$$x_{n_0+1} > x_{n_0+1} - 1 > \sum_{i=1}^{n_0} x_i$$

نتیجه می‌دهد که هیچ $J \subseteq \mathbb{N}$ وجود ندارد به طوری که بتوان عدد صحیح مثبت $x_{n_0+1} - 1$ را به صورت $\sum_{j \in J} x_j$ نمایش داد. $\square$

تعریف ۴.۲ (دنباله فیوناتچی). دنباله (u_n) را دنباله فیوناتچی گوئیم هرگاه به صورت $u_1 = 1$ ، $u_2 = 2$ و به ازای $n \geq 2$ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ تعریف شده باشد.

امروزه دنباله (F_n) را اگر به صورت $F_1 = F_2 = 1$ و به ازای $n \geq 2$ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ تعریف شده باشد، دنباله فیوناتچی می گویند. ما در این مقاله، از آن تحت عنوان دنباله فیوناتچی تعمیم یافته استفاده می کنیم.

مثال ۵.۲. با استفاده از استقرای ریاضی به آسانی می توان نشان داد، نامساوی $u_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^n u_i$ ، بین جملات دنباله فیوناتچی برقرار است؛ از این رو، دنباله فیوناتچی با توجه به قضیه قبل کامل می باشد.

قضیه ۶.۲. (x_n) را دنباله ای کامل و نانزولی از اعداد صحیح مثبت در نظر می گیریم. شرط زیر:

$$x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

لازم و کافی است برای این که کامل بودن (x_n) پس از حذف یک جمله دلخواه از دنباله حفظ شود.

اثبات. با استفاده از قضیه ۳.۲ به آسانی اثبات می گردد. $\square$

مثال ۷.۲. با استفاده از استقرای ریاضی می توان نشان داد که بین جملات دنباله فیوناتچی تعمیم یافته، رابطه $F_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} F_i$ ، برقرار است. بنابراین، پس از حذف یک جمله دلخواه از جملات این دنباله، کامل بودن خود را حفظ می کند.

قضیه ۸.۲. (x_n) را دنباله ای کامل و نانزولی از اعداد صحیح مثبت با شرط

$$x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

در نظر می گیریم. حذف دو جمله دلخواه x_j و x_m ($m \neq j$) کافی است برای این که کامل بودن دنباله از بین برود.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت، فرض می کنیم $j < m$. اگر $j = 1$ و $m = 2$ ، با توجه به این که هر دنباله کامل از اعداد صحیح مثبت باید یک جمله مساوی با یک داشته باشد؛ پس کامل

بودن دنباله در این حالت از بین می‌رود. به ازای $m > 2$ ، داریم:

$$\begin{aligned} x_{m+1} &\geq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} x_i = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} x_i + \sum_{i=j+1}^{m-1} x_i + x_j \\ &> 1 + \sum_{i=1}^{j-1} x_i + \sum_{i=j+1}^{m-1} x_i. \end{aligned}$$

نامساوی اخیر، شرط قضیه ۳.۲ برای کامل بودن یک دنباله را نقض می‌کند. بدین ترتیب، در این حالت نیز دنباله حاصل، یک دنباله کامل نمی‌باشد. $\square$

مثال ۹.۲. دنباله فیوناتچی تعمیم یافته شرایط قضیه ۸.۲ را دارد. بنابراین، با حذف دو جمله دلخواه از جملات این دنباله، کامل بودن آن از بین می‌رود.

در مثال ۵.۲ نشان دادیم که هر عدد صحیح مثبت توسط مجموع جملات زیر دنباله‌ای از دنباله فیوناتچی قابل نمایش است. سؤالی که در ذهن ایجاد می‌شود این است که آیا این نمایش یکتا می‌باشد. قضیه زخندورف^۱ به طور آشکار به این سؤال پاسخ می‌دهد.

لم ۱۰.۲. رابطه زیر بین جملات دنباله فیوناتچی، (u_n) ، برقرار است.

$$u_n = 1 + u_{n-1} + u_{n-3} + \dots + u_{1,2},$$

که در آن برای n های فرد، $u_{1,2} = u_1$ و برای n های زوج، $u_{1,2} = u_2$.

اثبات. با استفاده از استقرای ریاضی، درستی رابطه را می‌توان بررسی کرد. $\square$

قضیه ۱۱.۲ (قضیه زخندورف). دنباله فیوناتچی، (u_n) ، را در نظر می‌گیریم. در این صورت هر عدد صحیح مثبت N دارای یک و تنها یک نمایش به صورت

$$(۱.۲) \quad N = \sum_{i \in I} u_i$$

می‌باشد که در آن I زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است و شامل هیچ دو عدد متوالی نمی‌باشد.

^۱Zechendorf

اثبات. نخست نشان می‌دهیم به ازای هر عدد صحیح مثبت N نمایش ۱.۲ تحت شرایط قضیه، یکتا می‌باشد. فرض می‌کنیم چنین نباشد. در این صورت زیرمجموعه‌های متمایز I و J از اعداد صحیح مثبت وجود دارند به طوری که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند و

$$(۲.۲) \quad N = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_j.$$

فرض می‌کنیم u_{i_k} و u_{j_k} بزرگ‌ترین جمله با شرط $u_{i_k} \neq u_{j_k}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم $u_{i_k} > u_{j_k}$ و برای جلوگیری از نوشتن اندیس‌های توأم $i_k = m$ و $j_k = p$ را قرار می‌دهیم. بنابراین، $m > p$ و با توجه به رابطه (۲.۲) داریم:

$$(۳.۲) \quad \sum_{\substack{i \in I \\ i \leq m}} u_i = \sum_{\substack{j \in J \\ j \leq p}} u_j.$$

سمت چپ رابطه (۳.۲) بزرگ‌تر یا مساوی u_m است در حالی که برای سمت راست این رابطه داریم:

$$\sum_{\substack{j \in J \\ j \leq p}} u_j \leq u_p + u_{p-2} + \dots + u_{1,2} = u_{p+1} - 1 < u_m$$

که این تناقض است؛ بنابراین، نمایش (۱.۲) یکتا می‌باشد.

اینک وجود نمایش (۱.۲) را به ازای هر عدد صحیح مثبت N و تحت شرایط قضیه بررسی می‌کنیم. با استفاده از استقرای ریاضی روی n ، نشان می‌دهیم که $0 \leq N < u_n$ نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه I از $\{1, 2, \dots, n-1\}$ وجود دارد به طوری که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و $N = \sum_{i \in I} u_i$. گزاره به ازای $n = 1$ بنابه انتهای مقدم برقرار است. به آسانی می‌توان نشان داد که این گزاره به ازای $n = 2$ و $n = 3$ نیز برقرار است. حال فرض می‌کنیم که گزاره به ازای $n = 1, 2, \dots, k$ ، که در آن $k \geq 3$ درست باشد. نشان می‌دهیم که این گزاره به ازای $n = k+1$ نیز صحیح است یا به طور معادل $0 \leq N < u_{k+1}$ نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه I از $\{1, 2, \dots, k\}$ وجود دارد به طوری که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و $N = \sum_{i \in I} u_i$. با توجه به فرض استقرا نتیجه برای N در محدوده $0 \leq N < u_k$ برقرار است. بنابراین، تنها نیاز داریم که حالت $u_k \leq N < u_{k+1}$ را مورد بررسی قرار دهیم. برای این حالت،

$$0 \leq N - u_k < u_{k+1} - u_k = u_{k-1}$$

و فرض استقرا نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه J از $\{1, 2, \dots, k-2\}$ وجود دارد به طوری که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و

$$N - u_k = \sum_{j \in J} u_j;$$

بنابراین، $N = \sum_{j \in J} u_j + u_k$ و از این رو نتیجه مطلوب با قرار دادن $I = J \cup \{k\}$ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه زخندورف بیان می‌کند که هر عدد صحیح مثبت با مجموع جملات یک زیردنباله متناهی از دنباله فیوناتچی با شرط حضور نداشتن جملات متوالی، به طور یکتا متناظر است. افزون بر این، براون در [۶] نشان داد که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان با جملات یک زیردنباله متناهی از دنباله فیوناتچی با شرط حضور داشتن حداقل یکی از هر دو جمله متوالی، به طور یکتا متناظر کرد.

۳. مجموعه دستاورد

در این بخش تنها دنباله‌هایی مورد نظر هستند که تمام جملات آن‌ها ناصفر باشند. همچنین، تمام دنباله‌ها نامتناهی هستند مگر این‌که به صراحت بیان شده باشد. مایلم اعداد حقیقی را همانند اعداد صحیح به صورت مجموعی از جملات یک زیردنباله (x_n) نمایش دهیم. بنابراین، به جای دنباله‌هایی از اعداد صحیح دنباله‌هایی از اعداد حقیقی را به کار می‌بریم. اما برخلاف دنباله‌های اعداد صحیح می‌توانیم زیردنباله‌های نامتناهی با مجموع جملات متناهی را نیز در نظر بگیریم [۸].

تعریف ۱.۳ (عدد دست‌یافته). عدد حقیقی r را عدد دست‌یافته توسط دنباله حقیقی (x_n) گوئیم هرگاه زیردنباله‌ای (احتمالاً متناهی) از (x_n) وجود داشته باشد به طوری که مجموع جملات آن به r همگرا باشد. عدد صفر را مجموع جملات زیردنباله تهی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲.۳ (مجموعه دستاورد). مجموعه تمام اعداد دست‌یافته توسط دنباله حقیقی (x_n) را مجموعه دستاورد دنباله (x_n) گوئیم و با $AS(x_n)$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از تعریف ۲.۳ و با توجه به تعریف دنباله کامل گفته شده در بخش قبل می‌توان تعریف جدید و البته معادل برای دنباله کامل را به صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۳.۳ (دنباله کامل). دنباله (x_n) از اعداد صحیح مثبت را کامل گوئیم هرگاه هر عدد صحیح مثبت یک عدد دست‌یافته توسط (x_n) باشد.

به عبارت دیگر می توان گفت: دنباله (x_n) از اعداد صحیح مثبت کامل است اگر و تنها اگر $AS(x_n) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

مثال ۴.۳. دنباله $(x_n) = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ را در نظر می گیریم. بدیهی است که تنها مجموع جملات زیر دنباله های متناهی این دنباله همگرا می باشند و به آسانی دیده می شود که $AS(x_n) = \mathbb{Z}$.

مثال ۵.۳. با توجه به قضیه ۳.۲ دنباله $(x_n) = \{1, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ یک دنباله کامل است، یعنی، $AS(x_n) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

تعریف ۶.۳ (دنباله دست آور برتر). دنباله حقیقی (x_n) را دست آور برتر^۱ گوئیم هرگاه $AS(x_n)$ به صورت یک بازه از اعداد حقیقی باشد.

مثال ۷.۳. دنباله $(\frac{1}{n})$ را در نظر می گیریم. می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ به عدد یک همگرا می باشد؛ بنابراین، $AS(x_n) \subseteq [0, 1]$. برای نشان دادن شمول معکوس از این حقیقت استفاده می کنیم که تمام اعداد حقیقی بین صفر و یک دارای بسط دودویی هستند؛ یعنی به ازای هر $r \in [0, 1]$

$$(1.3) \quad r = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{2^i}$$

که در آن ضرایب a_i صفر یا یک می باشند. اکنون زیرمجموعه I از $\mathbb{N}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$I = \{i \in \mathbb{N} : a_i = 1\}.$$

به آسانی دیده می شود که $\sum_{i \in I} x_i = r$. بنابراین، $r \in AS(x_n)$ و در نتیجه $AS(x_n) = [0, 1]$. پس دنباله $(\frac{1}{n})$ یک دست آور برتر می باشد.

لم ۸.۳. فرض می کنیم (x_n) دنباله ای از اعداد حقیقی است که مجموع جملات منفی آن به $s_N \leq 0$ همگرا باشد.

الف) هرگاه $I_p = \{i : x_i > 0\}$ و $I_N = \{i : x_i < 0\}$ ، آنگاه داریم:

$$(2.3) \quad AS(x_n) = AS(x_i : i \in I_p) + AS(x_i : i \in I_N);$$

$$-s_N + AS(x_n) = AS(|x_n|) \quad \text{ب)}$$

اثبات. الف) نشان می‌دهیم که هر زیردنباله از (x_n) با مجموع جملات همگرا، مجموع به طور مطلق همگرا دارد. بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که مجموع جملات دنباله (x_n) به عدد s همگرا باشد. فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ واگرا باشد. می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \sum_{i \in I_P} x_i + \sum_{i \in I_N} (-x_i).$$

سری $\sum_{i \in I_N} (-x_i)$ به $-s_N$ همگرا است؛ بنابراین، سری $\sum_{i \in I_P} x_i$ واگرا می‌باشد. پس به ازای هر $n_M \in \mathbb{N}$ ، $M \in \mathbb{R}^+$ ، وجود دارد به طوری که $\sum_{i \in I_P, i \leq n_M} x_i > M$ ؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n_M} x_i = \sum_{\substack{i \in I_P \\ i \leq n_M}} x_i + \sum_{\substack{i \in I_N \\ i \leq n_M}} x_i > M + s_N.$$

اکنون اگر از طرفین این رابطه وقتی که $M \rightarrow \infty$ حد گرفته شود، داریم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \rightarrow \infty$. این نتیجه با فرض تناقض ایجاد می‌کند. بنابراین، سری $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ به طور مطلق همگراست و در نتیجه هر تجدید آرایش آن همگرا و همه به یک مجموع همگرا می‌باشند؛ از این رو، رابطه (۲.۳) برقرار می‌باشد.

ب) با استفاده از قسمت الف) داریم:

$$(۳.۳) \quad AS(|x_n|) = AS(x_i : i \in I_P) - AS(x_i : i \in I_N).$$

فرض می‌کنیم که $r \in AS(x_n)$ ؛ پس $K \subseteq \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $r = \sum_{k \in K} x_k$. بنابراین، زیرمجموعه‌های $K_P \subseteq I_P$ و $K_N \subseteq I_N$ وجود دارند به طوری که $K = K_P \cup K_N$ ؛ از این رو داریم:

$$r - s_N = \left(\sum_{i \in K_P} x_i + \sum_{i \in K_N} x_i \right) - \sum_{i \in I_N} x_i = \sum_{i \in K_P} x_i - \sum_{i \in I_N \setminus K_N} x_i.$$

با استفاده از (۳.۳) آخرین جمله یک عضو از $AS(|x_n|)$ می‌باشد؛ بنابراین نشان داده‌ایم که:

$$-s_N + AS(x_n) \subseteq AS(|x_n|).$$

برای نشان دادن شمول معکوس، فرض می‌کنیم که $r \in AS(|x_n|)$ با استفاده از (۳.۳)، باید زیرمجموعه‌های $J_P \subseteq I_P$ و $J_N \subseteq I_N$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$r = \sum_{i \in J_P} x_i - \sum_{i \in J_N} x_i.$$

با اضافه و کم کردن $\sum_{i \in I_N} x_i$ به سمت راست رابطه اخیر داریم:

$$r = \left(\sum_{i \in J_P} x_i + \sum_{i \in I_N \setminus J_N} x_i \right) - s_N,$$

بنابراین $r \in -s_N + AS(x_n)$ [۹]. $\square$

قضیه ۹.۳. دنباله (x_n) از اعداد حقیقی را چنان در نظر می‌گیریم که $x_n \rightarrow 0$. هرگاه به‌زای هر $k \geq 1$

$$|x_k| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|, \quad (۴.۳)$$

آنگاه (x_n) یک دست‌آور برتر می‌باشد.

اثبات. I_P و I_N را به‌همان صورت مطرح شده در لم ۸.۳ در نظر می‌گیریم. نخست فرض می‌کنیم که $\sum_{i \in I_N} x_i$ همگرا باشد؛ بنابراین، مطابق لم ۸.۳، $AS(|x_n|)$ انتقال یافته $AS(x_n)$ است. پس کافی است نشان دهیم که $(|x_n|)$ یک دست‌آور برتر است؛ بنابراین، می‌توان فرض کرد که تمام جملات (x_n) مثبت هستند.

فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s \leq \infty$. چون برای هر (x_n) ، $0 \in AS(x_n)$ و چنانچه سری $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ به s همگرا باشد، $s \in AS(x_n)$ ؛ کافی است نشان دهیم $r \in AS(x_n)$ اگر و تنها اگر $0 < r < s$.

اگر $r \in AS(x_n)$ ، بدیهی است که $0 < r < s$. حال برعکس، فرض می‌کنیم $0 < r < s$ اندیس‌های $i_1, i_2, i_3, \dots$ را با استفاده از الگوریتم حریصانه^۱ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم i_1

^۱ Greedy Algorithm: الگوریتم حریصانه روشی است که در هر مرحله انتخاب عضوی انتخاب شود که براساس ویژگی مشخص، بهترین به نظر برسد. این انتخاب بدون توجه به انتخاب‌هایی که در مراحل قبل انجام شده و یا انتخاب‌هایی که در مراحل بعدی انجام خواهد شد، صورت می‌گیرد.

کوچکترین اندیس صادق در $r \leq x_{i_1}$ باشد. به طور قیاسی، هرگاه $i_1, i_2, \dots, i_m$ انتخاب شده باشند، $i_m + 1$ را کوچکترین اندیس اختیار می‌کنیم به طوری که $i_m + 1 > i_m$ و

$$x_{i_m+1} + \sum_{j=1}^m x_{i_j} \leq r,$$

به شرطی که حداقل یک چنین اندیسی وجود داشته باشد.

هرگاه این روند به پایان برسد، آنگاه باید m وجود داشته باشد به طوری که $i_1, i_2, \dots, i_m$ تعریف شده باشند، اما به ازای هر $n > i_m$ داشته باشیم

$$x_n + \sum_{j=1}^m x_{i_j} > r.$$

اگر از طرفین رابطه اخیر وقتی که $n \rightarrow \infty$ حد بگیریم، داریم:

$$\sum_{j=1}^m x_{i_j} \geq r.$$

از طرفی با توجه به فرض $\sum_{j=1}^m x_{i_j} \leq r$ ؛ بنابراین، $\sum_{j=1}^m x_{i_j} = r$ و در نتیجه $r \in AS(x_n)$. اکنون فرض می‌کنیم که روند ساخت i_j به پایان نرسد و افزون بر این فرض می‌کنیم که

$$A = \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$$

مجموعه‌ای ناتهی و متناهی باشد. چون $r < s$ ، مجموعه A باید شامل حداقل یک عدد صحیح مثبت باشد. فرض می‌کنیم k بزرگترین این چنین عدد صحیح باشد. $t = \sum_{i_j < k} x_{i_j}$ را در نظر می‌گیریم (فرض می‌کنیم $t = 0$ اگر هیچ $i_j < k$ وجود نداشته باشد)، آنگاه داریم:

$$x_k + t > r, \quad t + \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h} \leq r;$$

بنابراین، داریم:

$$x_k > \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h}$$

که با رابطه (۴.۳) تناقض دارد. اگر روند ساخت i_j به پایان نرسد، آنگاه $A = \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ مجموعه‌ای ناتهی و نامتناهی از اعداد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم $A = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$

با ترتیب صعودی باشد. این بدین معنی است که به ازای هر k_l ,

$$(۵.۳) \quad x_{k_l} + \sum_{i_j < k_l} x_{i_j} > r \geq \sum_{i_j < k_l} x_{i_j}.$$

با توجه به فرض $\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l} = 0$ و همچنین با حد گرفتن از (۵.۳) وقتی که $l \rightarrow \infty$ نتیجه می شود:

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j};$$

بنابراین، $r \in AS(x_n)$. این نتیجه قضیه را در حالتی که $\sum_{i \in I_N} x_i$ همگرا باشد، اثبات می کند. هرگاه $\sum_{i \in I_N} x_i$ واگرا باشد، آنگاه دنباله با جملات مثبت $(-x_i : i \in I_N)$ به ازای هر k در رابطه (۴.۳) صدق می کند. بنابراین، $AS(-x_i : i \in I_N) = [0, \infty)$ از این رو داریم:

$$AS(x_n) = \begin{cases} (-\infty, c] & \sum_{i \in I_P} x_i = c < \infty, \\ (-\infty, \infty) & \sum_{i \in I_P} x_i = \infty. \end{cases}$$

□ که در هر حالت، (x_n) یک دست آور برتر است.

۴. نتایج

در این بخش مجموعه دستاورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد فیبوناتچی تعمیم یافته را به دست می آوریم. همچنین شرایطی را بررسی می کنیم که به موجب آن ها مجموعه دستاورد دنباله ای، مجموعه اعداد حقیقی باشد [۸].

نتیجه ۱.۴. $AS\left(\frac{1}{n}\right) = [0, \infty)$.

اثبات. دنباله $\left(\frac{1}{n}\right)$ تمام شرایط قضیه ۹.۳ را دارد؛ پس یک دست آور برتر می باشد. افزون بر این، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است؛ بنابراین، $AS\left(\frac{1}{n}\right) = [0, \infty)$. □

نتیجه ۱.۴. ایجاب می کند که هر عدد حقیقی در بازه $[0, \infty)$ می تواند به صورت یک کسر مصری^۱ (احتمالاً نامتناهی) نمایش داده شود. حتی، برای تولید اعداد حقیقی نامنفی، می توان کسرهای مصری را به صورتی در نظر گرفت که مخرج هر یک از جمعوندها یک عدد اول باشد. این نتیجه از لم زیر Egyptian Fraction^۱: مجموع کسرهای واحد (کسرهایی که صورت آن یک و مخرج آن یک عدد صحیح مثبت باشد). متمایز نظیر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ را کسر مصری می گویند.

پیروی می‌کند که سری $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ که در آن $\mathbb{P}$ مجموعه اعداد اول می‌باشد، واگراست. این مطلب در [۳] نشان داده شده است.

لم ۲.۴. سری $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم سری $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ همگرا باشد. بنابراین، برای عدد اولی مانند q ، $\sum_{p \geq q} \frac{1}{p} = s < 1$. قرار می‌دهیم $t = \prod_{p < q} p$. از این رو، به‌ازای هر $n \geq 1$ ، هرگاه p یک عدد اول و $p < q$ ، آنگاه $(1 + nt) \nmid p$. زیرا با توجه به این‌که $p \mid nt$ نتیجه می‌شود که $1 \mid p$ و این ممکن نیست. از این جهت، برای $n \geq 1$ حاصل ضرب اعداد اول بزرگ‌تر از q می‌باشد؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + nt} &\leq \sum_{p \geq q} \frac{1}{p} + \sum_{p_1, p_2 \geq q} \frac{1}{p_1 p_2} + \sum_{p_1, p_2, p_3 \geq q} \frac{1}{p_1 p_2 p_3} + \dots \\ &= s + s^2 + s^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} s^n < \infty. \end{aligned}$$

پس با توجه به آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + nt}$ همگراست. از طرف دیگر داریم:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + nt} \geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + nt} = \frac{1}{1 + t} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

که نتیجه می‌شود سری $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + nt}$ واگراست و این تناقض ایجاد می‌کند؛ بنابراین، سری $\sum \frac{1}{p}$ واگرا می‌باشد. $\square$

نتیجه ۳.۴. $AS\left(\frac{1}{p}\right) = [0, \infty)$.

اثبات. دنباله $\left(\frac{1}{p}\right)$ تمام شرایط قضیه ۹.۳ را دارد. از طرفی، بنابر لم ۲.۴ سری $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست؛ بنابراین، $AS\left(\frac{1}{p}\right) = [0, \infty)$. $\square$

اکنون به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که تشابهی با قضیه تجدید آرایش ریمان دارد؛ اما باید توجه داشت که در بحث ما تنها حذف جملات و نه تجدید آرایش جملات، مجاز هستند.

قضیه ۴.۴. هرگاه (x_n) دنباله‌ای باشد که جملاتش یک سری همگرایی شرطی را ایجاد کند، آنگاه $AS(x_n) = \mathbb{R}$.

اثبات. فرض می‌کنیم I_P و I_N به ترتیب مجموعه‌های اندیس‌های جملات مثبت و منفی دنباله (x_n) باشند. همگرایی شرطی، $\sum_{i \in I_P} x_i = \infty$ و $\sum_{i \in I_N} x_i = -\infty$ را نتیجه می‌دهد و قضیه ۹.۳ نشان می‌دهد که $AS(x_i : i \in I_P) = [0, \infty)$ و $AS(x_i : i \in I_N) = (-\infty, 0]$. بدین ترتیب، نتیجه مورد نظر فوراً به دست می‌آید. $\square$

عکس قضیه ۴.۴. درست نیست. برای نمونه، دنباله $\{-1, \frac{1}{4}, -2, \frac{1}{8}, -3, \frac{1}{16}, \dots\}$ را می‌توان در نظر گرفت. مجموعه دستاورد این دنباله $\mathbb{R}$ است، در حالی که شامل هیچ زیردنباله همگرای شرطی نمی‌باشد.

$$\text{نتیجه ۵.۴. } AS\left((-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right) = \mathbb{R}.$$

اثبات. دنباله $(\frac{1}{n})$ ، نزولی و همگرا به صفر است؛ بنابراین، با توجه به آزمون لایب‌نیتز (آزمون سری متناوب)، $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ همگراست. از طرفی، این سری به طور مطلق همگرا نیست. پس جملات دنباله $(-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ یک سری همگرای شرطی را می‌سازد. بدین ترتیب، نتیجه مورد نظر با استفاده از قضیه ۴.۴ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه پایانی یک روش کاربردی برای نشان دادن این است که بسیاری از دنباله‌هایی که جملات آن‌ها یک سری به طور مطلق همگرا می‌سازند، دست‌آور برتر هستند.

قضیه ۶.۴. دنباله (x_n) از اعداد حقیقی را چنان در نظر می‌گیریم که $x_n \rightarrow 0$ و فرض می‌کنیم به ازای هر n ، $|x_{n+1}| \geq \frac{1}{4}|x_n|$ ، آنگاه (x_n) یک دست‌آور برتر می‌باشد.

اثبات. ابتدا با توجه به فرض و با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم رابطه $|x_{n+i}| \geq \frac{1}{4^i}|x_n|$ به ازای هر n و i برقرار می‌باشد.

به ازای $i = 1$ رابطه به وضوح درست است. فرض می‌کنیم رابطه به ازای $i \leq k$ برقرار باشد؛ یعنی: $|x_{n+k}| \geq \frac{1}{4^k}|x_n|$.

اکنون صحت درستی رابطه داده شده را به ازای $i = k + 1$ به صورت زیر بررسی می‌کنیم.

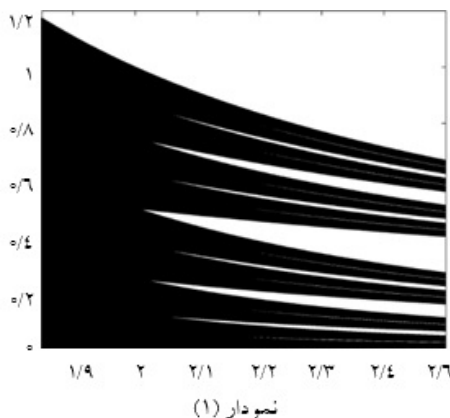
$$|x_{n+k+1}| \geq \frac{1}{4}|x_{n+k}| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4^k} |x_n| \right) = \frac{1}{4^{k+1}} |x_n|.$$

بنابراین؛ به ازای هر n ،

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n+i}| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} |x_n| = |x_n| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = |x_n|.$$

□ بدین ترتیب، با استفاده از قضیه ۹.۳ نتیجه می شود که (x_n) یک دست آور برتر می باشد.

یک کاربرد فوری قضیه ۶.۴ این است که دنباله $\left(\frac{1}{c^n}\right)$ یک دست آور برتر می باشد هرگاه $1 < c \leq 2$ ، که این توضیحی برای نمودار (۱) است. در این نمودار، محور افقی تغییرات c را نشان می دهد. مجموعه دستاورد به ازای $c > 2$ کلاً ناهمبند می باشد. بیشتر شکاف ها خیلی باریک هستند و از این جهت قابل رؤیت نیستند.



لم ۷.۴. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ که در آن F_n نمایش n امین عدد دنباله فیوناتچی تعمیم یافته است، همگرا می باشد.

اثبات. با استفاده از استقرای ریاضی به آسانی می توان نشان داد که اگر $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n رابطه

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \bar{\varphi}^n)$$

که به فرمول بینه^۱ معروف می باشد، برقرار است. حال به این مطلب توجه می کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{\varphi^n}$ یک سری هندسی با قدرنسبت $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ و در نتیجه همگراست. از طرف دیگر،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}/\varphi^n}{\sqrt{5}/(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)} = 1.$$

□ اکنون با استفاده از آزمون مقایسه حدی می توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ همگراست.

^۱Binet

از آن جا که برای به دست آوردن مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ نیاز به مقدمات زیادی داریم، با استفاده از [۹]، تنها به بیان این نکته بسنده می‌کنیم که این مقدار عددی گنگ و تقریباً برابر $\frac{3}{36}$ می‌باشد.

نتیجه ۸.۴. دنباله $\left(\frac{1}{F_n}\right)$ که در آن F_n بیانگر n مین جمله دنباله فیبوناتچی تعمیم یافته است، یک دست‌آور برتر می‌باشد.

اثبات. با توجه به تعریف دنباله فیبوناتچی تعمیم یافته داریم: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2F_n$ ؛ بنابراین، $\frac{1}{F_{n+1}} \geq \frac{1}{2F_n}$. بدین ترتیب، از قضیه ۶.۴ درمی‌یابیم که $\left(\frac{1}{F_n}\right)$ یک دست‌آور برتر می‌باشد؛ یعنی $AS\left(\frac{1}{F_n}\right) = [\alpha, \beta]$ که در آن $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$. $\square$

این بخش را با بیان کاربرد دیگری از قضیه ۶.۴ به پایان می‌بریم.

تعریف ۹.۴ (دنباله لوکاس). دنباله $(L_n)_{n \geq 0}$ که جملات آن به صورت

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

تعریف می‌شوند، دنباله لوکاس^۱ می‌نامند.

لم ۱۰.۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$ که در آن L_n بیانگر n مین جمله دنباله لوکاس است، همگرا می‌باشد.

اثبات. دنباله $(F_n)_{n \geq 0}$ را به صورت $\{0, 1, 1, 2, 3, \dots\}$ در نظر می‌گیریم. بدیهی است که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ بین جملات دنباله لوکاس و جملات دنباله (F_n) برقرار است. از این رو، به ازای هر $n \geq 1$ داریم:

$$\frac{1}{L_n} = \frac{1}{F_n + 2F_{n-1}} < \frac{1}{F_n}.$$

اکنون آزمون مقایسه نتیجه می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$ همگرا است. $\square$

نتیجه ۱۱.۴. دنباله $\left(\frac{1}{L_n}\right)_{n \geq 0}$ یک دست‌آور برتر می‌باشد.

اثبات. دنباله $\left(\frac{1}{L_n}\right)_{n \geq 0}$ در شرایط قضیه ۶.۴ صدق می‌کند؛ از این رو، $\left(\frac{1}{L_n}\right)$ یک دست‌آور برتر است. افزون بر این، با استفاده از لم ۱۰.۴ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n} = \alpha$ داریم $AS\left(\frac{1}{L_n}\right) = [\alpha, \alpha]$. $\square$

^۱Lucas

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از سردبیر محترم مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی جناب آقای دکتر احمد صفاپور جهت پیگیری مداوم وضعیت مقاله و همچنین از داوران محترم که نکات سودمندی را جهت اصلاح مقاله متذکر شدند، سپاسگزاری می نمایم.

مراجع

- [1] D. E. Daykin, *Representaion of natural numbers as sums of generalized Fibonacci numbers*, Journal London Math. Soc., **35** (1960), 143-160.
- [2] H. Hornich, *Über beliebige Teilusmmen absolut konvergenter Reihen*, Monatsh. Math. Phys., **49** (1941), 316-320.
- [3] J. Owing, $\sum \frac{1}{p}$ Diverges, Amer. Math. Monthly, **117** (2010), 231.
- [4] J. L. Brown Jr., *Note on complete sequence of integers*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), 557-560.
- [5] J. L. Brown Jr., *Zechendorf's therorem and some applications*, The Fibonacci Quarterly, **2** (1964), 163-168.
- [6] J. L. Brown Jr., *A new characterization of the Fibonacci numbers*, The Fibonacci Quarterly, **3** (1965), 1-8. **35** (1960), 143-160.
- [7] P. Ribenboim, *My Numbers, My Friends*, Springer-Berlag, New York, (2000).
- [8] R. Jones, *Achievement Sets of Sequence*, Amer. Math. Monthly, **118** (2011), 508-521.
- [9] R. A. Jeannin, *Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I math., **308** (1989), 539-541.
- [10] S. Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Sci. Rep. Tōhoku Imperial Univ., **3** (1914), 159-163.
- [11] V. E. Hoggatt and C. King, *Problem E 1424*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 593.

صدیقه بلادی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد استهبان، گروه ریاضی

رایانامه: sedigheh.beladi@yahoo.com

جواد بهبودیان، دانشگاه شیراز، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: Behboodian@Susc.ac.ir

پریسا ترابیان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد استهبان، گروه ریاضی

رایانامه: parisatorabian@yahoo.com

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 34, No. 1, Spring 2015

Editor-in-Chief

Ahmad Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

Managing Editor

Shiva Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

Editorial Board

A. Abdollahi, Shiraz University
abdollahi@shirazu.ac.ir

B. Hashemi, Shiraz University of Technology
hoseynhashemi@gmail.com

E. Momtahan, Yasouj University
momtahan_e@hotmail.com

S. Maghsoudi, Zanjan University
s_maghsodi@znu.ac.ir

E. Pasha, Kharazmi University
pasha@kmu.ac.ir

A. Rafiepour, Shahid Bahonar University of Kerman
drafiepour@gmail.com

A. Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

R. Zaare-Nahandi, Institute for Advanced Studies in Basic Science
rashidzn@iasbs.ac.ir

S. Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

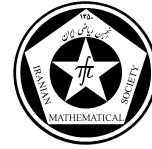
Editorial Office

F. Samadian, Iranian Mathematical Society
farhang@ims.ir

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir



فهرست مطالب

۱	 سرمقاله
	جبرهای عملگری؛
۷	 نایجل هیگسون و جان رو، برگردان: سمیه رحیمی و بامداد یاحقی
	تعمیم در ریاضیات؛
۳۷	 مارال روئین، رستم محمدیان، نوراله نژاد صادقی
	یادداشتی بر مجموعه‌های حدی در دستگاه‌های دینامیکی؛
۴۹	 ابوالحسن رزمی نیا
	نرمال‌سازی نوטר و پایه گرینر؛
۶۹	 امیر هاشمی، نازنین رحمانی
	مجموعه‌دست‌آورد دنباله همساز و دنباله معکوس اعداد فیبوناتچی؛
۸۳	 صدیقه بلادی، جواد بهبودیان، پریسا تراپیان

لیتوگرافی، چاپ و صحافی:
