

بسم الله الرحمن الرحيم



فرهنگ و اندیشه ریاضی

علمی-ترویجی

ISSN: 1022-6443

سال ۳۴، شماره ۲، پاییز و زمستان
۱۳۹۴

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۹۴)

شماره پیاپی: ۵۷

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسئول: سید منصور واعظپور

سردبیر: احمد صفاپور

ویراستار ارشد: ابوالفضل رفیعپور

مدیر اجرایی: شیوا زمانی

هیأت تحریریه:

عین‌اله پاشا، دانشگاه خوارزمی

ابوالفضل رفیعپور، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رشید زارع نهندی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم

پایه زنجان

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

عبدالعزیز عبداللہی، دانشگاه شیراز

سعید مقصودی، دانشگاه زنجان

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

بهنام هاشمی، دانشگاه صنعتی شیراز

حروفچینی: X_YPersian - دفتر انجمن ریاضی

تهیه و تنظیم: فریده صمدیان

نشانی: تهران - صندوق پستی: ۴۱۸-۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۷۷۷۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۸۸۵۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir

نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir

سامانه نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشه ریاضی نشریه علمی-ترویجی انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشار مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفی ریاضیات را ترویج می‌دهند و هم بازگوکننده فرهنگ و روند ریاضیات حاکم بر جامعه ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائه موضوعی فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیری موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمه مقاله‌هایی از نوع یادشده در بالا یا ترجمه مقالات کلاسیک ریاضی (ترجمه آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛

- ارائه موضوعات آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقاله خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- مقالات با استفاده از نرم‌افزار «زی‌پرشین» تهیه شده و نسخه پی‌دی‌اف آن از طریق سامانه نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال شود. در صورتی که مقاله فرستاده شده، پس از طی مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «زی‌پرشین» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.

- فرستادن اصل مقاله ترجمه شده همراه با ترجمه آن الزامی است.

- نام و نشانی اصل مقاله ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحه اول ترجمه مقاله ذکر شود.

- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی آورده شود.

دارند می‌توانند با دبیرخانه انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.
شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانه انجمن ریاضی خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

مسئله آپولونیوس؛ منصور معتمدی	۱
رویکردی در تدریس ریاضیات عالی؛ مسعود آرتین نژاد	۲۹
نظریه بازی‌ها و مسابقه طناب کشی؛ پیمان فهیمی	۴۳
بافه چیست؟؛ ای. سیباخ، ال. سیباخ، ال. استین؛ برگردان: داود حسن‌زاده للکامی و هاجر روشن شکالگورابی	۵۳
بهینه‌سازی معکوس و کاربردهای آن در شبکه جریان و بهینه‌سازی سهام؛ مجید سلیمانی دامنه، شیدا عموکاطمی	۸۱
مجموعه‌های اندازه‌پذیر به مثابه نقاط حدی؛ جی. تاناکا، پی. اف. مک‌لولین؛ برگردان: رسول کاظمی	۹۷
قدردانی. از آقایان دکتر روح‌اله جهانی‌پور و دکتر سید احمد موسوی که در ویرایش و آماده‌سازی این شماره همکاری صمیمانه‌ای داشته‌اند تقدیر و تشکر می‌شود.	

سردبیر



عکس روی جلد: ژان لور (Jean Leray) مربوط به مقاله «بافه چیست؟»

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشه ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشند.
 - مقاله ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده (گان) یا مترجم (ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.
 - در ابتدای مقاله چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله آورده شود.
 - پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
 - رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویه مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا ذکر شود.
 - اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی و در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
 - به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش را در نوشتن مقالات رعایت فرمایید.
 - فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید؛ نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب را رعایت کنید:
۱. اگر مرجع ذکر شده، مقاله لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شماره مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقاله مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
 ۲. اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
- توجه کنید که تعداد صفحات مقاله ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
 - هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.
- فرهنگ و اندیشه ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود. علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی

مسئله آپولونیوس

منصور معتمدی

چکیده

مسئله آپولونیوس عبارت است از رسم دایره‌ای که بر سه دایره مفروض مماس باشد. هدف این نوشته بررسی تاریخی، معرفی بعضی راه‌حل‌ها و بیان تعمیم و کاربردهای این مسئله کلاسیک است.

۱. مقدمه

در تاریخ ریاضیات یونان باستان، جایگاه اول و دوم به ترتیب به اقلیدس و ارشمیدس نسبت داده می‌شود. مقام سوم از آن آپولونیوس پرگایی است. شهرت «هندسه‌دان کبیر»، لقبی که هم روزگاران وی به او نسبت داده‌اند، بیشتر به سبب اثر شگفت‌انگیز او «مقاطع مخروطی» است. این اثر در هشت مقاله (فصل) در حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد نوشته شده که هفت مقاله اول آن به دست ما رسیده است. در چند مقاله آخر مباحث پیشرفته‌ای مانند کمترین فاصله یک نقطه از یک مقطع مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. از این رو تعجب آور نیست که تنها چهارمقاله از هشت مقاله اولیه به زبان یونانی باقی مانده است، اما آپولونیوس، صاحب آثار دیگری نیز هست که کمتر شناخته شده‌اند.

در عصر رنسانس علاقه جدی به آثار ریاضی‌دانان دوران یونان باستان و از جمله آپولونیوس به وجود آمده بود. از طرفی آثار هندسه‌دان کبیر به زبان‌های یونانی یا لاتینی، در غرب وجود نداشت.

عبارات و کلمات کلیدی. تماس، صفحه انعکاسی، تبدیل لاگر.

برای رفع این مشکل و پرکردن شکاف، دانشمندان به ترجمه آثار یونانی روی آوردند. همان طور که می‌دانیم این کوشش‌ها با موفقیت‌های زیادی همراه بوده است.

چهار مقاله اول آپولونیوس در قرن نهم میلادی توسط هلال حمصی و سه مقاله پنجم تا هفتم توسط ثابت بن قُره از یونانی به عربی ترجمه شد [۲]. ابوالفتح اصفهانی در سال ۵۱۳ هجری از این هفت مقاله خلاصه‌ای فراهم آورد و آن را «تلخیص المخروطات» نامید. این اثر در سال ۱۶۶۱ میلادی به زبان لاتین ترجمه و سپس در سال ۱۹۲۳ میلادی از روی ترجمه لاتینی به فرانسوی برگردانده شد. از طرف دیگر ریاضیدانان عصر رنسانس تحت تأثیر شرایط موجود، به منظور احیای کارهای ناپدیدشده آپولونیوس کوشش‌های خود را بر اساس نقل قول‌ها، اشاره‌ها و مراجع در آثار دیگران بنا نهادند. در بین نوشته‌های آپولونیوس که غیرمستقیم از آن‌ها اطلاع داریم، مقاله‌ای با عنوان «در باب تماس» وجود دارد که مشکل‌ترین مسئله آن چنین بیان می‌شود:

دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایره مفروض مماس باشد.

این مسئله امروزه به مسئله آپولونیوس معروف است. هدف این نوشتار شرح مختصر راه حل‌ها، تعداد جواب‌ها، تعمیم‌ها و کاربردهای آن است.

۲. بیان کلی مسئله

مسئله آپولونیوس در حالت کلی رسم یک یا بیش از یک دایره است که بر سه شیء در یک صفحه مماس باشند. هر کدام از این سه شیء می‌تواند یک نقطه، یک خط یا یک دایره باشد. این اشیاء می‌توانند به هر طریقی شکل‌بندی شوند، اما متمایز در نظر گرفته می‌شوند، بدین معنی که بر یکدیگر منطبق نیستند. خاصیت تماس چنین تعریف می‌شود: نخست فرض می‌کنیم که یک نقطه، خط یا دایره بر خودش مماس است، از این رو اگر یکی از دایره‌ها بر دو دایره دیگر مماس باشد، به عنوان یک جواب مسئله آپولونیوس شمارش می‌شود. گوئیم دو شیء هندسی یکدیگر را قطع می‌کنند هرگاه دارای یک نقطه مشترک باشند. بنا به تعریف، یک نقطه بر یک خط یا یک دایره مماس است، هرگاه آنها را قطع کند، یعنی بر آنها واقع باشد، پس دو نقطه متمایز نمی‌توانند مماس باشند. اگر زاویه بین خط‌ها و دایره‌ها در محل تقاطع صفر باشد، گوئیم آن دو بر یکدیگر مماس‌اند. در عمل دو دایره برهم مماس‌اند هرگاه در یک نقطه متقاطع باشند. اگر تعداد نقطه‌های برخورد صفر یا دو باشد، مماس نیستند. در مورد یک خط و یک دایره نیز چنین است. می‌توان دو خط موازی را به عنوان مماس در نقطه‌ای در بینهایت در نظر گرفت. دایره جواب می‌تواند مماس داخلی یا مماس

خارجی، بر هر یک از دایره‌ها باشد. مماس خارجی مماسی است که دو دایره مماس در نقطه تماس، خمیدگی‌شان از یکدیگر دور شده، در دو جهت مخالف خط مماس در آن نقطه قرار داشته و هیچ‌کدام شامل دیگری نباشد. در این حالت فاصله بین دو مرکز برابر مجموع دو شعاع است. مماس داخلی مماسی است که در آن، دو دایره در نقطه تماس در یک جهت خمیده شده‌اند و دو دایره در یک طرف خط مماس هستند. در این حالت فاصله بین دو مرکز برابر تفاضل دو شعاع است. بنابر آنچه گفته شد، می‌توان مسئله آپولونیوس را در حالت کلی چنین بیان کرد:

سه شیء که هر کدام می‌توانند یک نقطه، یک خط یا یک دایره باشند مفروض‌اند دایره‌ای رسم کنید که از هر یک از نقطه‌ها بگذرد و بر خط‌ها و دایره‌ها مماس باشد.

مسئله آپولونیوس با توجه به انتخاب هر کدام از سه شیء، ده حالت را در بر می‌گیرد. چنانچه نقطه‌ها را با P ، خط‌ها را با L و دایره‌ها را با C نشان دهیم، معمول است که هر کدام از این حالت، را با یک کد سه حرفی نمایش دهند. پس این ده حالت عبارت‌اند از:

$PPP \quad PPL \quad PLL \quad LLL \quad PPC$

$PLC \quad PLL \quad LCC \quad LLC \quad CCC$

چهار حالت اول شامل هیچ دایره‌ای نیست و حالت آخر در واقع مسئله کلاسیک آپولونیوس است. بیان کلی مسئله آپولونیوس به مجموعه نقطه‌ها، خط‌ها و دایره‌ها نظر دارد. از طرفی انعکاس، عناصر این مجموعه را به یکدیگر تبدیل می‌کند، پس طبیعی است که برای حل این مسئله از انعکاس استفاده شود. از این جهت بخش بعد را به مروری به «صفحه انعکاسی» و تبدیل انعکاس در آن صفحه اختصاص می‌دهیم.

۳. صفحه انعکاسی

انعکاس، تمام نقطه‌های واقع بر یک دایره مفروض را ثابت نگاه داشته و نقطه‌های داخل و خارج را رد و بدل می‌کند. با افزودن نقطه بینهایت به صفحه اقلیدسی صفحه انعکاسی یا صفحه موبیوس به دست می‌آید. این نقطه را با P_{∞} نشان می‌دهیم. این کار شبیه افزودن یک خط ابدال به صفحه اقلیدسی است که هندسه تصویری را به وجود می‌آورد و به همان اندازه مفید به نظر می‌رسد. در صفحه انعکاسی می‌توان خط‌های راست را دایره‌هایی دانست که از P_{∞} می‌گذرند.

نخست به بیان و اثبات قضیه زیر می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که دو دایره بر هم عمودند هرگاه مماس‌های بر آن دو دایره در یکی از نقطه‌های تقاطع بر یکدیگر عمود باشند.

قضیه ۱.۳. هر دایره‌ای که از نقطه A می‌گذرد و بر دایره σ عمود است (دایره σ از A نمی‌گذرد) از نقطه ثابت دیگر A' نیز می‌گذرد.

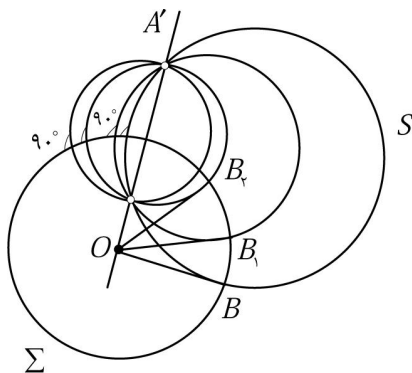
اثبات. فرض می‌کنیم S دایره‌ای باشد که از A گذشته و بر Σ عمود است. اگر A' نقطه برخورد دیگر OA با دایره S باشد، نقطه O را به B نقطه برخورد Σ و S وصل می‌کنیم (شکل ۱). OB بر S مماس است و بنا به خاصیت معروف مماس بر دایره

$$OA.OA' = OB^2$$

یا این که

$$OA' = \frac{R^2}{OA}$$

که در آن R شعاع دایره است. از این رو A' نقطه تلاقی OA با S به انتخاب S بستگی نداشته و تمام دایره‌هایی که از A می‌گذرند، از A' نیز می‌گذرند. $\square$



شکل ۱

بنا به قضیه ۱.۳ تعریف زیر موجه به نظر می‌رسد.

تعریف ۲.۳. گوئیم نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به دایره است، هرگاه هر دایره‌ای که از A می‌گذرد و بر Σ عمود است، از A' نیز بگذرد.

تعریف ۳.۳. تقارن نسبت به یک دایره مفروض را انعکاس می‌نامند. دایره Σ دایره انعکاس، مرکز دایره، مرکز انعکاس و مربع شعاع آن، یعنی $K = R^2$ قوت انعکاس نامیده می‌شود.

بدیهی است که اگر A' منعکس A نسبت به Σ باشد، A نیز منعکس A' نسبت به Σ است. از این رو انعکاس یک برگشت است. مشاهده می‌کنیم که قرینه (انعکاس) نسبت به یک دایره در واقع تعمیم قرینه نسبت به یک خط است، زیرا که در صفحه انعکاسی خط مثل دایره‌ای است که از P_∞ می‌گذرد. دیگر این‌که منعکس O مرکز دایره انعکاس، P_∞ است. منعکس تمام نقطه‌های واقع بر شکل F نسبت به دایره انعکاس Σ شکلی را می‌سازند که آن را منعکس F نسبت به Σ می‌نامند. گاهی برای سهولت در امر نگارش خط‌ها و دایره‌ها را در صفحه انعکاسی، دایره انعکاسی یا به اختصار i -دایره می‌نامند.

اینک به بیان بعضی از ویژگی‌های اصلی انعکاس در صفحه انعکاسی می‌پردازیم.

(۱) منعکس هر نقطه واقع بر دایره انعکاس بر خودش منطبق است. نقطه‌های درون دایره به بیرون دایره و نقطه‌های بیرون آن به درون آن تبدیل می‌شوند.

(۲) منعکس خط راستی که از مرکز انعکاس بگذرد بر خودش منطبق است.

(۳) منعکس خط راستی که از مرکز انعکاس نگذرد، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(۴) منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نگذرد خطی است عمود بر خطی که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(۵) منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نگذرد یک دایره است.

(۶) دایره S تحت انعکاس با دایره Σ ناوردا می‌ماند اگر و تنها اگر بر Σ عمود باشد.

(۷) انعکاس تبدیلی است همدیس، بدین معنی که زاویه بین دو خم را ناوردا نگه می‌دارد. به ویژه دو دایره بر یکدیگر مماس هستند اگر و تنها اگر مبدل‌های آن دو بر یکدیگر مماس باشند.

(۸) به وسیله انعکاس می‌توان هر جفت i -دایره غیرمقاطع را به یک جفت دایره هم مرکز تبدیل کرد.

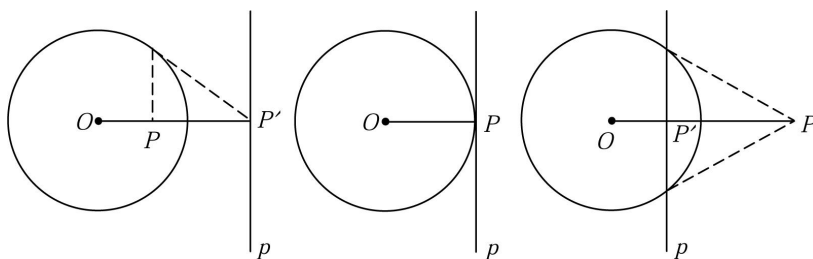
(۹) به وسیله انعکاس می‌توان هر جفت i -دایره متقاطع را به یک جفت خط متقاطع تبدیل کرد.

(۱۰) به وسیله انعکاس هر جفت i -دایره مماس را می‌توان به یک جفت خط موازی تبدیل کرد.

۴. قطب و قطبی

به سبب رابطه نزدیک قطب و قطبی با انعکاس و کاربرد آن در حل مسئله آپولونیوس در این بخش به یادآوری بعضی نکته‌ها درباره آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. دایره C به مرکز O و شعاع P را در نظر می‌گیریم. نظیر هر نقطه P یک خط وجود دارد که از P' منعکس P نسبت به C می‌گذرد. این خط را قطبی P نسبت به C می‌نامیم و آن را با P نشان می‌دهیم. به عکس نظیر هر خط p یک نقطه P وجود دارد که بر عمود OP' وارد بر p واقع است و منعکس نقطه P' نسبت به C می‌باشد. این نقطه قطب خط p نامیده می‌شود. بنابراین نسبت به دایره C هر نقطه یک قطبی و هر خط یک قطب دارد.



شکل ۲

توجه ۲.۴. برای کامل بودن بحث، قطبی مرکز انعکاس را خط در بینهایت و قطب هر قطر دایره انعکاس را نقطه در بینهایت، در جهتی که بر آن عمود است، تعریف می‌کنیم.

موارد زیر با استفاده از ویژگی‌های انعکاس و با توجه به شکل اثبات می‌شوند.

(۱) اگر P بر دایره واقع باشد، قطبی آن بر دایره مماس است و از P می‌گذرد. تنها در این حالت، قطب بر قطبی واقع است.

(۲) اگر P در خارج دایره باشد، برای رسم آن می‌توان از P دو مماس رسم کرد و نقطه‌های تماس را به یکدیگر وصل نمود.

(۳) اگر خطی دایره را قطع کند، قطب آن در داخل دایره واقع است.

(۴) اگر خطی بر دایره مماس باشد، قطب آن همان نقطه تماس است.

(۵) اگر خطی دایره را در دو نقطه قطع کند، قطب آن در خارج دایره است.

مهمترین خاصیت قطب و قطبی در قضیه زیر بیان می‌شود و اثبات را می‌توان در [۳]، صفحه ۱۶۹ یافت.

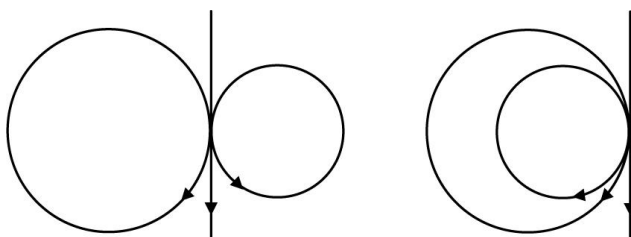
قضیه ۳.۴. قطبی هر نقطه واقع بر یک خط مفروض از قطب آن خط می‌گذرد.

۵. دایره‌های جهت‌دار

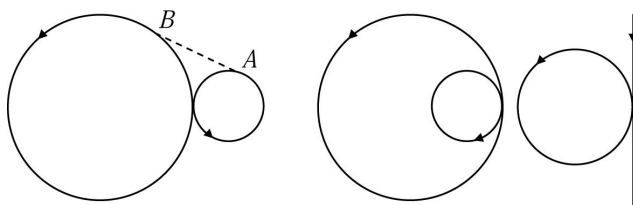
به هر دایره در صفحه می‌توان دو جهت نسبت داد. یکی پاد ساعتگرد که آن را مثبت اختیار می‌کنیم و دیگری ساعتگرد که آن را مثبت در نظر می‌گیریم. یک دایره جهت‌دار را دور نیز می‌نامند. جهت هر دور را مانند خط‌های جهت‌دار با یک پیکان مشخص می‌کنند. می‌توان شعاع دایره‌ای را که به‌طور مثبت جهت‌دار شده است، مثبت و شعاع دایره‌ای را که به‌طور منفی جهت‌دار شده است، منفی اختیار کرد. نقطه‌ها، یعنی دایره‌هایی با شعاع صفر فاقد جهت هستند.

تعریف ۱.۵. گوئیم دو دایره جهت‌دار یا یک خط جهت‌دار و یک دایره جهت‌دار مماس‌اند هرگاه خط‌ها و دایره‌های زمینه آن‌ها بر یکدیگر مماس بوده و جهت آن در نقطه تماس یکی باشد.

در شکل ۳ دایره‌ها و خط‌های جهت‌دار مماس‌اند. از طرفی در شکل ۴ دو دایره جهت‌دار و نیز خط جهت‌دار و دایره جهت‌دار مماس نیستند.

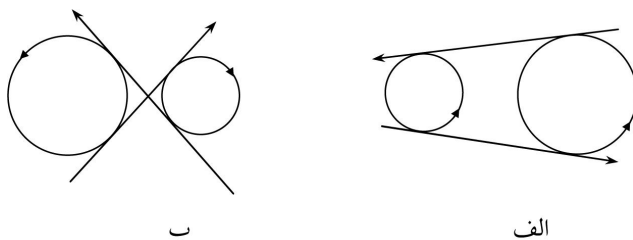


شکل ۳



شکل ۴

از آنچه که گفته شد چنین نتیجه می‌شود که دو دایره جهت‌دار نمی‌توانند بیش از دو مماس مشترک داشته باشند. چنان چه جهت دو دایره یکی باشد، مماس‌ها خارجی‌اند و در غیراین صورت مماس‌ها داخلی‌اند (شکل ۵).



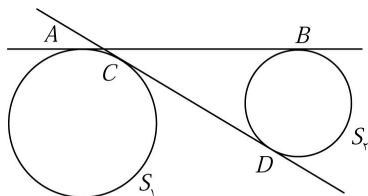
شکل ۵

با توجه به این که نقطه‌ها، دایره‌هایی به شعاع صفر هستند و جهت ندارند گوئیم یک دایره یا یک خط بر نقطه A مماس است، هرگاه از A بگذرد. فاصله مماسی دو دایره که جهت‌دار نیستند می‌تواند دو مقدار AB یا CD باشد (شکل ۶).

حال آنکه دو دایره جهت‌دار نمی‌توانند بیش از دو مماس مشترک داشته باشند. از طرفی طول پاره خط‌های این دو مماس برابر است. از این رو تعریف زیر موجه می‌نماید.

تعریف ۲.۵. فاصله مماسی بین دو دایره جهت‌دار طول مماس مشترک‌های آن دو دایره جهت‌دار است (شکل ۵)

می‌دانیم هر جفت خط متقاطع دو زاویه تشکیل می‌دهند. اما زاویه بین دو خط جهت‌دار متقاطع نیز به طور یکتا مشخص می‌شود. با استفاده از این نکته می‌توان ضرب داخلی دو دایره را تعریف



شکل ۶

و خواص آن را بررسی کرد [۴]. اگر دو دایره جهت‌دار مماس مشترک نداشته باشند، برای مثال یکی داخل دیگری باشد، دارای فاصله مماسی نیستند. به همین نحو زاویه بین دو دایره غیرمقاطع مشخص نیست. اینک می‌توان گفت سه گفته زیر معادل‌اند:

(آ) دو دایره جهت‌دار C_1 و C_2 مماس‌اند،

(ب) زاویه بین C_1 و C_2 صفر است،

(پ) فاصله مماسی C_1 و C_2 صفر است.

به سادگی دیده می‌شود که اگر شعاع‌های دو دایره جهت‌دار C_1 و C_2 به ترتیب برابر r_1 و r_2 و فاصله بین مرکزهای آن دو برابر d باشد، آنگاه فاصله مماسی بین C_1 و C_2 برابر است با

$$t = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

تعریف ۳.۵. فرض کنیم a یک عدد حقیقی ناصفر باشد، یک انبساط (مثبت یا منفی) تبدیلی است که بر روی خط‌ها و دایره‌های جهت‌دار به طریق زیر عمل می‌کند:

الف) اگر a مثبت باشد، هر خط جهت‌دار به اندازه a به سمت راست می‌رود و اگر a منفی باشد، به اندازه a به سمت چپ می‌رود.

ب) هر دایره جهت‌دار به مرکز O و با شعاع r به یک دایره جهت‌دار با همان مرکز O و شعاع $r + a$ تبدیل می‌شود.

قضیه ۴.۵. انبساط (مثبت یا منفی) فاصله مماسی بین دو دایره جهت‌دار را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم C_1 و C_2 با شعاع‌های r_1 و r_2 با انبساط a به دایره‌های جهت‌دار C'_1 و C'_2 تبدیل شوند. در این صورت شعاع‌های C'_1 و C'_2 به ترتیب عبارت‌اند از $r_1 + a$ و $r_2 + a$.

اگر توجه کنیم که فاصله بین مرکزهای C'_1 و C'_2 همان فاصله بین مرکزهای C_1 و C_2 است. داریم

$$\begin{aligned} t' &= \sqrt{d'^2 - (r'_1 - r'_2)^2} = \sqrt{d'^2 - [(r_1 + a) - (r_2 + a)]^2} \\ &= \sqrt{d'^2 - (r_1 - r_2)^2} = t \end{aligned}$$

همان که باید ثابت می‌شد. $\square$

نتیجه ۵.۵. اگر دو دایره جهت‌دار C_1 و C_2 مماس باشند انبساط یافته‌های آن‌ها (مثبت یا منفی) یعنی C'_1 و C'_2 نیز بر هم مماس‌اند. همچنین به سادگی می‌توان ثابت کرد که انبساط (مثبت یا منفی) یک دایره و خط جهت‌دار مماس را به یک دایره جهت‌دار و خط جهت‌دار مماس تبدیل می‌کند.

۶. راه‌حل‌ها

ریاضیدانان مشهوری برای حل مسئله آپولونیوس کوشیده‌اند و راه‌حل‌های مختلفی برای این مشهورترین مسئله هندسه دوران باستان به دست آورده‌اند. در ادامه به اختصار به شرح بعضی از این راه‌حل‌ها می‌پردازیم.

ژرگون^۱ با استفاده از تبدیل‌های انعکاس و قطب و قطبی به حل مسئله پرداخته است.

۱.۶. راه حل ژرگون. بیش از شرح مختصر روش ژرگون، ریاضیدان و منطق‌دان قرن ۱۸ فرانسه، به بیان یک تعریف و دو قضیه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۶. هرگاه نقطه ثابتی مانند S و عدد جبری ثابتی مانند k ($k \neq 0$) مفروض باشد، مجانس هر نقطه مانند A نسبت به مرکز تجانس k نقطه‌ای است مانند A' که با A و S بر یک خط راست بوده و نسبت اندازه‌های جبری فاصله‌های S از A' و A برابر k باشد. اگر k مثبت باشد، تجانس را مستقیم و اگر k منفی باشد، تجانس را معکوس می‌نامند.

اثبات قضیه زیر ساده است.

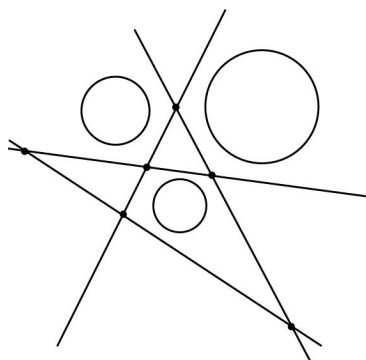
قضیه ۲.۶. دو دایره واقع در یک صفحه را همواره می‌توان هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس یکدیگر دانست.

^۱J. D. Gergonne

قضیه ۳.۶. هرگاه مرکزهای سه دایره بر یک امتداد نباشند، سه مرکز تجانس آن‌ها بر یک امتداد است. همچنین دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک امتداد هستند.

اثبات. روش‌های گوناگونی برای اثبات این قضیه وجود دارد. برای مثال می‌توان به [۸، ۱] مراجعه کرد. □

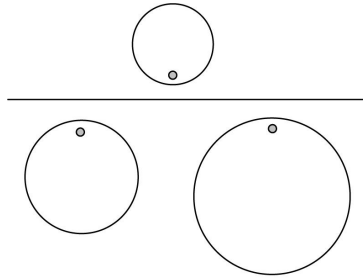
در حل ژرگون لازم است که مرکزهای تجانس هر جفت از دایره‌ها مشخص شود. هر جفت از دایره‌ها دارای دو مرکز تجانس مستقیم و معکوس است. از آنجا که سه جفت دایره وجود دارد و هر کدام دارای دو مرکز تجانس هستند، این فرآیند، شش نقطه را به دست می‌دهد. بنا به قضیه ۵ هر سه تایی از این شش نقطه بر یک امتداد هستند. (شکل ۷)



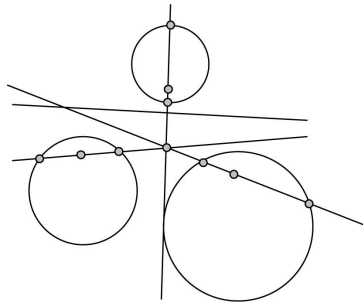
شکل ۷. نقطه‌ها و خط‌های تجانس

قطب‌های این خط‌های تجانس را نسبت به هر یک از دایره‌ها مشخص می‌کنیم (شکل ۸) و قطب‌ها را به مرکز اصلی سه دایره وصل می‌کنیم (شکل ۹). یادآوری می‌کنیم که مرکز اصلی سه دایره نقطه تلاقی سه دایره مفروض است. محور اصلی دو دایره مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است که بر هر دو دایره عمودند یا اینکه مکان هندسی نقطه‌هایی است که طول مماس‌های رسم شده بر دو دایره برابرند [۳]. در این حالت هر خط‌گذرنده از مرکز اصلی و قطب، دایره خود را در دو نقطه قطع می‌کند.

مرکز دایره بالایی در (شکل ۹) در یک طرف خط تجانس تشکیل شده از مرکزهای تجانس است. بر روی این دایره دورترین نقطه برخورد محور اصلی با دایره را انتخاب می‌کنیم. بر دو دایره

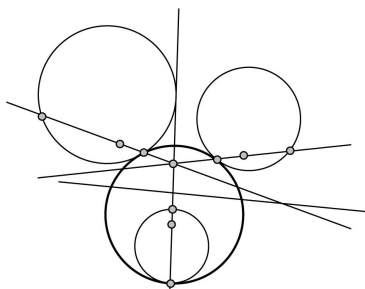


شکل ۸. قطب‌ها

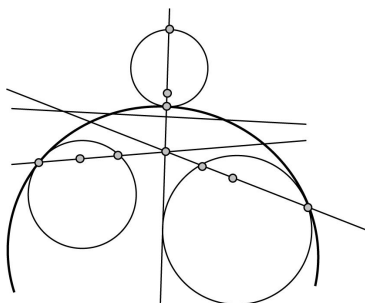


شکل ۹. نقطه‌های تماس

دیگر نزدیکترین نقطه تلاقی انتخاب می‌شود. این سه نقطه، نقطه‌های تماس دایره جواب هستند که در (شکل ۱۰) نشان داده شده است. سه نقطه دیگر تقاطع نقطه‌های تماس یک جواب دیگر هستند. روش حل ژرگون را می‌توان در حالتی که دو تا از دایره‌ها به خط یا نقطه تبدیل می‌شوند به کار برد. در حالتی که سه دایره بر یک امتداد باشند، مرکز اصلی و سه قطب هر خط تجانس به بینهایت می‌رود. برای رفع این مشکل کافی است توجه کنیم که سه دایره در حالت کلی را به وسیله انعکاس، می‌توان به دایره‌هایی که مرکزهای آن بر یک امتداد هستند، تبدیل کرد [۳]. ترسیم ژرگون تمام چهارخط تشکیل شده از نقطه‌های تجانس را به دست می‌دهد و هرکدام از خط‌ها حداکثر دو جواب را به دست می‌دهند. در این صورت تمام هشت جواب ترسیم‌پذیر است.



شکل ۱۰. دایره‌های مماس



شکل ۱۱. یک جواب دیگر

۲.۶. راه حل جبری. چنانچه مختصات مرکزهای سه دایره را با (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) شعاع‌های آنها را به ترتیب با r_1 ، r_2 ، r_3 و شعاع دایره جواب را با r_s نشان دهیم، شرط مماس بودن دایره جواب بر سه دایره مفروض به صورت جبری به شکل معادله‌های درجه دوم زیر بیان می‌شود:

$$(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 = (r_s - s_1 r_1)^2,$$

$$(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 = (r_s - s_2 r_2)^2,$$

$$(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 = (r_s - s_3 r_3)^2,$$

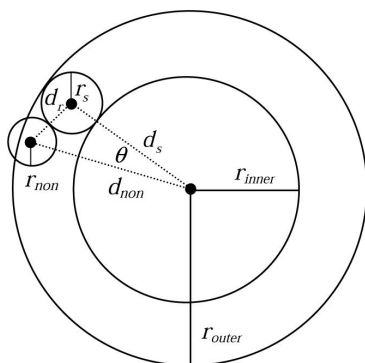
که در آن‌ها سه عدد s_1 و s_2 و s_3 در سمت راست معادله‌ها بر حسب این‌که دایره (های) جواب مماس داخل یا خارج باشند، برابر $+1$ یا -1 است. با تفریق یکی از معادله‌ها از معادله دیگر عبارت‌های درجه دوم حذف شده و تنها جمله‌های خطی باقی می‌مانند. بدین ترتیب x_s و y_s از معادله‌هایی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$(*) \quad x_s = A + Br_s$$

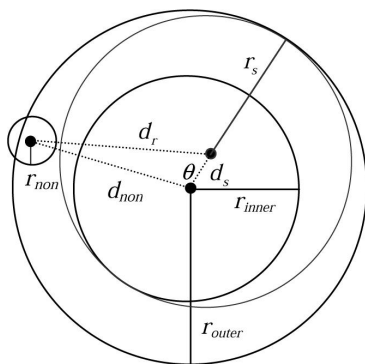
$$(**) \quad y_s = C + Dr_s$$

که در آن A, B, C, D وابسته به دایره‌ها و اعداد $+1$ یا -1 است. با جانشانی x_s و y_s در یکی از این دو معادله، معادله درجه دومی بر حسب r_s به دست می‌آید. پس از حل معادله درجه دوم r_s (ها) به دست آمده، با جانشانی در $(*)$ و $(**)$ ، x_s و y_s نیز به دست می‌آیند. علامت‌های s_1, s_2 و s_3 می‌توانند به هشت نوع مختلف انتخاب شده و هر انتخاب علامت، دو جواب به دست می‌دهد. اگر (r_s, x_s, y_s) با یک انتخاب s_i یک جواب باشد، $(-r_s, x_s, y_s)$ با انتخاب علامت مخالف $-s_i$ همان جواب را به دست می‌دهد. بنابراین حداکثر هشت جواب متمایز وجود خواهد داشت. اگر معادله درجه دوم حاصل دارای دو ریشه متمایز باشد، هر جفت ریشه متناظر یک جفت جواب است که در انعکاس متناظرند. چنانچه دو ریشه برابر باشند، جواب حاصل متناظر دایره‌ای است که منعکس آن بر خودش منطبق است. در این حالت یکی از دایره‌های مفروض، خود یک جواب است و تعداد جواب‌ها یکی کاهش می‌یابد. اگر یکی از جواب‌ها عددی مختلط باشد تعداد جواب‌ها دو تا کاهش پیدا می‌کند. نکته جالب توجه این که به هر حال تعداد جواب‌ها نمی‌تواند برابر هفت باشد [۱۹]. هرچند هر تعداد دیگری از صفر تا هشت و نیز بینهایت می‌تواند رخ بدهد. شرح بیشتر در این مورد در بخش ۹ خواهد آمد.

۳.۶. تبدیل به دایره‌های هم‌مرکز. اگر دو دایره از سه دایره مفروض متقاطع باشند انعکاسی وجود دارد که این دو دایره را به دو دایره هم‌مرکز تبدیل می‌کند. با این شرط‌های جدید دایره (های) جواب باید در طوق بین دو دایره هم‌مرکز قرار گیرند. بنابراین جواب‌ها به دو خانواده یک پارامتری تعلق دارند، در خانواده اول (شکل ۱۲) دایره جواب دایره داخلی را محصور نکرده و در طوق می‌چرخد. در خانواده دوم (شکل ۱۳) دایره‌های جواب دایره داخلی هم‌مرکز را محصور کرده‌اند در حالت کلی برای هر خانواده چهار جواب وجود دارد که در مجموع هشت جواب به دست می‌آید.



شکل ۱۲



شکل ۱۳

در حالتی که دو دایره از سه دایره مفروض هم مرکز باشند، مسئله آپولونیوس به سادگی حل می‌شود. شعاع‌های سه دایره و نیز فاصله d_{non} از مرکز مشترک تا دایره ناهم‌مرکز معلوم است (شکل ۱۲). دایره جواب را می‌توان از شعاع r_n ، زاویه θ و فاصله‌های d_s و d_T از مرکز مشترک و همچنین مرکز نامشترک یافت. شعاع و فاصله d_s معلوم است و بر حسب اینکه دایره جواب

مماس داخلی یا خارجی باشد داریم $d_T = r_s \pm r_{non}$ بنابراین به موجب قانون کسینوس ها داریم

$$\cos \theta = \frac{d_s^2 + d_{non}^2 - d_T^2}{2d_s d_{non}} = C.$$

مقدار C بر حسب اینکه دایره جواب، مماس داخلی یا خارجی باشد مثبت یا منفی است. می توان نتیجه گرفت که

$$\theta = \pm 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} \right).$$

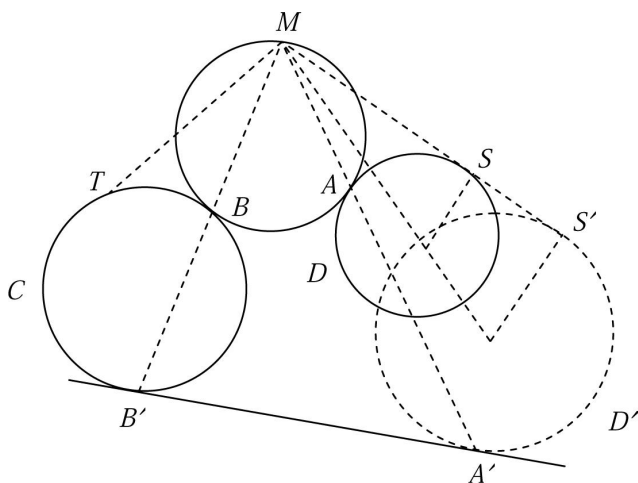
در اینجا نیز با توجه به علامت ها در می یابیم که تعداد جوابها برابر هشت است از آنجا که انعکاس یک برگشت است، مسئله اصلی پس از برگشت به مرحله اولیه ترسیم پذیر می شود.

۴.۶. تبدیل از CCC به CCP . نخست سه دایره مفروض C_1, C_2, C_3 را جهت دار می کنیم. انبساطی وجود دارد که یکی از این سه دایره را به یک نقطه تبدیل می کند (چرا؟) فرض کنیم C_1 آن دایره بوده و به نقطه C'_1 تبدیل شود. در این صورت دایره های C_2 و C_3 به دایره های C'_2 و C'_3 تبدیل شده و دایره جواب C مماس بر C_1, C_2, C_3 از C'_1 گذشته و بر C'_2 و C'_3 مماس است. در این صورت مسئله آپولونیوس به یافتن دایره C' که بر C'_1 و C'_2 مماس بوده و از C'_3 بگذرد کاهش می یابد، که همان حالت CCP است.

برای حل مسئله آپولونیوس در حالت CCP دو دایره و نقطه مفروض را به ترتیب C, D و M می نامیم. از M مماس MT را بر دایره C رسم می کنیم (شکل ۱۴). نقطه M را مرکز انعکاس و MT^2 را قوت انعکاسی اختیار می کنیم. اینک منعکس های C و D را مشخص می کنیم. منعکس C بر خودش منطبق است و منعکس D ، دایره D' است. مماس مشترک دو دایره D' و C را رسم می کنیم تا بر آنها در A' و B' مماس شود.

خط MA' دایره D را در A و MB' دایره C را در B قطع می کند. دایره ای که از A, M و B بگذرد دایره جواب است، زیرا که این دایره چون منعکس مماس مشترک $A'B'$ است بر دو دایره مفروض مماس می باشد.

تمام حالت های دیگر نقطه، خط و دایره و شکل بندی های گوناگون راه حل های ویژه خود را دارند که پرداختن به آنها از حوصله این نوشته خارج است. بی مناسبت نیست یادآوری کنیم که مسئله آپولونیوس، زمانی در کتاب درسی «هندسه و مخروطات» سال ششم ریاضی دبیرستان بیان و حل می شده است [۱].



شکل ۱۴

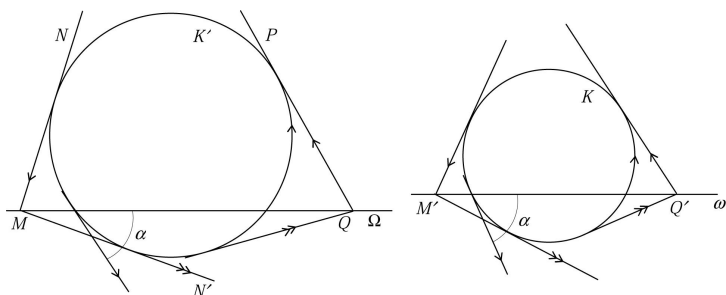
۷. انعکاس محوری

لاگر^۱ در ۱۸۸۲ یک تبدیل هندسی را بر مجموعه خط‌های جهت‌دار تعریف کرد که اینک به نام تبدیل لاگریا انعکاس محوری شناخته می‌شود. می‌توان گفت انعکاس محوری دوگان انعکاس نسبت به یک دایره است. بسیاری از خواص آن در [۲۶] با جزئیات مطرح شده‌اند. یکی از راه‌حل‌های زیبای مسئله آپولونیوس استفاده از این تبدیل است که در این بخش به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۷. فرض کنیم NM یک خط جهت‌دار باشد که خط جهت‌دار Ω را در M قطع می‌کند. یک دایره جهت‌دار دلخواه K' که Ω را با زاویه α قطع کرده و بر NM مماس است رسم می‌کنیم. مماس دیگری که از M بر K' رسم می‌شود یعنی MM' مبدل NM است. (شکل ۱۵) خط Ω را محور انعکاس می‌نامیم.

می‌توان هر دایره جهت‌دار و ثابت K که خط ω را با زاویه α قطع کرده و در آن ω با Ω موازی است به عنوان مدلی برای K' در نظر گرفت. این بدان علت است که دو شکل ۱۵ مجانس یکدیگر هستند و لازم نیست دایره مرجع K در موقعیت ثابتی باشد. نظیر هر دو جفت مماس بر K که در ω تلاقی می‌کنند در مورد Ω وجود دارد. برای یافتن K' که این خط‌های جهت‌دار بر آن مماس‌اند، تمامی آنچه لازم است نگاشت M' به M و Q' به Q در یک تجانس مستقیم است.

^۱Laguerre

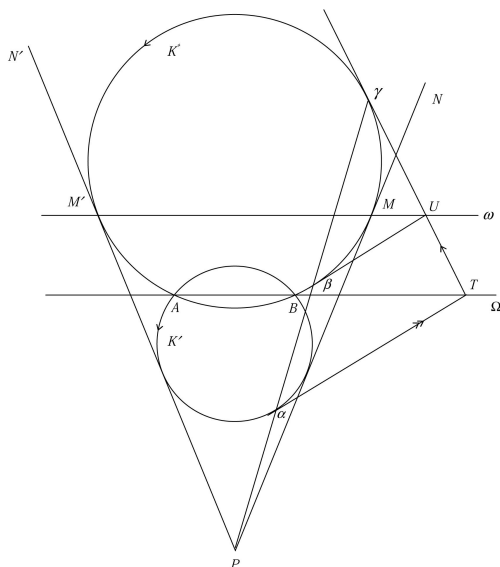


شکل ۱۵

قضیه ۲.۷. انعکاس محوری مماس‌های جهت‌دار بر یک دایره جهت‌دار K^* را به مماس‌های جهت‌دار بر یک دایره جهت‌دار K' تبدیل می‌کند. علاوه بر آن محور انعکاس، محور اصلی K^* و K' است.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که مماس‌های جهت‌دار بر K که ω را قطع می‌کنند تحت انعکاس محوری به خودشان تبدیل می‌شوند (شکل ۱۶). پس هر انعکاس محوری دارای جفت خط‌های جهت‌دار خود متناظر (ثابت) است. اینک فرض کنیم K^* دایره جهت‌داری باشد که Ω را در A و B قطع می‌کند. نشان می‌دهیم که مبدل بر مماس جهت‌دار بر K^* بر دایره جهت‌دار دیگری که مشخص خواهد شد، مماس است.

مماس‌های جهت‌دار MN و $N'M'$ را که موازی خط‌های جهت‌دار در یک انعکاس محوری داده شده ثابت هستند رسم می‌کنیم تا K^* را به ترتیب در M و M' قطع کنند. دایره جهت‌داری را که از A و B گذشته و بر MN مماس است K' نامیده و نشان می‌دهیم که K' مبدل K^* است (شکل ۱۶). دایره جهت‌دار K^* را به عنوان دایره جهت‌دار اصلی اختیار می‌کنیم. خط $MM' = \omega$ محور انعکاس است. فرض کنیم P نقطه تلاقی NM و $N'M'$ باشد. خط گذرنده از P ، K^* را در β و γ و K' را در α قطع می‌کند. نقطه α متناظر P ، در تجانس است که بین K' و K^* وجود دارد. مماس‌های رسم شده بر K^* در β و γ در U واقع بر ω که قطبی P نسبت به K^* است یکدیگر را قطع می‌کنند. از آنجا که مماس در α بر K' در β بر K^* مماس است، نقطه تقاطع $U\gamma$ و مماس در α بر K' چنان هستند که $|T\gamma| = |T\alpha|$. بنابراین T بر AB محور اصلی دو دایره K' و K^* قرار دارد. اینک بیدرنگ نتیجه می‌گیریم که مبدل خط جهت‌دار $U\gamma$ ، از طریق K'^* ، خط جهت‌دار αT است که موازی βU بوده و Ω را در T قطع می‌کند.



شكل ١٦

☐

و تعیین این مبدل را به عهده خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۳.۷. انعکاس محوری فاصله مماسی را حفظ می‌کند.

9

Ω مماس مشترک D و D' نیز هست داریم $|TQ| = |TQ'|$ ، پس $|PQ| = |P'Q'|$.

نتیجه ۴.۷. انعکاس محوری دایره‌های جهت‌دار مماس را به دایره‌های جهت‌دار مماس تبدیل می‌کند.

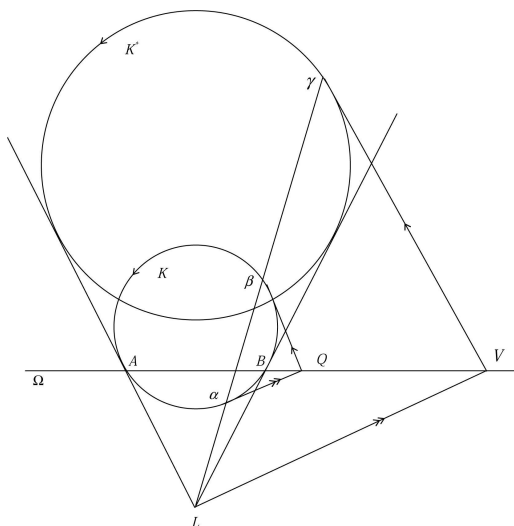
قضیه ۵.۷. برای هر دایره جهت‌دار یک انعکاس محوری وجود دارد که آن را به یک نقطه تبدیل می‌کند.

اثبات. فرض کنیم K^* یک دایره جهت‌دار و L نقطه‌ای خارج از آن باشد (شکل ۱۶) فرض کنیم Ω محور اصلی دستگاه هم محوری باشد که با K^* و دایره- نقطه L مشخص می‌شود. مماس‌هایی از L بر K^* رسم می‌کنیم تا این که Ω را در A و B قطع کند. دایره جهت‌داری را که از A و B گذشته و بر LA مماس است K می‌نامیم. نشان می‌دهیم که انعکاس محوری با دایره جهت‌دار K و Ω به عنوان محور انعکاس، K^* را به L تبدیل می‌کند.

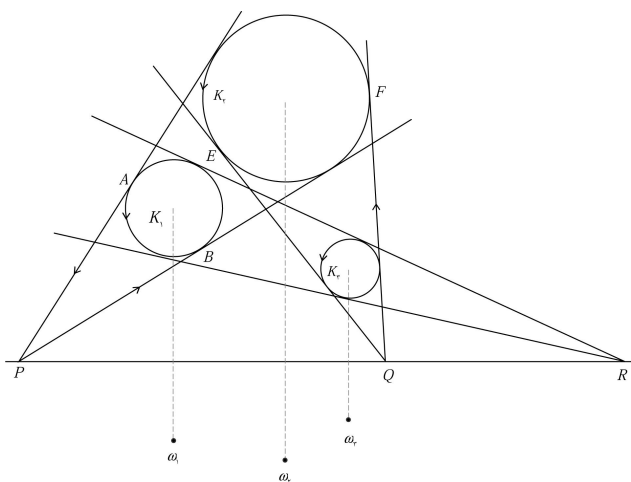
اگر یک خط گذرنده از L ، K دایره جهت‌دار را در α و β و K^* را در γ قطع کند (γ و β نقطه‌های متناظر در تجانس به مرکز L هستند). آنگاه اگر مماس در γ بر K^* ، Ω را در V قطع کند، داریم $|V\gamma| = |VL|$ ، زیرا که Ω محور اصلی K^* و L است. اگر مماس‌های K در α و β در Q ، واقع بر Ω یکدیگر را قطع کنند، آنگاه BQ موازی γV است و چون $|\alpha Q| = |\beta Q|$ نتیجه می‌گیریم که VL موازی $Q\alpha$ است، پس LV مبدل γV است. بنابراین دایره جهت‌دار K^* به L تبدیل می‌شود. در واقع از این که تنها نقطه‌ها دارای جهت نیستند استفاده می‌کنیم. $\square$

قضیه ۶.۷ (قضیه لاگر). سه دایره جهت‌دار را می‌توان به طور همزمان، با یک انعکاس محوری به سه نقطه تبدیل کرد.

اثبات. فرض کنیم K_1 ، K_2 و K_3 سه دایره جهت‌دار با مماس‌های مشترکی باشند که در شکل ۱۸ نمایش داده شده‌اند. مرکزهای تجانس را با P ، Q و R نشان می‌دهیم. این سه نقطه بر یک خط راست که همان خط تجانس است قرار دارند. خط PQR را به عنوان محور انعکاس انتخاب کرده و فرض می‌کنیم هیچ یک از دایره‌ها را قطع نکنند. اینک می‌توان دایره جهت‌دار K_1 را به نقطه ω_1 تبدیل کرد که ω_1 نقطه حدی یک دستگاه هم محوری است که با K_1 و PQR خارج دایره K_1 است. با این انعکاس محوری خط‌های جهت‌دار AP و PB مماس بر K_1 به خط‌های جهت‌دار در امتداد $P\omega_1$ تبدیل می‌شوند خط‌های جهت‌دار AP و BP بر K_2 نیز مماس‌اند. از آنجا که به خط‌های جهت‌دار در همان امتداد $P\omega_2$ تبدیل می‌شوند، دایره جهت‌دار K_2 به نقطه ω_2 تبدیل می‌شود. این نقطه باید بر محل تقاطع $P\omega_1$ و عمود وارد از مرکز K_2 بر خط PQR باشد.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

خط‌های جهت‌دار EQ و QF بر K_3 نیز مماس‌اند. دایره جهت‌دار K_3 به ω_3 محل تلاقی ω_2 و Q عمود وارد از مرکز K_3 بر PQR تبدیل می‌شود.

لاگر از قضیه قبل برای حل مسئله آپولونیوس استفاده می‌کند. نخست اینکه دایره‌ها جهت‌دار می‌شوند. اگر K_1, K_2, K_3 سه دایره جهت‌دار باشند، پس از تبدیل آن‌ها به نقطه‌های $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ لاگر دایره‌هایی را که از این سه نقطه می‌گذرند در نظر می‌گیرد. این دایره، دو دایره جهت‌دار K و K' را مشخص می‌کند. با به کارگیری این انعکاس نقطه‌ها به دایره‌های جهت‌دار برمی‌گردند. بنا به نتیجه قضیه ۳.۷ دایره‌های جهت‌دار K و K' به دایره‌های جهت‌داری که بر K_1, K_2, K_3 مماس می‌شوند برمی‌گردد. $\square$

توضیح: برای اثبات‌های جبری قضیه لاگر و نیز قضیه ۵.۷ به [۲۶] مراجعه شود.

۸. قضیه دکارت

اگر سه دایره مفروض در مسئله آپولونیوس دو به دو بر یکدیگر مماس باشند (شکل ۱۹) مسئله آپولونیوس دارای پنج جواب است که سه جواب آن همان دایره‌های داده شده هستند. دو دایره دیگر متناظر دایره‌های محیطی و محاطی هستند [۲۷] و دایره‌های سُدی^۱ نامیده می‌شوند. هر کدام از دایره‌های سُدی با سه دایره مفروض یک مجموعه از چهار دایره را تشکیل می‌دهند که در شش نقطه بر یکدیگر مماس هستند. شعاع‌های این چهار دایره در رابطه زیر که به قضیه دکارت معروف است صدق می‌کند:

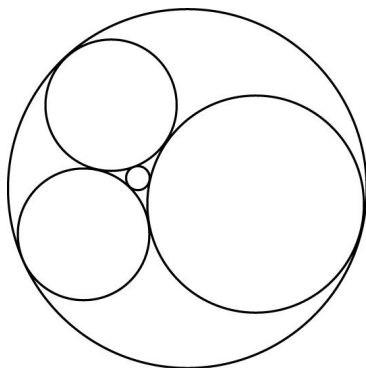
$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_s)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_s^2)$$

که در آن $k_s = 1/r_s$ و r_s شعاع دایره جواب است. همچنین، k_1, k_2, k_3 خمیدگی‌های دایره‌های داده شده هستند. قضیه دکارت توسط اشتاینز^۲ در ۱۸۲۸ و توسط بیکرافت^۳ در ۱۸۴۲، و باز هم توسط سُدی برنده جایزه نوبل در شیمی در ۱۹۳۶ کشف مجدد شده است. سدی یافته خود را به صورت شعری با عنوان «بوسه دقیق» در [۲۳] به چاپ رسانیده است. برای اثبات این قضیه و بعضی تعمیم‌های آن می‌توان به [۸، ۹] مراجعه کرد.

۹. شمارش جواب‌ها و رده‌های شکل بندی

مسئله شمارش جواب‌ها برای انواع گوناگون مسئله آپولونیوس در واقع یک مسئله هندسه شمارشی است [۵، ۱۱]. هر ترتیب سه شیء می‌تواند تعداد جواب‌ها را تغییر دهد. برای مثال در حالتی که هر سه شیء، سه نقطه باشند مسئله تنها یک جواب دارد و آن هم دایره‌ای است که از آن سه

^۱F. Soddy ^۲J. Steiner ^۳P. Beecroft



شکل ۱۹

نقطه می‌گذرد. اگر یکی از سه دایره مفروض داخلی یکی از دایره‌ها باشد مسئله جواب ندارد. چنانچه هر سه دایره در یک نقطه بر یکدیگر مماس باشند بینهایت جواب وجود دارد. مویرهد^۱ نخستین کسی است که هرچند نه به طور کامل، به این مسئله پرداخته است. باردیگر، در ۱۹۷۴ این مسئله مورد توجه فیتز جرال^۲ قرار گرفت. سرانجام در ۱۹۸۳ مشخص شد که تعداد تمام حالت‌های متمایز، با توجه به رده‌بندی شکل‌ها برابر ۳۳ است [۵]. از آنجا که ویژگی وقوع در انعکاس تغییر نمی‌کند هرگونه شمارش حالت‌ها باید به حالت‌هایی که با انعکاسی یا ترکیب انعکاس‌ها به یکدیگر تبدیل نمی‌شوند کاهش یابد. برن^۳، فیشر^۴ و ویلکر^۵ [۵] توانسته‌اند با توجه به ویژگی‌های ۹، ۸ و ۱۰ که در بخش ۳ (صفحه انعکاسی) آمده است فهرست زیر را که دو به دو مجزا هستند و تمام حالت‌های سه شیء را در برمی‌گیرد به دست آورند.

- (۱) سه نقطه،
- (۲) دو نقطه و یک خط،
- (۳) یک نقطه و دو دایره هم مرکز،
- (۴) یک نقطه و دو خط متقاطع،
- (۵) یک نقطه و دو خط موازی،
- (۶) دو دایره هم مرکز و یک i -دایره،
- (۷) دو خط متقاطع و یک i -دایره که هر دو خط را قطع می‌کند،

(۸) دو خط موازی و یک i - دایره که بر هر دو خط مماس است،

جدول های ۱ و ۲ برگرفته از [۵] است.

جدول ۱

تعداد جوابها										شکل بندی
∞	۸	۶	۵	۴			۳	۲	۰	
										دو دایره هم مرکز و یک i- دایره .
										دو خط متقاطع و یک i- دایره که هر دو خط قطع می کند.
										دو خط موازی و یک i- دایره که بر هر دو خط مماس است .

جدول ۲

تعداد جوابها						شکل بندی
∞	۴	۳	۲	۱	۰	
						سه نقطه
						دو نقطه و یک خط
						یک نقطه و دو دایره هم مرکز
						یک نقطه و دو خط متقاطع
						یک نقطه و دو خط موازی

باید توجه کرد که این شمارش ها در صفحه انعکاسی (موبیوس) یعنی صفحه اقلیدسی که P_{∞} به آن اضافه شده است انجام گرفته است. چنانچه خطها و دایره ها جهت دار در نظر گرفته شوند، شمارش در صفحه لاگر که مفاهیم اولیه آن همان خطها و دایره های جهت دار هستند و مدلی است برای هندسه لاگر، انجام می گیرد [۱۲].

۱۰. بعضی تعمیم ها

الف) اگر توجه کنیم که زاویه بین دو دایره مماس بر هم برابر صفر است مسئله آپولونیوس به این شکل تعمیم می یابد: دایره ای رسم کنید که با سه دایره مفروض زاویه ای برابر θ یا در حالت کلی تر به

ترتیب زاویه‌هایی برابر θ_1 ، θ_2 و θ_3 بسازد. از طرف دیگر اگر در نظر داشته باشیم که فاصله مماسی دو دایره جهت‌دار برابر صفر است، تعمیم دیگر این است که دایره جهت‌داری رسم شود که فاصله‌های مماسی آن با سه دایره جهت‌دار مقادیر مشخصی باشد [۲۶].

ب) تعمیم مسئله آپولونیوس در سه بعد عبارت از یافتن کره‌ای است که بر چهار کره مفروض مماس باشد. این مسئله را می‌توان با روش‌های مشابه در دو بعد حل کرد. مسئله را حتی می‌توان به فضای d بعدی نیز تعمیم داد: ابرکره‌ای بیابید که بر $1 + d$ ابرکره مماس باشد.

پ) مسئله آپولونیوس در صفحه اقلیدسی یا صفحه انعکاسی به کره و سایر رویه‌های درجه دوم نیز تعمیم می‌یابد. در مورد کره هدف یافتن دایره‌هایی است که بر سه دایره واقع بر روی کره مماس باشند. این مسئله را می‌توان با تصویر گنج‌نگاشتی به مسئله‌های در صفحه اقلیدسی تبدیل کرد. حل متناظر آن با برگشت به دست خواهد آمد.

۱۱. کاربردها

یکی از راه‌حل‌های مسئله آپولونیوس که ابتدا توسط ادريان فون رومن^۱ (۱۵۹۲) ارائه و سپس توسط نیوتن ساده‌تر شده است، تبدیل مسئله به یافتن محل برخورد هذلولی‌هاست. سه دایره مفروض را C_1 ، C_2 و C_3 ، شعاع‌های آنها را r_1 ، r_2 و r_3 و شعاع دایره جواب را با r_s نشان می‌دهیم. بر حسب این که C_1 یا دایره جواب مماس خارج یا مماس داخل باشد، فاصله بین مرکزهای این دو دایره، d_1 برابر $r_s + r_1$ یا $r_s - r_1$ است. به همین شکل d_2 فاصله بین مرکزهای C_2 و دایره جواب برابر $r_s + r_2$ یا $r_s - r_2$ است. از این رو $d_1 - d_2$ مقداری است ثابت که به r_s بستگی ندارد. از این رو دایره جواب احتمالی بر یک هذلولی قرار دارد. همین امر در مورد دایره جواب و C_3 نیز صادق است. این روش حل هرچند در نهایت به برخورد دایره‌ها و خط‌ها منتهی نمی‌شود، اما سبب می‌شود که این مسئله کاربردهایی در سایر قسمت‌ها پیدا کند. از آن جمله نیوتن در یافتن مسیر ستارگان از آن استفاده کرده است.

از کاربردهای دیگر مسئله آپولونیوس استفاده از آن در سیستم موقعیت‌یابی فراگیر^۲ است [۱۴]، شاید جدیدترین کاربرد این مسئله در بیوشیمی و داروسازی باشد [۱۷].

^۱A. vanRoomen ^۲Global positioning systems

۱۱. سخن آخر

آنچه که تاکنون به آن پرداختیم، خاصه در بخش حل جبری، بیش از همه گویای «ترسیم پذیری» مسئله آپولونیوس است؛ زیرا که حل نهایی به یافتن محل برخورد دایره‌ها و خط‌ها برمی‌گردد. از طرفی روش‌های گوناگون حل این مسئله معروف، افزون بر پیچیدگی مستلزم رسم خط‌ها و دایره‌های کمکی بسیار است. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که به راستی در عالم عمل چه باید کرد؟

جهت‌دار کردن خط‌ها و دایره‌ها و تبدیل لاگر راه حل زیبایی را پیش رو می‌گذارد. از طرفی خط‌ها و دایره‌های جهت‌دار مفاهیم اولیه «هندسه لاگر» هستند. اما این هندسه دارای یک الگوی سه بعدی نیز هست که مخروط‌های قائم در آن نقش اساسی دارند [۶] و [۲۶]. تبدیلی که این دو الگو را یکریخت می‌کند دورنگاشتی^۱ (دور به جای دایره جهت‌دار) می‌نامند. آنچه را که در بخش ۷ آمده است، می‌توان در این الگو بیان، تفسیر و اثبات کرد. به هر روی این مختصر را به این سبب آوردیم که یادآوری شود، در نرم افزاری مانند GeoGebra حل (رسم) مسئله آپولونیوس بر اساس استفاده از این الگو و تبدیل دورنگاشتی است [۲۶]. مسئله در فضای سه بعدی حل و ترسیم شده، سپس به فضای دو بعدی برگشت داده می‌شود.

مراجع

- [۱] م. آذرنوش، و دیگران، هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی، تهران، ۱۳۴۸.
- [۲] ا. قربانی، زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری، چاپ دوم با تجدید نظر، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۳] ه.س.م. کوکس‌تیز، س.ل. گریتر، بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمه ع. مصحفی، چاپ نهم، انتشارات دفتر کمک آموزشی و کتابخانه‌ها، تهران، ۱۳۷۶.
- [۴] م. هشرودی، تمرین‌های ریاضیات مقدماتی، هندسه دواير، انتشارات یکان، تهران، ۱۳۴۵.
- [5] A. Bruen, J. C. Fisher, J. B. Wilker, Apollonius by inversion, *Math. Mag.* 56 (1987) 97-103.
- [6] L. Budai, A possible general approach of the Apollonius problem with the help of GeoGebra, *Ann. Math. Inform.*, **40** (2013) 163-173.
- [7] E. T. Cecil, Lie sphere geometry, Second edition, Springer- Verlag, New York, (2007).
- [8] H. S. M. Coxeter, Introduction to geometry, Second edition, Wiley, New York, (1969).

^۱cyclography

- [9] H. S. M. Coxter, The problem of Apollonius, *Amer. Math. Monthly*, **58** (1968) 5-15.
- [10] N. A. Court, The problem of Apollonius, *Math. Teacher* **59** (1961) 444-452.
- [11] K. Dreschler, U. Sterz, Apollonius' contact problem in n-space in view of enumerative geometry, *Acta Math. Univ. Comenian.* **68** (1999) 37-47.
- [12] J. M. Fitz- Gerald, , A note on a problem of Apollonius. *J. Geom.* **5**, (1974) 15-26.
- [13] D. Giseh, J.M. Ribando, Apollonius problem: a study of solutions, and their connections, *AJUR* **3**, (2004) 15-25.
- [14] J. Hoshen, The GPS equation and the problem of Apollonius. *IEEE Trans. Aearospace Elect. Syst.* **32** (1996) 1116-1124.
- [15] R. D. Knight, The Apollonius contact problem and Lie geometry. *J. Geom.* **83**, (2005) 137-157.
- [16] P. Kunkel, The tangency problem of Apollonius, three looks, *BSHM.*, **22** (2007) 34-46.
- [17] R. H. Lewis, S. Bridgell, Conic tangency equation and Apollonius problem in biochemistry and pharmacology, *Math. Comput. Simulation.* **61** (2003) 101-104.
- [18] D. Pedoe, Forgotten geometrical transformation, *Enseign. Math.* **18** (1972) 255-267.
- [19] D. Pedoe, The missing seven circles, *Elem. Math.* **25** (1970) 14-15.
- [20] D. Pedoe, On a theorem of geometry. *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967) 627-640.
- [21] H. Pottman, M. Petterell, Application of Laguerre geometry in CAGD. *Comput. Aided Geom. Design.* **15** (1998) 165-186.
- [22] R. Schmidt, A new approach to geometry of range difference location, *IEEE Trans. Aearospace Elect. Syst.* **810** (1972) 821-835.
- [23] F. Soddy, Kiss precise, *Nature*, **137** (1936) 1021.
- [24] J. L. Spiesberger, Geometry of locating sounds from differences in travel time isodichrons, *J. Acoust. Soc. Amer.* **116** (2004) 3168-3177.
- [25] B. J. Zlobec, N. M. Kasta, Configuration of cycles and Apollonius problem, *Rockey Mountain J. Math.* **31** (2001) 725-744.
- [26] I. M. Yaglom, *Geometric transformations IV*, The Mathematical Association of America, (2009).
- [27] http://en.wikipedia.org/wiki/problem_of_Apollonius.

رویکردی در تدریس ریاضیات عالی

مسعود آرین نژاد

چکیده

آموزش و یادگیری ریاضیات محض و پیشرفته، همواره با مشکلات تفهیمی و ادراکی زیادی مواجه است. اما این مشکلات فقط محدود به سختی و پیچیدگی مفاهیم و روش‌های موجود در چنین مباحثی نیست. خیلی اوقات، درک و پذیرش این مفاهیم و کنار آمدن با نوع نگاه آن‌ها همراه با درک و فهم شیوه‌های بحث و بررسی‌های موجود در آن‌ها از موانع اصلی هستند. در این نوشته به این جنبه از آموزش ریاضیات به‌ویژه در حوزه ریاضیات پیشرفته می‌پردازیم و البته ادبیات و لحن بیان این گزارش بیشتر تجربی و شخصی است تا فلسفی و کلاسیک.

۱. دورنمای عمومی

فلسفه و ریاضیات قرابت و خویشاوندی دیرینه‌ای باهم دارند، هر چند که در ظاهر در دو سوی عالم تفکر و اندیشه بشر نشسته‌اند. در یک سوی، ریاضیات از عدد و شکل و اندازه و تابع و شمارش و کران و محاسبه و تقریب سخن می‌گوید و در صورت و سیرت خود، قطعی‌ترین و یقینی‌ترین تفکرات، دریافت‌ها و داوری‌های علمی را باز می‌نمایاند و درسوی دیگر، فلسفه از وجود و عدم و علیت و ضرورت و جوهر و ماده و ماهیت و نهایت و اخلاق و سعادت و ازل و ابد سخن می‌گوید و همه چیز را با تردیدهای بارز و مشهودی از گمانه‌های صدق و صحت و اطلاق نشر می‌دهد و همیشه به نوعی در وضعیت تعلیق قرار دارد و از هر قطعیتی می‌گریزد. ریاضیات، به خانواده عبارات و کلمات کلیدی. فلسفه، اصل موضوع، پیوستگی.

2010 Mathematics Subject Classification. 00A30 ; 97E20.

علوم یقینی تعلق دارد و فلسفه به خانواده معرفت‌های شناور و نادقیق و همیشه لرزان. با وجود این، یعنی با وجود همه این تقابل‌های واقعی، آن قرابت و خویشاوندی یاد شده هم، مستندات و موجبات محکم و متعددی دارند هر چند که ممکن است قدری عجیب بنمایند.

• مفاهیم و مضامین مجرد و به تعبیر افلاطون موجودات دنیای مثل، فقط موضوع مطالعه این دو حوزه هستند و شاید همین هم دلیل اصلی آن بوده است که در تاریخ علم باستان، خیلی اوقات، صاحبان این هر دو معرفت، به روال و طریقی طبیعی و معمول، یکی بوده‌اند یا از یک دسته شمرده می‌شده‌اند. برای همین هم فیثاغورث و افلاطون و ارشمیدس و خیام و خوارزمی فلسفه و ریاضیات آمیخته‌ای پرورده‌اند و مکتب فلسفی ریاضیاتی یا ریاضیات فلسفی همگن آمیخته‌ای را پیرامون خود آفریده‌اند.

• دلیل دیگر، روش واحد دریافتی و شناختی این هر دو شاخه از معرفت در تولید دانش ویژه خود است. این روش برای هر دو وادی، صرفاً عقلی، استدلالی و تحلیلی است و از تجربه و مشاهده، جز در حد بسیار محدودی و آن هم فقط از برای پروردن شهود و استخراج انتزاع و تجرید، بهره‌ای نمی‌گیرند. این وحدت روش و ابزار سررشته مهمی در یکی انگاشتن خاستگاه‌های ادراکی و خویشاوند خواندن این دو دانش است.

• دلیل سوم، علاقه‌ای است که به طور معمول بسیاری از ریاضی‌دانان به فلسفه و شمار فراوانی از فیلسوفان به ریاضیات نشان داده و می‌دهند. عطش، نیاز، علاقه و انگیزه‌های علمی واحدی آن‌ها را به سوی هم می‌خواند. به همین دلیل حتی در قرون جدید هم ریاضی‌دانان فیلسوف یا فیلسوفان ریاضی‌دان، واژگان آشنایی در سرگذشت و سرنوشت تحولات ریاضیات و فلسفه است، از آن جمله‌اند رنه دکارت^۱، برتراند راسل^۲، الفرد نورث وایتهد^۳، گوتلوب فرگه^۴، ویلارد کواین^۵، کورت گودل^۶، آلفرد تارسکی^۷، لویتنز براور^۸ و الیوت مندلسون^۹. برای همین است که گاهی به تلمیح در نسبت این دو شعبه دانش گفته می‌شود: «ریاضی‌دان، فیلسوفی است که به کاغذ و قلم نیاز دارد و فیلسوف، ریاضی‌دانی است که حتی از کاغذ و قلم هم بی نیاز است!» بر همین طریق گوتلوب فرگه یکی از بزرگترین فیلسوفان و منطق‌دانان ریاضی جهان معتقد است «فیلسوفی که کاری به هندسه نداشته باشد یک نیمه فیلسوف است، ریاضی‌دانی هم که به فلسفه کاری نداشته باشد فقط یک نیمه ریاضی‌دان است [۶]». رابرت براون^{۱۰} در کتاب کلاسیک «فلسفه ریاضیات» خود نوشته

^۱René Descartes ^۲Bertrand Russell ^۳Alfred North Whitehead ^۴Gottlob Frege ^۵Willard

Quine ^۶Kurt Gödel ^۷Alfred Tarski ^۸Luitzen Egbertus Jan Brouwer ^۹Elliott Mendelson

^{۱۰}James Robert Brown

است «هرکسی که واقعاً به فلسفه علاقمند باشد باید به طبیعت ریاضیات هم علاقمند باشد و... اما آنهایی را که این طور فکر نمی‌کنند بگذار تا به جهنم بروند!» [۶].

● از همه این‌ها که بگذریم رویکردهای نوین در دوره‌های آموزش همگانی در مدارس [۸، ۹]، فرصتی را برای توجه برنامه‌ریزی شده محتوایی‌تری به فلسفه فراهم آورده است. یکی، از جهت توجه به اهمیت بی‌نظیر روش آموزش «جدل و گفتگوهای سقراطی» در هر فضای آموزشی و کلاس درسی، برای یادگیری‌های خلاق و درونی و مؤثر. دیگر، از جهت فراهم آوردن فرصتی برای ورزش فکری و تنفس عقلی نسل‌های نو از همان سنین کودکی به وسیله درگیر کردن آن‌ها در چون و چراهای صرفاً استدلالی مباحث طبیعی فلسفی (مثلاً درباره مفاهیمی چون خوبی، بدی، شادی، زیبایی، زشتی، سعادت، سخاوت، ذکاوت، محبت، صلح، جنگ، پیشرفت، دوست داشتن، تنفر و مانند آن) تا زیربناهای نیروی‌های استدلال، تحلیل، تعقل، منطق و نظریه پردازی نوآموزان علم و دانش بر چنین تار و پودهای جایگزین ناپذیری استوار گردد.

یک قصد این نوشته توجه دادن به نقش و ارزش گفت و گوهای زنده درباره مضمون‌هایی از ریاضیات محض است که دارای ظرفیت‌های تفسیری و فلسفی روشنی در آموزش و فهمیدن ساختمان عمومی این علم هستند. قصد دیگر، فعال کردن ظرفیت تخیل، پرسشگری و استنتاج‌های فلسفی در چارچوب مواد و مفاهیم دروس تخصصی ریاضیات پیشرفته است همان چیزهایی که اغلب، مایه‌های الهام بخش و جذاب ریاضیات از جانب خیلی از فیلسوفان به این سوی علم بوده است. باید گفت که خیلی از عناوین و مفاهیم ریاضیات پیشرفته، به خوبی ظرفیت چنین گفتگوهایی را در خود دارند و کافی است اندکی مستقل از تشریفات رسمی آموزشی و درسی مورد درنگ و تأمل قرار گیرند. به طور مثال مفاهیمی چون «نهایت، بی‌نهایت، کران، بی‌کرانی، بعد، نامتناهی، پیوستگی، گسستگی، برابری، یکسانی، ترتیب، چیدمان، نظم، جهت، جهت پذیری، شمارش، شمارش پذیری، استقراء، تقریب، پیچیدگی» همگی دارای لایه‌های فلسفی قابل بحثی هستند که البته از دیدگاه ریاضیات هم کاملاً مورد اعتنا و توجه‌اند.

۲. از زوایای دیگر

این گونه تأملات و این رویکرد به آموزش ریاضیات دلایل دیگری هم دارد. آموزش و یادگیری ریاضیات محض و پیشرفته در سطح رشته ریاضی دانشگاه، به غیر از سخت فهمی و پیچیدگی‌های

طبیعی‌اش، همواره با چالش‌های ادراکی و تفسیری متفاوتی در کلاس‌های درسی مواجه است. چرا که مفاهیم، مستندات و مثال‌های این سطح از ریاضیات:

۱. ارتباط روشنی با مفاهیم و مثال‌های ریاضیات سنتی و مدرسه‌ای ندارند. در این گونه اخیر از ریاضیات، عناوین آموزشی آشنایی چون هندسه (بررسی و تحلیل اشکالی چون مثلث و دایره)، مثلثات (تحلیل روابط بین نسبت زوایا و پاره‌خط‌های مثلث)، جبر (تجزیه و حل معادلات چندجمله‌ای از درجه یک، دو و حداکثر سه) و حساب اعداد (تحلیل و بررسی اعداد اول، تقسیم پذیری، تجزیه پذیری و مانند آن) همواره با احساس، تفسیر و شهودهای طبیعی و ساده‌ای همراه هستند که پشتوانه توجیه چونی‌ها و چرایی‌های محتوای آن‌هاست و دانش‌آموز و لاقلم معلم از عهده توصیف و توجیه حسی و تجربی قابل قبول آن‌ها بر می‌آیند.

۲. پیوند مستقیمی با مفاهیم کلاسیک «حسابان یا ریاضیات عمومی» که از دروس رسمی و پایه‌ای یکی دو سال اول بسیاری از رشته‌های دانشگاهی هستند ندارند. معمولاً مسائل و مفاهیم این درس در همه کتاب‌های کلاسیک با انبوهی از مثال‌های کاربردی توجیه و تشریح می‌شوند. در نتیجه این مثال‌ها به نحو مؤثری کمک می‌کنند تا دانشجویان رشته ریاضی و غیرریاضی دغدغه چندان‌ی در پذیرش و فهم این نوع از ریاضیات به عنوان نوعی از ریاضی سنجی و ریاضی فهمی مسئله‌های طبیعی و واقعی (یعنی فرموله کردن پیوند و ارتباط بین متغیرهای وابسته به یک مسئله) نداشته باشند.

۳. هیچ گونه اشاره مستقیم و روشنی به تفسیر و تشریح ریاضی‌وار جهان و عالم واقعی ندارد چیزی که تقریباً در همه دیگر رشته‌های دانشگاهی خیلی طبیعی و عادی رخ می‌دهد و همین هم، مورد انتظار دانشجویان این حوزه‌هاست. به علاوه تقریباً همه افراد درگیر و مأنوس در این رشته‌ها، به طور یکسان اشاره‌های واقعیت‌نمای بحث‌های خود را می‌فهمند و تلقی و تعبیر بسیار نزدیک و مشابهی از آن‌ها دارند. این یعنی در حوزه دانش فیزیک همه اهالی این رشته (از دانشجو تا استاد) تقریباً به یک شکل می‌فهمند و باور دارند که این دانش دست اندر کار تبیین و توصیف و تشریح چهره‌های فیزیکی عالم (مثل نیرو، میدان مغناطیس، تغییر مکان، سرعت، شتاب، دما، شدت جریان یا گرانش) است. شیمی و اهالی شیمی و دیگر رشته‌ها هم به همین قیاس.

۴. پیدا نیست که تا کجا و کی این نوع از ریاضیات حس کنج‌کاوی و پرسش‌گری‌های طبیعی و عمومی ذهنی را پاسخ می‌دهند و انگیزه ساختن و پایداری و تکثیر و گسترش آن‌ها چیست. این یعنی برای خیلی‌ها، از دانشجو تا استاد، تقریباً هیچ معلوم نیست که مثلاً نظریه اندازه یا جبرهای

ناجایبایی یا فضای دیفرانسیل پذیر، هندسه منیفلد و جبر باناخ برای چه مقصودهایی و به چه دلایلی مطرح یا ساخته و پرداخته شده‌اند و اینکه آیا ضروری و گریزنپذیر بوده‌اند یا فقط یک ابزار و وسیله مطالعاتی موضعی و موردی هستند.

این هر چهار جنبه، درست بر خلاف آن چیزی است که اغلب در دیگر رشته‌های علوم پایه مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و حتی اغلب رشته‌های دانشگاهی، دانشجو با آن‌ها مواجه می‌شود. در آموزش این رشته‌ها اغلب، موضوعات و مفاهیم در تداوم حسی و تجربی جستجوگرانه هم هستند و چیزهایی با نام پرسش و مکاشفه و تأمل دربارهٔ چیستی‌ها و دلالت‌ها و کاربردهای نظریه‌های مطرح، در صحنه‌های واقعی علم و دانش و فن‌آوری آن حوزه‌ها اصولاً مطرح نیستند و تفاهمی تقریباً جامع، بدیهی و ساده، محوری از همسنگری، واقع‌نگری و طبیعی بودن را پشتوانهٔ آموزش‌های موفق‌تر و پذیرفتنی‌تری در این بخش‌های علوم می‌سازد.

۳. ریاضیات چیست؟

در آموزش ریاضیات پیشرفتهٔ محض، خیلی اوقات یکی از دغدغه‌های مهم دانشجویان، جسارت ابراز صریح پرسش‌های سرکوب شده‌ای از این قبیل است که این‌ها چیست و به چه دردی می‌خورد؟ چرا این‌ها ریاضیات است؟ ریاضیات چرا این‌هاست و اصلاً ریاضیات مگر چیست؟ این یعنی یکی از بی‌تابی‌های مستمر دانشجویان ریاضی به هنگام مواجه شدن و آموختن موضوعات و مفاهیم دروس محضی مانند جبر مدرن، توپولوژی، هندسه خمینه‌ها، نظریه رسته‌ها، همولوژی، آنالیز غیر استاندارد، هندسه دیفرانسیل، منطق ریاضی و مانند آن، طرح پرسش‌هایی ماهوی و ریشه‌ای دربارهٔ ریشه‌ها و خاستگاه‌های معنایی و استنادی این‌گونه مفاهیم است. همچنین کند و کاوهای صرفاً نظری به علاوهٔ شیوه و نوع کنار آمدن و پذیرفتن و باور به آن‌ها نیز پرسش برانگیز است.

جالب است که این اتفاق، فقط در یک جای دیگر در صحنه معارف بشری رخ می‌دهد و آن هم فلسفه است. یعنی تقریباً فقط در این رشته است که مدخلی با عنوان «فلسفه چیست» در همه منابع علمی آموزشی این رشته به طور جدی مطرح است و اهالی فلسفه خود را مقید و مکلف به توضیح و شرح آن می‌دانند و در مدخل بسیاری از کتاب‌های آموزشی و عمومی فلسفه، بخشی یا فصلی در ابتدای این کتاب‌ها هست که به پرسش و پاسخ و توضیح این گونه گفتگوها می‌پردازد. وجود و حضور همین‌گونه نیازها در عالم ریاضیات منجر به نگارش کتاب مهمی با نام «ریاضیات چیست؟» ریچارد کورانت^۱ در سال ۱۹۴۱ گردید. این کتاب یکی از شاخص‌ترین نوشته‌های عمومی

^۱Richard Courant

ریاضیات در طی بیش از هفتاد سال گذشته است. توصیف خوب کورانت از چیستی ریاضیات در این کتاب آنقدر ارزنده بوده است که یان استیوارت^۱ ریاضی‌دان توصیفی‌نویس مشهور، ویرایش به روزی از آن کتاب را در سال ۱۹۹۶ عرضه و چاپ کرد [۲]. یکی دیگر از کتاب‌های کلاسیکی که لافل یک بخش خود را برای پاسخ به این پرسش اختصاص داده است کتاب «هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی» نوشته ماروین جی گرینبرگ^۲ است [۳]. این نکته هم اینجا شایسته گفتن است که در برابر پرسش «چیستی فلسفه و چیستی ریاضیات» همواره دو گونه پاسخ کلی متصور است یکی این‌که بگوییم ریاضی و فلسفه یعنی همه آن مواد و محتوایی که ریاضی‌کاران و فلسفه‌کاران با آن‌ها کار می‌کنند و درگیر آن هستند. یک پاسخ دیگر، انتظار توصیف محتوایی و تشریح اهداف، انگیزه‌ها، مفاهیم، موضوع‌ها و روش‌های کارکرد و نوع توسعه و پیشرفت هر یک از این دو علم است. در فلسفه همواره به این بخش توجه فراوانی می‌شود تا فلسفه خوانان جوان، نخست انگیزه و علائق خود را برای ورود به مباحث عمیق و جدی این نوع از دانستن صیقل دهند و پیش از هر چیز به مرتبه‌ای از باور، نیاز و انتظار به گونه‌ای از فلسفه برسند. البته در ریاضیات، غالباً چنین رویکردی در پیش گرفته نمی‌شود. این امر، به دلیل غفلت از چنین نیازی نیست، بلکه از سخت‌تر بودن پرداختن به آن ناشی می‌شود.

۴. در آسیاب تجربه

به تجربه گاهی رویکردهای ساده‌تری هم موضوعیت و مناسبت دارند به طور مثال گاهی حتی تأنی در این نکته ظاهراً سهل و ممتنع هم، در کلاس‌های درس، کاملاً مفید و مثبت و پر مخاطب و جدی و واقعی است: آیا اصلاً ریاضیات یک علم است؟! اگر هست، چرا یک علم است و در این صورت آیا دریافت‌های ریاضیاتی دریافت‌هایی از نوع و جنس دریافت‌های رایج در علوم دیگر است یا ریاضیات چیزی وراء و متفاوت با دیگر علوم کلاسیک است و ادراک آن هم متفاوت با سبک و سیاق ادراکی یا اکتشافی آن‌هاست. باز هم از باب مثال، توصیف فرضی ریاضیات به عنوان نوعی بازی توافق شده با نمادها و تعاریف و قراردادهای شخصی و توافقی هم میدان خوبی برای بسط دامنه تخیل نسبت به ماهیت و محتوای ریاضیات است. از این پیش‌تر هم می‌توان رفت و گاهی حتی مقایسه صریح و بی‌پروای ریاضیات با بازی جذاب شطرنج که نمونه خوبی مملو از تنوع شرایط، قراردادهای، نمادها و حالت‌های اکتشافی یا ابتکاری است می‌تواند میدان تخیل‌ها و مجادله‌های شیرین و هیجان بخشی را در فضای درسی و آموزشی ریاضیات برانگیزد. در این مثال،

^۱Ian Stewart ^۲Marvin Jay Greenberg

با چنین مقدمه چینی‌هایی، زنجیری از پرسش‌های پی در پی شبه فلسفی هم می‌توانند جان بگیرند و چالش‌هایی برانگیزند و جاری شوند: مثلاً علم چیست، اقسام علوم کدامند؟ علوم پایه (که ریاضیات را معمولاً بخشی از آن می‌خوانند)، علوم مهندسی، علوم انسانی و غیر آن هرکدام به طور کلی و عمومی چیستند و چه حد و مرز و توصیف و مسئولیتی در میدان بزرگ علوم دارند؟ علوم عقلی و علوم نقلی چیستند؟ علوم تجربی و علوم نظری یعنی چه؟ علوم محض و علوم کاربردی چیستند؟ در این انواع تقسیم بندی‌ها، ریاضیات در حوزه کدام قسم قرار می‌گیرد؟ ریاضیات عینی است یا ذهنی [۷]؟ مفاهیم مجرد و محض چیستند؟ مفاهیم و موضوعات مورد توجه و کاوش اکتشافی بشر بر چند قسمند؟ مثال‌های هر یک چیست؟ ریاضیات به کدامیک از این موضوعات و مفاهیم می‌پردازد؟ ریاضیات را زبان علوم، پایه علوم، مادر علوم و گاهی هم ملکه یا پادشاه علوم می‌خوانند. این توصیف‌ها هر یک به چه معنی هستند و تا چه حد اعتبار و منزلت دارند و پذیرفتنی هستند؟ ریاضیات را زبان مشترک علوم تجربی می‌خوانند. اگر این تعبیر و تلقی را بپذیریم در این صورت آیا ریاضیات هم به عنوان نوعی زبان و محور تفاهم و ارتباط، واجد همان ویژگی‌های زبان عرفی در ذخیره کردن تاریخی ادراک عمومی از تجربه‌های معنایی و حسی است و پس از آن مبنایی در انتقال معانی و مقصودهای مشترک یا افزون بر آن و متفاوت با آن ویژگی‌های اکتشافی و ارتباطی مختص خود را هم دارد؟

به تجربه، چنین گفتگوهایی که البته باید با زبان هر چه ساده‌تری عرضه و پیگیری شوند در حاشیه‌های گاه به گاه بحث‌های نظری و نسبتاً پیشرفته ریاضیات و متناسب شرایط درس و ویژگی‌های مفهومی و موضوعی آن، همواره متضمن دریافت‌ها و موضع‌گیری‌های غرور آمیزی از جانب دانشجویان نسبت به نقش و ابعاد قابل تعبیر ریاضیات هستند. همراهی مدرس در گسترش فضای آزادی از طرح و بحث این گونه پرسش‌ها هم همواره فرصت‌های تأمل و درنگ‌های شیرین و موفق را در محیط یک کلاس درس جدی و تخصصی ایجاد می‌کنند و این ظرفیت را دارند که بر قوت، کیفیت و انگیزه یادگیری‌ها دو چندان و بل صد چندان بیفزایند.

ناگفته پیداست که میدان دادن به چنین مباحثه‌های آزادی، همواره یک مخاطره جدی هم برای مدرس دارد و آن این که مدرس را در معرض پاسخگویی به همه پرسش‌های پر دامنه‌ای از این نوع قرار دهد. به رغم وجود این مخاطره، با گسترش چنین میدان باز و آزادی از گفتگو و پرسشگری، دانشجویان خوب می‌آموزند که هر یادگیری مؤثر و خلاق، خیلی بیشتر از اتکا به پاسخ پرسش‌های رایج، بارور کردن پرسش‌های درونی شده حسی و شخصی است. از این رو باید امیدوار بود و تشویق

کرد تا دانشجویان رفته رفته با جسارت هر چه بیشتری در جوانب موضوع، سؤال‌های حتی از پیش طراحی نشده و پیش‌بینی نشده‌ای بپرسند بدون آن‌که درانتظار پاسخ آن در محدوده کلاس درس و از جانب مدرس باشند. دانشجویان باید یاد بگیرند که گاهی بزرگترین دستاوردهای دورانی از یادگیری، به کف آوردن و صید صدف مروارید پرسش‌های بکر ناگشوده‌ای در تلاطم دریای موج و گسترده کنجکاو‌ی‌هاست.

مفاهیم زیادی در دل آموزش دروس تخصصی دوره کارشناسی ریاضی محض قرار دارند که می‌توانند مبنای رویکرد عمومی آموزشگران به بحث‌های فلسفی مناسبی به هنگام تدریس باشند و همیشه می‌توان به هنگام برخورد با چنین عناوین و مفاهیمی بحث را گاه به گاهی به عرصه‌های عمومی‌تری از صرف زبان استدلالی و اصل موضوعی خشک ریاضیات کشاند و چنین فرصت‌هایی را میدانی برای جذب و انگیزه بخشیدن نسبت به گفتگوهای توصیفی و تشریحی ریاضیات که جای آن در محیط‌های آموزشی ما بسیار خالی است قرار داد. تشریح کلی و عمومی و شهودی و حسی و هندسی مفاهیم ریاضیات، سطح متفاوت و مهمی از یادگیری صرف اجزاء و مفاهیم تخصصی و روش‌های فنی و محاسباتی و تکنیکی است.

این یک تلقی (افلاطونی) خیلی مثبت آموزشی است که به دانشجو بگوییم و تشریح کنیم که یکی از شئون اصلی ریاضیات ارائه یک تصویر و شمای ریاضی از عالم و پدیده‌های آن است درست در همان شأن و وجهی که علمی چون فیزیک، شیمی و زیست شناسی در حال ترسیم آنند. چهره ریاضی جهان درست به مانند چهره‌ها و جنبه‌های فیزیکی، شیمیایی و زیستی جهان که موضوع و هدف مطالعه این علوم هستند موضوع مطالعه ریاضیات است. این چهره بر خلاف چهره‌های دیگر، حسی و تجربه پذیر نیست و تنها با ابزار تجرید، تحلیل و استدلال‌های نظری می‌توان پرتوی بر ویژگی‌های آن افکند و به متن و محتوای ادراک شدنی آن رسوخ کرد و گوهر صید درک و دریافتی به دست آورد. تقویت این طرز تلقی، نگاه و انتظار متفاوتی را در فضای آموزشی و نزد دانشجویان ریاضی تولید می‌کند که برای فهم و باور و اعتقاد به ریاضیات پیشرفته همواره بسیار مفید است و در مراحل تکامل خود هم البته مانع تفسیرهای فلسفی متنوع ریاضیات عالی نمی‌شود.

۵. تعریف‌ها و اصل موضوع‌ها

شاید یکی از مهم‌ترین و جالب‌ترین جنبه‌ها در آموزش ریاضیات پیشرفته توجه به نقش و کثرت تعریف‌ها و نیز توجه به اهمیت اصل موضوع‌ها در دامنه بسط و ساختار این دانش است. این دو در واقع دو محور و دو بنیاد اصلی همه ساختمان ریاضیات امروز هستند. به عبارت دیگر ما امروزه

با چیزی به نام ریاضیات طبیعی و بکر یا ارگانیک مواجه نیستیم و البته هیچ‌گاه هم با چنین آرمان خیالی خامی مواجه نبوده‌ایم این یعنی ساختمان عمومی این دانش بر زمین بکری عاری از هرگونه پایه و بنیادستی بنا نشده و نمی‌شود. واقعیت این است که در ریاضیات سنتی، حکم‌ها و قضیه‌ها همیشه با غفلت‌هایی (طبیعی نسبت به زمان خود) همراه بوده‌اند در نتیجه این گمان را موجب می‌گشتند که همگی شاخ و برگ نوعی از نگاه طبیعی و بکر ریاضیاتی به جهان و پدیده‌ها هستند. امروزه معلوم شده است که چنین انتظار و آرزویی، واقعی نیست. ریاضیات امروزی یک دانش اصل موضوعی است به این معنی که در هر حوزه‌ای از جستجوها و تأملات ریاضی، ما همواره با تعدادی اصل موضوع خاص یا عام مواجهیم، مثل اصل انتخاب، اصل پیوستار خطی اعداد حقیقی (متناظر اصل کمال یا خوش ترتیبی)، اصل لانه کبوتری در حوزه‌های عمومی و سرتاسری ریاضیات، اصول موضوع هندسه اقلیدسی و مانند آن.

توضیح چاره‌ناپذیری وجود اصول موضوع و در واقع ضرورت وجود چنین اصولی خیلی ساده است. اگر بخواهیم از راه استدلال محض (که روش عمومی ریاضیات و فلسفه است) ثابت کنیم که حکم الف صحیح است باید نشان دهیم که به «طور منطقی» این استدلال از حکم ب نتیجه می‌شود. تکرار همین روند ارجاع به حکمی مقدم‌تر (به اتکای سه اصل موضوع کلاسیک متافیزیک به نام‌های اصل علیت، اصل بطلان دور و اصل بطلان تسلسل علی) در نهایت ما را به حکمی می‌رساند که نباید نیازی به اثبات و استدلال داشته باشد و به اصطلاح باید بدیهی باشد (که گاهی خیلی هم بدیهی نیست، مثل اصل پنجم اقلیدس). این احکام نخستین و بدیهی را که معمولاً به اتکای نوعی شهود، بدیهی بودن و پذیرش جمعی شکل می‌گیرند و مورد قبول و اجماع ریاضی‌دانان قرار می‌گیرند «اصول موضوع» می‌نامند. همین استدلال ما را به ضرورت پذیرش واژگان‌های تعریف نشده یا تعریف نشدنی نیز می‌رساند (مثل واژه «برابری و یکسانی» در ریاضیات، واژه‌های «مجموعه و عضویت» در نظریه مجموعه‌ها، واژه‌های «نقطه و خط» در هندسه اقلیدس و مانند آن). از همه جالب‌تر این‌که تحلیل بافت همین استدلال گفته شده درباره ضرورت پذیرش اصل موضوع‌ها و واژگان‌های بدیهی و نخستین، ما را به توافق بر سر قواعد و اصول استدلال یا همان اصول نحوی منطق (منطق عمومی و منطق ریاضی) هم هدایت می‌کند (مثل استدلال بر اساس اصل استقرا، اصل طرد شق سوم و مانند آن).

در تحلیل موضوع «تعریف‌ها» معمولاً گفته می‌شود که تعاریف در ریاضیات بر چند قسمند. یکی تعریفی صرفاً برای معرفی واژه‌های تعریف نشدنی (چنانچه گذشت) و نمادگذاری‌ها، مثل

تعریف یک نقطه و نمادهای رایج آن در هندسه اقلیدسی یا تعریف مجموعه و عضویت در نظریه مجموعه‌ها. دیگری تعریفی که در شأن یک قرار و توافق ضمنی است، مثل وقتی که جمع نامتناهی اعضای یک دنباله را با نمادی مانند نماد «سری یا جمع بی انتها» معرفی می‌کنیم. اما نوعی از تعریف‌ها در ریاضیات در شأن عالی مرتبه تشخیص و اکتشاف علمی قرار دارند مثل وقتی که عناصر جبری و متعالی در جبر تعریف می‌شوند یا وقتی که مفهوم حد و همگرایی دنباله‌ها در حسابان تعریف می‌شوند.

در واقع در ریاضیات، عنصر و معنی بنیادی «اکتشاف» که موضوع اصلی شناخت و فهم و تفسیر جهان و مقوم و موتور حرکت همه علوم و اصلاً نهایت، آمال و انگیزه هر گونه تلاش علمی است در دو موقعیت قابل مشاهده است، یکی در قضایا و احکام خاص (مثل وقتی که حکم می‌کنیم «پیوستار اعداد حقیقی نامشمارا است» یا «مجموعه اعداد اول نامتناهی است» یا «رویه‌های فشرده کراندار فقط بر سه نوع کره و چنبره و صفحه تصویری هستند» یا «هر تابع پیوسته بر روی کره واحد در فضای حقیقی متناهی بعد به روی خودش حداقل دارای یک نقطه ثابت است»). موضع دیگر اطلاق واژه کشف که گاهی خیلی مهم‌تر از کشف احکام و قضایا هم هست به هنگام عرضه تعریف‌های خاص رخ می‌دهند. به طور مثال تعریف کلاسیک «حد و پیوستگی» که به کوشی ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) نسبت داده می‌شود یک تعریف تشخیصی و اکتشافی ناب در ریاضیات کلاسیک است. همان‌گونه که تعریف «اعداد گنگ» بر محور اعداد حقیقی یک تعریف ناب و اکتشافی عمیق در ریاضیات است و جالب است که چون در این مورد اخیر اطلاق لفظ «تعریف مستند به کشف و تشخیص» به دلیل داستان جالب این کشف به دست فیثاغورثیان، مسبق به سابقه‌ای تاریخی است اطلاق لفظ کشف به آن ساده‌تر و پذیرفتنی‌تر است [۲، ص ۶۴ و ۵، ص ۷۶] [۲، ص ۷۶] [۳، ص ۶۴]. مثال دیگر بروز معنی کشف در «تعریف‌ها» وقتی است که ساختار یا همبستگی ریاضی جدیدی بین پدیده‌های عالم یا اشیاء ریاضی جهان معرفی می‌شوند. مثال خیلی بارز آن تعریف و در واقع کشف برخال‌ها (فراکتال‌ها) است [۲، ص ۵۳۰] [۳، ص ۳۳]. غالب این‌گونه تعریف‌ها فرایند تجربی دقیقی (تجربه ریاضیاتی) را از کنج‌کاوی و جستجو و کشف ناب می‌گذرانند تا به سر منزل بلوغ تعریف برسند. توضیح و تشریح تاریخی برخی از این‌گونه تعریف‌ها در ریاضیات عالی موجب می‌شوند تا فرصت تلقی‌ها و استنباط‌های وسیع‌تر و عمیق‌تری هم در فضای کلاس و نحوه یادگیری و تأمل بر روی این بنیادهای معنایی پدید آیند.

۶. توپولوژی

یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سرآغاز آموزش درس توپولوژی، توصیف عمومی موضوع این درس و توضیح نوع توجه، دقت و پرسش‌هایی است که این نظریه در کنجکاوی‌های علمی خود مطرح می‌سازد. این توصیف، چنانچه در اغلب متون رسمی آموزش توپولوژی مرسوم است با تعریف رسمی ساختمانی که آن را یک فضای توپولوژیک می‌نامند آغاز شود. البته تمهید طرح همین نقطه آغازین هم مقدماتی می‌خواهد مثلاً این‌که گفته شود ساختمان‌های متنوعی که در ریاضیات مطرح‌اند و گاهی هریک موضوع یک عنوان درسی و آموزشی‌اند مثل ساختمان یک گروه، یک حلقه، یک جبر باناخ، یک فضای متریک، یک فضای برداری، یک فضای دیفرانسیل‌پذیر و مانند این‌ها واقعاً یعنی چه و منظور از ساختمان در اینجا، در کلیت خود، چیست. دیگر این‌که خوب است این معنی هم به بحث گذاشته شود که آیا این تعریف‌ها ذاتی و اصیل‌اند یا جعلی، مفروضی و قراردادی‌اند و صرفاً از یک توافق جمعی ریاضی و چارچوب مفروض تحلیلی ناشی شده و می‌شوند.

از این مقدمه‌های اغلب مسکوت که بگذریم از همین نقطه آغازین ارائه تعریف هم باید آموزش در دامنه گفتگوها و پرسش و پاسخ‌هایی ادامه یابد و پیش رود که دانشجو حق داشته باشد و تشویق شود تا بپرسد که این قاعده‌ها و شرایط روی یک رده از زیر مجموعه‌های یک مجموعه مفروض یعنی چه، از کجا آمده‌اند، به چه درد می‌خورند و اصلاً توپولوژی، در کنه خود یعنی چه و قرار است چه بخشی و چه نوعی از سؤال‌های ریاضیات را پاسخ دهد؟ این یعنی قبل از متمرکز شدن بر روی اصول موضوعه ساختمان توپولوژی، به شرح فوق، و کار بر روی الزامات و ایجابات آن اصول در شرایط متنوع و تشبیه و استنباط تعمیمی آن از شرایط متناظری که مثلاً در فضاهاى طبیعى‌تر متریک در آنالیز حقیقی وجود دارد، چنانچه اغلب مرسوم است، نخست باید مدخل‌های ملموس و مشهودی برای پاسخ به این‌گونه سؤال‌های بنیادی یا لااقل اصالت حضور و اهمیت طرح و فهم پیشینی آن‌ها مطرح شود. با این مقدمه و با توجه به توصیف‌های رایج مندرج در مقدمه خیلی از کتاب‌های توپولوژی، مهم‌ترین مفهومی که در مسیر چنین بحث و گفتگویی باید بدان پرداخت و می‌توان از دیدگاه‌های کلی‌تر و عمومی‌تری در باب آن سخن گفت مفهوم «پیوستگی» است.

۷. پیوستگی

«پیوستگی» چیست؟ شهود و تجربه گواهی می‌دهد که یکی از بنیادهای هستی، نهاد «پیوستگی» در تغییر و تحولات و گونه‌گونگی پدیده‌ها و پدیدارهای عالم است. ارسطو معتقد بود که جهان بر

چهار بنیاد استوار است. منشأ، غایت، ماده و حرکت [۴، مقاله‌های نهم و دهم]. این تقسیم‌بندی هنوز هم قابل توجه و معتبر است و می‌توان با آن توصیفی از جهان و فعالیت‌های علمی لازم برای این توصیف را عرضه کرد، هر چند که امروزه توصیف‌های اساسی دیگری مورد توجه هستند. بر اساس این چهار محور، ریاضیات در چه موقعیت و نقشی از جهان علم یا جهان شناسی قرار دارد؟ بخشی از پاسخ پرسش درباره «منشأ و غایت»، درحوزه علوم کیهان‌شناسی، نجوم و فیزیک قرار دارد، بخشی نیز در حوزه فلسفه و متافیزیک و الهیات. ریاضیات در باره پرسش‌های این دو بخش مسئولیت و موضعی ندارد و در واقع ابزاری برای چنین رویکردی از پرسش، شناسایی، شناخت و دریافت ندارد. اما در دو حوزه دیگر، ریاضیات به شدت فعال، حاضر و جدی است. در بخش مطالعه عنصر «ماده» در هستی، ریاضیات هم به جوهر و ذات تنوع متجسم ماده که در گونه‌گونگی همه اشیاء متجلی‌اند می‌پردازد و هم به عَرَضیات و صورت‌ها. به طور کلی، ریاضیات به مطالعه آن جنبه‌هایی از جهان ماده و عرصه‌های هستی می‌پردازد که به مرور نام مواد و ویژگی‌ها یا مشخصات ریاضی تفسیر و تشریح جهان را بر خود گرفته‌اند مثل عدد، شکل، تابع، اندازه، اندازه‌گیری، اندازه پذیری، حد، پیوستگی، کران، کرانداری، مرز، گوی، مثلث، خمینه، رویه، نهایت، بی نهایت، بُعد، شمارش، شمارش پذیری، ترتیب، رابطه، هم ارزی، همبندی، ناهمبندی، گسستگی، برابری، دنباله، سری، تقریب، خطا، غوطه وری، جهت، جهت پذیری، کمینه، کمینگی، بیشینه، بیشینگی، بهینه، بهینگی، بهینه‌سازی، رتبه، محاسبه، محاسبه پذیری، پیچیدگی محاسبه و هزارها عنوان شبیه این‌ها. نگاه ریاضیات به این مفاهیم، «نوعی» است یعنی ریاضیات با الهام از پدیده‌ها در تنوع و تکرار خود، مفهوم عدد، شمارش و اندازه را انتزاع می‌کند و مستقل از نوع تعلق و کاربرد آن به مطالعه مفهوم انتزاع شده می‌پردازد به نحوی که بر تمام مصادیق مثالی خود قابل اطلاق باشد. ریاضیات، نمونه‌ها و مدل‌های ذهنی و نه عینی اشیاء و حتی شرایط و همبستگی بین متغیرها را با ابزارهای خاص خود مطالعه می‌کند. از همین رو ریاضیات را دنیای علوم انتزاعی می‌خوانند.

اما درباره «حرکت» در تقسیم بندی ارسطو، ریاضیات درباره شناسایی و شناخت این وجه از بنیاد جهان بسیار فعال است. ابتدا ببینیم تفسیر و تلقی ریاضیات از حرکت چیست؟ طبیعی است که این تفسیر و تلقی همان چیزی نیست که در دانش فیزیک یا شیمی فهمیده می‌شود. یک مقدمه این است: در هر عرصه‌ای از جهان که مشاهده می‌کنیم یا با آن در تماس هستیم فعل و انفعالات و تحولات بی پایانی در جریانند. ماهیت این تحولات از دیدگاه ریاضیات چنین است: حرکت و تغییر و تحول یعنی تغییر نسبت متغیرهایی در پیوند با هم یا متأثر از هم. ریاضیات چنین فرایند عظیم و

گسترده‌ای را با مفهومی به نام «تابع» مدل‌بندی و بررسی می‌کند. از نظر ریاضیات، «حرکت» یعنی تنوع حضور مصداق توابع گوناگون.

بخشی از تجارب استقرایی بشر می‌گوید که هستی در بسترهای پیوسته‌ای از تغییر و تحولات و حرکت جلوه می‌کنند و بروز می‌یابند. هیچ انفصالی و هیچ انقطاعی واقعی نیست مگر به اعتبار تغییر حالت و تغییر وضعیت و گونه‌گونی. عرصه جلوه‌های حضور «پیوستگی» در جهان گاهی هر یک موضوع و عنوان یکی از اقسام علوم هستند مانند انرژی، تکامل، حیات و مانند آن. واقعیت عظیم و سترگ «پیوستگی» همه جا به صورت یکی از حقیقت‌ها و جوهرهای مسلط نظام گیتی نمایان است. به این ترتیب، شرح و شناخت «پیوستگی» یکی از ضروریات شناسایی و فهم نظام «حرکت» در گیتی است و هر علمی به فراخور موضوع و مصادیق حوزه عملکرد خود به مطالعه و جوهری از آن می‌پردازد.

حال پرسش این است که برخورد ریاضیات با این حقیقت پر رمز و راز و پیچیده عالم چگونه است. باید گفت که ریاضیات هم، نگاه و بررسی خاص خود را از این پدیده جهانشمول، با زبان و نوع تحلیل و سنجش ویژه خود دارد و طبیعتاً اولین کار، تعریف و توصیف ریاضی این مفهوم است. در دنیای ریاضیات، مفهوم «پیوستگی» چگونه متجلی می‌شود. تعبیر ریاضی پیوستگی، تبیین آن به عنوان نوعی از یک تابع - توابع پیوسته - است. چنانچه گفته شد «توابع» یکی از عالی‌ترین مفاهیم و ابزارهای ریاضیات برای توصیف و تشریح انواع وابستگی‌ها و انواع حرکت‌های ممکن بین اجزاء عالم را به صورتی منظم و رصد پذیر، معرفی و عرضه می‌کنند. تعریف و توصیف نظری پیوستگی به رغم آنچه معمولاً در کلاس‌ها به صورت یک دستورالعمل تکلیفی گفته می‌شود یک تجربه ناب حسی و شهودی در ریاضیات است و تجربه مشترک و فعال مدرس و دانشجو از این مفهوم عمیق، غنی و غافلگیرکننده، فرصت مغتنمی است که معمولاً در سال‌های اول دانشگاه امکان ادای درست آن چندان فراهم نیست. از این رو طرح مناسب آن در دوره‌های عالی ریاضیات محض بسیار ارزنده خواهد بود.

پس از این است که فرصت برای عرضه توصیف چرایی غایی طرح نظریه توپولوژی مطرح می‌شود. یکی از ویژگی‌های علوم در هر یک از بخش‌ها، افزاز نظری فضای متغیرهای مؤثر و تحدید آن‌ها به چند متغیر قابل ردگیری در آن حوزه است. به طور مثال، ما در مطالعه شرایط دمایی یا رسانایی یا مغناطیسی اجسام در فیزیک، همواره با هزاران هزار متغیر شناخته شده یا ناشناخته رو در رویم اما چارچوب یک مطالعه نظری همواره حکم می‌کند که در این مطالعه فقط

تعداد محدودی متغیر با اثری محسوس در تجربه‌ای محدود و موضعی مورد توجه باشند. دقیقاً همین روند در ریاضیات هم موجب می‌شود که مثلاً برای بررسی ویژگی تقسیم‌پذیری یا تکثیرپذیری خطی یا اندازه‌پذیری، ساختمانی را که فقط حامل این ویژگی‌ها باشند در نظر بگیریم تا دقیقاً امکان ردگیری آثار منحصر به فرد این ویژگی‌ها در دل ساختمان‌های پیچیده‌تری که متغیرهای متنوع و متکثری درگیر آنند میسر باشد. بر همین روال است که ما در ریاضیات علاقمندیم ساختمانی را که تنها ویژگی آن، امکان فرایندهای پیوسته است را بررسی کنیم. چنین ساختمان حداقلی با این ویژگی منحصر به فرد همان فضا‌های توپولوژیک است. این نقطه شروع، تفصیل غنی و فاخر شأن حضور و تعریف این ساختمان است و از داستان این توصیف، البته بسیار باقی است.

مراجع

- [۱] مسعود آرین نژاد، کودکان و ریاضیات، خبرنامه انجمن ریاضی ایران، شماره ۹۷، ۱۳۸۲.
- [۲] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ویراست دوم، جلد اول، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۳] ریچارد کورانت، هربرت رابینز، ریاضیات چیست، ویراست دوم، ترجمه سیامک کاظمی، نشر نی، تهران، ۱۳۷۹.
- [۴] ماروین جی گریبنر، هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه محمد هادی شفیع‌ها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۱.
- [۵] محمد حسین طباطبایی، مرتضی مطهری، اصول فلسفه و روش رئالیسم، انتشارات صدرا، ۱۳۶۸ تهران.
- [6] 6. J. R. Brown, *Philosophy of mathematics*, Routledge, New York, 1999.
- [7] 7. S. Shapiro, *Philosophy of mathematics: structure and ontology*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [8] 8. <http://www.philosophyslam.org>

مسعود آرین نژاد: زنجان، دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

تارنما: <http://znu.ac.ir/~ariannejad>

رایانامه: arian@znu.ac.ir

نظریه بازی‌ها و مسابقه طناب‌کشی

پیمان فهیمی

چکیده

در این مقاله با تلفیق مکانیک کلاسیک در علم فیزیک و نظریه بازی‌ها در ریاضیات کاربردی، عوامل پیروزی یک تیم در مسابقه طناب‌کشی را ابتدا به صورت یک فعالیت هم افزا و سپس به شکل یک رقابت دو جانبه بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

هرگاه سود یک موجودیت، تنها در گرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند موجودیت دیگر باشد، و تصمیمات دیگر تأثیر مثبت و منفی بر روی سود او داشته باشند، یک بازی^۱ میان دو یا چند موجودیت یاد شده شکل گرفته است. نظریه بازی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم بسیاری به ویژه اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. بسیاری از مورخین ایجاد نظریه بازی را به جان فون نویمان^۲ ریاضی‌دان مجارستانی نسبت داده‌اند. نویمان دریافته بود که نتیجه یک بازی، صرفاً با نظریه احتمالات تعیین نمی‌شود. او شیوه بلوف‌زدن در بازی را فرمول‌بندی کرد. بلوف‌زدن در بازی به معنای راه‌کار فریب‌دادن سایر بازیکنان و پنهان کردن اطلاعات از آن‌ها است. در سال ۱۹۹۴، جان نش^۳ به همراه دو نفر دیگر به خاطر مطالعات خلاقانه خود در زمینه نظریه عبارات و کلمات کلیدی. نظریه بازی‌ها، تعادل نش، تابع بهترین پاسخ، فعالیت هم افزا، رقابت دو جانبه، مسابقه طناب‌کشی.

^۱ game ^۲ John von Neumann ^۳ John forbes Nash

بازی برنده جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های بعد نیز برندگان جایزه نوبل اقتصاد عموماً از میان نظریه‌پردازان بازی انتخاب شدند [۱].

نظریه بازی تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک (تضاد منافع) را مدل‌سازی کند. این موقعیت زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد یا تیم وابسته به راهبردهایی باشد که دیگر افراد یا دیگر تیم‌ها انتخاب می‌کنند. هدف نهایی این دانش، یافتن راهبرد بهینه برای بازیکنان در جهت بردن بازی است. یکی از اصلی‌ترین شرایط به‌کارگیری این نظریه در تحلیل محیط‌های رقابتی، وفاداری عوامل متعامل در رعایت منطق بازی است. هر چه قدر توان پیش‌بینی گزینه‌ها و نتایج حاصل از انتخاب آن‌ها بیشتر باشد، عدم قطعیت در این تکنیک کاهش می‌یابد [۱].

۲. مبانی اولیه نظریه بازی

هر بازی از سه عنصر اساسی تشکیل شده است:

(۱) بازیکن‌ها

(۲) عمل‌ها^۱

(۳) ترجیحات^۲

بازیکن‌ها در اصل همان تصمیم‌گیرندگان بازی هستند. بازیکن می‌تواند شخص، تیم، شرکت و... باشد.

عمل، مجموعه‌ای از تصمیمات و اقداماتی است که هر بازیکن یا گروه می‌تواند انجام دهد. ترجیحات نیز، مشوق‌های بازیکن برای گرفتن یا نگرفتن یک تصمیم خاص است. به عبارت دیگر، ترجیحات بیان‌گر نتیجه و سطح مطلوبیت^۳ بازیکن در صورت گرفتن تصمیم متناظر با آن می‌باشد، که با تابعی مانند U نمایش داده می‌شود [۱، ۲].

پژوهش‌ها در زمینه نظریه بازی اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به عنوان تعادل، در بازی‌ها استوار است. این راهبردها اصولاً از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش^۴ است. براساس نظریه تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط، بازیکنان به طریق منطقی و معقول راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راهبرد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل

^۱actions ^۲payoff function ^۳utility ^۴Nash equilibrium

انتخاب است و چنانچه بازیکن راهکار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه بهتری به دست نخواهد آورد. در واقع با فرض ثابت بودن بازی سایر بازیکنان، تعادل نش نقطه‌ای است که در آن هر بازیکن با تغییر بازی خود شرایطش بدتر شود و هیچ بازیکنی انگیزه تغییر بازی خود را نداشته باشد. مهم‌ترین مفهوم نظریه بازی‌ها برای محاسبه تعادل نش، به دست آوردن تابع بهترین پاسخ^۱ است. در واقع به زبان ساده، بهترین پاسخ به این معنی است که، در مقابل عمل هر بازیکن یا تیم، بهترین عکس العمل بازیکن یا تیم مقابل به چه شکل خواهد بود؟ [۱، ۲].

به عنوان یک مثال ابتدایی، "معمای زندانی‌ها"^۲ را بررسی می‌کنیم و سپس به مسئله اصلی خودمان یعنی مسابقه طناب‌کشی می‌پردازیم:

دو نفر متهم به شرکت در یک سرقت مسلحانه، در جریان یک درگیری دستگیر شده‌اند و هر دو جداگانه مورد بازجویی قرار می‌گیرند. در طی این بازجویی با هریک از آن‌ها جداگانه به این صورت معامله می‌شود:

- (آ) اگر دوست را لو بدهی تو آزاد می‌شوی ولی او به پنج سال حبس محکوم خواهد شد.
 (ب) اگر هر دو یکدیگر را لو بدهید، هر دو به سه سال حبس محکوم خواهید شد.
 (پ) اگر هیچ‌کدام همدیگر را لو ندهید، هر دو یک سال در یک مرکز بازپروری خدمت خواهید کرد.
 در این بازی به نفع هر دو زندانی است که گزینه سوم را انتخاب کنند، ولی چون هر کدام از آن‌ها به دنبال کسب بهترین نتیجه برای خود یعنی آزاد شدن است و به طرف مقابل نیز اعتماد ندارد، دوست خود را لو می‌دهد و در نتیجه هردوی زندانی‌ها متضرر می‌شوند. در این مثال، به سادگی می‌توان تشخیص داد که نقطه تعادل نش برای هر متهم و همچنین تابع بهترین پاسخ هر زندانی در مقابل عمل زندانی دیگر چیست [۱، ۲].

مسئله اصلی ما در این مقاله، تحلیل یک مسابقه طناب‌کشی از دو جنبه است. یکی از دیدگاه بازیکنان تشکیل دهنده یک تیم به عنوان یک فعالیت هم‌افزا^۳، و دیگری از دید مجموعه دو تیم و به عنوان یک رقابت دوجانبه (رقابت گُرنو^۴).

۳. فیزیک و مسابقه طناب‌کشی

عوامل فیزیکی مؤثر در برنده شدن یک تیم در مسابقه طناب‌کشی چیست؟

^۱best response function ^۲prisoner's dilemma ^۳synergetic ^۴Cournot competition

عوامل زیادی در پیروزی یک تیم در چنین مسابقه‌ای دخیل هستند اما همانطور که می‌دانید اصطکاک مهم‌ترین عامل است. یعنی تیمی که بتواند نیروی بیشتری به زمین وارد کند و اصطکاک سطح پاها با زمین را افزایش دهد، شانس بیشتری برای برنده شدن دارد. به همین دلیل است که سعی می‌کنند در این رقابت از افراد سنگین وزن‌تر استفاده کنند. همچنین افزایش اصطکاک بین دست‌ها و طناب نیز بسیار تأثیرگذار است؛ بدین معنی که فشردن طناب و وارد کردن نیرو به آن که درواقع لازمه آن انتخاب افرادی با پنجه‌های قوی‌تر است، می‌تواند شانس پیروزی را بیشتر کند. عامل دیگری که مؤثر است می‌تواند میزان قدرت تیم در افقی قرار دادن طناب باشد. یعنی از لحاظ بلندی قد، افرادی انتخاب شوند که در یک راستا قرار گیرند تا نیرو در جهت y تجزیه نشود. بدیهی است که اگر بلندی قد افراد متفاوت باشد، زوایای مثلثاتی تشکیل شده در مسیر نیرو، به صورت یک ضریب، نیرو را کاهش می‌دهند و بالأخره عامل تأثیرگذار نهایی برای پیروزی را نیز، روند کاهش نیروی افراد و مجموعه تیم بر حسب گذشت زمان در نظر می‌گیریم، که بدین منظور باید بازیکنانی با قوای بدنی بیشتر انتخاب گردند [۳].

در این مسئله، اجازه دهید فرض کنیم که تمام شرایط برای دو تیم یکسان است. یعنی هر دو تیم از افرادی سنگین وزن با وزن‌های برابر، پنجه‌های قوی، بلندی قد یکسان و قوای جسمانی مساوی بهره‌مند هستند. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که در چنین شرایطی کدام تیم برنده خواهد بود. طبق دانسته‌های قبلی ما، ظاهراً مسابقه نباید هیچ برنده‌ای داشته باشد، اما نظریه بازی‌ها پاسخ دیگری برای این سؤال دارد.

۴. فعالیت چند نفره هم افزا و اعضای یک تیم طناب‌کشی

در فعالیت هم‌افزا، اگر هرکدام از اعضای تیم طناب‌کشی بیشتر تلاش کنند، خروجی بهتری داشته و به هدف خود نزدیک‌تر می‌شوند. یعنی هر کسی که بیشتر نیرو مصرف کند، بازدهی مجموع تیم را نیز بالا خواهد برد، و البته به تبع آن بیشتر نیز خسته می‌شود [۲]. این نوع فعالیت تلاش بازیکنان یکی از تیم‌ها را به صورت مستقل و در واقع به شکل یک اصل برهم‌نهی بررسی می‌کند. مثلاً در فیزیک، وقتی می‌خواهیم تأثیر دو بار الکتریکی را بر یکدیگر بررسی کنیم، در ابتدا اثر یکی را نادیده گرفته و سپس نیروی وارد شده از طرف بار الکتریکی دیگر را محاسبه می‌کنیم. در مسابقه طناب‌کشی از دید نظریه بازی‌ها نیز دقیقاً همین فرآیند را دنبال می‌کنیم.

فرض کنید هر تیم ۲ بازیکن دارد. عمل هرکدام از بازیکنان ۱ و ۲، اعمال نیرو و فشار بیشتر به زمین و طناب و در نهایت افزایش اصطکاک است که بازه تغییرات آن می‌تواند بین یک مقدار کمینه و بیشینه باشد. قبل از شروع رقابت، بازیکنان بر روی زمین ایستاده و همچنین طناب را در دست‌های خود گرفته‌اند، بنابراین مقداری اصطکاک بین پاها و زمین، و دست‌ها و طناب ایجاد می‌شود که همان مقدار کمینه مسئله یعنی F_1 است. مقدار بیشینه یعنی F_2 نیز می‌تواند با توجه به قدرت بازیکنان و مجموع عواملی که در قبل ذکر شد تعیین شود. ترجیحات این رقابت نیز مطلوبیتی است که از تلاش دو بازیکن یک تیم و صرف نیرو توسط آن‌ها به دست می‌آید. برای این مطلوبیت یک مدل دلخواه تعریف می‌کنیم تا نیازهای ما در مسئله را برطرف سازد. مثلاً مطلوبیت بازیکن اول یعنی U_1 ، تابع مثبتی از نیروی (f_1) اوست که در یک مقدار ثابت مانند C_1 ضرب می‌شود. یک هم‌افزایی نیز در این معادله وجود خواهد داشت که به صورت حاصلضرب نیروی دو بازیکن ($f_1 \times f_2$) در ثابت‌های آن‌ها نوشته می‌شود، یعنی اگر هر دو بازیکن بیشتر نیرو صرف کنند، به صورت ضربی سودشان افزایش می‌یابد نه به صورت جمعی. در نهایت نیز هزینه این تلاش یک مقدار خستگی است که باعث تحلیل رفتن نیروی بازیکن می‌شود. اگر فرض کنیم این خستگی متناسب با گذشت زمان، به صورت نمایی افزایش می‌یابد می‌توان آن را به شکل $C_3 e^f$ در نظر گرفت. (در این مسئله، نیرو را تابعی از زمان در نظر گرفته‌ایم اما به دلیل این که جواب عمومی مسئله مورد نظر است، وابستگی دقیق نیرو به زمان ذکر نشده است)؛ پس داریم:

بازیکن‌ها: ۱ و ۲

عمل‌ها:

بازه نیرو به صورت $F = [F_1, F_2]$ و مقدار نیروی نفر اول و دوم به شکل $f_1(t), f_2(t)$

ترجیحات:

$$\begin{cases} U_1(f_1, f_2) = C_1 f_1(t) + C_1 C_2 f_1(t) f_2(t) - C_3 e^{f_1(t)} \\ U_2(f_1, f_2) = C_1 f_2(t) + C_1 C_2 f_1(t) f_2(t) - C_3 e^{f_2(t)} \end{cases}$$

حل بازی:

همان طور که در ابتدا گفته شد هم اکنون باید تابع بهترین پاسخ هر بازیکن به هم‌تیمی خود (یعنی B_1, B_2) و سپس نقطه تعادل نش بازی را به دست آوریم. نقطه تعادل در اینجا نقطه‌ای است که بازی بازیکن ۱، بهترین بازی‌اش نسبت به بازی بازیکن ۲ باشد و بالعکس.

شرط برقراری تعادل نش:

$$\begin{cases} f_1^* = B_1(f_2^*) \\ f_2^* = B_2(f_1^*) \end{cases}$$

برای محاسبه تابع بهترین پاسخ باید ببینیم بهترین پاسخ بازیکن ۱ برای بازی بازیکن ۲ و همچنین بهترین پاسخ بازیکن ۲ برای بازی بازیکن ۱ چیست. می‌دانیم که برای به دست آوردن ماکزیمم یک تابع باید از آن مشتق گرفت؛ اما پیش از این کار باید کمی از روش تقریب و اختلال برای حل این مسئله کمک بگیریم. می‌دانیم که بسط یک تابع نمایی به شکل زیر است:

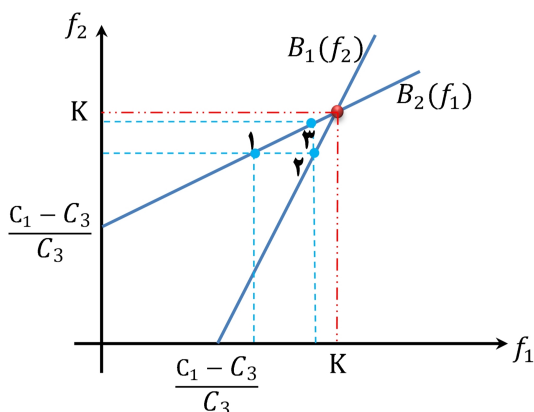
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

اگر مسئله را تا تقریب مرتبه اول حل کنیم، هیچ نقطه تعادل نش‌ای حاصل نمی‌شود، پس تابع نمایی خود را تا جمله دوم حاصل از بسط نوشته و مسئله را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} B_1(f_2) &=: \frac{\partial U_1}{\partial f_1(t)} = C_1 + C_1 C_2 f_2(t) - \frac{2C_3 f_1(t)}{2} - C_3 = 0 \\ &\rightarrow f_1(t) = \frac{C_1 C_2 f_2(t) + C_1 - C_3}{C_3} \\ B_2(f_1) &=: \frac{\partial U_2}{\partial f_2(t)} = C_1 + C_1 C_2 f_1(t) - \frac{2C_3 f_2(t)}{2} - C_3 = 0 \\ &\rightarrow f_2(t) = \frac{C_1 C_2 f_1(t) + C_1 - C_3}{C_3} \end{aligned}$$

پس بهترین بازی بازیکن ۱ برای هر بازی بازیکن ۲ و بالعکس، به صورت بالا به دست آمد. حال می‌خواهیم دو تابع بهترین پاسخ را به شکل نمودار رسم و سپس تحلیل کنیم.

برای یافتن نقطه تعادل نش از روی نمودار کافی است که یک نقطه خارج از تعادل را بررسی کنیم. در شکل ۱، نقطه‌های آبی رنگ را در نظر بگیرید؛ اگر بازیکن دوم به اندازه نقطه آبی (۱) نیرو صرف کند، بازیکن اول مجبور خواهد بود به عنوان بهترین پاسخ، از نقطه آبی (۱) به نقطه آبی (۲) تغییر موضع داده و میزان نیروی لازم برای پیروزی خود و تیمش را افزایش دهد. متعاقباً با این تغییر، بازیکن دوم دوباره مجبور خواهد شد استراتژی خود را برای بُرد تیمش عوض کرده و در نتیجه به اندازه نقطه آبی (۳) تلاش خود را افزایش دهد. این جابجایی‌ها تا جایی ادامه می‌یابد که



شکل ۱. نمودار توابع بهترین پاسخ در مسابقه طناب‌کشی

هیچ بازیکنی دیگر انگیزه تغییر بازی خود را نداشته باشد. این نقطه همان نقطه تقاطع دو نمودار و درواقع نقطه تعادل نش خواهد بود که در نمودار به رنگ قرمز مشخص شده است.

$$\begin{aligned}
 f_1^* &= B_1(f_2^*), & f_1^*(t) &= \frac{C_1 C_2 f_2^*(t) + C_1 - C_3}{C_3} \\
 & \rightarrow f_1^*(t) = \frac{C_1 C_2 \left(\frac{C_1 C_2 f_1^*(t) + C_1 - C_3}{C_3} \right) + C_1 - C_3}{C_3} \\
 & \rightarrow f_1^*(t) = \frac{C_1 - C_3}{C_3 - C_1 C_2} = K & \rightarrow f_2^*(t) = \frac{C_1 - C_3}{C_3 - C_1 C_2} = K
 \end{aligned}$$

طبق محاسبات بالا، هر دو بازیکن باید به اندازه K نیرو صرف کنند. این عبارت دو معنی دارد؛ اول اینکه در نقطه (K, K) هیچ بازیکنی با تغییر بازی خودش سود نمی‌برد چون روی بهترین پاسخش قرار دارد. دوم این که هیچ نقطه دیگری وجود ندارد که در آن یکی از بازیکن‌ها حداقل با تغییر بازی خودش بتواند سود بیشتری کسب کند. پس اعضای یک تیم طناب‌کشی باید به اندازه یک مقدار مشخص و برابر همدیگر نیرو صرف کنند تا شانس پیروزی بیشتری داشته باشند و نیازی نیست بیشتر از آن مقدار نیز زحمت بکشند. این بدین معنی است که مثلاً، تیمی که هر دو بازیکن آن ۵۰ نیوتن نیرو مصرف کنند، شانس بیشتری نسبت به تیمی که یکی از بازیکنانش ۳۰ نیوتن و دیگری ۷۰ نیوتن نیرو مصرف کند، برای پیروزی دارد.

در این مقاله، با فرض برابری عوامل مختلف در پیروزی، فقط تابع نیرو را تأثیر دادیم؛ اما می‌توان در تابع مربوط به مطلوبیت، عوامل دیگر از جمله تابع قد و تابع وزن را نیز وارد کرد. مثلاً می‌توان بررسی نمود که اگر قد یک بازیکن یا مجموعه یک تیم، از بازیکن یا مجموعه دیگر انسانی‌تر بیشتر باشد چه تأثیری در روند بازی خواهد داشت؟

لازم به ذکر است که یک بازی می‌تواند از حالت ساده (مانند بالا) خارج شده و به شکل یک بازی پویا درآید و چند نقطه تعادل نش داشته باشد؛ به این معنی که تحت شرایط مختلف (مثلاً دو برابر شدن نیروی کل توسط یکی از تیم‌ها)، تابع بهترین پاسخ هر بازیکن یا هر تیم نسبت به کنش بازیکن یا تیم دیگر تغییر کند و در نهایت بر روی یک نمودار به صورت یک منحنی (به جای یک خط راست) درآید. به هر حال هر تیم برای برنده‌شدن باید نقطه تعادل نش خود را حفظ نماید.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به عوامل فیزیکی مؤثر در برنده شدن یک تیم در مسابقه طناب‌کشی که در ابتدای مقاله ذکر شد، می‌توان به طور ساده تشخیص داد که چه گروهی در یک رقابت پیروز خواهد شد؛ اما با فرض این که هردو تیم تمام شرایط لازم را فراهم کرده باشند، یعنی افرادی سنگین وزن با پنجه‌های قوی، قدهای یکسان و قوای جسمانی برابر انتخاب شده باشند، وضعیت متفاوت خواهد بود. تحت این شرایط، بازی کاملاً متقارن می‌شود و هردو تیم ویژگی‌های یکسانی پیدا خواهند کرد، پس در نگاه اول نباید هیچ گروهی نسبت به دیگری رفتار متفاوتی داشته باشد. اما نظریه بازی‌ها پاسخ دیگری دارد، که نشان می‌دهد هنوز یک عامل مؤثر برای پیروزی که همان تعادل نش تیم‌هاست، باقی مانده است. در نتیجه با انجام محاسبات می‌توان فهمید که اعضای یک تیم طناب‌کشی باید به اندازه یک مقدار مشخص و برابر همدیگر نیرو صرف کنند تا شانس پیروزی بیشتری داشته باشند. به عبارت دیگر تیمی که بتواند خود را در نقطه تعادل نش حفظ نماید موفق به پیروزی خواهد شد.

تشکر و قدردانی

نویسنده بر خود می‌داند که به ترتیب حروف الفبا از آقایان محسن باقری محراب، سعید عبدی و سلیمان فتح‌الله‌زاده که نظرات سودمندی جهت بهبود مقاله ارائه دادند و همچنین داور (داوران) محترم که نقطه نظرات سازنده‌ای پیشنهاد نمودند، تشکر و قدردانی نماید.

مراجع

[1] M. J. Osborne, *An introduction to game theory*, Oxford University Press, 2000.

[۲] وبگاه کلاس درس ؛ «نظریه بازی‌ها» ، ۱۳۸۹: <http://kelasedars.org>

[۳] د. هالیدی، ر. رزنیک، ج. واکر، مبانی فیزیک، ویرایش ششم، ترجمه: ن. گلستانیان، م. بهار، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۸۲.

پیمان فهیمی: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده فیزیک

رایانامه: pfahimi@mail.kntu.ac.ir

بافه چیست؟

ای. سیباخ، ال. سیباخ، و ال. استین

برگردان: داود حسن‌زاده للکامی و هاجر روشن شکالگورابی

از وقتی که ژان لور^۱ و هنری کارتان^۲ در سال ۱۹۵۰ رسماً مفهوم بافه^۳ را معرفی نمودند، مثال‌های متنوع و کاربردهای بافه‌ها، نقش بزرگی در زمینه‌های گوناگون ریاضی مانند متغیرهای مختلط، هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی جبری ایفا نموده است. هنوز تقریباً همهٔ متونی که بافه‌ها را معرفی یا از آن استفاده می‌کنند فرض را بر آشنایی خواننده با توپولوژی جبری تا سطح کارشناسی می‌گذارند. لذا برای یک دانشجوی کارشناسی به‌دست آوردن درک واقعی از بافه‌ها و کاربردهایشان بسیار سخت است. هدف این مقاله معرفی کردن نظریهٔ بافه‌ها در سطحی مقدماتی است. با امید به این که خوانندگان علاقه‌مند به‌همراه بصیرتی کامل، توانایی حرکت به سمت مقالات استاندارد (مانند [۲]، [۳]، [۶]، [۱۰] یا [۱۱]) را داشته باشند.

مسیر حرکت ما به‌سوی نظریهٔ بافه‌ها از میان مثال‌های مربوط به سه ناحیهٔ وسیع از ریاضیات عبور خواهد کرد: از ناحیهٔ آنالیز ریاضی، بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمام‌ریخت؛ از ناحیهٔ جبر، بافهٔ حلقه‌های موضعی، و از ناحیهٔ هندسه، بافهٔ فرم‌های دیفرانسیل. هر یک از این بافه‌های خاص را با جزئیات قابل‌ملاحظه‌ای شرح خواهیم داد، زیرا چشم‌اندازهای مختلفی که این‌گونه آشکار می‌گردند، مباحث بعدی نظریهٔ کلی بافه‌ها را با سهولت بیشتری شفاف خواهند ساخت.

J. A. Seebach, Jr., L. A. Seebach and L. A. Steen, What is a Sheaf?, *Amer. Math. Monthly*, **77** (1970) 681-703.

^۱Jean Leray ^۲Henri Cartan ^۳sheaf

۱. بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت

یک نگاشت تمامریخت^۱ (یا تحلیلی^۲) بر یک زیرمجموعه باز D از n -فضای مختلط $\mathbb{C}^n$ نگاشتی مختلط-مقدار بر D است که در هر نقطه از D دارای یک نمایش سری توانی موضعی باشد. لم اوسگود^۳ [۶، ص ۲] بیان می‌کند که یک نگاشت پیوسته بر $D \subset \mathbb{C}^n$ تمامریخت است اگر و تنها اگر جداگانه نسبت به هر یک از متغیرها تمامریخت باشد.

یک خاصیت بسیار مهم نگاشت‌های تمامریخت این است که آنها به‌طور یکتا توسط رفتارشان بر مجموعه‌های باز تعیین می‌شوند: اگر f و g بر دامنه D (دامنه، مجموعه‌ای باز و همبند است) تمامریخت بوده و بر یک زیرمجموعه باز نا تهی از D برابر باشند، آنگاه بر سراسر D ، f با g برابر است. برای اثبات این مطلب، کافی است مشاهده کنیم که بزرگ‌ترین زیرمجموعه باز از D که بر آن $f = g$ (نسبت به D) بسته است زیرا مشتقات جزئی که بسط سری توانی را تعیین می‌کنند، پیوسته‌اند. چون D همبند است، این مجموعه باید برابر با D باشد.

اکنون اگر $z \in \mathbb{C}^n$ ، گوئیم f در z تمامریخت است هرگاه بر یک همسایگی از z تمامریخت باشد. مجموعه A_z متشکل از همه نگاشت‌های تمامریخت در z ، تشکیل یک جبر روی میدان اعداد مختلط می‌دهد که در آن، عمل‌های جمع و ضرب مستلزم اشتراک دامنه‌هاست: اگر $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ و $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ ، آنگاه $f + g : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ و $f \cdot g : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$. فرض کنیم ایدآل I_z از A_z متشکل از نگاشت‌هایی از A_z باشد که بر یک همسایگی از z صفر می‌شوند.

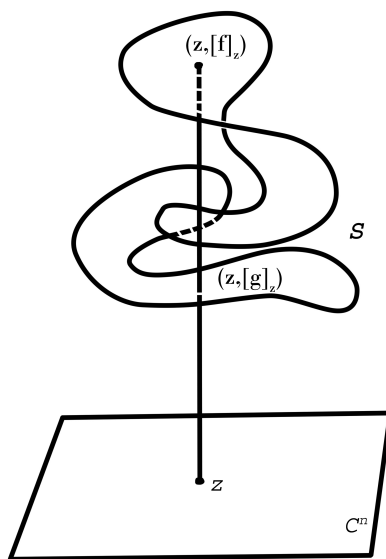
جبر ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت در z به‌صورت حلقه (جبر) خارج‌قسمتی A_z/I_z تعریف شده و با O_z نمایش داده می‌شود. لذا یک ریشه^۴ از یک نگاشت تمامریخت، عضوی چون $f + I_z$ از O_z است که در آن، f در z تمامریخت می‌باشد. معمولاً این ریشه را با $[f]_z$ نمایش می‌دهیم. طبق معمول، دو نگاشت که به یک ریشه تعلق دارند را یکی گرفته یا بین آنها تفاوتی قائل نمی‌شویم. این بی‌توجهی تا حدی توسط خاصیت یکتایی که در بالا بیان شد توجیه می‌شود، زیرا دو نگاشت که به یک ریشه تعلق دارند و بر یک دامنه یکسان D تعریف می‌شوند باید در حد یک نگاشت در I_z تفاوت داشته باشند؛ این بدان معنی است که آنها بر یک همسایگی از z یکسان بوده و لذا باید بر D نیز یکسان باشند.

اکنون فضای ساقه‌ای^۵ (espace étalé) نگاشت‌های تمامریخت را به‌صورت مجموعه

$$S = \{(z, [f]_z) \mid z \in \mathbb{C}^n \text{ در } f \text{ تمامریخت است}\}$$

^۱holomorphic ^۲analytic ^۳D. Osgood ^۴germ ^۵stalk space

به همراه نگاشت طبیعی ρ از S به $\mathbb{C}^n$ با ضابطه $\rho((z, [f]_z)) = z$ تعریف می‌کنیم. $\rho^{-1}(z)$ را ساقه^۱ در نقطه $z \in \mathbb{C}^n$ می‌نامیم. به سادگی دیده می‌شود که این یک نسخه از O_z ، یعنی جبر ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت در z است. بنابراین فضای ساقه‌ای S اجتماع مجزای ساقه‌هاست. به طور شهودی، S را به صورت سطوحی بر فراز $\mathbb{C}^n$ که در هم نفوذ کرده‌اند به همراه ρ که تصویرکننده S به روی $\mathbb{C}^n$ است، رسم می‌کنیم (شکل ۱).

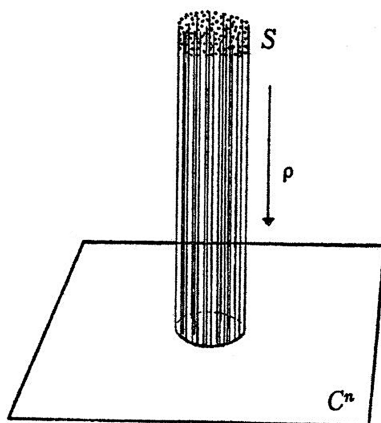


شکل ۱

برای این که درک شهودی بالا را به صورت دقیق‌تری بیان کنیم، توپولوژی $\mathbb{C}^n$ را به S انتقال داده و S را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کنیم. برای هر مجموعه باز U در $\mathbb{C}^n$ و هر نگاشت f که بر U تمامریخت است، تعریف می‌کنیم $V(f, U) = \{(z, [f]_z) \mid z \in U\}$. مجموعه $V(f, U)$ مشمول در S است و گردایه همه این مجموعه‌ها، S را می‌پوشاند، زیرا اگر $(z, [f]_z) \in S$ ، آنگاه f باید در یک همسایگی U از z تمامریخت بوده و $(z, [f]_z) \in V(f, U)$. افزون بر این، $U = \{z \in U_1 \cap U_2 \mid [f_1]_z = [f_2]_z\}$ که در آن، $V(f_1, U_1) \cap V(f_2, U_2) = V(f, U)$ و $f = f_1|_U = f_2|_U$. بنابراین مجموعه‌های $V(f, U)$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی S می‌دهند و نسبت به این توپولوژی، نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی^۲ است. یعنی به ازای هر همسایگی پایه $V(f, U)$ در S ، نگاشت یک به یک $\rho|_{V(f, U)}$ یک همسانریختی به روی U است، زیرا

^۱stalk ^۲local homeomorphism

اگر $\rho_{f,U}$ نمایش $\rho|_{V(f,U)}$ بوده و N یک زیرمجموعه باز از U باشد، آنگاه $\rho_{f,U}^{-1}(N) = V(f, N)$ در S باز است؛ در حالی که اگر $V(f, U') \subset V(f, U)$ ، آنگاه $\rho_{f,U}(V(f, U')) = U'$. توپولوژی روی S به شرط آن که نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی باشد، به طور یکتا تعیین می‌گردد. این فضای توپولوژیک S به همراه همسانریختی موضعی ρ که S را به روی $\mathbb{C}^n$ می‌نگارد، بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت روی فضای زمینه $\mathbb{C}^n$ نامیده می‌شود. همان‌گونه که اصطلاحات تخصصی کشاورزی ایجاب می‌کنند، بافه را همانند یک دسته از ساقه‌ها با سری انباشته از ریشه‌ها (یا اگر تمایل دارید، بذر، دانه) می‌پنداریم (شکل ۲).



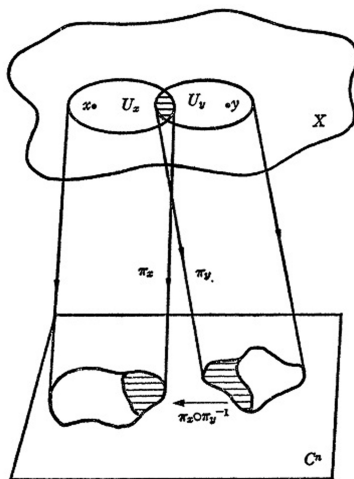
شکل ۲

به شرح زیر می‌توانیم نشان دهیم که فضای ساقه‌ای S ، هاسدورف است: نقاط S ممکن است به دو گونه با یکدیگر متفاوت باشند یا روی ساقه‌های متفاوتی قرار می‌گیرند یا روی ترازهای مختلفی از یک ساقه واقع‌اند. در حالت اول، نگاره‌های دو نقطه $p, q \in S$ در $\mathbb{C}^n$ متفاوت است. از این رو چون $\mathbb{C}^n$ هاسدورف است، همسایگی‌های مجزایی از $\rho(p)$ و $\rho(q)$ وجود دارند که می‌توان آنها را به بالا و به S برگرداند. برای روشن‌تر شدن مطلب، اگر $p = (z, [f]_z)$ و $q = (w, [g]_w)$ که در آن، $z \neq w$ ، آنگاه همسایگی‌های باز مجزای U_z و U_w به ترتیب از z و w و بر آنها نگاشت‌های تمامریخت $f \in [f]_z$ و $g \in [g]_w$ موجودند به گونه‌ای که $V(f, U_z)$ و $V(g, U_w)$ به ترتیب همسایگی‌های مجزایی از p و q هستند.

حالت دوم کمی پیچیده‌تر است، زیرا به خاصیت یکتایی نگاشت‌های تمامریخت بستگی دارد. اگر $p = (z, [f]_z)$ و $q = (z, [g]_z)$ نقاط متفاوتی از یک ساقه باشند، آنگاه $[f]_z \neq [g]_z$. بنابراین

باید نگاشت‌های تمامریخت متفاوت $f \in [f]_z$ و $g \in [g]_z$ وجود داشته باشند که هر دوی آنها روی یک همسایگی مانند U از z تعریف شده‌اند. ادعا می‌کنیم که $V(f, U)$ و $V(g, U)$ همسایگی‌های مجزایی از p و q هستند. برای این منظور، اگر $(w, [h]_w) \in V(f, U) \cap V(g, U)$ ، آنگاه $w \in U$ و $[f]_w = [h]_w = [g]_w$. اما همان‌طور که در بالا مشاهده کردیم، خاصیت یکتایی نگاشت‌های تمامریخت بیان می‌کند که دو نگاشت f و g با دامنه یکسان U که به یک ریشه یکسان $[h]_w$ تعلق دارند، باید بر U با هم برابر باشند. اما آنها روی U با هم مساوی نیستند، زیرا $[f]_z \neq [g]_z$. بنابراین $V(f, U) \cap V(g, U) = \emptyset$ و لذا S هاسدورف است.

هنوز نتیجه دیگری از خاصیت یکتایی نگاشت‌های تمامریخت وجود دارد که می‌تواند برای روشن‌تر شدن مفهوم بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت مورد استفاده قرار گیرد. خاصیت یکتایی را تقریباً می‌توان به این صورت تفسیر کرد که رفتار کلی یک نگاشت تمامریخت به‌طور یکتا توسط رفتارش روی هر مجموعه باز تعیین می‌شود. این به پرسش مبهم درباره یافتن بزرگ‌ترین دامنه‌ای که نگاشت تمامریخت مفروضی را می‌توان به آن گسترش داد، معنا می‌بخشد. در مطالعه کلاسیک نگاشت‌های تحلیلی، این پرسش به مفهوم سطح ریمان یا به‌طور کلی‌تر، به خمینه‌های تحلیلی مختلط منجر شد.



شکل ۳

یک خمینه^۱، اساساً یک فضای توپولوژیک است که به‌طور موضعی همسانریخت با n -فضای اقلیدسی $\mathbb{C}^n$ می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر، یک فضای توپولوژیک X را موضعیاً اقلیدسی^۲ (از بعد n)

^۱manifold ^۲locally Euclidean

می‌نامیم اگر هر $x \in X$ مشمول در یک مجموعه باز U_x باشد که تحت یک نگاشت π_x همسانریخت با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}^n$ است. افزون بر این، قطعه‌های مختصاتی^۱ U_x منسجم هستند، به این معنی که به‌ازای هر $x, y \in X$ یک همسانریختی بین $\pi_x(U_x \cap U_y)$ و $\pi_y(U_x \cap U_y)$ است. نیمه اول این تعریف تضمین می‌کند که X موضعاً شبیه $\mathbb{C}^n$ است و شرط دوم، مستلزم این است که قطعه‌های موضعاً اقلیدسی به‌گونه‌ای همپوشانی داشته باشند که تشکیل یک ساختار اقلیدسی منسجم روی سراسر X دهند. ما هر زوج (U_x, π_x) را یک دستگاه مختصات موضعی^۲ می‌نامیم، زیرا π_x^{-1} دستگاه مختصات روی $\mathbb{C}^n$ را به U برمی‌گرداند (شکل ۳).

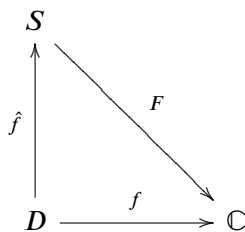
از آنجا که یک فضای توپولوژیک ممکن است توسط چندین مجموعه متفاوت از دستگاه‌های مختصاتی (U_x, π_x) پوشانده شود و از آنجا که قصد نداریم بین دو پوشش که اساساً ساختار مختصاتی یکسانی روی X فراهم می‌کنند، تمایزی قائل شویم، خمینه را یک فضای توپولوژیک موضعاً اقلیدسی تعریف می‌کنیم که در آن، مجموعه دستگاه‌های مختصاتی (U_x, π_x) نسبت به خواص تعریف‌کننده برای یک فضای موضعاً اقلیدسی، ماکسیمال باشد. چون هر فضای موضعاً اقلیدسی یک خمینه یکتا را تولید می‌کند، اغلب فضاهای موضعاً اقلیدسی را نیز خمینه گوئیم؛ حتی اگر مجموعه دستگاه‌های مختصاتی موضعی، ماکسیمال نباشد. گونه‌های دیگری از خمینه‌ها ممکن است با نگاشتن به فضای اقلیدسی حقیقی $\mathbb{R}^n$ به‌جای $\mathbb{C}^n$ یا با نیاز به شرط تحلیلی یا $\mathbb{C}^\infty$ (بینهایت بار مشتق‌پذیر) بودن همسانریختی‌های $\pi_x \circ \pi_y^{-1}$ تولید شوند. این خمینه‌ها به‌طور طبیعی خمینه‌های تحلیلی یا خمینه‌های $\mathbb{C}^\infty$ نامیده می‌شوند. نگاشت $f : X \rightarrow Y$ از یک خمینه تحلیلی به یک خمینه تحلیلی دیگر را تمامریخت گوئیم اگر به‌ازای هر x و y ، $\pi_y \circ f \circ \pi_x^{-1}$ روی دامنه‌اش یعنی $\pi_x(U_x \cap f^{-1}(U_y))$ تمامریخت باشد. در حالت خاصی که $Y = \mathbb{C}^1$ ، نگاشت همانی $i : Y \rightarrow \mathbb{C}^1$ برای تعریف کردن دستگاه‌های مختصاتی موضعی استفاده می‌شود. بنابراین یک نگاشت تمامریخت f از خمینه تحلیلی X به $\mathbb{C}^1$ توسط این خاصیت که $f \circ \pi_x^{-1}$ روی U_x تمامریخت است، مشخص می‌شود.

از این توضیحات باید واضح باشد که بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت را می‌توان، با استفاده از ρ جهت تعریف دستگاه‌های مختصاتی موضعی، مانند یک خمینه تحلیلی در نظر گرفت. این یک خمینه مهم و ویژه است، زیرا می‌توانیم روی آن چیزی را که به‌عنوان نگاشت تمامریخت جهانی^۳ شناخته شده است، تعریف کنیم. این، نگاشت $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ است که توسط $F((z, [f]_z)) = f(z)$ تعریف

^۱coordinate patches ^۲local coordinate system ^۳universal holomorphic function

می‌شود. واضح است که F تمامریخت است، زیرا به ازای هر دستگاه مختصاتی موضعی $(U, \rho|_U)$ ، داریم $F \circ (\rho|_U)^{-1} = f|_{\rho(U)}$ که در آن، $f : \rho(U) \rightarrow \mathbb{C}$ تمامریخت است.

F جهانی^۱ است به این معنی که رفتار تمام نگاشت‌های تمامریخت روی $\mathbb{C}^n$ رده‌ای از F استنتاج می‌شوند. به ویژه هرگاه $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ تمامریخت باشد (که در آن، D یک دامنه در $\mathbb{C}^n$ است)، می‌توانیم f را از طریق بافه^۲ S به صورت زیر تجزیه کنیم: یک نگاشت یکتای $\hat{f} : D \rightarrow S$ وجود دارد به طوری که $F \circ \hat{f} = f$. به وضوح $\hat{f}$ با ضابطه $\hat{f}(z) = (z, [f]_z)$ تعریف می‌شود و لذا نمودار وابسته به آن (شکل ۴) تعویض‌پذیر است. $\hat{f}$ پیوسته است، زیرا $\hat{f}^{-1}(V(f, U)) = U$.



شکل ۴

اکنون با این ساختار، می‌توانیم دامنه^۳ تمامریختی^۲ نگاشت تمامریخت f را (که همان بزرگ‌ترین دامنه‌ای است که f می‌تواند به آن به طور یکتا گسترش داده شود) توضیح دهیم: مؤلفه^۴ همبندی E از S که شامل $\hat{f}(D)$ است. (البته $\hat{f}(D)$ همبند است، زیرا تصویر پیوسته^۵ یک مجموعه^۶ همبند است.) با اینکه D دقیقاً زیرمجموعه^۷ E نیست، توسط $\hat{f}$ در E نشانده می‌شود و از این رو نگاشت تمامریخت جهانی F توسیعی از نگاشت f به E است.

۲. بافه^۸ حلقه‌های موضعی

فرض کنیم A یک حلقه^۹ تعویض‌پذیر یک‌دار و S یک زیرمجموعه^{۱۰} ناتهی بسته^{۱۱} ضربی از A باشد که $S \not\subseteq \{0\}$. با استفاده از A و S ، حلقه‌ای مانند A_S به نام حلقه^{۱۲} خارج قسمت‌های A را می‌سازیم که در آن، عضوهای S دارای وارون ضربی هستند. روی مجموعه^{۱۳}

$$A \times S = \{(a, s) \mid a \in A, s \in S\}$$

^۱universal ^۲domain of holomorphy

یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌کنیم: $(a, s) \sim (b, t)$ اگر و تنها اگر عضو $r \in S$ وجود داشته باشد که $(at - bs)r = 0$. همچنین، دو عمل جمع و ضرب تعریف می‌کنیم:

$$(a, s) + (b, t) = (at + bs, st) \quad \text{و} \quad (a, s)(b, t) = (ab, st),$$

که با رابطه گفته شده سازگار هستند. حلقه رده‌های هم‌ارزی به همراه عمل‌های القا شده را با A_S نمایش می‌دهیم. همانند حلقه اعداد صحیح به همراه مجموعه عضوهای ناصفر به عنوان S ، کلاس هم‌ارزی (a, s) را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم. از این رو S را مجموعه مخرج‌ها^۱ هم می‌نامیم. عضو 0 از A_S (به ازای هر s از S) $\frac{0}{s}$ بوده و عضو همانی $\frac{s}{s}$ می‌باشد. اگر $s \in S$ ، آنگاه $s^{-1} = 1/s$. یک هم‌ریختی $\alpha: A \rightarrow A_S$ با ضابطه $\alpha(a) = as/s$ که مستقل از انتخاب s است موجود می‌باشد. البته اگر A یک دامنه صحیح باشد، α یک‌به‌یک است، زیرا

$$\text{Ker } \alpha = \{a \mid \exists s \in S; sa = 0\}.$$

اگر I ایدالی از A باشد، ایدال $\alpha(I)$ در A_S را می‌توان توسط

$$\alpha(I) = \{a/s \mid a \in I, s \in S\},$$

نمایش داد و به جای $\alpha(I)$ می‌نویسیم IA_S . این نگاشت α روی مجموعه ایدال‌های A یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه ایده‌آل‌های اول در A_S و مجموعه ایدال‌های اول در A که اشتراکشان با S تهی است، تعریف می‌کند [۱۲، ص ۲۲۳].

از آنجا که ایدال اول P در A ایدالی است که متمم آن بسته ضربی است، می‌توانیم حلقه خارج قسمت‌های A را که مجموعه مخرج‌های آن، متمم P است، تشکیل دهیم. این حلقه خارج قسمت‌ها را با A_P نمایش داده و آن را حلقه موضعی A در P می‌نامیم. حلقه A_P تنها دارای یک ایدال ماکسیمال، PA_P ، است، زیرا به وضوح P بزرگ‌ترین ایدال اول از A با این خاصیت است که اشتراکش با متمم P تهی است.

این حلقه‌های موضعی، ساقه‌هایی برای بافه حلقه‌های موضعی خواهند بود و مجموعه ایدال‌های اول A تشکیل فضای زمینه را خواهد داد. این فضا، طیف A نامیده شده و با $\text{Spec } A$ نمایش داده می‌شود و دارای یک توپولوژی است که خانواده مجموعه‌های

$$V_x = \{P \in \text{Spec } A \mid x \notin P\},$$

^۱set of denominators

$x \in A$ ، یک پایه برای آن است. پس $V_1 = \text{Spec } A$ ، $V_0 = \emptyset$ ، $V_x \cap V_y = V_{xy}$ و بنابراین $\{V_x\}_{x \in A}$ یک پایه است. چون $\bigcup_{x \in M} V_x = \{P \mid (x)_{x \in M} \notin P\}$ در آن، $(x)_{x \in M}$ ایدال تولید شده توسط زیرمجموعه M از A است، هر ایدال I از A یک مجموعه باز $V_I = \{P \mid I \not\subset P\}$ تعریف می‌کند و هر مجموعه باز U به همین گونه است؛ اگرچه I به طور یکتا توسط U مشخص نمی‌شود. بنابراین یک مجموعه بسته، مجموعه‌ای است از ایدال‌های اولی که شامل ایدال ثابتی هستند و لذا یک نقطه P از $\text{Spec } A$ بسته است اگر و تنها اگر یک ایدال ماکسیمال باشد. بنابراین برای اکثر حلقه‌ها، فضای زمینه حتی T_1 نیست، در حالی که $\text{Spec } A$ همواره T_0 است.

این امکان وجود دارد که حلقه خارج قسمت‌ها را نسبت به متمم یک ایدال اول P تعریف کنیم، زیرا بسته ضربی است. اما متمم یک اجتماع از اول‌ها نیز بسته ضربی است. از این رو به هر مجموعه باز ناتهی U در $\text{Spec } A$ می‌توانیم حلقه خارج قسمت‌های

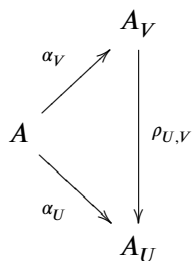
$$A_U = \{a/s \mid P \in U \Rightarrow s \notin P\}$$

را وابسته کنیم که مجموعه مخرج‌هایش برابر با متمم اجتماع همه اول‌های U است. اگر U و V مجموعه‌های باز در $\text{Spec } A$ باشند به طوری که $U \subset V$ ، می‌توانیم همریختی‌های تحدید^۱: $\rho_{U,V}$ را به این صورت تعریف کنیم: اگر $a/s \in A_V$ ، عضو هیچیک از ایدال‌های اول P در V نیست و به طریق اولی، عضو هیچیک از ایدال‌های اول P در U نیست. از این رو a/s عضوی از A_U نیز هست. تعریف می‌کنیم $\rho_{U,V}(a/s) = a/s$. اما این نگاشت، همانی یا حتی یک‌به‌یک نیست، زیرا رده‌های هم‌ارزی که برای تعریف حلقه A_U استفاده می‌شوند بزرگ‌تر از آنهایی است که برای تعریف کردن A_V استفاده می‌شود. هسته $\rho_{U,V}$ شامل آن عضوهای a/s است که a یک مقسوم‌علیه صفر نسبت به عضوی از یکی از ایدال‌های اول V باشد که به هیچیک از عضوهای U تعلق ندارد.

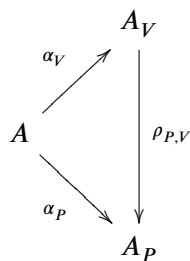
یک خاصیت مهم $\rho_{U,V}$ تعویض‌پذیر بودن نمودار شکل ۵ است که در آن، $a, \alpha_U : A \rightarrow A_U$ را به $a/1$ می‌برد. حال $\rho_{U,V}$ با این خاصیت به طور یکتا تعیین شده و از این، نتیجه می‌شود که $\rho_{U,U}$ نگاشت همانی است و اگر $U \subset V \subset W$ ، آنگاه $\rho_{U,W} = \rho_{U,V} \circ \rho_{V,W}$. این دستگاه که شامل $\text{Spec } A$ ، حلقه‌های A_U و نگاشت‌های $\rho_{U,V} : A_V \rightarrow A_U$ وقتی $U \subset V$ است، یک پیش‌بافه^۲ روی $\text{Spec } A$ نامیده می‌شود. در کنار نگاشت‌های $\rho_{U,V}$ متناظر با زوج مجموعه‌های باز که $U \subset V$ ، می‌توانیم نگاشت‌های $\rho_{P,V} : A_V \rightarrow A_P$ را برای $P \in V$ ، تعریف کنیم. اگر V باز باشد و $P \in V$ ، $\rho_{P,V}(a/s) = a/s$ تعریف می‌کنیم و این امکان‌پذیر است، زیرا

^۱restriction homomorphism ^۲presheaf

$a/s \in A_V$ ایجاب می‌کند که $s \notin P$. نگاشت $\rho_{P,V}$ نگاشت یکتایی است که نمودار وابسته را تعویضپذیر می‌سازد (شکل ۶).



شکل ۵



شکل ۶

مانند قبل، از یکتایی $\rho_{P,V}$ نتیجه می‌شود که

$$\rho_{P,W} \circ \rho_{W,U} = \rho_{P,U}, \quad P \in W \subset U.$$

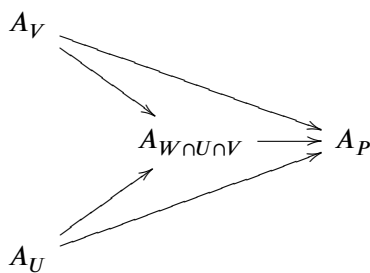
اگر U در $\text{Spec } A$ باز بوده و u عضوی از A_U باشد، می‌توانیم با u به‌عنوان یک نگاشت از U به فضای ساقه‌ای $S = \bigcup \{A_P \mid P \in \text{Spec } A\}$ رفتار کنیم با این تعریف که به‌ازای هر $P \in U$ ، $u(P) = \rho_{P,U}(u) \in A_P$ اگر $u(P) = \rho_{P,U}(u) \in A_P$ اگر $u \in A_U$ و $v \in A_V$ و اگر یک مجموعه باز $W \subset U \cap V$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\rho_{W,U}(u) = \rho_{W,V}(v)$ ، گوئیم u و v روی مجموعه باز W یکسان هستند، زیرا اگر $P \in W$ ، آن‌گاه

$$u(P) = \rho_{P,U}(u) = \rho_{P,W} \circ \rho_{W,U}(u) = \rho_{P,W} \circ \rho_{W,V}(v) = \rho_{P,V}(v) = v(P).$$

اگر $u \in A_U$ ، نگاشت u یا نگاره آن $u(U)$ در S ، یک برش^۱ از پیش‌بافه نامیده می‌شود. مجموعه برش‌های $u(U)$ ، S را می‌پوشاند. زیرا اگر $a/s \in A_P$ ، آن‌گاه s یک مخرج از A_V است که در آن، $V = \{Q \mid s \notin Q\}$ و $a/s \in A_V$ یک برش روی V است که نگاره آن در P ، a/s می‌باشد. گردایه همه برش‌های $u(U)$ یک پایه برای توپولوژی روی S است، زیرا اشتراک دو برش اجتماعی از برش‌ها است. برای اثبات این مطلب، گیریم $u \in A_U$ و $v \in A_V$ برش‌هایی روی مجموعه‌های باز U و V باشند. اگر $u(U) \cap v(V) = \emptyset$ ، آن‌گاه چیزی برای نشان دادن نمی‌ماند. اگر $x \in u(U) \cap v(V)$ ، آن‌گاه به‌ازای $P \in U \cap V$ داریم $x = \rho_{P,U}(u) = \rho_{P,V}(v) \in A_P$. در این صورت $u = a/s$ که

^۱section

در آن، s عضو هیچیک از عضوهای U نیست و $v = a'/s'$ که در آن، s' عضو هیچیک از عضوهای V نیست. از آنجا که در A_P داریم $a/s = a'/s'$ ، $t \notin P$ وجود دارد به طوری که $t(as' - a's) = 0$. فرض کنیم $W = \{Q \mid t \notin Q\}$. در این صورت در $A_{W \cap U \cap V}$ داریم $a/s = a'/s'$ و چون نمودار شکل ۷ تعویضپذیر است، برش روی $W \cap U \cap V$ تعریف شده با $a/s = a'/s'$ ، زیرمجموعه‌ای از $u(U)$ و $v(V)$ و یک همسایگی از x است.

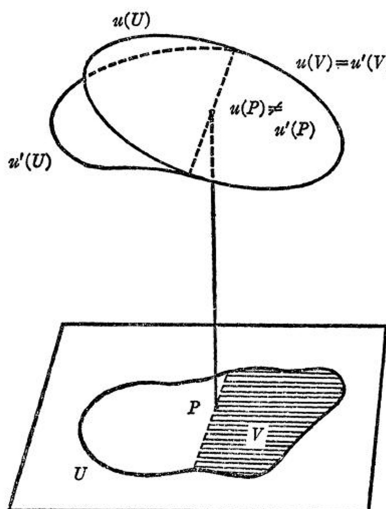


شکل ۷

در این توپولوژی، نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی است، زیرا اگر $x \in A_P$ ، آن‌گاه به ازای V ای برش v روی V گذرا از x وجود دارد و تحدید ρ به برش $v(V)$ یک‌به‌یک و پوشا است. اگر $U \subset V$ باز باشد و $x \in U$ ، آن‌گاه تحدید v به U همچنان یک برش گذرا از x بوده و لذا $u(U)$ که در آن، $u = \rho_{U,V}(v)$ ، باز است و بنابراین ρ پیوسته می‌باشد. اگر N زیرمجموعه‌ای باز از $v(V)$ باشد، آن‌گاه اجتماعی از برش‌ها روی زیرمجموعه‌های باز V نیز هست و $\rho(N)$ اجتماع این زیرمجموعه‌های باز می‌باشد.

فضای توپولوژیک S به همراه افکنش $\rho : S \rightarrow \text{Spec } A$ بافه‌حلقه‌های موضعی روی $\text{Spec } A$ نامیده می‌شود. اگر U یک زیرمجموعه باز از $\text{Spec } A$ باشد، هر نگاشت پیوسته مانند $f : U \rightarrow S$ که $\rho \circ f$ روی U همانی باشد، یک برش از بافه S نامیده می‌شود. مجموعه همه برش‌ها روی مجموعه باز U با $\Gamma(U, S)$ نمایش داده می‌شود. رابطه بین برش‌های بافه S و برش‌های پیش‌بافه (یعنی، عضوهای $u \in A_U$) نسبتاً ظریف است، زیرا اگرچه هر برش پیش‌بافه را می‌شود مانند یک نگاشت (پیوسته) روی U که وارون موضعی برای ρ است پنداشت، دو حالت غیرعادی ممکن است رخ دهد. یکی اینکه دو عضو متفاوت $u = a/s$ و $v = b/t$ از حلقه A_U نگاشت یکسانی را تحت تفسیری که در بالا به آن اشاره شد تولید کنند و دیگر اینکه نگاشت‌هایی در $\Gamma(U, S)$ وجود داشته باشند که از هیچیک از برش‌های $u \in A_U$ مشتق نشوند. از این رو نگاشت تفسیری از A_U به $\Gamma(U, S)$ لزوماً یک‌به‌یک و پوشا نیست، به هر حال اگر U یک مجموعه پایه‌ای باشد (یعنی به ازای یک $x \in A$ به صورت V_x باشد)، آن‌گاه

یکریختی است [۵، شماره ۴، ص ۸۶]. به همین دلیل، مجموعه‌های V_x اغلب مجموعه‌های باز ممتاز^۱ نامیده می‌شوند.



شکل ۸

اگر فضای زمینه $\text{Spec } A$ هاسدورف نباشد، قطعاً بافه S نمی‌تواند هاسدورف باشد. اما اگر $\text{Spec } A$ ، T_1 باشد ممکن است (اگرچه به تصویر کشیدن آن روی برگه هاسدورف مشکل است) که دو برش متمایز u و u' روی U ، بر روی یک زیرمجموعه باز مناسب V از U یکسان باشند (شکل ۸). اگر P در بستار V باشد ولی در V نباشد، $u(P)$ و $u'(P)$ نقاطی متمایز از بافه هستند اما نمی‌توانند جدا شوند زیرا هر همسایگی از P شامل نقاطی از V است که روی آن u و u' یکسان هستند.

به‌منظور فراهم آوردن تفسیر هندسی بیشتری از بافه حلقه‌های موضعی و نیز با نگاهی به سرچشمه موضوع، نگاهی به برخی از حلقه‌های خاص می‌اندازیم. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا، $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب گویا و I یک ایدéal از $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ باشد. فرض کنیم A حلقه خارج‌قسمتی $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/I$ باشد که می‌توان آن را به صورت $\mathbb{Q}[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ نوشت که در آن، اگر $i = 1, \dots, n$ ، $\bar{x}_i = x_i + I$

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall p \in I, p(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

یعنی E اشتراک مجموعه‌های صفر همه چندجمله‌ای‌های در ایدéal I باشد، آنگاه می‌توانیم A را به‌عنوان

^۱distinguished

حلقه نگاشت‌های مختلط-مقدار روی E تفسیر کنیم، زیرا اگر $p_1(\bar{x}) = p_2(\bar{x})$ ، آن‌گاه $p_1(x) - p_2(x) \in$ آن‌گاه $p_1(x) = p_2(x)$ می‌کند که $p_1(\bar{x}) = p_2(\bar{x})$ ، $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ اگر I . لذا اگر $x \in E$ و $p \in A$ که $p(x) \in \mathbb{C}$ می‌برد، یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط E و هم‌ریختی‌های A به $\mathbb{C}$ ایجاد کنیم. اگر $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ ، آن‌گاه نگاشتی که p را به $p(x)$ می‌برد، یک هم‌ریختی از A به $\mathbb{C}$ است و برعکس اگر $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ یک هم‌ریختی باشد، آن‌گاه $x = (\phi(\bar{x}_1), \dots, \phi(\bar{x}_n)) \in E$ چون اگر $p \in I$ ، آن‌گاه

$$p(x) = p(\phi(\bar{x}_1), \dots, \phi(\bar{x}_n)) = \phi(p(\bar{x}_1), \dots, p(\bar{x}_n)) = \phi(0) = 0.$$

چون $\mathbb{C}$ یک حوزه صحیح است، هسته نگاشت تعریف شده توسط $x \in E$ یک ایدéal اول در A است. برعکس، می‌توان نشان داد که اگر P یک عضو از $\text{Spec } A$ باشد، آن‌گاه هسته یک هم‌ریختی از A به $\mathbb{C}$ است [۱۳، ص ۱۶۴]. لذا می‌توانیم $\text{Spec } A$ را مجموعه‌ای از رده‌های هم‌ارزی E تحت رابطه زیر در نظر بگیریم: $x \sim x'$ اگر و تنها اگر x و x' صفرهای چندجمله‌ای‌های یکسان $p \in A$ باشند. از این‌رو اگر $x \sim x'$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $p \in A$ ، $p(x) = p(x')$. بنابراین A را می‌توان یک حلقه نگاشت‌های روی $\text{Spec } A$ نیز دانست.

اینکه عضو p از A در یک ایدéal اول P قرار نداشته باشد به این معنی است که p در هسته نگاشت $A \rightarrow A/P$ قرار ندارد؛ معادلاً p روی هر نقطه x در E که به‌ازای آن هسته هم‌ریختی متناظر، مشمول در P باشد ناصفر است. از این‌رو حلقه موضعی A_P در P که شامل وارون هر $p \notin P$ است، حلقه همه نگاشت‌های گویا است که به‌طور موضعی، یعنی در یک همسایگی از P در $\text{Spec } A$ تعریف شده‌اند. مجموعه چنین نگاشت‌هایی که در P صفر می‌شوند، تنها ایدéal ماکسیمال این حلقه است. حلقه A_U از برش‌های پیش‌بافه روی یک مجموعه باز $U \subset \text{Spec } A$ یک حلقه از نگاشت‌ها است که روی هر نقطه از U تعریف شده‌اند. (اگر U یک مجموعه باز ممتاز باشد، A_U حلقه همه این چنین نگاشت‌هایی است.) هسته یک نگاشت تحدید $\rho_{U,V} : A_V \rightarrow A_U$ (که در آن، $U \subset V$)، مجموعه نگاشت‌هایی است که در هر نقطه U صفر می‌شوند؛ اگرچه ممکن است روی همه V صفر نباشند. عضوایی از A_U که تحدید نگاشت‌های در A_V نیستند، وارون نگاشت‌هایی هستند که در $V \setminus U$ دارای صفر می‌باشند. توپولوژی $\text{Spec } A$ یک توپولوژی در E القا می‌کند: ضعیف‌ترین توپولوژی که در آن، نگاشت شناسایی^۲ از E به $\text{Spec } A$ پیوسته است. در این توپولوژی، بستار نقطه‌ای $x \in E$ برابر با مجموعه همه نقاطی از E است که در همان چندجمله‌ای‌هایی صدق می‌کنند که x صدق می‌کند. یک حلقه ویژه A را

^۱pairing ^۲identification map

انتخاب می‌کنیم تا با جزئیات بیشتر به مطالعه بپردازیم. در $\mathbb{Q}[x, y]$ ، فرض کنیم $I = (xy)$ و

$$A = \mathbb{Q}[x, y]/(xy) \simeq \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$$

که در آن، $\bar{x}\bar{y} = xy + (xy) = (xy) = (0)$ ، در این صورت

$$E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0\} = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, w) \mid w \in \mathbb{C}\}$$

اجتماع محورهای (صفحات) مختصاتی مختلط در $\mathbb{C}^2$ است.

ایدال‌های $(\bar{x})$ و $(\bar{y})$ در A اول‌اند ولی ماکسیمال نیستند، زیرا $\mathbb{Q}[\bar{y}] \simeq \mathbb{Q}[\bar{y}] \simeq \mathbb{Q}[\bar{y}]/(\bar{x}) \simeq \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x})$ یک میدان نیست. نقاط (z, w) در E که ایدال متناظرشان $(\bar{x})$ است، نقاطی هستند به صورت $(0, w)$ که در آن، w به روی $\mathbb{Q}$ متعالی^۱ است و به طور مشابه، نقاط متناظر با ایدال $(\bar{y})$ به شکل $(z, 0)$ برای z متعالی هستند، زیرا همریختی $\mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}] \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $\bar{x} \rightarrow 0$ و $\bar{y} \rightarrow w$ دارای هسته $(\bar{x})$ است اگر و تنها اگر w متعالی باشد. به علاوه، در A داریم $(\bar{x}) \cap (\bar{y}) = (0)$ ، هر ایدال اول شامل $(\bar{x})$ یا $(\bar{y})$ است و مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر در A برابر است با $(\bar{x}) \cup (\bar{y})$.

ایدال‌های اول ماکسیمال در A هسته‌های همریختی‌های $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}] \rightarrow \mathbb{C}$ هستند که برد آنها یک میدان است به طوری که $\phi(\bar{x})$ و $\phi(\bar{y})$ جبری‌اند و چون $\phi(\bar{x})\phi(\bar{y}) = \phi(\bar{x}\bar{y}) = 0$ ، باید یکی از $\phi(\bar{x})$ و $\phi(\bar{y})$ صفر و دیگری، جبری باشد. چنین نقاط $(\phi(\bar{x}), \phi(\bar{y}))$ در E یا به شکل $(z, 0)$ با z جبری یا $(0, w)$ با w جبری هستند. هسته‌های همریختی‌های به $(z, 0)$ و $(0, w)$ ، ایدال‌های $(p(\bar{x}), \bar{y})$ و $(\bar{x}, q(\bar{y}))$ هستند که در آن، p چندجمله‌ای مینیمال z (و از w) است. این ایدال‌ها به همراه $(\bar{x})$ و $(\bar{y})$ دقیقاً نقاط $\text{Spec } A$ هستند.

نقاط $E \subset \mathbb{C}^2$ به رده‌های هم‌ارزی متناظر با ایدال‌های مشمول در $\text{Spec } A$ تقسیم می‌شوند: به هر یک از (x) و (y) یک رده از نقاط متعالی متناظر می‌گردد، در حالی که هر ایدال ماکسیمال $(p(\bar{x}), \bar{y})$ (که در آن، p تحویلناپذیر است) متناظر با مجموعه نقاط جبری $\{(z, 0)\}$ است که z ریشه‌ای از p می‌باشد. در توپولوژی القایی روی E توسط $\text{Spec } A$ ، بستار یک نقطه متعالی مانند $(z, 0)$ ، محور z و بستار یک نقطه جبری مانند $(z, 0)$ همه $(z', 0)$ هایی است که در آن، z' یک ریشه چندجمله‌ای مینیمال z نیز است. یک پایه برای مجموعه‌های باز در $\text{Spec } A$ ، خانواده همه مجموعه‌های $V_p = \{P \in \text{Spec } A \mid p \notin P\}$ ، در حالت خاص $p = \bar{x}$ ،

$$V_{\bar{x}} = \{P \in \text{Spec } A \mid \bar{x} \notin P\} = \{(\bar{y}, p(\bar{x})) \mid p \neq \bar{x} \text{ و } p \in A \text{ تحویلناپذیر یا صفر است}\}.$$

^۱transcendental

مجموعه باز $V_{\bar{x}} \subset \text{Spec } A$ متناظر با متمم محور w در E است. به طور مشابه، $V_{\bar{y}}$ را می توان متمم محور z در نظر گرفت. متمم مجموعه ای متناهی از نقاط جبری متناظر با ایدال های ماکسیمال

$$(\bar{x}, p_1(\bar{y})), \dots, (\bar{x}, p_k(\bar{y})), (p_{k+1}(\bar{x}), \bar{y}), \dots, (p_n(\bar{x}), \bar{y})$$

برابر است با $V_{p_1(\bar{y})} \cap \dots \cap V_{p_n(\bar{x})}$. چون هر چند جمله ای $A = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$ را می توان به صورت $p = p_1(x) + p_2(y) - c$ نوشت که در آن، $p_1(\circ) = p_2(\circ) = p(\circ, \circ) = c$ ، نقاط در V_p عبارت اند از $(\circ, \circ)$ که $p_1(z) = \circ$ و $p_2(w) = \circ$ که $p_2(w) = \circ$.

از نظر هندسی، حلقه $A = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$ حلقه چند جمله ای های تعریف شده در سراسر E ، اجتماع محورهای مختلط است. در نقطه (z, w) از E (که z یا w ، $\circ$ است) متناظر با ایدال اول P ، حلقه موضعی A_P شامل همه نگاشت های گویایی است که مخرجش هایشان در (z, w) صفر نمی شوند. حلقه موضعی $A_{\bar{x}}$ ، حلقه موضعی در هر نقطه $(\circ, w)$ است که در آن، w متعالی است. از نظر جبری، مجموعه مخرج ها به صورت $S = A - (\bar{x}) = \{p \mid p_2(\bar{y}) \neq \circ\}$ است که در آن، مانند بالا $p = p_1 + p_2 - c$. هسته I از هم ریختی $A \rightarrow A_{\bar{x}}$ برابر است با $\{q \in A \mid \exists p \in S; pq = \circ\}$. اگر $p_1 + p_2 - c$ یک مقسوم علیه صفر باشد، آن گاه $\circ = c$. اگر چنین نقطه ای در S نیز باشد، داریم $p_2(\circ) = \circ$ و $p_2(\bar{y}) \neq \circ$. لذا این نقطه عضوی از $\{\circ\} - (\bar{y})$ است. بنابراین $I = (\bar{x})$. از این رو $A/I = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x}) = \mathbb{Q}[\bar{y}]$ و تصویر S در $\mathbb{Q}[\bar{y}]$ ، $\mathbb{Q}[\bar{y}] - \{\circ\}$ است. لذا $A_{\bar{x}}$ یکرخت با میدان نگاشت های گویا در y است. به طور مشابه، $A_{\bar{y}} = \mathbb{Q}(x)$.

بحثی مشابه برای حلقه موضعی در ایدال اول ماکسیمالی به جز $(\bar{x}, \bar{y})$ برای مثال $P = (\bar{x}, \bar{y}^2 - 2)$ ، منجر به حلقه $\{(\bar{y}^2 - 2), q\}$ را عادی نمی کند $A_P = \{p/q \in \mathbb{Q}(y) \mid q \text{ را عادی نمی کند}\}$ خواهد شد. یعنی A_P شامل وارون همه نگاشت هایی است که در $(\circ, \sqrt{2})$ صفر نمی شوند؛ حال آن که دو چند جمله ای از $\bar{x}$ و $\bar{y}$ که روی یک مجموعه باز شامل $(\circ, \sqrt{2})$ یکی هستند، در A_P یکسان در نظر گرفته می شوند. از این رو نگاشت $\alpha: A \rightarrow A_P$ نه یک به یک و نه پوشا است. حال اگر $P = (\bar{x}, \bar{y})$ ، آن گاه مجموعه مخرج ها برای A_P دقیقاً مجموعه چند جمله ای های $p_1 + p_2 - c$ برای p_1 برای $c \neq \circ$ است. لذا در این حالت، نگاشت $\alpha: A \rightarrow A_P$ یک شمول می باشد که پوشا نیست.

در نهایت، به شرح حلقه های برش های پیش بافه A_U برای مجموعه های باز U می پردازیم. اگر U متمم یک مجموعه بسته متناهی از ایدال های اول ماکسیمال

$$(\bar{x}, p_1(\bar{y})), \dots, (\bar{x}, p_k(\bar{y})), (p_{k+1}(\bar{x}), \bar{y}), \dots, (p_n(\bar{x}), \bar{y})$$

باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مخرج‌ها برای A_U برابر است با $\{p \in A \mid p \notin \bigcup_{P \in U} P\}$ که همان مجموعهٔ تمام حاصلضرب‌های $p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ به‌همراه جملهٔ ثابت ناصفر می‌باشد. نگاشت $A_U \rightarrow A_P$ هرگاه $P \in U$ دارای هستهٔ $(\bar{x})$ خواهد بود اگر $P = (\bar{x}, p(\bar{y}))$ (که p هر چند جمله‌ای تحویلناپذیر به‌جز $\bar{y}$ است) و هستهٔ $(\bar{y})$ خواهد داشت اگر $P = (\bar{y})$ یا $P = (\bar{y}, p(\bar{x}))$ (که $p(x) \neq x$) و هستهٔ $(\circ)$ خواهد داشت اگر $P = (\bar{x}, \bar{y})$. اگر $U = V_{\bar{x}}$ متمم محور w باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مخرج‌ها برای A_U برابر با مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های $\bar{y}p(\bar{y}) + c\bar{x}^n$ به‌ازای $p \in \mathbb{Q}[\bar{y}]$ و $n \geq 0$ است. بنابراین

$$A_U = \{p(x)/x^n \mid p \in \mathbb{Q}[x]\}.$$

از آنجا که $A_{(\bar{y})} \simeq \mathbb{Q}(x)$ ، نگاشت $A_U \rightarrow A_{(\bar{y})}$ از حلقهٔ برش‌ها به ساقه در $(\bar{y})$ یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. برای یک ایدئال اول ماکسیمال $(\bar{y}, p) \in V_{\bar{x}}$ ، که $p(x) \neq x$ ، $\rho_{(\bar{y}, p), U} : A_U \rightarrow A_{(\bar{y}, p)}$ یک شمول است زیرا x, p را عاد نمی‌کند. اگر U متمم مجموعهٔ بسته‌ی $\rho_{V_{\bar{x}, U}} : A_U \rightarrow A_{V_{\bar{x}}}$ نگاشت تحدید $V_{\bar{x}} \subset U$ باشد، آن‌گاه $(\bar{x}, p_1(\bar{y})), \dots, (\bar{x}, p_k(\bar{y}))$ دارای هستهٔ $(\bar{y})$ است. حلقهٔ برش‌ها روی $\text{Spec } A$ ، A است، زیرا هر عضو از A در نقطه‌ای از $\text{Spec } A$ صفر می‌شود. از این‌رو برای هر نوع از مجموعهٔ باز U در $\text{Spec } A$ ، عضوهای حلقه‌های A_U نگاشت‌هایی گویا هستند که در هر نقطه از U تعریف شده‌اند. به‌ویژه، نگاشت‌های $\bar{x}$ و $\bar{y}$ برش‌های روی مجموعهٔ باز $\text{Spec } A$ هستند. آنها روی زیرمجموعهٔ سرهٔ باز $V_{\bar{x}}$ برابرند، زیرا $(\bar{y})$ هستهٔ نگاشت تحدید $\rho_{V_{\bar{x}}, \text{Spec } A}$ است اما روی $(\bar{x}, \bar{y})$ که در بستار $V_{\bar{x}}$ قرار دارد، یکی نیستند. بنابراین نقاط $\bar{x}$ و $\bar{x} + \bar{y}$ در $A_{(\bar{x}, \bar{y})}$ گرچه متمایزند، نمی‌توانند با برش‌ها جداسازی شوند، چون هر مجموعهٔ باز شامل $(\bar{x}, \bar{y})$ باید $V_{\bar{x}}$ را قطع کند. از این‌رو این بافه نمی‌تواند هم به‌طور عمودی و هم افقی هاسدورف باشد.

۳. بافهٔ فرم‌های دیفرانسیلی

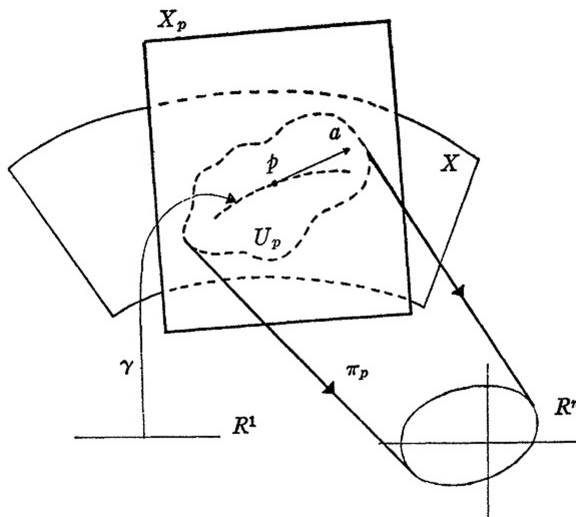
فرض کنید $p \in X$ که در آن، X یک خمینهٔ $\mathbb{C}^\infty$ روی $\mathbb{R}^n$ است. مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌ها از X به خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ را می‌دهیم که در یک همسایگی از p ، $\mathbb{C}^\infty$ هستند، با $\mathbb{C}_p^\infty$ نمایش می‌دهیم. به‌وضوح $\mathbb{C}_p^\infty$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است که در آن، جمع $f + g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف می‌شود. یک مماس^۱ بر X در p ، نگاشتی خطی مانند $t : \mathbb{C}_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}^1$ است به‌طوری‌که

$$t(fg) = t(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot t(g)$$

^۱tangent

که در آن، $f, g \in C_p^\infty$. مجموعه همه بردارهای مماس بر X در p تشکیل یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ می‌دهد که آن را X_p فضای مماس بر X در p می‌خوانیم. اگر $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ یک نگاشت از رده C^∞ باشد به طوری که $\gamma(t_0) = p$ و اگر $f \in C_p^\infty$ ، آن‌گاه $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ اگر $(f \circ \gamma)'$ مشتق $f \circ \gamma$ باشد، نگاشت $\gamma_* : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}^1$ تعریف شده با $\gamma_*(f) = (f \circ \gamma)'(t_0)$ یک مماس است. برای تفسیر هندسی این مطلب، یک دستگاه مختصات موضعی خاص (U_p, π_p) را که در آن، $\pi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم. اگر $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ نگاشت افکنش باشد که با $\pi_i(t_1, \dots, t_n) = t_i$ تعریف می‌شود، می‌نویسیم $x_i = \pi_i \circ \pi_p$ ؛ در این صورت $\pi_p(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ اگر $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ آن‌گاه خم $\gamma(t) = \pi_p^{-1}(\pi_p(p) + te_i)$ را به عنوان محور مختصاتی نام U_p در p می‌پنداریم، زیرا $\left. \frac{d}{dt}(\pi_p \circ \gamma) \right|_0 = e_i$. بنابراین مماس γ_* در

$$\begin{aligned} \gamma_*(f) &= (f \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \pi_p^{-1} \circ \pi_p \circ \gamma) \right|_0 \\ &= \left(\frac{\partial(f \circ \pi_p^{-1})}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ \pi_p^{-1})}{\partial t_n} \right) \Big|_{\pi_p(p)} \cdot e_i = \frac{\partial(f \circ \pi_p^{-1})}{\partial t_i} \Big|_{\pi_p(p)} \end{aligned}$$



شکل ۹

صدق می‌کند. از این رو $\gamma_*(f)$ معمولاً با $f(\partial/\partial x_i)$ نشان داده می‌شود. مماس‌های $(\partial/\partial x_1), \dots, (\partial/\partial x_n)$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری X_p می‌دهند [۸، ص ۷]. X_p را یک ابرصفحه n -بعدی مماس بر X در p می‌پنداریم (شکل ۹).

اگر

$$\gamma_* = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

آن‌گاه $\gamma_*(f)$ همان $a \cdot \text{grad } f$ ، یعنی مشتق f در راستای $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ است. اگر $\phi : X \rightarrow Y$ یک نگاشت $\mathbb{C}^\infty$ از خمینه‌ها باشد، ديفرانسیل ϕ نگاشت خطی $d\phi : X_p \rightarrow Y_{\phi(p)}$ با ضابطه است که اگر $t \in X_p$ و $f \in \mathbb{C}_{\phi(p)}^\infty$ ، آن‌گاه $[d\phi(t)](f) = t(f \circ \phi)$. اگر (U_p, π_p) یک دستگاه مختصاتی موضعی در $p \in X$ باشد، آن‌گاه $x_i = \pi_i \circ \pi_x$ یک $\mathbb{C}^\infty$ -نگاشت از زیرخمینه U_p به خمینه $\mathbb{R}^1$ تعریف می‌کند. از این‌رو ديفرانسیل dx_i از x_i یک تبدیل خطی از X_p به $\mathbb{R}_{x_i(p)}^1$ است. چون به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}^1$ ، t یکریخت با $\mathbb{R}^1$ است، می‌توانیم dx_i را عضوی از فضای برداری دوگان X_p^* از X_p بدانیم. چون $dx_i(\partial/\partial x_j) = \delta_{ij}$ (که در آن، $\delta_{ij} = 0$ اگر $i \neq j$ و $\delta_{ij} = 1$ اگر $i = j$)، ديفرانسیل‌های $dx_1, \dots, dx_n$ تشکیل یک پایه از X_p^* را می‌دهند که دوگان پایه $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ از X_p می‌باشد.

در حالی که هر ديفرانسیل dx_i یک نگاشت صرفاً یک متغیره است، فرم ديفرانسیلی یک نگاشت چندمتغیره است. به‌طور دقیق‌تر، یک k -فرم ديفرانسیلی θ روی X_p یک نگاشت k -خطی متناوب از k -تایی‌هایی از عضوهای X_p به $\mathbb{R}^1$ است. (θ, k) -خطی است اگر نسبت به هر متغیر به‌طور جداگانه خطی باشد و متناوب است اگر $\theta(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(k)}) = \text{sgn } \sigma \theta(t_1 \dots t_k)$ که در آن، $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ یک جایگشت بوده و $\text{sgn } \sigma$ ، $+1$ است اگر σ زوج و -1 است اگر σ فرد باشد. منظور از حاصلضرب گوه‌ای $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ فرم k -خطی یکتا روی X_p است که روی یک پایه برای مجموعه k -تایی‌ها به‌وسیله

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \delta,$$

تعریف شده است و در آن، $\delta = 1$ اگر $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$ و در غیر این صورت $\delta = 0$. مجموعه همه فرم‌های k -خطی روی X_p یک فضای برداری n^k -بعدی روی $\mathbb{R}$ است و n^k فرم‌های k -فرم‌های ديفرانسیلی، یک زیرفضا از مجموعه همه فرم‌های k -خطی است و فرم‌های k -خطی $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ که $i_j \in \{1, \dots, n\}$ ، تشکیل یک پایه برای این فضای برداری را می‌دهند. این‌گونه دنباله از اندیس‌ها را یک

k -تایی صعودی می‌نامیم. از این رو بعد فضای k -فرم‌های دیفرانسیلی، $\binom{n}{k}$ است اگر $k \leq n$ و صفر است اگر $k > n$.

فرض کنیم S_k مجموعه همه k -تایی‌های صعودی از اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر یا مساوی n باشد. برای $x \in S_k$ ، k -فرم $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ را که $s = (i_1, \dots, i_k)$ ، با dx_s نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم $U \subset X$ یک مجموعه باز و θ نگاشتی باشد که به هر $p \in U$ ، یک k -فرم دیفرانسیلی $\theta(p)$ در p نسبت می‌دهد. وقتی یک بار یک دستگاه مختصاتی موضعی در p اختیار و فرم‌های $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ تعریف شوند، می‌توانیم بنویسیم

$$\theta(p) = \sum_{s \in S_k} a_s(p) dx_s$$

که هر $a_s(p)$ ضریب بسط $\theta(p)$ بر حسب پایه $\{dx_s\}_{s \in S_k}$ است. از این رو a_s را می‌توان به عنوان یک نگاشت از U به $\mathbb{R}^1$ در نظر گرفت. چون هر $\theta(p)$ یک k -فرم دیفرانسیلی در p است، θ را یک k -فرم $\mathbb{C}^\infty$ روی U می‌نامیم اگر هر نگاشت a_s ، $\mathbb{C}^\infty$ باشد. فضای برداری حقیقی همه k -فرم‌های $\mathbb{C}^\infty$ روی U را با $\Omega^k(U)$ نمایش می‌دهیم. اگر $U \subset V$ ، آنگاه تبدیل خطی مانند $\rho_{U,V} : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ موجود است که با تحدید دامنه $\theta \in \Omega^k(V)$ تعریف می‌شود. گزاینده $\{\Omega^k(U)\}$ به ازای U باز در X به همراه تبدیلات خطی $\rho_{U,V}$ پیش‌بافه k -فرم‌های دیفرانسیلی نامیده می‌شود.

چون هر خمینه پیرافشرده^۱ دارای یک افراز یکانی^۲ $\mathbb{C}^\infty$ تحت تسلط^۳ هر پوشش باز $\{U_\alpha\}$ است [۸، ص ۸۵]، پیش‌بافه‌های روی چنین خمینه‌هایی در خاصیت ویژه زیر صدق می‌کنند: اگر $U = \bigcup U_\alpha$ که U_α در X باز است و اگر $\theta_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha)$ منسجم باشند به این معنی که تحدیدهای θ_α و θ_β به $U_\alpha \cap U_\beta$ یکی باشند (هرگاه $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$) آنگاه یک $\theta \in \Omega^k(U)$ یکتا وجود دارد که تحدیدش به هر U_α برابر θ_α است. به طور مشخص اگر $\{f_\alpha\}$ یک افراز یکانی $\mathbb{C}^\infty$ برای $\{U_\alpha\}$ باشد به طوری که $f_\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ و f_α بیرون U_α صفر شود، و $\sum f_\alpha = 1$ ، آنگاه می‌توانیم θ را برابر $\sum f_\alpha \theta_\alpha$ تعریف کنیم.

هر پیش‌بافه با ویژگی فوق را یک بافه می‌گویند. بنابراین هرگاه X پیرافشرده باشد، دستگاه $\{\Omega^k(U), \rho_{U,V}\}$ را بافه k -فرم‌های دیفرانسیلی می‌نامیم. اگر $\Omega^k(p)$ مجموعه k -فرم‌های دیفرانسیلی در p باشد، می‌توانیم $\Omega^k(p)$ را به عنوان ساقه‌های بافه S بپنداریم: $S = \bigcup_{p \in X} \Omega^k(p)$. نگاشت

^۱paracompact ^۲partition of unity ^۳subordinate to

افکنش $\rho : S \rightarrow X$ به هر فرم دیفرانسیلی در p نقطه p را نسبت می‌دهد. k -فرم $\theta \in \Omega^k(U)$ یک برش از S بوده و خانواده $\{ \theta(U) \subset S \mid \theta(U) \text{ باز است} \}$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی روی S می‌دهد.

۴. بافه‌ها: تعریف عمومی

هر یک از سه مثال قبلی وجوه مختلف مفهوم عمومی یک بافه را منعکس می‌کنند. برای تأکید بر این گوناگونی و فراهم آوردن یک چارچوب منسجم برای تعریف عمومی بعدی، در شکل ۱۰، سه بافه مورد بحث قبلی را خلاصه کرده‌ایم.

بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت	بافه حلقه‌های موضعی	بافه فرم‌های دیفرانسیلی	
ریشه	$a/s \in A_p$		
فضای ساقه‌ای	$S = \bigcup \{A_p \mid P \in \text{Spec } A\}$		
نگاشت افکنش	$\rho : S \rightarrow \text{Spec } A$		
ساقه	A_p (حلقه موضعی)		
فضای زمینه	$\text{Spec } A = \{P \mid P \text{ یک ایدئال اول است}\}$	$X = \mathbb{C}^\infty$ خمینه	
برش پیش‌بافه	$a/s \in A_U$	$\theta \in \Omega^k(U)$	
همریختی تحدیدی	$\rho_{U,V} : A_V \rightarrow A_U$	$\rho_{U,V} : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$	

شکل ۱۰

بافه ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت، فضای ساقه‌ای S ، به همراه یک توپولوژی و یک همسانریختی موضعی ρ به روی $\mathbb{C}^\infty$ ، تعریف شد. بافه حلقه‌های موضعی به‌طور مشابه تعریف شد. اگرچه در این مورد، دستگاه شامل حلقه‌های A_U و همریختی‌های تحدیدی $\rho_{U,V} : A_V \rightarrow A_U$ را به‌عنوان یک پیش‌بافه از حلقه‌ها معرفی کردیم. در مورد سوم، بافه k -فرم‌های دیفرانسیلی، پیش‌بافه k -فرم‌های دیفرانسیلی بود در صورتی که فضای زمینه X پیرافشرده باشد. تشخیص هم‌ارز بودن این دو توصیف، آغاز نظریه بافه را تشکیل می‌دهد. اکنون تعریف‌ها را ارائه می‌کنیم تا این دو رویکرد را رسمیت بخشیده و هم‌ارزی تعریف‌ها را اثبات کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک بوده و $\mathcal{E}$ یک رده از اشیاء ریاضی آشنا (مانند گروه‌های آبدی، مدول‌ها یا حلقه‌ها) باشد. فرض کنیم F یک نگاشت از τ به $\mathcal{E}$ بوده و برای هر

زوج $U, V \in \tau$ که $U \subset V$ ، نگاشتی (مانند یک همریختی، همریختی مدولی، یا یکریختی) چون $\rho_{U,V} : F(V) \rightarrow F(U)$ وجود داشته باشد که ساختار اشیاء $\mathcal{C}$ را حفظ می‌کند. اگر $\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{U,W}$ هرگاه $U \subset V \subset W$ و اگر $\rho_{U,U}$ نگاشت همانی روی $F(U)$ باشد، نگاشت F را به همراه نگاشت‌های تحدید $\rho_{U,V}$ یک پیش‌بافه روی X تعریف می‌کنیم. عضوهای $F(U)$ ، برش‌های F روی U نامیده می‌شوند. (به زبان نظریه رسته، یک پیش‌بافه یک تابعگون پادورد از رسته مجموعه‌های باز و نگاشت‌های شمول X به یک رسته از اشیاء و ریختارها است.) بافه، یک پیش‌بافه است که در دو اصل انسجام ذیل صدق می‌کند:

۱. اگر $\{U_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز در X باشد و $U = \bigcup U_\alpha$ و اگر برش $s, t \in F(U)$ روی هر U_α یکی باشند (یعنی به‌ازای هر α ، $\rho_{U_\alpha, U}(s) = \rho_{U_\alpha, U}(t)$)، آنگاه $s = t$.
۲. اگر $\{U_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز در X باشد و $U = \bigcup U_\alpha$ و اگر برش‌های $s_\alpha \in F(U_\alpha)$ منسجم باشند به این معنی که تحدیدهای s_α و s_β به $U_\alpha \cap U_\beta$ یکی باشند (یعنی $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(s_\beta)$) هرگاه $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ، آنگاه یک برش $s \in F(U)$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر α ، $\rho_{U_\alpha, U}(s) = s_\alpha$.

تعریف ۲. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{C}$ یک رده از اشیاء ریاضی آشنا (مانند گروه‌های آبدی، مدول‌ها یا حلقه‌ها) باشد. یک بافه روی X سه‌تایی $\{S, \pi, X\}$ است که در آن، S یک فضای توپولوژیک و $\pi : S \rightarrow X$ یک همسانریختی موضعی (نگاشتی که هر نقطه $p \in S$ دارای یک همسایگی U بوده که روی آن $\pi|_U$ یک همسانریختی می‌باشد) است به‌طوری که هر ساقه $\pi^{-1}(x) \in \mathcal{C}$ و هر عمل به‌عنوان یک نگاشت از $\bigcup_{x \in X} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x))$ (با توپولوژی القایی از $S \times S$) به S پیوسته است.

بافه از نوع ۱ را بافه برش‌ها و بافه از نوع ۲ را بافه ریشه‌ها می‌نامیم. ارتباط بین این دو نوع از بافه‌ها دقیقاً همان است که در مثال‌های قبلی نشان داده شد.

به بیان صریح، فرض کنید F یک پیش‌بافه (از برش‌ها) روی W باشد. بافه ریشه‌های متناظر را می‌سازیم با این تعریف که یک ریشه در $x \in X$ ، یک رده هم‌ارزی از $A_x = \bigcup_{x \in U} F(U)$ تحت رابطه $\rho_{W, U}(s) = \rho_{W, V}(t)$ ، $W \subset U \cap V$ است اگر به‌ازای یک $s \in F(U) \sim t \in F(V)$. بنابراین ریشه یک برش $s \in F(U)$ در نقطه‌ای مانند $x \in U$ گردایه همه برش‌های $t \in F(V)$

است که با s روی یک همسایگی V از x یکی هستند. مطابق معمول، ریشه s در x را با $[s]_x$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که فضای ساقه‌ای S ، $\{(x, [s]_x) \mid s \in F(U), x \in U\}$ باشد. توپولوژی روی S توسط همسایگی‌های به شکل $V(s, U) = \{(x, [s]_x) \mid x \in U\}$ تولید می‌شود. لذا نگاشت افکنش $\pi : S \rightarrow X$ یک همسانریختی موضعی خواهد بود. با تفسیر کردن برش به عنوان نگاشت، نگاشت‌های به اصطلاح تحدید $\rho_{U,V}$ واقعاً تحدید هستند و توپولوژی روی S در بین آن توپولوژی‌هایی که برش‌ها نسبت به آنها پیوسته‌اند، قوی‌ترین است. (همچنین می‌توان توپولوژی روی S را به عنوان خارج قسمت توپولوژی روی $\bigcup_{U \in \tau} (U \times F(U))$ نسبت به رابطه هم‌ارزی القا شده توسط $\sim$ توصیف کرد که در آن، هر U توپولوژی به توپولوژی زیرفضایی مجهز است و $F(U)$ گسسته است.)

روشن است که هر ساقه $\pi^{-1}(x)$ عمل‌های $F(U)$ را به ارث می‌برد و هر چنین عملی پیوسته است. برای مثال، اگر هر $F(U)$ یک گروه آبدی تحت جمع باشد و اگر $[t]_x, [s]_x \in \pi^{-1}(x)$ ، آنگاه $[s]_x + [t]_x$ به صورت $[s+t]_x$ تعریف می‌شود. اگر $V(s+t, U)$ یک همسایگی $[s+t]_x$ باشد، آنگاه تصویر معکوس $V(s+t, U)$ تحت $+$ شامل

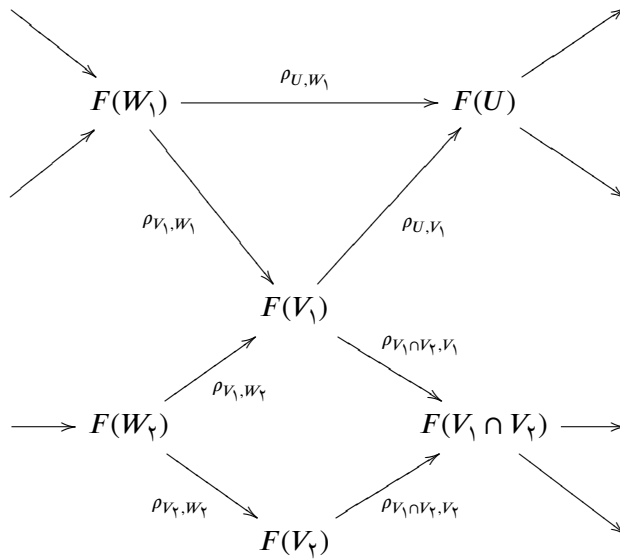
$$\{(r, q) \mid r \in V(s, U), q \in V(t, U), \pi(r) = \pi(q)\}$$

است که یک مجموعه باز در $\bigcup_{x \in X} (\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x))$ می‌باشد. بنابراین $\{S, \pi, X\}$ در واقع یک بافه^۱ ریشه‌هاست.

برعکس، فرض کنید $\{S, \pi, X\}$ یک بافه^۱ ریشه‌ها باشد (شاید مانند بالا از یک پیش‌بافه ساخته شده باشد). اگر U در X باز باشد، آنگاه فرض کنید $F(U)$ گردایه نگاشت‌های پیوسته $s : U \rightarrow F$ است به طوری که $s \circ \pi$ روی U همانی است. $F(U)$ ساختار جبری را از ساقه‌ها به وسیله تعریف‌های نقطه‌ای^۱ به ارث می‌برد و نگاشت‌های تحدید $\rho_{U,V}$ صرفاً تحدید s از V به زیرمجموعه^۱ U هستند. اولین اصل انسجام برای بافه‌ها به روشنی برقرار است، زیرا برش‌ها نگاشت هستند و دومین اصل نیز برقرار است، زیرا $F(U)$ شامل همه نگاشت‌های پیوسته از U به F است که وارون‌های π هستند. حال اگر $\{F, \pi, X\}$ یک بافه^۱ ریشه‌ها باشد، بافه^۱ مشتق شده از (پیش) بافه^۱ برش‌ها به طور متعارف با F یکریخت است. با این حال، اگر S یک پیش‌بافه^۱ برش‌ها باشد، آنگاه پیش‌بافه^۱ برش‌های S' وابسته به بافه^۱ ریشه‌های منتج شده از S در حالت کلی با S متفاوت است، زیرا از آنجا که S' یک بافه است، ممکن است (به منظور صدق کردن در دومین اصل انسجام)، برش‌های بیشتری نسبت به S داشته باشد در حالی که برخی از برش‌ها که در S متمایز بودند ممکن است (به واسطه اصل اول) در S' یکی شوند. البته اگر

^۱pointwise

S یک بافه باشد، آنگاه S' به طور طبیعی یکرخت با S است. لذا به این معنی، دو تعریف از یک بافه اساساً هم‌ارزند.



شکل ۱۱

یک راه معمول و مناسب دیگر برای ساختن رده‌های هم‌ارزی، استفاده از حدهای مستقیم است. اگر F یک پیش‌بافه برش‌ها روی X بوده و $x \in X$ ، آنگاه تحدید F به همسایگی‌های x تشکیل یک دستگاه مستقیم^۱ $\{\rho_{U, V}\}_{x \in U \subset V}$ ، $\{F(U)\}_{x \in U}$ می‌دهد، زیرا $\rho_{U, V} \circ \rho_{V, W} = \rho_{U, W}$ هرگاه $x \in U \subset V \subset W$. تعداد کمی از عضوهای چنین دستگاهی را می‌توان با نمودار تعویض‌پذیر شکل ۱۱ نمایش داد.

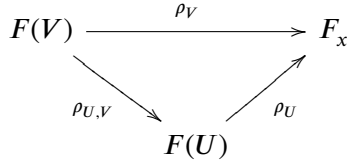
صرف‌نظر از جزئیات، حد مستقیم این دستگاه، اولین شیئی است که می‌تواند در سمت راست این نمودار ظاهر شود. به‌ویژه، یک شیء F_x به همراه نگاشت‌های $F_x \rightarrow F(U)$ برای هر U : ρ_U ظاهر شود. به‌ویژه، یک شیء F_x به همراه نگاشت‌های $F_x \rightarrow F(U)$ برای هر U : ρ_U مستقیم^۲ دستگاه مستقیم $\{\rho_{U, V}\}_{x \in U \subset V}$ ، $\{F(U)\}_{x \in U}$ نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

(الف) اگر $U \subset V$ ، آنگاه نمودار شکل ۱۲ تعویض‌پذیر باشد؛

(ب) F_x نسبت به خاصیت (الف) جهانی باشد، یعنی اگر $(G_x, \{\sigma_U\})$ نیز در خاصیت (الف) صدق

^۱directed system ^۲direct limit

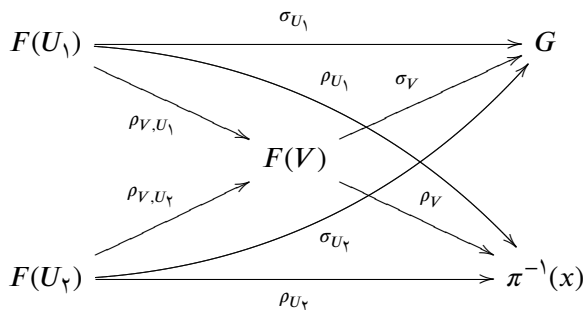
کند، آنگاه یک نگاشت یکتا مانند $\eta : F_x \rightarrow G_x$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر σ_U :
 $\sigma_U = \eta \circ \rho_U, F(U) \rightarrow G_x$



شکل ۱۲

شرط (الف)، ایده «ظاهر شدن در سمت راست نمودار» را روشن می‌سازد و شرط (ب) ادعا می‌کند که F_x اولین شیء این چنینی است. از این شرط‌ها به روشنی نتیجه می‌شود که حد مستقیم (تا حد یکریختی) یکتا است. لذا آن را با $\lim_{x \in U} F(U)$ نمایش می‌دهیم. حال ساقه ریشه‌های در x ، مشتق شده از پیش‌بافه F را در نظر بگیرید. اگر ρ_U نشان‌دهنده نگاشتی از $F(U)$ به ساقه $\pi^{-1}(x)$ با تعریف $\rho_U(s) = (x, [s]_x)$ باشد (که $x \in U$)، آنگاه $\pi^{-1}(x) = \lim_{x \in U} F(U)$ ، زیرا اگر $x \in U \subset V$ ، آن وقت $\rho_V = \rho_U \circ \rho_{U,V}$ و نسبت به آن خاصیت، جهانی است. برای اثبات حکم اخیر، فرض می‌کنیم که $(G, \{\sigma_U\})$ یک حد مستقیم دیگر باشد و مشاهده می‌کنیم که اگر هر دوی $t_1 \in F(U_1)$ و $t_2 \in F(U_2)$ در یک ریشه یکسان $[s]_x$ قرار داشته باشند، آنگاه $\sigma_{U_1}(t_1) = \sigma_{U_2}(t_2)$ زیرا بنا بر تعریف $[s]_x$ ، یک $V \subset U_1 \cap U_2$ موجود است به طوری که $\rho_{V,U_1}(t_1) = \rho_{V,U_2}(t_2)$. در این صورت با توجه به تعویض‌پذیر بودن نمودار شکل ۱۳، داریم

$$\sigma_{U_1}(t_1) = \sigma_V \circ \rho_{V,U_1}(t_1) = \sigma_V \circ \rho_{V,U_2}(t_2) = \rho_{U_2}(t_2).$$



شکل ۱۳

بنابراین هر عضو $[s]_x$ از $\pi^{-1}(x)$ به وسیله یک نگاشت مناسب $\rho_U^{-1} \circ \sigma_U$ به یک نقطه از G نگاشته می‌شود. این نقطه را $\eta(x, [s]_x)$ می‌نامیم و بدین وسیله نگاشت یکتای مورد نیاز از $\pi^{-1}(x)$ به G را تعریف می‌کنیم.

به این ترتیب می‌توانیم هر سه رویکرد را در یک تعمیم جامع خلاصه کنیم: به ازای هر $x \in X$ ، ساقه روی x از بافه ریشه‌ها، حد مستقیم تحدید پیش‌بافه به همسایگی‌های x است.

این بخش را با چهارمین مشخصه بافه‌ها به اتمام می‌رسانیم. این مشخص‌سازی نیز بر اساس خاصیت جهانی است و تا حدی در مثال‌های قبلی به نمایش درآمده است. فرض کنید $\mathfrak{F}$ یک رده از نگاشت‌های تعریف شده روی زیرمجموعه‌های باز از فضای توپولوژیک X باشد. اگر $F(U)$ گردایه تمام $f \in \mathfrak{F}$ باشد که دامنه‌شان U است و $\rho_{U,V}$ نگاشت تحدید باشد (یعنی $\rho_{U,V}(f) = f|_U$) هرگاه $U \subset V$ و $f \in F(V)$ ، آنگاه گردایه $\{F(U), \rho_{U,V}\}$ یک پیش‌بافه است. اگر این پیش‌بافه یک بافه S باشد (همان‌طور که اگر $\mathfrak{F}$ مجموعه نگاشت‌های تمام‌ریخت روی زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{C}^n$ یا مجموعه فرم‌های دیفرانسیلی روی زیرمجموعه‌های باز یک خمینه پیرافشرده X باشد، چنین خواهد شد)، آنگاه می‌توانیم یک نگاشت پیوسته جهانی $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ از نوع $\mathfrak{F}$ تعریف کنیم به‌طوری که هر $f \in F(U)$ به‌طور یکتا از طریق بافه S تجزیه شود؛ یعنی یک نگاشت یکتای $\hat{f} : U \rightarrow S$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{f} = \Phi \circ f$.

در حالت کلی، هر شیء S و نگاشت $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ با این خاصیت که هر نگاشت $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طور یکتا به واسطه S از طریق Φ تجزیه شود، نسبت به خاصیت‌های مشخص‌کننده نگاشت‌های f جهانی نامیده می‌شود. زوج (S, Φ) به‌طور یکتا (تا حد یکرختی) با این خاصیت تعیین می‌شود. از این‌رو مثلاً بافه نگاشت‌های تمام‌ریخت، یک شیء جهانی یکتا برای یک خانواده نگاشت‌های تمام‌ریخت تلقی می‌شود.

چون $U = \hat{f}^{-1}(V(f, U))$ پیوسته است. از این‌رو بافه‌ها یک خاصیت پیچیده نگاشت‌ها، مانند تحلیلی بودن را به چیزی ساده‌تر از پیوستگی انتقال می‌دهند؛ زیرا توپولوژی روی بافه طوری انتخاب شده است که یک برش پیوسته روی U (یعنی یک عضو از $F(U)$) متناظر با یکی از نگاشت‌های خاص (مثلاً تحلیلی، مشتق‌پذیر) از $F(U)$ است.

کتابنامه تاریخیچه

- [1933] W. Rückert, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, *Math. Ann.*, **107** (1933) 259-281.
- [1940] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *J. Math. Pures Appl.*, **19** (1940) 1-26.
- [1944] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 3^e série, **61** (1944) 149-197.
- [1945] J. Leray, Sur la forme des espaces topologiques, *J. Math. Pures Appl.*, **24** (1945) 95-248.
- [1946] J. Leray, L'anneau d'homologie d'une représentation, *C. R. Acad. Sci.*, **222** (1946) 1366- 1368.
- [1950] K. Oka, Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950) 1-27.
- [1950] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950) 29-64.
- [1950] *Siminaire Cartan*. 1950-51, vol. 1, Benjamin, New York, 1967.
- [1951] K. Oka, Lemme fondamental, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951) 204-214, 259-278.
- [1952] A. Weil, Sur les théorèmes de deRham, *Comment. Math. Helv.*, (1952) 119-146.
- [1953] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Colloque de Bruxelles*, (1953) 41-55.
- [1953] K. Kodaira and D. C. Spencer, On arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **39** (1953) 641-649.
- [1953] K. Kodaira and D. C. Spencer, Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **39** (1953) 868-877.

- [1953] J.-P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque de Bruxelles*, (1953) 57-68.
- [1954] F. Hirzebruch, Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **40** (1954) 110-114.
- [1955] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, **61** (1955) 197-278.
- [1956] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd ed., Springer, Berlin, 1966.
- [1956] S.-S. Chern, Scientific report of the second summer institute; 11, Complex manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956) 102-117.
- [1956] O. Zariski, Scientific report of the second summer institute; 111, Algebraic sheaf theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956) 117-141.
- [1957] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, **9** (1957) 119-221.
- [1958] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [1961] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.

کتابنامه عمومی

- [1] L. Bers, *Introduction to several complex variables*, Courant Institute, New York, 1964.
- [2] G. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] C. H. Dowker, *Lectures on sheaf theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1956.
- [4] J. W. Gray, Sheaves with values in a category, *Topology*, **3** (1965) 1-18.

- [5] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, Nos. 4, 7, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [6] R. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [7] M. Hervé, *Several complex variables*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1963.
- [8] N. J. Hicks, *Notes on differential geometry*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.
- [9] L. Hörmander, *Complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.
- [10] I. Macdonald, *Algebraic geometry, Introduction to schemes*, Benjamin, New York, 1968.
- [11] R. Swan, *The Theory of sheaves*, University of Chicago Press, Chicago, 1964.
- [12] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra I*, Van Nostrand, 1958.
- [13] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra II*, Van Nostrand, 1960.

داود حسن‌زاده للکامی: اراک، دانشگاه صنعتی اراک، صندوق پستی ۳۸۱۳۵-۱۱۷۷

رایانامه: dhmath@arakut.ac.ir

هاجر روشن شکالگورابی: اراک، دانشگاه صنعتی اراک، صندوق پستی ۳۸۱۳۵-۱۱۷۷

رایانامه: hrsmath@gmail.com

بهینه‌سازی معکوس و کاربردهای آن در شبکه جریان و بهینه‌سازی سهام

مجید سلیمانی دامنه و شیدا عموکاظمی

چکیده

هدف اصلی این نوشتار، معرفی مسائل برنامه‌ریزی خطی و مخروطی معکوس و کاربرد آن‌ها است. برای مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس، یک روش حل، بر پایه شرایط بهینگی، مطرح می‌کنیم و سپس کاربردهای مسائل خطی معکوس در شبکه‌های جریان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم مسائل مخروطی معکوس تحت برخی شرایط مجدداً به‌صورت مسائل مخروطی بیان و حل می‌شوند. در قسمت پایانی، یک کاربرد مهم از مسائل مخروطی معکوس در بهینه‌سازی سهام مورد بررسی قرار گرفته است.

۱. مقدمه

بهینه‌سازی معکوس^۱ از جمله مباحثی است که در دهه‌های اخیر در برنامه‌ریزی ریاضی^۲ مورد توجه قرار گرفته است. این مسائل کاربردهای زیادی در اقتصاد، مدیریت و صنعت دارند. هدف این مقاله، معرفی این مسائل در حالت خطی و مخروطی است.

در مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس، فرض می‌شود نقطه شدنی x° داده شده است به‌طوری که این نقطه بهینه نیست. می‌خواهیم ضرایب تابع هدف را طوری تعدیل کنیم که x° تحت مقادیر جدید پارامترها بهینه شود. این تعدیل می‌تواند توسط نرم‌های مختلفی (مانند نرم ۱، نرم ۲ و نرم بی‌نهایت) اندازه‌گیری عبارات و کلمات کلیدی. بهینه‌سازی معکوس، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی مخروطی، شبکه جریان، بهینه‌سازی سهام.

^۱inverse optimization ^۲mathematical programming

شود. هدف این مسائل تبدیل یک جواب شدنی به یک جواب بهینه با کمترین تغییرات ممکن در ضرایب هزینه است.

مسائل برنامه ریزی مخروطی دسته‌ای از مسائل بهبود سازی محدب به شمار می‌آیند. این مسائل به صورت مینیم سازی یک تابع محدب روی اشتراک یک مجموعه آفین و یک مخروط محدب صورتبندی می‌شوند [۴]. مسائل مخروطی معکوس در بهبود سازی سبد سهام^۱ کاربردهای فراوانی دارند که به یکی از آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲. برنامه ریزی خطی معکوس

شکل کلی مسئله برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$(۱.۲) \quad \min\{cx \mid Ax = b, l \leq x \leq u\}$$

که در آن $x \in R^n$ بردار متغیرها، A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار $m \times ۱$ است. بردار سطری c ، بردار هزینه نامیده می‌شود. بردارهای $l, u \in R^n$ ثابت هستند و بیانگر کران‌های بالا و پایین متغیرهای تصمیم هستند. به علاوه، $l < u$. یک جواب شدنی x° را در نظر بگیرید، یعنی $Ax^\circ = b$ و $l \leq x^\circ \leq u$. می‌خواهیم بردار c را طوری تعدیل کنیم که x° جواب بهینه مسئله (۱.۲) شود. تعریف می‌کنیم:

$$(۲.۲) \quad F(x^\circ) = \{\tilde{c} \in R^n \mid \min\{\tilde{c}x \mid Ax = b, l \leq x \leq u\} = \tilde{c}x^\circ\}.$$

مسئله بهبود سازی معکوس متناظر با مسئله (۱.۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۳.۲) \quad \min\{\|c - \tilde{c}\|_p \mid \tilde{c} \in F(x^\circ)\},$$

که در آن $\|\cdot\|_p$ یک نرم مناسب مسئله است.

لم زیر از قضیه KKT در برنامه ریزی خطی نتیجه می‌شود [۲].

لم ۱.۲. [۱۲] فرض کنید x° یک نقطه شدنی مسئله (۱.۲) است. x° جواب بهینه این مسئله است اگر و تنها اگر $\pi \in R^m$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $j = ۱, \dots, n$

$$(۴.۲) \quad l_j < x_j^\circ < u_j \Rightarrow \pi P_j = c_j,$$

$$(۵.۲) \quad l_j = x_j^\circ < u_j \Rightarrow \pi P_j \leq c_j,$$

$$(۶.۲) \quad l_j < x_j^\circ = u_j \Rightarrow \pi P_j \geq c_j,$$

که در آن P_j ستون j -ام ماتریس A است.

با توجه به لم فوق، مسئله بهینه‌سازی معکوس (۳.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|c - \tilde{c}\|_p \\ \text{s.t.} \quad & \pi P_j = \tilde{c}_j, \quad j \in J^\circ, \\ & \pi P_j \leq \tilde{c}_j, \quad j \in J^-, \\ & \pi P_j \geq \tilde{c}_j, \quad j \in J^+ \end{aligned}$$

که در آن $J^+ = \{j | x_j^\circ = u_j\}$ و $J^- = \{j | x_j^\circ = l_j\}$ ، $J^\circ = \{j | l_j < x_j^\circ < u_j\}$ قرار می‌دهیم $\tilde{c}_j = c_j + \theta_j - \alpha_j$ که در اینجا $\theta_j, \alpha_j \geq 0$ به‌ازای هر $j = 1, \dots, n$. θ_j و α_j به ترتیب میزان افزایش و کاهش در c_j را نشان می‌دهند. به‌سادگی دیده می‌شود که در جواب‌های بهینه این مدل داریم $\theta_j \alpha_j = 0$.

با توجه به توضیحات فوق، مسئله معکوس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta - \alpha\|_p \\ \text{s.t.} \quad & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j = c_j, \quad j \in J^\circ, \\ (۷.۲) \quad & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j \leq c_j, \quad j \in J^-, \\ & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j \geq c_j, \quad j \in J^+, \\ & \theta_j, \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

چون $\theta_j, \alpha_j \geq 0$ و تابع هدف مینیمم‌سازی $\|\theta - \alpha\|_p$ است، قید دوم را می‌توان با

$$-\pi P_j + \theta_j \geq -c_j$$

جایگزین کرد؛ زیرا داریم $-\pi P_j + \theta_j \geq -c_j + \alpha_j \geq -c_j$. به‌طور مشابه، قید سوم را می‌توان با $\pi P_j + \alpha_j \geq c_j$ جایگزین کرد. از طرفی می‌توان محدودیت اول مسئله بالا را به صورت دو نامساوی نوشت و آن‌ها را با قیود زیر جایگزین کرد:

$$\pi P_j + \alpha_j \geq c_j, \quad -\pi P_j + \theta_j \geq -c_j$$

بنابراین می‌توان مسئله (۷.۲) را به‌صورت زیر نوشت:

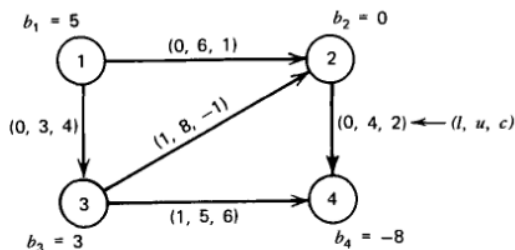
$$\begin{aligned}
 \min \quad & \|\theta - \alpha\|_p \\
 \text{s.t.} \quad & -\pi P_j + \theta_j \geq -c_j, \quad j \in J^- \cup J^\circ, \\
 & \pi P_j + \alpha_j \geq c_j, \quad j \in J^+ \cup J^\circ, \\
 & \theta_j \geq 0, \quad j \in J^- \cup J^\circ, \\
 & \alpha_j \geq 0, \quad j \in J^+ \cup J^\circ.
 \end{aligned}
 \tag{۸.۲}$$

حال به بیان یک کاربرد از مسائل بهینه‌سازی معکوس در شبکه جریان می‌پردازیم. گراف جهت‌دار $G(V, \mathcal{A})$ ، را که در آن V و $\mathcal{A}$ به‌ترتیب مجموعه گره‌ها و یال‌های گراف G هستند در نظر بگیرید. متناظر با هر گره i عدد b_i را داریم که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. اگر $b_i > 0$ یا $b_i < 0$ باشد، گره i را یک گره مولد (مصرف‌کننده) می‌نامیم و b_i میزان جریانی است که در این گره تولید (مصرف) می‌شود. هزینه انتقال یک واحد جریان در یال (i, j) برابر با c_{ij} است. هدف تعیین جریان در یال‌های گراف G است، به‌طوری‌که میزان تقاضای مصرف‌کنندگان با کمترین هزینه برآورده شود. شکل کلی مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & -\sum_{j \in t(i)} x_{ji} + \sum_{j \in f(i)} x_{ij} = b_i, \quad i \in V \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned}
 \tag{۹.۲}$$

(i, j) یک یال از گره i به گره j را نشان می‌دهد. متغیر تصمیم در این مسئله x_{ij} است که میزان جریان در یال (i, j) است. $f(i)$ مجموعه گره‌هایی است که کمانی از گره i به آن‌ها و $t(i)$ مجموعه گره‌هایی است که کمانی از آن‌ها به گره i وارد می‌شود. l_{ij} و u_{ij} به‌ترتیب نشان‌دهنده حداکثر و حداقل جریانی هستند که می‌تواند از گره i به گره j انتقال یابد.

برای مثال، گراف زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل ۱. یک گراف مربوط به شبکه جریان

مسئله مینیمم هزینه در گراف فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_{12} + 4x_{13} + 2x_{24} - x_{32} + 6x_{34} \\
 s.t. \quad & x_{12} + x_{13} = 5, \\
 & x_{24} - x_{12} - x_{32} = 0, \\
 & x_{32} + x_{34} - x_{13} = 3, \\
 & -x_{24} - x_{34} = -8, \\
 & 0 \leq x_{12} \leq 6, \\
 & 0 \leq x_{13} \leq 3, \\
 & 0 \leq x_{24} \leq 4, \\
 & 1 \leq x_{32} \leq 8, \\
 & 1 \leq x_{34} \leq 5.
 \end{aligned}$$

متغیر دوگان متناظر با قید i -ام را با π_i نشان می‌دهیم. با توجه به مسئله (۸.۲)، مسئله معکوس متناظر با مسئله (۹.۲)، در حالتی که $p = 1$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in J^-} \theta_{ij} + \sum_{(i,j) \in J^+} \alpha_{ij} + \sum_{(i,j) \in J^0} |\beta_{ij}| \\
 s.t. \quad & -\pi_j + \pi_i - \theta_{ij} \leq c_{ij}, \quad (i,j) \in J^-, \\
 & -\pi_j + \pi_i + \beta_{ij} = c_{ij}, \quad (i,j) \in J^0, \\
 & -\pi_j + \pi_i + \alpha_{ij} \geq c_{ij}, \quad (i,j) \in J^+, \\
 & \theta_{ij}, \alpha_{ij} \geq 0,
 \end{aligned}$$

(۱۰.۲)

که در آن $J^- = \{(i, j) | x_{ij}^\circ = 0 \}$ و $J^\circ = \{(i, j) | l_{ij} < x_{ij}^\circ < u_{ij}\}$ ، $J^+ = \{(i, j) | x_{ij}^\circ = u_{ij}\}$ در این مسئله، $c_{ij} + \theta_{ij}$ ، $c_{ij} - \alpha_{ij}$ و $c_{ij} - \beta_{ij}$ به ترتیب ضرایب هزینه تعدیل یافته برای کمان‌ها در J^- ، J^+ و J° است.

چون متغیر β_{ij} در مسئله بالا آزاد است، از تغییر متغیر شاپیرو^۱ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\beta_{ij} = \mu_{ij} - \gamma_{ij}$ ، که $\mu_{ij}, \gamma_{ij} \geq 0$. بنابراین مسئله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in J^-} \theta_{ij} + \sum_{(i,j) \in J^+} \alpha_{ij} + \sum_{(i,j) \in J^\circ} (\mu_{ij} + \gamma_{ij}) \\ \text{s.t.} \quad & -\pi_j + \pi_i - \theta_{ij} \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in J^-, \\ & -\pi_j + \pi_i + \mu_{ij} - \gamma_{ij} = c_{ij}, \quad (i, j) \in J^\circ, \\ & -\pi_j + \pi_i + \alpha_{ij} \geq c_{ij}, \quad (i, j) \in J^+, \\ & \theta_{ij}, \alpha_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij} \geq 0. \end{aligned} \quad (11.2)$$

اگر $Jf(i)$ را مجموعه گره‌هایی در J که کمانی از i به آن‌ها وارد می‌شود و $Jt(i)$ را مجموعه گره‌هایی در J که کمانی از آن‌ها به گره i وارد می‌شود در نظر بگیریم، یعنی $Jf(i) = \{j \mid (i, j) \in J\}$ و $Jt(i) = \{j \mid (j, i) \in J\}$ ، آن‌گاه دوگان مسئله بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in J^-} c_{ij} y_{ij} - \sum_{(i,j) \in J^\circ} c_{ij} y_{ij} - \sum_{(i,j) \in J^+} c_{ij} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J^-f(i)} y_{ij} - \sum_{j \in J^-t(i)} y_{ji} - \sum_{j \in J^\circ f(i)} y_{ij} + \sum_{j \in J^\circ t(i)} y_{ji} - \sum_{j \in J^+ f(i)} y_{ij} \\ & + \sum_{j \in J^+ t(i)} y_{ji} = 0, \quad i \in V \\ & 0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad (i, j) \in J^- \cup J^+, \\ & -1 \leq y_{ij} \leq 1, \quad (i, j) \in J^\circ. \end{aligned}$$

به یک مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان که در آن همه b_i ها صفر هستند، یک مسئله مینیمم هزینه گردش^۲ می‌گوییم. یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌ها برای حل این مسائل، الگوریتم حذف دور منفی است [۱]. اگر برای هر کمان در J^- ، از تغییر متغیر $-y_{ij}$ به جای y_{ij} استفاده کنیم، آن‌گاه مسئله بالا به یک مسئله مینیمم هزینه گردش تبدیل می‌شود. تا این‌جا نشان دادیم که معکوس یک مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان قابل تبدیل به یک مسئله مینیمم هزینه گردش است. این موضوع علاوه بر اینکه

^۱Shapiro ^۲minimum cost circulation problem

از دیدگاه نظری جالب است، نشان می‌دهد با نرم‌افزارهای موجود برای حل مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان، می‌توان مسائل معکوس مینیمم هزینه در شبکه جریان را نیز حل کرد. مثال ساده زیر این موضوع را روشن می‌سازد.

مثال ۲.۲. فرض می‌کنیم شبکه جریان مثال قبل داده شده باشد. نقطه شدنی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x_{12} = 2, x_{13} = 3, x_{24} = 3, x_{32} = 1, x_{34} = 5).$$

داریم $J^+ = \{(1, 3), (3, 4)\}$ و $J^\circ = \{(1, 2), (2, 4)\}$ ، $J^- = \{(3, 2)\}$ طبق (۱۱.۲) مسئله معکوس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_{32} + \alpha_{13} + \alpha_{34} + \mu_{12} + \gamma_{12} + \mu_{24} + \gamma_{24} \\ \text{s.t.} \quad & \pi_3 - \pi_2 - \theta_{32} \leq -1, \\ & \pi_1 - \pi_2 + \mu_{12} - \gamma_{12} = 1, \\ & \pi_2 - \pi_4 + \mu_{24} - \gamma_{24} = 2, \\ & \pi_1 - \pi_3 + \alpha_{13} \geq 4, \\ & \pi_3 - \pi_4 + \alpha_{34} \geq 6, \\ & \theta_{32}, \mu_{12}, \gamma_{12}, \mu_{24}, \gamma_{24}, \alpha_{13}, \alpha_{34} \geq 0. \end{aligned}$$

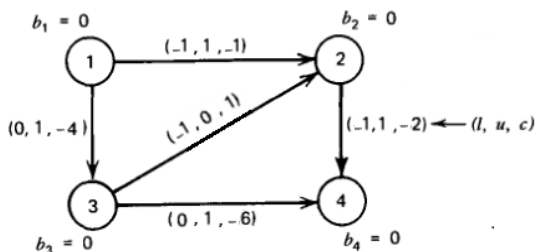
برای حل این مسئله، ابتدا دوگان آن را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \max \quad & y_{32} + y_{12} + 2y_{24} + 4y_{13} + 6y_{34} \\ \text{s.t.} \quad & y_{12} + y_{13} = 0, \\ & y_{32} - y_{12} + y_{24} = 0, \\ & -y_{32} - y_{13} + y_{34} = 0, \\ & -y_{24} - y_{34} = 0, \\ & 0 \leq y_{13}, y_{32}, y_{34} \leq 1, \\ & -1 \leq y_{12}, y_{24} \leq 1. \end{aligned}$$

حال اگر از تغییر متغیر y_{32} به جای y_{33} استفاده کنیم، مسئله بالا به صورت زیر تبدیل می شود

$$\begin{aligned} \min \quad & y_{32} - y_{12} - 2y_{24} - 4y_{13} - 6y_{34} \\ \text{s.t.} \quad & y_{12} + y_{13} = 0, \\ & -y_{32} - y_{12} + y_{24} = 0, \\ & y_{32} - y_{13} + y_{34} = 0, \\ & -y_{24} - y_{34} = 0, \\ & 0 \leq y_{13}, y_{34} \leq 1, \\ & -1 \leq y_{12}, y_{24} \leq 1, \\ & -1 \leq y_{32} \leq 0. \end{aligned}$$

ملاحظه می کنیم که مسئله حاصل یک مسئله مینیم هزینه گردش است. گراف متناظر با این مسئله معکوس به صورت زیر است



شکل ۲. گراف مربوط به مسئله شبکه جریان معکوس

۳. مسائل مخروطی معکوس

یک مسئله بهینه سازی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x; \theta) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \varphi, \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

که در آن θ یک (بردار) پارامتر و x یک (بردار) متغیر تصمیم است. هدف این مسئله که یک مسئله پیشرو^۱ نامیده می شود، محاسبه یک تصمیم بهینه متناظر با تخمینی از $\hat{\theta}$ است، که $\hat{\theta}$ یک پارامتر نامعلوم

^۱forward problem

است. φ مجموعه جواب‌های شدنی این مسئله است. مسئله بهینه‌سازی معکوس متناظر با (۱.۳)، یک مسئله دو مرحله‌ای به صورت زیر است:

(i) یک تصمیم مشاهده‌شده $\hat{x}$ داده‌شده است. مجموعه $\Theta(\hat{x})$ را مجموعه مقادیر پارامتر θ که به‌ازای آن‌ها $\hat{x}$ بهینه است، تعریف می‌کنیم. (ii) اگر $\Theta(\hat{x})$ ناتهی بود، مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta - \bar{\theta}\| \\ \text{s.t.} \quad & \theta \in \Theta(\hat{x}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در آن $\bar{\theta}$ یک مقدار پارامتر اسمی (داده شده) و $\|\cdot\|$ یک نرم مناسب است. فرض کنید مسئله پیشرو (۱.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x; \theta) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \succeq_{\mathcal{K}} 0, \\ & Ax = b, \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن $x \in R^n$ متغیر تصمیم است، $A \in R^{l \times n}$ ، $b \in R^l$ و همچنین $\theta \in \Theta$ یک پارامتر است. برای دو بردار x و y ، نماد $x \succeq_{\mathcal{K}} y$ یعنی $x - y \in \mathcal{K}$. فرض می‌کنیم، برای $\theta \in \Theta$ ثابت، تابع $R^n \mapsto R$: $f(x; \theta)$ محدب و مشتق‌پذیر (نسبت به x) و $\nabla_x f(x; \theta)$ تابعی آفین از θ است. برخی توابع $f(x; \theta)$ که می‌توانند این شرایط را برآورده سازند، به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} f(x; \theta) &= \theta^T x, & \nabla_x f(x; \theta) &= \theta \\ f(x; \theta) &= \|Ax + \theta\|_p^2, & \nabla_x f(x; \theta) &= 2(A^T Ax + A^T \theta). \end{aligned}$$

نماد $\succeq_{\mathcal{K}} (>_{\mathcal{K}})$ به معنی ترتیب جزئی^۱ (اکید) در R^m است که توسط مخروط سره^۲ $\mathcal{K} \subset R^m$ ایجاد می‌شود، یعنی

$$x \succeq_{\mathcal{K}} y \quad (x >_{\mathcal{K}} y) \iff x - y \in \mathcal{K} \quad (x - y \in \text{int } \mathcal{K})$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \dots \times \mathcal{K}_k$ که مخروط‌های $\mathcal{K}_j$ متعلق به یکی از سه دسته زیر هستند:

- (۱) مخروط خطی: $\mathcal{K}_l = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$
- (۲) مخروط مرتبه دوم: $\mathcal{K}_{s_o} = \{x = (x_0; \bar{x}) \in R^{n+1} : x_0 \geq \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}}\}$
- (۳) مخروط نیمه معین: $\mathcal{K}_{s_d} = \{x \in R^{n^+} : \text{mat}(x) \succeq 0\}$

^۱partial order ^۲proper cone

که در آن $mat(x) \in R^{n \times n}$ و $mat(x)_{ij} = x_{n(i-1)+j}$.

فرض کنید تابع g مشتق پذیر است و نسبت به ترتیب جزئی $\succeq_{\mathcal{H}}$ ، مقعر باشد. مقعر بودن یعنی، برای هر $x_1, x_2 \in R^n$ و $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \succeq_{\mathcal{H}} \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2)$$

$g(x)$ را به این صورت نمایش می دهیم: $g(x) = [g_1(x), \dots, g_k(x)]^T$. تابع g به پارامتر θ وابسته نیست. مسائل به شکل (۳.۳) را مسائل مخروطی می نامیم. به عبارت دیگر، مینیم سازی یک تابع محدب روی اشتراک یک مجموعه آفین با یک مخروط را یک مسئله برنامه ریزی مخروطی می نامیم. حال یک شرط صلاحیت قیدی (CQ)^۱ را بیان می کنیم.

فرض ۱:

$$\exists x_0 \in R^n; \quad (Ax_0 = b, \quad g(x_0) \succ_{\mathcal{H}} 0)$$

از اینجا به بعد فرض می کنیم این CQ برقرار است.

لم ۱.۳. [۶] فرض کنید $\Theta(\hat{x})$ مجموعه همه پارامترهای θ است که به ازای آن ها $\hat{x}$ برای مسئله (۳.۳) بهینه است. آنگاه مسئله بهبود سازی معکوس متناظر، یعنی

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta - \bar{\theta}\| \\ \text{s.t.} \quad & \theta \in \Theta(\hat{x}) \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

یک مسئله برنامه ریزی مخروطی است.

در ادامه یک کاربرد مهم از این مسائل را بیان می کنیم.

انتخاب سهام. مسئله خرید سهام یکی از مهم ترین مسائل مالی کشورهای پیشرفته و یا در حال توسعه است. سرمایه گذاری در خرید سهام توسط مردم، باعث رونق گرفتن تولید و جلوگیری از رشد نقدینگی در جامعه می شود. ثروت صاحبان سهام به دو عامل ریسک و بازده بستگی دارد. افزایش ثروت سهامداران، یعنی بازده مثبت سهام، به دو روش صورت می گیرد: (۱) دریافت سود سهام، (۲) افزایش قیمت (ارزش) سهام. از طرف دیگر، کاهش قیمت سهام در بازار به معنی بازدهی منفی (برای سهام) است. از آن جا که تعیین بازده آینده سهام امکان پذیر نیست صاحبان سهام هنگام خرید مجبور به قبول ریسک هستند. برای مدیریت این ریسک، معمولاً سرمایه گذاران ترجیح می دهند که به جای سرمایه گذاری

^۱constraint qualification

در یک قلم دارایی، صاحب مجموعه گوناگونی از سهام مختلف (پرتفوی سهام یا سبد سهام) باشند، چرا که می‌توان مجموعه‌ای از سهام را تهیه کرد که ترکیب ریسک و بازده آن‌ها از ریسک و بازده یک قلم دارایی (مثلاً سهام یک شرکت) بهتر باشد.

سرمایه‌گذاران باید از نرخ بازده و شاخص ریسک سهام یک شرکت اطلاع داشته باشند تا بتوانند نسبت به خرید اقدام کنند. ریسک بازار از احتمال متفاوت بودن نرخ واقعی بازده با نرخ مورد انتظار سرمایه‌گذار ناشی می‌شود.

یکی از شاخص‌های سرمایه‌گذاران برای انتخاب سهام، متوسط بازده است که برابر است با میانگین بازده سهام یک شرکت در سال‌های پیشین (در یک دوره زمانی). از طرفی اگر این اعداد در سال‌های مختلف تفاوت‌های زیادی داشته باشند، این نشان‌دهنده ناپایداری شرکت است و ریسک سرمایه‌گذاری را موجب می‌شود. این ناپایداری را با انحراف معیار بازده‌های سهام در سال‌های اخیر محاسبه می‌نماییم. یکی از شاخص‌های بسیار مهم در انتخاب اجزای یک سبد سهام این است که همبستگی بین بازده آن‌ها زیاد نباشد. این غیرهمسو بودن بازده‌ها، ریسک سبد سهام انتخاب شده توسط سرمایه‌گذار را کاهش می‌دهد، زیرا اگر همبستگی بین بازده‌های انتخابی زیاد باشد احتمال کاهش ارزش همه سهام سبد و در نتیجه ورشکست شدن سرمایه‌گذار وجود دارد. برای محاسبه این همبستگی از ماتریس کوواریانس استفاده می‌کنند؛ نگاه کنید به [۵]، [۷]، [۱۱]. با توجه به آنچه در بالا گفته شد، دو شاخص در انتخاب سهام بسیار اساسی هستند: نرخ بازده سهام و ماتریس کوواریانس بازده‌های سهام مختلف. این دو مورد باید به ترتیب حداقل و حداقل گردند.

با μ بازده مورد انتظار^۱ را نمایش می‌دهیم، یعنی بازدهی که انتظار می‌رود در مدت یک سال عاید صاحب سهام شود. با Σ ماتریس کوواریانس^۲ را نشان می‌دهیم که معین مثبت است.

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، تعاریف زیر را داریم [۸]:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n x_{ri} \\ \sigma_{ii} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_{ri} - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, p \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (x_{ri} - \mu_i)(x_{rj} - \mu_j).\end{aligned}$$

که بردار μ بردار میانگین و ماتریس (σ_{ij}) ، $\Sigma_{p \times p}$ ، با عناصر داده شده در بالا ماتریس کوواریانس است.

^۱expected return ^۲covariance matrix

هر یک از سهام در یک سبد، وزن ویژه خود را از ثروت سرمایه‌گذار دارد. فرض کنیم ϕ_i وزن مربوط به سهم i باشد. بازده مورد انتظار سبد سهام برابر است با مجموع بازده‌های مورد انتظار برای تک تک سهام. به عنوان مثال، برای سبد سهام متشکل از شرکت‌های A ، B و C داریم $\mu = \phi_A \mu_A + \phi_B \mu_B + \phi_C \mu_C$. واریانس بازده سبد سهام متشکل از شرکت‌های A ، B و C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \sum_{i=A}^C \sum_{j=A}^C \phi_i \phi_j \sigma_{ij}$$

که در آن σ_{ij} کوواریانس بین سهام i و j را نشان می‌دهد. بنابراین داریم

$$\sigma^2 = \phi^T \Sigma \phi$$

لذا به طور خلاصه دو تابع هدف زیر را داریم

$$\max \mu^T \phi$$

$$\min \phi^T \Sigma \phi$$

حال به جای در نظر گرفتن دو تابع بالا، تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\max \frac{\mu^T \phi}{\sqrt{\phi^T \Sigma \phi}}$$

بنابراین مسئله زیر را داریم

$$(5.3) \quad \max_{\{\phi : A\phi \leq b, e^T \phi = 1\}} \frac{\mu^T \phi}{\sqrt{\phi^T \Sigma \phi}}$$

که در آن $A\phi \leq b$ محدودیت‌های جانبی مانند محدودیت نامنفی، قیود مربوط به ارجحیت‌های سرمایه‌گذار و غیره را اعمال می‌کند و e برداری است که همه مولفه‌های آن یک هستند. جواب بهینه مسئله (5.3) را با ϕ_s نشان می‌دهیم و سهام بهینه شارپ^۱ می‌نامیم. مقدار بهینه مسئله بالا که آن را با $s(\mu)$ نشان می‌دهیم، نسبت شارپ^۲ نامیده می‌شود. سهام بهینه ψ^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi^* = W(\beta e_f + (1 - \beta)\mu^T \phi_s)$$

که در آن e_f متناظر با امکان سرمایه‌گذاری بدون ریسک و W ثروت سرمایه‌گذار هستند. اسکالر $\beta \in [0, 1]$ با توجه به تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار مشخص می‌شود. معمولاً در بازارهای سهام ماتریس کوواریانس Σ به طور نسبی پایدار است [۹]، درحالی‌که بردار بازده مورد انتظار (μ) چنین نیست. $\hat{\mu}$ را تخمین جاری از μ و $\hat{\phi}$ را وزن سهم بهینه شارپ متناظر با آن در نظر بگیرید. بنابراین $\psi^* = W(\beta e_f + (1 - \beta)\hat{\mu}^T \hat{\phi})$. حال فرض کنید اطلاعات جدیدی، برای مثال مشاهده جدیدی از بازده‌های روزانه، در دسترس است و تخمین جدید μ ، $\bar{\mu} (\neq \hat{\mu})$ است. اکنون $\bar{\psi}$ جدید به صورت $\bar{\psi} = W(\beta e_f + (1 - \beta)\bar{\mu}^T \bar{\phi})$ است که $\bar{\phi}$ بهینه شارپ برای $\bar{\mu}$ است. حال سرمایه‌گذار باید تصمیم بگیرد که آیا می‌خواهد ترکیب سهام خود را به منظور رسیدن به $\bar{\psi}$ تغییر دهد یا خیر؟ در این میان هزینه معامله یعنی هزینه خرید یا فروش سهام نیز مد نظر قرار می‌گیرد. این هزینه‌ها بازده خالص را کاهش می‌دهند، بنابراین رسیدن به مقدار جدید $\bar{\psi}$ می‌تواند منجر به زیان شود. به عبارت دیگر، $\bar{\psi}$ جدید، بازده تعدیل شده^۱ با ریسک بالاتری می‌خواهد. بنابراین برای ماکزیمم کردن بازده کل، سرمایه‌گذار باید هزینه معامله را با بازده مورد انتظار بالاتر تنظیم کند.

فرض کنید $C_\alpha = \{\mu \in R^n : (\mu - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mu - \bar{\mu}) \leq c_\alpha^2\}$ یک بازه $1 - \alpha$ اطمینان برای μ را نشان دهد. دقت کنید در تعریف C_α ، همان $\|\mu - \bar{\mu}\|^2$ همان $\|\mu - \bar{\mu}\|_{\Sigma^{-1}}^2$ است. یعنی $C_\alpha = \{\mu : \|\mu - \bar{\mu}\|_{\Sigma^{-1}} \leq c_\alpha\}$. معمولاً همه $\mu \in C_\alpha$ ها، قابل تشخیص یا محاسبه نیستند، لذا یک استراتژی بر پایه بهینه‌سازی معکوس که توازن بین هزینه‌ها و بازده را کنترل می‌کند، به صورت زیر است:

$$(۶.۳) \quad \begin{aligned} & \min \quad \sqrt{(\mu - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mu - \bar{\mu})} \\ & s.t. \quad \mu \in \Theta(\hat{\phi}) = \{s(\mu) \geq 0 \text{ و } (۵.۳) \text{ است}\} \end{aligned}$$

با این شرط که اگر مقدار بهینه (۶.۳) کوچکتر یا مساوی c_α بود، سبد سهام را تغییر نباید داد. تنها در صورتی سبد سهام را تغییر بده که c_α کوچکتر از مقدار بهینه (۶.۳) باشد (مرجع [۶] را برای جزئیات بیشتر ببینید).

گام اول برای حل مسئله (۶.۳)، تبدیل مسئله (۵.۳) به یک مسئله بهینه‌سازی به صورت (۳.۳) است. چون Σ معین مثبت است، به صورت $\Sigma = L^T L$ تجزیه می‌شود.

^۱risk-adjusted

قضیه ۲.۳. [۶] فرض کنید نرخ شارپ $s(\mu) \geq 0$. آنگاه مسئله (۵.۳) معادل است با

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^T x \\ \text{s.t.} \quad & e^T x - \xi = 0, \\ & -Ax + b\xi \geq 0, \\ & \xi \geq 0, \\ & [1; Lx] \geq_{\mathcal{H}} 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

که در آن ξ یک متغیر همگن ساز^۱، $\Sigma = L^T L$ و $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{so} \subset R^{n+1}$ است.

برای این که بتوان از مسئله (۶.۳) استفاده نمود باید بتوان آن را به صورت یک مسئله بهینه سازی نوشت. قضیه زیر به این موضوع می پردازد.

قضیه ۳.۳. [۶] فرض کنید ϕ_0 وجود دارد به طوری که $b < A\phi_0$ و $\bar{\mu} \cdot e^T \phi_0 = 1$ را تخمین جدید μ و $\hat{\phi}$ را یک جواب شدنی دلخواه برای (۵.۳) در نظر بگیرید. قرار دهید $(\hat{x}, \hat{\xi}) = \frac{(\hat{\phi}, 1)}{\sqrt{\hat{\phi}^T \Sigma \hat{\phi}}}$. آنگاه مسئله (۶.۳) با مسئله زیر معادل است

$$\begin{aligned} \min \quad & ((A_I^T - eb_I^T)u_I + v_0 \Sigma \hat{x} - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} ((A_I^T - eb_I^T)u_I + v_0 \Sigma \hat{x} - \bar{\mu}) \\ \text{s.t.} \quad & u_I \geq 0, \\ & v_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

که در آن $I = \{i : a_i^T \hat{x} = b_i \hat{\xi}\}$ ، $u_I \in R^{|I|}$ و A_I و b_I به ترتیب زیر ماتریس A و زیربردار b متناظر با سطرهاى متعلق به I هستند.

مسئله (۷.۳) یک مسئله بهینه سازی مخروطی است و به کمک تکنیک های بهینه سازی مخروطی قابل حل است (به عنوان مثال، مرجع [۱۰] را ببینید). محدودیت های مسئله (۶.۳) حل این مسئله را مشکل می سازد، ولی به جای آن، مسئله (۸.۳) یک مسئله بهینه سازی درجه دوم است که با تکنیک های متعددی قابل حل است.

^۱homogenizing variable

مراجع

- [1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall, New York, 1993.
- [2] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, *Linear programming and network flows*, Wiley, New York, 1977.
- [3] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, Wiley, New York, 2006.
- [4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*, MPS-SIAM Series in Optimization, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [5] Z. Bodie, R. C. Merton, D. L. Cleeton, *Financial economics*, Prentice-Hall, New York, 2009.
- [6] G. Iyengar, W. Kang, Inverse conic programming with applications, *Oper. Res. Lett.* **33** (2005) 319 – 330.
- [7] R. A. Maller, R. B. Durand, H. Jafarpour, Optimal portfolio choice using the maximum sharpe ratio, *J. Risk* **12** (2010) 49–73.
- [8] K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby, *Multivariate analysis*, Academic press, New York, 1995.
- [9] R. O. Michaud, *Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio management and asset allocation*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [10] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [11] J. L. Prigent, *Portfolio optimization and performance analysis*, Chapman-Hall/CRC, New York, 1958.
- [12] J. Zhang, Z. Liu, Calculating some inverse linear programming problem, *J. Comput. Appl. Math.* **72** (1996) 261-273.

مجید سلیمانی دامنه: دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

رایانامه: soleimani@khayam.ut.ac.ir

شیدا عموکاظمی: دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

رایانامه: sh.kazemi@alumni.ut.ac.ir

مجموعه‌های اندازه‌پذیر به مثابه نقاط حدی

جی. تاناکا و پی. اف. مک لولین

برگردان: رسول کاظمی

۱. مقدمه

دانشجویان درس آنالیز حقیقی در دوره کارشناسی ارشد، با قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آشنا می‌شوند. این قضیه نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک جبر را به یک σ - جبر و یک اندازهٔ متناهی جمعی روی آن جبر را به اندازه‌ای شمارا جمعی روی آن σ - جبر، گسترش داد. رویکرد متداول در بیان این قضیه، عبارت است از تعریف اندازهٔ بیرونی وابسته به اندازهٔ متناهی جمعی اولیه و سپس استفاده از جمعی بودن اندازهٔ بیرونی برای تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر. در این مقاله، رویکرد دیگری به قضیهٔ توسیع کاراتئودوری ارائه می‌کنیم که در آن، مجموعه‌های اندازه‌پذیر به عنوان نقاط حدی به دست می‌آید. نشان می‌دهیم که σ - جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر به طور طبیعی به عنوان مجموعهٔ تمام نقاط حدی دنباله‌های کوشی در جبر اولیه، به وجود می‌آید. این رهیافت را به دانشجویانی پیشنهاد می‌کنیم که ممکن است تعریف مرسوم اندازه‌پذیری را غیرشهودی بدانند. با مروری مختصر بر قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آن‌چنان‌که در [۶]، که نمونه بارز کتاب‌های آنالیز حقیقی است، ارائه می‌شود شروع می‌کنیم. گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X یک جبر نامیده می‌شود اگر تحت عمل‌های اجتماع و مکمل‌گیری بسته باشد و یک σ - جبر نام دارد اگر نسبت به عمل‌های اجتماع شمارا و مکمل‌گیری، بسته باشد. گیریم Ω یک جبر و $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی همراه با $+\infty$ باشد. تابع $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازهٔ متناهی جمعی نامیده

A realization of measurable sets as limit points, J. Tanaka, P. F. McLoughlin, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 261-266.

می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر تعداد متناهی $E_1, E_2, \dots, E_n$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$. اگر Ω یک σ -جبر باشد، تابع $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازه شماراجمعی (یا به‌طور ساده، یک اندازه) نامیده می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر دنباله $\{E_i\}$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. جفت (Ω, μ) که از یک σ -جبر Ω و یک اندازه μ تشکیل شده است، یک فضای اندازه نامیده می‌شود. گیریم μ یک اندازه متناهی‌جمعی روی جبر Ω باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$ ، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. (روشن است که اگر این شرط برقرار نباشد، هیچ توسیعی برای μ به یک اندازه شماراجمعی روی یک σ -جبر موجود نیست.) توسیع کاراتئودوری از دو تعریف زیر تشکیل می‌شود:

تعریف ۱.۱. گیریم $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu(A_i) \mid E \subseteq \bigcup_i A_i, A_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots \right\}$$

تعریف شده باشد. آن‌وقت μ^* اندازه بیرونی القایی توسط μ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. زیرمجموعه E از X نسبت به μ^* اندازه‌پذیر خوانده می‌شود اگر برای هر $A \in \mathcal{P}(X)$ داشته باشیم $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

در حالت کلی، μ^* یک اندازه روی $\mathcal{P}(X)$ نیست. قضیه توسیع کاراتئودوری بیان می‌کند که خانواده M مرکب از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، یک σ -جبر است و μ^* نیز یک اندازه شماراجمعی روی M است.

قضیه توسیع کاراتئودوری ابزاری توانمند هم در نظریه اندازه و هم در آمار است (برای مثال، [۴] و [۱] را ببینید). ساختار جبر بولی مربوط به توسیع کاراتئودوری در چندین مقاله بحث شده است ([۵] و [۲]). قضیه توسیع کاراتئودوری روی مجموعه‌های فازی در [۷] مورد بحث قرار گرفته است. در این مقاله، یک ساختار متریکی روی توسیع کاراتئودوری در نظر می‌گیریم که نقاط حدی مورد توجه ویژه است. در مقاله‌ای دیگر [۸]، در مورد چگونگی ساخت یک شبکه روی فضای کامل شده یک جبر و یک یکرختی از آن به توسیع کاراتئودوری‌اش، بحث کرده‌ایم. توسیع کاراتئودوری، ساختارهای غنی مختلفی دارد که می‌توانند موضوع خوبی برای پژوهش‌های آینده باشند.

۲. پیشنهادها و نتایج اصلی

رهیافت توپولوژیکی به توسیع کاراتئودوری که در این مقاله بیان می‌کنیم، قابل به‌کارگیری برای هر اندازه σ - متناهی است. اندازه μ را σ - متناهی می‌نامیم هرگاه دنباله $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر موجود باشد به‌گونه‌ای که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و $\mu(X_n) < \infty$. اندازه μ متناهی نامیده می‌شود اگر $\mu(X) < \infty$. کافی است قضیه را برای اندازه‌های متناهی اثبات کنیم، زیرا حالت σ - متناهی را می‌توان از حالت متناهی همانند اثبات مرسوم قضیه توسیع کاراتئودوری به‌دست آورد.

گیریم μ یک اندازه متناهی روی جبر Ω باشد و فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$ ، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. گیریم μ^* اندازه بیرونی القایی از μ باشد. برخی از ویژگی‌های مشهور اندازه بیرونی را که در کتاب‌های آنالیز حقیقی (مثلاً [۶]) می‌توان یافت در اینجا گردآوری کرده‌ایم:

- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ اگر $A, B \in \mathcal{P}(X)$ و $A \subseteq B$ ، آنگاه $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ؛
- $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$ ، $\mathcal{P}(X)$ در $\{A_i\}$ برای هر دنباله $\{A_i\}$ ؛
- $\mu^*|_{\Omega} = \mu$ [۶] (صفحه ۲۹۲ را ببینید)؛
- فرض کنید $d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ تعریف شده است که $A \triangle B$ تفاضل متقارن A و B را نمایش می‌دهد. در این صورت d یک شبه‌متریک است، یعنی d در تعریف یک متر صدق می‌کند به جز این که ممکن است مجموعه‌های $A, B \in \mathcal{P}(X)$ موجود باشند به گونه‌ای که $A \neq B$ و $d(A, B) = 0$. اگر تعریف کنیم $A \sim B$ هرگاه $d(A, B) = 0$ ، آنوقت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(X)$ است و d یک متریک روی $\mathcal{P}(X)/\sim$ القا می‌کند.

دنباله $\{B_n\}$ در Ω را μ - کوشی نامیم اگر $d(B_n, B_m) \rightarrow 0$ وقتی $m, n \rightarrow \infty$. حال $\tilde{S}$ را گردایه تمام نقاط حدی دنباله‌های μ - کوشی تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، $\tilde{S}$ خانواده مجموعه‌های $S \in \mathcal{P}(X)$ است با این ویژگی که دنباله μ - کوشی $\{B_n\}$ وجود دارد که $\lim \mu^*(B_n \triangle S) = 0$. این خانواده $\tilde{S}$ جایگزین گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر در تعریف ۲.۱ مربوط به قضیه توسیع کاراتئودوری خواهد شد. برای $S \in \tilde{S}$ ، $\tilde{\mu}(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می‌کنیم که $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S است.

در اینجا به این نکته کلیدی باید توجه کرد که دنباله‌ای که جملاتش از اجتماع جملات نظیر به نظیر دو دنباله کوشی حاصل شود، خود یک دنباله کوشی است و دنباله‌ای که جملاتش مکمل جمله‌های یک دنباله کوشی است، یک دنباله کوشی است. از این موضوع نتیجه می‌شود که $\tilde{S}$ یک جبر است. به علاوه اگر $\{S_i\}$ یک دنباله در $\tilde{S}$ باشد با ساختن یک دنباله $\mu -$ کوشی که به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست، نشان می‌دهیم که $\tilde{S}$ یک $\sigma -$ جبر است. همچنین نشان خواهیم داد که $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ همان فضای اندازه‌ای است که در قضیهٔ توسیع کاراتودوری به دست می‌آید. به این ترتیب، مجموعه‌های اندازه‌پذیر در قضیهٔ توسیع کاراتودوری را به چشم نقاط حدی می‌نگریم.

۳. اثبات قضایای اصلی

لم زیر چندین بار در ادامهٔ این مقاله استفاده خواهد شد.

لم ۱.۳. برای هر $A, B, C, D \in \mathcal{P}(X)$ ، $d(A \cup B, C \cup D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.

اثبات. چون $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$ ، حکم از یکنوایی و زیرجمعی بودن μ^* نتیجه می‌شود. $\square$

دو لم زیر برای اثبات خوش‌تعریفی $\tilde{\mu}$ لازم‌اند.

لم ۲.۳. اگر $\{B_n\}$ یک دنباله $\mu -$ کوشی باشد، آنگاه $\{\mu(B_n)\}$ یک دنباله کوشی از اعداد حقیقی است.

اثبات. با استفاده از نامساوی مثلثی برای d ، داریم

$$|\mu(B_m) - \mu(B_n)| = |d(B_m, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leq d(B_m, B_n).$$

چون $d(B_m, B_n) \rightarrow 0$ ، پس $\{\mu(B_n)\}$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{R}$ است. $\square$

لم ۳.۳. اگر $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ دنباله‌های $\mu -$ کوشی باشند که به $\tilde{S} \in S$ همگرایند، آنگاه $\lim \mu(A_n) = \lim \mu(B_n)$ و موجودند و $\lim \mu(A_n) = \lim \mu(B_n)$.

اثبات. وجود حدود از لم ۲.۳ نتیجه می‌شود. برای باقیماندهٔ اثبات از این حقیقت استفاده می‌کنیم که

$$|\mu(A_n) - \mu(B_n)| \leq d(A_n, B_n) \leq d(A_n, S) + d(S, B_n) \rightarrow 0.$$

همان طور که در بخش ۲ بیان شد، یک نکته مهم این است که دنباله های μ - کوشی نسبت به اجتماع و مکمل گیری جملاتشان بسته هستند. به طور دقیق تر:

لم ۴.۳. گیریم $\{A_n\}$ ، $\{B_n\}$ و $\{C_n\}$ دنباله های μ - کوشی باشند. آن وقت $\{A_n \cup B_n\}$ و $\{(C_n)^c\}$ نیز دنباله های μ - کوشی هستند.

اثبات. ادعای نخست از لم ۱.۳ آشکار است. دومی از این حقیقت که $(C_n)^c \triangle (C_m)^c = C_n \triangle C_m$ به دست می آید. $\square$

حال با استفاده از لم قبل، نشان می دهیم که گردایه $\tilde{S}$ از نقاط حدی دنباله های μ - کوشی یک جبر است.

لم ۵.۳. $\tilde{S}$ یک جبر است.

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{S}$. دنباله های μ - کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به ترتیب متناظر با S و H موجودند. بنابر لم ۱.۳،

$$d(S \cup H, A_n \cup B_n) \leq d(S, A_n) + d(H, B_n).$$

طبق لم ۴.۳، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی است، بنابراین با حدگیری از دو طرف، نتیجه می گیریم $S \cup H \in \tilde{S}$. توجه کنید که نشان داده ایم $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی متناظر با $S \cup H$ است. به طور مشابه $S^c \in \tilde{S}$ و بنابراین $\tilde{S}$ یک جبر است. $\square$

گیریم $S \in \tilde{S}$. همانند بخش ۲، $\tilde{\mu}(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می کنیم که $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی است که به S همگراست. با لم زیر خود را برای تعریف یک اندازه روی $\tilde{S}$ آماده می کنیم.

لم ۶.۳. $\tilde{\mu}$ تابعی خوش تعریف است و $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{S}}$.

اثبات. گیریم $S \in \tilde{S}$. لم ۳.۳ نشان می دهد که $\tilde{\mu}(S)$ خوش تعریف است. اگر $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S باشد، آنگاه

$$|\mu^*(S) - \mu(B_n)| = |d(S, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leq d(S, B_n) \rightarrow 0.$$

بنابراین $\tilde{\mu}(S) = \lim \mu(B_n) = \mu^*(S)$ و از این رو $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{S}}$. $\square$

لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نشان خواهند داد که $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ یک فضای اندازه است. قبل از بیان این لم‌ها، نشان می‌دهیم که $\tilde{\mu}$ یک اندازه متناهی جمعی است. به‌طور دقیق‌تر:

لم ۷.۳. اگر $S, H \in \tilde{S}$ جدا از هم باشند، آنگاه $\tilde{\mu}(S \cup H) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H)$.

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{S}$ جدا از هم باشند. دنباله‌های μ -کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به‌ترتیب متناظر با S و H وجود دارند. چنان‌که در اثبات لم ۵.۳ دیدیم، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنباله μ -کوشی متناظر با $S \cup H$ است. چون μ متناهی جمعی است، $\mu(A_n \cup B_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n)$ ، حال چون S و H جدا از هم هستند، $A_n \cap B_n \subseteq (A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)$ و لذا

$$\begin{aligned} \mu(A_n, B_n) &\leq \mu^*[(A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)] \\ &\leq \mu^*(A_n \triangle S) + \mu^*(B_n \triangle H) \\ &= d(A_n, S) + d(B_n, H) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

این، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S \cup H) &= \lim \mu(A_n \cup B_n) \\ &= \lim \mu(A_n) + \lim \mu(B_n) - \lim \mu(A_n \cap B_n) \\ &= \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H). \end{aligned}$$

□

لم ۸.۳. $\tilde{S}$ یک σ -جبر است.

اثبات. گیریم $\{S_i\}$ یک دنباله از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در $\tilde{S}$ باشد. با استفاده از لم‌های ۶.۳ و ۷.۳، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(S_i) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(S_i) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) \leq \mu(X) < \infty,$$

و بنابراین سری $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$ همگراست. پس بنابر زیرجمعی بودن μ^* ،

$$(۱.۳) \quad d\left(\bigcup_{i=1}^n S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(S_i) \rightarrow 0$$

□

وقتی $n \rightarrow \infty$.

اکنون یک دنباله μ - کوشی می‌سازیم که نسبت به شبه‌متریک d به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگرا باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبت i گیریم $\{B_n^i\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S_i باشد. پس با استفاده از اثبات لم ۵.۳، دنباله‌های همگرای زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} B_1^1 & & B_2^1 & \cdots & \longrightarrow & S_1 \\ B_1^1 \cup B_1^2 & & B_2^1 \cup B_2^2 & \cdots & \longrightarrow & S_1 \cup S_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bigcup_{i=1}^m B_1^i & & \bigcup_{i=1}^m B_2^i & \cdots & \longrightarrow & \bigcup_{i=1}^m S_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

برای هر عدد صحیح مثبت L ، رابطه (۱.۳) نتیجه می‌دهد عدد صحیح N_L چنان موجود است که

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) < \frac{1}{2L}.$$

علاوه بر این، برای هر N_L ، عدد صحیح K_L یافت می‌شود به طوری که

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\right) < \frac{1}{2L}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) &\leq d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ &\leq \frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $Y_L = \bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i$. در این صورت $\{Y_L\}$ یک دنباله μ - کوشی است که به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست. پس $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \tilde{S}$ و لذا $\tilde{S}$ یک σ - جبر است.

لم ۹.۳. $\tilde{\mu}$ یک اندازه شمارا جمعی روی $\tilde{S}$ است.

اثبات. با همان نمادهای اثبات لم ۸.۳، برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی M موجود است که به‌ازای هر $n \geq M$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(S_i) < \varepsilon.$$

علاوه بر این، با استفاده از لم‌های ۷.۳ و ۸.۳ برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) + \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(S_i) + \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right).$$

پس $\tilde{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(S_i)$ که نشان می‌دهد $\tilde{\mu}$ یک اندازه شمارا جمعی روی $\tilde{S}$ است. $\square$

جمع‌بندی نتایج در قضیه اصلی ۱۰.۳ بیان می‌کند که $\tilde{S}$ یک توسیع از جبر Ω به یک σ -جبر است و $\tilde{\mu}$ یک توسیع از اندازه متناهی جمعی μ روی Ω به یک اندازه روی $\tilde{S}$ است. علاوه بر این، طبق قضیه اصلی ۱۱.۳، این توسیع همان توسیع مرسوم کاراتئودوری است.

قضیه ۱۰.۳. $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ یک فضای اندازه است.

$\square$

اثبات. حکم از لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۱.۳. برای هر $E \in \tilde{S}$ داریم $E \in \mathcal{P}(X)$ اگر و فقط اگر E مطابق با تعریف مرسوم اندازه‌پذیری در تعریف ۲.۱، اندازه‌پذیر باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) تمرینی معمولی در کتاب‌های درسی آنالیز حقیقی است.

($\Leftarrow$) فرض کنیم $E \in \tilde{S}$ و $A \in \mathcal{P}(X)$ دلخواه باشد. با استفاده از زیرجمعی بودن μ^* ، داریم

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

بنابراین برای اثبات اینکه E اندازه‌پذیر است لازم است که عکس نامساوی اخیر را بررسی کنیم. گیریم $\{B_n\}$ یک دنباله μ -کشی باشد به‌قسمی که $\lim \mu^*(E \triangle B_n) = 0$. بنابراین داریم $\lim \mu^*(E \cap B_n^c) = 0$ و $\lim \mu^*(E^c \cap B_n) = 0$. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ چون $\{B_n\}$ اندازه‌پذیر است،

$$(۲.۳) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap B_n^c);$$

$$(۳.۳) \quad \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap B_n) + \mu^*(A \cap E \cap B_n^c);$$

$$(۴.۳) \quad \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap E^c \cap B_n^c).$$

با جمع کردن معادلات (۳.۳) و (۴.۳) و به کارگیری یکنوایی و معادله (۲.۳)، داریم

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E \cap B_n) + \mu^*(A \cap E \cap B_n^c) \\ &+ \mu^*(A \cap E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap E^c \cap B_n^c) \\ &\leq \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &+ \mu^*(E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap B_n^c) \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(E \cap B_n^c) + \mu^*(E^c \cap B_n). \end{aligned}$$

سرانجام با حدگیری وقتی $n \rightarrow \infty$ نتیجه می گیریم

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

بنابراین $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ و E اندازه پذیر است. $\square$

۴. جمع بندی

قضیه های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نشان می دهند که وقتی μ یک اندازه متناهی است، فضای اندازه $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ با توسیع کاراتودوری مطابقت دارد. علاوه بر این، قضیه ۱۱.۳ نشان می دهد که مجموعه های اندازه پذیر دقیقاً نقاط حدی دنباله های μ - کوشی اند و اندازه توسیع یافته در اثبات مرسوم قضیه کاراتودوری، همان اندازه حدی روی دنباله های μ - کوشی است. حالت σ - متناهی از حالت متناهی نتیجه می شود.

تشکر و قدردانی

نویسنده اول علاقه مند است از پدر بزرگش ویچی تاناکا^۱ به خاطر الهام بخش بودنش و کمک های مالی و از آندریو آمس^۲ برای تشویق او در پیش بردن تحصیلاتش تشکر نماید. با حمایت های مهربانانه این دو، نویسنده اول توانست به پیشرفت هائی ورای آنچه که تصورش را می کرد نائل شود. ضمناً هر دو نویسنده علاقه مندند از پروفسور میشل لاپیدوس^۳ و پروفسور جیمز استفنی^۴ و داوران

^۱Waichi Tanaka ^۲Andrew Aames ^۳Michel L. Lapidus ^۴James D. Stafney

ناشناس برای توصیه‌های تخصصی آنها در مورد این مقاله و از آنه هانسن^۱ و الیجا دپالما^۲ برای کمک‌های ویرایشی تشکر نمایند.

مراجع

- [1] R. N. Bhattacharya and E. C. Waymire, *Stochastic processes with applications*, Wiley InterScience, New York, 1990.
- [2] T. Coquand and E. Palmgren, Metric boolean algebras and constructive measure theory, *Arch. Math. Logic*, **41** (2002) 687-704.
- [3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, general theory (Part I)*, Wiley InterScience, New York, 1988.
- [4] T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting Processes and Survival Analysis*, Wiley InterScience, New York, 1991.
- [5] A. N. Kolmogorov, Complete metric boolean algebras, *Stud.*, **77** (1995) 57-66.
- [6] H. L. Royden, *Real analysis*, 3rd ed., Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [7] M. Sahin, On Carathéodory extension theorem on fuzzy measure space, *Far East J. Math. Sci.*, **26** (2007) 311-317.
- [8] J. Tanaka and P. F. Mcloughlin, Construction of a lattice on the completion of an algebra and an isomorphism to its Carathéodory extension, (to appear).

رسول کاظمی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 34, No. 2, Fall 2015 & Winter 2016

Editor-in-Chief

Ahmad Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

Managing Editor

Shiva Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

Editorial Board

A. Abdollahi, Shiraz University
abdollahi@shirazu.ac.ir

B. Hashemi, Shiraz University of Technology
hoseynhashemi@gmail.com

E. Momtahan, Yasouj University
momtahan_e@hotmail.com

S. Maghsoudi, Zanjan University
s_maghsodi@znu.ac.ir

E. Pasha, Kharazmi University
pasha@kmu.ac.ir

A. Rafiepour, Shahid Bahonar University of Kerman
drafiepour@gmail.com

A. Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

R. Zaare-Nahandi, Institute for Advanced Studies in Basic Science
rashidzn@iasbs.ac.ir

S. Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

Editorial Office

F. Samadian, Iranian Mathematical Society
farhang@ims.ir

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir