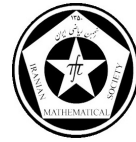


بسم الله الرحمن الرحيم



فرهنگ و اندیشه ریاضی

علمی-ترویجی

ISSN: 1022-6443

شماره پیاپی ۵۸، بهار و تابستان ۱۳۹۵
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۹۵)

ویژه آموزش ریاضی و گرامیداشت
زنده یاد پرویز شهریاری

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسئول: سید منصور واعظپور

سردبیر: احمد صفاپور

ویراستار ارشد: ابوالفضل رفیعپور

مدیر اجرایی: شیوا زمانی

هیأت تحریریه:

عین‌اله پاشا، دانشگاه خوارزمی

ابوالفضل رفیعپور، دانشگاه شهید بهنر کرمان

رشید زارع نهندی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم

پایه زنجان

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

عبدالعزیز عبداللہی، دانشگاه شیراز

سعید مقصودی، دانشگاه زنجان

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

بهنام هاشمی، دانشگاه صنعتی شیراز

حروف چینی: Xq Persian - دفتر انجمن ریاضی

تهیه و تنظیم: فریده صمدیان

نشانی: تهران - صندوق پستی: ۴۱۸-۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۷۷۷۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۸۸۵۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir

نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir

سامانه نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشه ریاضی نشریه علمی-ترویجی انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشار مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفی ریاضیات را ترویج می‌دهند و هم بازگوکننده فرهنگ و روند ریاضیات حاکم بر جامعه ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائه موضوعی فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیری موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمه مقاله‌هایی از نوع یادشده در بالا یا ترجمه مقالات کلاسیک ریاضی (ترجمه آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائه موضوعات آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.
- علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقاله خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:
- مقالات با استفاده از نرم‌افزار «زی‌پرشین» تهیه شده و نسخه پی‌دی‌اف آن از طریق سامانه نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال شود. در صورتی که مقاله فرستاده شده، پس از طی مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «زی‌پرشین» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقاله ترجمه شده همراه با ترجمه آن الزامی است.
- نام و نشانی اصل مقاله ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحه اول ترجمه مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی آورده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشه ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشند.

فهرست مطالب

سخن سردبیر؛	
احمد صفاپور	۱
سرمقاله ؛	
زهرگویا	۳
از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی؛	
اف. فورینگتی، جی. ام. ماتوس، ام. منگینی؛ برگردان:	
امیرحسین آشنا و زهرگویا	۹
سیر تاریخی تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران؛	
مانی رضایی	۵۳
سنتزی از فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در	
آموزش ریاضی، آموزش پیش‌دبستانی تا پایان دوره	
کارشناسی و جنبش حقوق مدنی؛	
ای. دوبینسکی، آر. پی. موزز؛ برگردان: سهیلا غلام‌آزاد	۶۷
تحلیل محتوای برنامه درسی معادلات دیفرانسیل؛	
یونس کریمی فردین پور	۸۹
یک ریاضیدان برای دبیرستان می‌نویسد؛	
دن فنل؛ برگردان: شیوا زمانی	۱۰۳
چارچوب برنامه‌ریزی درسی ریاضی مبتنی بر اصول	
دوگانی، نیازهای فکورانه و استدلال پی‌درپی: DNR ؛	
مسعود بهرامی بیدکلمه	۱۱۳
چرا اثبات؟؛	
فولکر رونده؛ برگردان: فاطمه اختری، رسول نصر	
اصفهانی	۱۲۷
آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی	
عمیق؛	
نرگس مرتاضی مهربانی	۱۳۵
درک بنی از قواعد و پاسخ‌ها در ریاضیات مبتنی بر	
«آموزش تجویزی فردی»؛	
اس. اچ. ارلوانگر؛ برگردان: ابوالفضل رفیع‌پور، نوشین	
فرامرزپور	۱۵۹

عکس روی جلد: شادروان پرویز شهریاری

- مقاله ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.
 - در ابتدای مقاله چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله آورده شود.
 - پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
 - رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویه مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی امریکا ذکر شود.
 - اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی و در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
 - به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش را در نوشتن مقالات رعایت فرمایید.
 - فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید؛ نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب را رعایت کنید:
۱. اگر مرجع ذکر شده، مقاله لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شماره مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقاله مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
 ۲. اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
- توجه کنید که تعداد صفحات مقاله ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
 - هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.
- فرهنگ و اندیشه ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود. علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی دارند می‌توانند با دبیرخانه انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.
- شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانه انجمن ریاضی خریداری فرمایید.

سخن سردبیر

یکی از اهدافی که هیأت تحریریه دوره فعلی پیش روی خود قرار داد، انتشار ویژه نامه‌هایی با موضوعات مرتبط با جامعه ریاضی بود. درگذشت معلم بزرگ ریاضی کشور، زنده یاد پرویز شهریاری و لزوم ادای دین به آموزشگر بزرگ ریاضی کشور این موضوع را به طور جدی‌تری در دستور کار هیأت تحریریه قرار داد. به منظور قدردانی از زحمات یکی از پیشگامان عمومی کردن ریاضی در کشور، فراخوانی منتشر و از همگان دعوت شد مقالات مرتبط با فعالیت‌ها و علایق ایشان از جمله تاریخ ریاضی و آموزش ریاضی را برای چاپ در شماره‌ای که به همین منظور آماده خواهد شد، ارسال نمایند. از این فراخوان استقبال خوبی به عمل آمد و لازم است از تمامی کسانی که در این رابطه مقالات تألیفی یا ترجمه خود را برای انتشار در این ویژه‌نامه ارسال نمودند، تشکر شود. همزمان با اقدام برای آماده‌سازی ویژه‌نامه ذکر شده، نامه‌ای از سوی سرکار خانم دکتر زهرا گویا دریافت شد. موضوع نامه انتشار ویژه‌نامه‌ای درباره آموزش ریاضی بود. در همان نامه ایشان پذیرفتند که مسئولیت تمامی اقدامات لازم برای انتشار این ویژه‌نامه را عهده‌دار شوند. هیأت تحریریه ضمن استقبال از این پیشنهاد، با توجه به اقدامات انجام شده قبلی و نزدیکی موضوعات دو ویژه‌نامه، همچنین با توجه به امکانات نشریه، مقرر نمود یکی از شماره‌های نشریه به طور مشترک به هر دوی این موضوعات اختصاص یابد. پس از آن، با پیگیری‌های خانم دکتر گویا مقالات دریافتی مجدداً مورد بررسی قرار گرفت و با نظر ایشان مقالات مناسب انتخاب گردید.

فرآیند داوری و ویراستاری مقالات نیز تماماً توسط ایشان پیگیری و به سرانجام رسید. در این مورد در سرمقاله‌ای که به قلم خود ایشان در همین شماره آمده بیشتر توضیح داده شده است. بنابراین آنچه در این شماره ملاحظه می‌فرمایید عمدتاً حاصل تلاش‌های شخص ایشان است. به همین دلیل لازم می‌دانم مراتب تقدیر و تشکر خود و دیگر اعضای هیأت تحریریه را بابت تلاش‌ها و زحمات ایشان برای آماده‌سازی این ویژه‌نامه اعلام دارم. همچنین برای ویراستاری مقالات این شماره، آقای دکتر روح اله جهانی‌پور همکاری بی‌شائبه‌ای داشته‌اند که لازم است از زحمات ایشان نیز تقدیر و تشکر شود.

احمد صفاپور

ریاضی و آموزش ریاضی: لازم و ملزوم یکدیگر

زهرا گویا

پرده اول: پرویز شهریاری، تاریخ‌شناس، معلم و مؤلف ماندگار ریاضی

در زمانی که آموزش ریاضی به عنوان یک رشته مستقل و با حدود و ثغور تعریف‌شده، در ایران گمنام بود، معلمی عاشق و نویسنده‌ای چیره‌دست و انسان‌دوست به نام پرویز شهریاری، یکه و تنها به «آموزش ریاضی» و نه فقط «تدریس» یا «تألیف» ریاضی پرداخت. او متناسب با نیازهای زمانه خود و با دانش وسیع اجتماعی- فرهنگی و عشقی که به معلمی داشت، هر کاری که توانست انجام داد تا کودکان و نوجوانان این سرزمین ریاضی یاد بگیرند و معلمان ریاضی آموزش ببینند. انسجام، هوش، دقت، پرکاری، امیدواری و از همه مهم‌تر، عشق فزاینده و اطمینان به اثربخشی تلاش‌ها، تا لحظه آخر عمر با برکتش یک دم ایشان را از فعالیت نینداخت. پرویز شهریاری در انجام کاری که درست می‌دانست، از هیچ کاری ابا نداشت و هنرش این بود که هیچ‌گاه علاقه‌مندی‌های شخصی خود را به دانش‌آموزان و معلمان تحمیل نکرد و در جمع‌های آموزشی فقط و فقط به آموزش پرداخت. مطالعه آثار وی نشان می‌دهد که بر ایجاد زمینه‌های مناسب برای تأسیس رسمی رشته آموزش ریاضی در ایران، حق بنیان‌گذار را دارد و اغراق نیست که تأثیرش بر آموزش ریاضی ایران با تأثیر پولیا بر آموزش ریاضی جهان مقایسه شود. استاد شهریاری از هر روزنه و امکانی برای تعمیق یادگیری ریاضی دانش‌آموزان و تهیه منابع آموزشی برای معلمان ریاضی استفاده کرد و در این مسیر دچار روزمرگی، کاسب‌کاری، عوام‌زدگی و هیجان‌های کوتاه‌مدت نشد. سبک و سیاق معلمی شهریاری، نگاه عمیق و انسانی‌اش به ریاضی و باوری که نسبت به فرزندان این مرز و بوم داشت، نوع خاصی از آموزش به معنای عام و آموزش ریاضی به معنای خاص به وجود آورد که به واقع نیازمند مطالعه عمیق توسط اندیشمندان ایرانی و معرفی وی به جهان است. به

خصوص کارهای دقیق و پر از عشق پرویز شهریاری در ثبت و ضبط تاریخ ارزشمند و پرافتخار ریاضی ایران، ستودنی و به راستی «ماندگار» است.

پرده دوم: ضرورت شناخت آموزش ریاضی توسط ریاضی دانان

اختصاص یک شماره ویژه به آموزش ریاضی در «نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی»، از انتشارات «انجمن ریاضی ایران»، اتفاق مبارکی برای این رشته در ایران است. به سبب واقعیت‌های تلخ و شیرینی که در رابطه با رشته آموزش ریاضی در ایران اتفاق افتاده و می‌افتد، نیاز به تولید ویژه‌نامه‌ای برای جامعه ریاضی که بخشی از ماهیت رشته را نشان دهد، احساس شد. زیرا برای ایجاد تفاهم نه تقابل، محترم شمردن تفاوت و ایجاد فضای مناسب مبتنی بر شناخت ویژگی‌ها و تفاوت‌های رشته‌ای و ده‌ها ضرورت دیگر باید چاره‌اندیشی نمود. یکی از راهکارهای مؤثر این است که به جای سکوت‌های طولانی و بعد حمله‌ها یا سازش‌های بدون توجیه کمک کنیم تا این فضا بیش از گذشته گسترش یابد. برای این کار، شناخت واقع‌بینانه مسئولیت‌ها، مأموریت‌ها، وظایف، گستره و نوع مشارکت آموزش ریاضی با ریاضی، یک الزام است. بدین سبب، سپاسگزار جناب آقای دکتر احمد صفاپور و اعضای محترم هیأت تحریریه «نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی» هستم که این فرصت طلایی را برای رشته آموزش ریاضی فراهم نمودند تا خود را برای چندمین بار- اما این بار با ارائه نمونه کار- به جامعه ریاضی معرفی نماید.

پرده سوم: نحوه شکل‌گیری «ویژه‌نامه آموزش ریاضی»

قبل از دادن طرحی برای تولید «ویژه‌نامه آموزش ریاضی» به عنوان یکی از شماره‌های نشریه فرهنگ و اندیشه ریاضی، هیأت تحریریه این نشریه، تهیه ویژه‌نامه‌ای را برای بزرگداشت زنده‌یاد پرویز شهریاری تصویب کرده بود. بعد از بررسی تقاضای ویژه‌نامه آموزش ریاضی، با این درخواست به شرط ادغام دو ویژه‌نامه موافقت شده بود. یعنی در حقیقت روزگار طنازی ظریفی کرد که «طالع» آموزش ریاضی «سعد» آمد و این افتخار نصیب جامعه ریاضی و آموزش ریاضی شد تا فرصتی یابد که از پرویز شهریاری، بزرگ‌مرد تاریخ و آموزش ریاضی ایران، به عنوان تاریخ‌شناس و تاریخ‌نگار ریاضی و آموزشگر ریاضی با هم تجلیل کند. پس از این، مقاله‌های رسیده برای هر دو فراخوان، فرایند داوری را طی کردند و مقاله‌هایی که برای این ویژه‌نامه تأیید شدند در مسیر ویرایش علمی و نگارشی قرار گرفتند. به طور طبیعی، با توجه به تعداد زیاد مقاله‌های رسیده و پذیرفته شده برای ویژه‌نامه، حجم این شماره بیش از حجم مرسوم است. تنوع مقاله‌ها قابل توجه و نسبت تألیف به ترجمه، مطابق عرف نشریه است. هر یک

از مقاله‌ها، به جنبه‌ای مهم در دیسپلین آموزش ریاضی پرداخته است و این سطح و عمق، می‌تواند این شماره را به عنوان منبع با ارزشی برای بعضی از درس‌های الزامی و اختیاری دوره تحصیلات تکمیلی این رشته درآورد. از جمله مهم‌ترین مباحثی که در این شماره به آن‌ها پرداخته شده، حقایق تاریخی مربوط به تأسیس رشته آموزش ریاضی در جهان، نظریه‌های آموزش ریاضی، روش‌های پژوهش در علوم انسانی، ارتباط معنادار و دغدغه‌های مشترک بین ریاضی‌دان‌ها و آموزشگران ریاضی، اهمیت ریاضی در دوره‌های مختلف تحصیلی از پیش‌دبستانی تا دانشگاه، آموزش معلمان ریاضی، تهیه و تولید برنامه درسی ریاضی و تدوین درس‌های ریاضی است.

پرده چهارم: ویژگی مقاله‌های «ویژه‌نامه» آموزش ریاضی

۱. مقاله «از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی» که ترجمه و بعد به اصطلاح قدما، «تحشیه‌نویسی» بر آن شده است. این مقاله، به بررسی سیر تحول رشته آموزش ریاضی در جهان پرداخته و نشان داده است که اعلام نیاز برای تأسیس این رشته و استقلال تدریجی آن به عنوان یک دیسپلین آموزشی- پژوهشی دانشگاهی، از سوی جامعه ریاضی و ریاضی‌دان‌ها بوده و در این بین مشکل اصلی ریاضی‌دان‌ها که رفع آن در اولویت بوده، آموزش معلمان و برنامه درسی ریاضی دوره متوسطه بوده است. با توجه به این که مقاله از سومین دانشنامه بین‌المللی آموزش ریاضی برگرفته شده است، مخاطبان اصلی‌اش آموزشگران ریاضی هستند که به طور طبیعی، باید با تاریخ و اصطلاحات و مخفف‌ها، آشنا باشند. ولی چون اکثر مخاطبان این ویژه‌نامه اعضای جامعه ریاضی‌اند، نمی‌توان انتظار داشت که این‌ها را بدانند. به این دلیل، «تحشیه‌نویسی» هم به ترجمه اضافه شد تا ابهام‌های احتمالی را برای خوانندگان محترم، برطرف کند. پس در واقع، این مقاله هم ترجمه و هم تألیف است. اما برای حفظ امانت، توضیحات همگی در پانویس آمده‌اند و به یکدستی متن اصلی، صدمه نزده‌اند.

۲. مقاله تألیفی «سیر تاریخی تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران» را می‌توان قدرشناسی از خدمات و زحمات پرویز شهریاری دانست. این مقاله، نشان می‌دهد که چه افراد با دانش، عاشق، کارکشته، باتجربه و توانمندی در ایران، مسئولیت برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی ریاضی را تقبل کرده بودند و چقدر این تاریخ، می‌تواند آموزنده و عبرت‌برانگیز باشد.

۳. مقاله ترجمه‌ای «سنتزی از فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی، آموزش پیش‌دبستانی تا پایان دوره کارشناسی و جنبش حقوق مدنی»، توسط دو ریاضی‌دان معروف نوشته شده‌اند که نویسنده اول آن، جهت تحقیقی خود را از ریاضی، به آموزش ریاضی تغییر داده است. این

مقاله به بُعد فرهنگی و اجتماعی آموزش ریاضی پرداخته است. این مقاله، با مقایسه نهضت آزادی خواهی مدنی در آمریکا، پیشنهادهای جالبی برای حرکت به سوی «دموکراتیزه کردن» آموزش ریاضی ارائه داده است.

۴. مقاله تألیفی «تحلیل محتوای برنامه درسی معادلات دیفرانسیل»، به بررسی یکی از پرکاربردترین درس‌های الزامی همه رشته‌های علوم و مهندسی و تحلیل بخشی از یک منبع معروف این درس یعنی کتاب بویس، دی‌پریمو و میترا پرداخته است.

۵. مقاله ترجمه‌ای «یک ریاضی‌دان برای آموزش دبیرستان می‌نویسد»، جلوه‌ای از تلاش یک ریاضی‌دان برای تولید بخشی از یک موضوع درسی مدرسه‌ای است. این تجربه می‌تواند برای اعضای جامعه ریاضی که علاقه‌مند به مشارکت در آموزش عمومی هستند، مفید باشد. نکته قابل توجه در این مقاله این است که نویسنده مقاله با اعلام این که «ریاضی‌دان» است، تلاش کرده تا با در نظر گرفتن ملاحظات نظری حوزه آموزش ریاضی «برای آموزش دبیرستان» بنویسد. این مقاله نمونه‌ای کوچک از همکاری ریاضی‌دانان را با آموزش ریاضی در دوره عمومی نشان می‌دهد.

۶. مقاله تألیفی «چارچوب برنامه‌ریزی درسی ریاضی مبتنی بر اصول دوگانی، نیازهای فکورانه و استدلال پی‌درپی: «DNR» بدیل عمیقی برای برنامه‌ریزی درسی ارائه می‌دهد که در واقع توسیع نظریه‌ای با همین عنوان است که توسط گرهان هارل تبیین شده و در قالب چندین پروژه تحقیقی وسیع در آمریکا، مطالعات امکان‌سنجی آن از طریق چند مطالعه مقدماتی انجام شده است. این مقاله می‌تواند راهنمای مناسبی برای برنامه‌ریزان درسی ریاضی باشد.

۷. مقاله ترجمه‌ای «چرا اثبات؟» با اشاره به محتوای درسی ریاضی دانشگاهی، ضرورت و اهمیت «اثبات» را از جنبه‌های فلسفی و ریاضی و توسط چند مثال نشان داده است. نویسنده این مقاله استاد ریاضی در دانشگاه آلبرتا واقع در کاناداست و این مقاله در ویژه‌نامه بزرگداشت اوایلر در شماره ۱۱ بهار ۲۰۰۸ نشریه «عدد پی در آسمان» (Pi in the Sky)، از انتشارات «مؤسسه علوم ریاضی پاسفیک» (PIMS) چاپ شده است. این مؤسسه پژوهشی متعلق به منطقه غرب کانادا و محل آن دانشگاه بریتیش کلمبیا است. پیمز، یک بخش فعال در رابطه با آموزش معلمان ریاضی دوره متوسطه و دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی دارد و تلاش می‌کند تا پلی بین آموزش مدرسه‌ای و دوره کارشناسی ریاضی باشد و در شناسنامه مجله قید شده که «هدف اصلی، ایجاد یک زمینه فرهنگی برای ریاضی» است.

۸. مقاله تألیفی «آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی عمیق»، یکی از مهم‌ترین وجوه تمایز بین پژوهش‌های ریاضی و آموزش ریاضی است. این مقاله به مسئله‌ای توجه نموده که شاید

بتوان آن را «سهل و ممتنع» نامید زیرا در دنیا اکثر کسانی که ریاضی را بلدند و در آن متخصص‌اند، خود را فی‌نفسه، معلم ریاضی هم می‌دانند. بدین سبب است که از نظر تاریخی، هدف اساسی دوره کارشناسی ریاضی، ورود به عرصه معلمی در آموزش عمومی یا آموزش عالی بوده و جهت‌گیری پژوهشی نداشته است. در حالی که در جهان فعلی، آموزش معلمان ریاضی، حوزه‌ای پیچیده، غیرقطعی و نیازمند تغییر همیشگی است و آشنایی با نتایج پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، برای تدوین برنامه‌های آموزش‌های اثربخش معلمان ریاضی، ضروری است.

۹. مقاله ترجمه‌ای «درک پنی از قواعد و پاسخ‌ها در ریاضیات مبتنی بر "آموزش تجویزی فردی"» به لحاظ روش پژوهش، یکی از آثار کلاسیک این رشته است که آن را می‌توان نقطه شروع حرکت از روش‌های کمی به سمت روش‌های کیفی در پژوهش‌های آموزش ریاضی دانست. این مقاله، در مجموعه‌ای با عنوان «کلاسیک‌های پژوهش آموزش ریاضی» (Classics in Mathematics Education Research) از انتشارات «شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM) در آمریکا و کانادا در سال ۲۰۰۴ چاپ شده است. برای تهیه این کتاب کمیته‌ای تشکیل شد و توسط آن از معروف‌ترین آموزشگران ریاضی در آمریکا و کانادا و مؤسسات پژوهشی نام‌آور آموزش ریاضی، راجع به ماندگارترین آثار پژوهشی رشته آموزش ریاضی، نظرخواهی شد. آن چه که در این مجموعه به نام «کلاسیک‌ها» آمده است، برآیند نظرات آنان است. این مقاله نشان می‌دهد که تحلیل داده‌های جمع‌آوری شده از طریق انجام مصاحبه‌های عمیق و چندلایه حقایق را روشن می‌کند که برای پژوهشگران آموزش ریاضی و ریاضی‌دان‌های علاقه‌مند به آموزش ریاضی، آگاهی‌بخش و انگیزاننده است و آن‌ها را در شناخت عمیق‌تر مشکلات یاددهی-یادگیری ریاضی کمک می‌کند. البته باید توجه داشت که متن مقاله سنگین و زبان آن متعلق به دهه‌های ۶۰ و ۷۰ میلادی است و طبیعی است که برای امانت‌داری در ترجمه، سبک مقاله حفظ شود. بدین سبب با وجودی که این ترجمه چندبار زیر و رو شده و توسط دو نفر دیگر هم ویرایش کامل علمی شده هنوز متن ترجمه سنگین است. در نتیجه از همکاران محترم ریاضی انتظار می‌رود که برای خواندن و شاید استفاده از آن حوصله و وقت بیشتری بگذارند. اتفاقاً به عنوان یک مترجم متن‌های علمی به مترجمان محترم توصیه کردم مراقب باشند که فضای آن زمان با جایگزین‌های مدرن و امروزی از بین نرود. یادمان باشد که اگر در متنی قدیمی «طهران» دیدیم آن را به «تهران» تبدیل نکنیم! زیرا «هر سخن جایی و هر نکته مقامی دارد!»

پرده می‌افتد تا رفیع‌تر، بالا رود!

پرده پایانی، با عنوان سرمقاله شروع می‌شود که «ریاضی و آموزش ریاضی: لازم و ملزوم یکدیگرند» و این ویژه‌نامه، اقدام راهگشایی برای نزدیکی معنادار دو رشته از درون به هم پیوسته ریاضی و آموزش ریاضی به هم است که بدون «ریاضی»، آموزش ریاضی همه چیز هست مگر آموزش ریاضی! و بدون «آموزش ریاضی»، ریاضی محکوم به ماندن در انتزاع خود است که در این دنیای به هم پیوسته، تنهایی پر مخاطره‌ای خواهد بود.

در پایان، وظیفه خود می‌دانم که از جناب آقای دکتر روح‌اله جهانی‌پور که برای مقابله ترجمه‌ها و ویرایش نهایی مقاله‌های این ویژه‌نامه زحمات زیادی کشیدند، خاضعانه تشکر کنم. هم‌چنین قدرشناس سرکار خانم فریده صمدیان هستم که کار آماده‌سازی این شماره را با دقت و حوصله زیاد انجام دادند و صمیمانه سپاسگزار زحماتشان هستم.

زهرای گویا: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی

رایانامه: zahra_gooya@yahoo.com

از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی

اف. فورینگتی، جی. ام. ماتوس، و ام. منگینی

برگردان: زهرا گویا و امیرحسین آشنا

چکیده

در این فصل تاریخ گسترش آموزش ریاضی را از وضعیت آغازی آن که یکی از حوزه‌های کاری ریاضیدانان به‌شمار می‌رفت تا تولد آن به‌عنوان یک حوزه علمی و پژوهشی مستقل، مرور می‌کنیم. در این مقاله نقش ارتباطات ریاضی^۵ از طریق رشد مجله‌ها و کنفرانس‌های پژوهشی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. اقدامات انجام شده برای جلب همکاری‌های بین‌المللی در مواجهه با مسائل مربوط به تدریس و آموزش ریاضی، با ارجاع به مجله تدریس ریاضی^۶ و ICMI بررسی می‌شود. در این بررسی اصلاحات برنامه‌های درسی و روشی که باعث ایجاد تغییرات در ریاضیات مدرسه‌ای در قرن بیستم شد، در نظر گرفته شده است. با پذیرش این مطلب که پژوهش در آموزش ریاضی چیزی بیش از تمرکز سنتی بر بحث درباره گزینه‌های مختلف برای برنامه‌های درسی در سطوح مختلف است، چند خوشه تخصصی را شناسایی و مباحث خاص مربوط به آموزش ریاضی را در سطح جهانی مطرح کرده‌ایم. سپس این خوشه‌ها را در سه حوزه اصلی گروه‌بندی کرده‌ایم. این سه حوزه عبارت‌اند از روان‌شناسی، مطالعات اجتماعی، فرهنگی و سیاسی و تناسب نظریه ارائه‌شده برای آموزش ریاضی.

^۱ این مقاله ترجمه فصل ۹ کتاب سومین دانشنامه جهانی آموزش ریاضی است.

Third International Handbook of Mathematics Education, Chapter 9, M. A. Clements & el., Springer, 2013

^۲Fulvia Furinghetti ^۳Jose Manuel Matos ^۴Marta Menghini ^۵Mathematical Communication

^۶L'Enseignement Mathematique

۱. مقدمه

در این فصل به سیر تحول آموزش ریاضی از وضعیت آغازی آن به عنوان امری خطیر که غالباً تحت نظارت ریاضی دانان بوده است، تا تولد آن به مثابه حوزه‌ای علمی پژوهشی می‌پردازیم. داستان خود را از قرن نوزدهم آغاز می‌کنیم، یعنی زمانی که دولت‌های قدیم به سازماندهی جدیدی دست یافتند، دولت‌های جدید اداره امور را در دست گرفتند و لازم بود که نظام‌های آموزشی به‌روز شده یا از نو ایجاد شوند. در این داستان، پژوهشگران در حوزه‌های متعدد (روان‌شناسی، فلسفه، پزشکی، جامعه‌شناسی، زبان‌شناسی، انسان‌شناسی و غیره) نقش داشته‌اند اما بازیگران اصلی ریاضی دانان حرفه‌ای و معلمان ریاضی بوده‌اند. این گذار، طی مسیری طولانی صورت گرفته و به شفاف شدن رابطه بین ریاضی دانان و معلمان ریاضی و در نتیجه استقلال آموزشگران ریاضی از ریاضی دانان انجامیده است. این استقلال رسماً از طریق برگزاری انتخابات جدید برای کمیته اجرایی «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی»^۱ (ICMI) به رسمیت شناخته شد و این مصوبه در Compostela de Santiago (۲۰-۱۹ آگوست ۲۰۰۶)، توسط مجمع عمومی «اتحادیه جهانی ریاضی»^۲ (IMU) صورت گرفت و از آن پس، انتخابات کمیته اجرایی ICMI از مجمع عمومی IMU به مجمع عمومی ICMI منتقل شد [۴۸].

به‌منظور شرح تفصیلی گام‌های برداشته شده در این مسیر، بر نکات مهم زیر تمرکز خواهیم کرد:

- پیشرفت ناشی از آموزش ریاضی در سطح جهانی در آغاز قرن بیستم از طریق مجله تدریس ریاضی و کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی؛
- اصلاحات/ تغییرات برنامه درسی ریاضی؛
- ابتکارات مستقل ناشی از رویکرد جدید به آموزش ریاضی که آن را به رشته‌ای دانشگاهی و یک حوزه پژوهشی جدید تبدیل کرد.

از آنجا که شکل‌گیری این رشته جدید تحت تأثیر تعامل با حوزه‌های دیگر بوده است، خلاصه‌ای از اثرگذارترین تعامل‌ها را ارائه می‌کنیم. جنبش ارتباطات، جهانی‌شدن و همبستگی در آغاز قرن بیستم، جنبه‌ای بین‌المللی به آموزش ریاضی داد و کشورهای متعددی از سراسر جهان در این رخداد دخیل بودند. اما چون بیشتر رویدادها و افراد سهم در ایجاد، توسعه و تبدیل آموزش ریاضی به رشته‌ای دانشگاهی متعلق به اروپا و آمریکای شمالی بودند، تاریخی که بررسی کرده‌ایم عمدتاً به این دو منطقه مربوط می‌شود. بحث درباره دیگر مسیرهای گسترش آموزش ریاضی پیش و پس از استقلال از ریاضی دانان و عطف توجه به مناطق دیگر جهان، در فصل دیگری از این دانشنامه آمده است.

^۱International Commission on Mathematical Instruction ^۲International Mathematical Union

آغاز آموزش ریاضی با پیدایش بشر همزمان بوده است. تمدن‌های باستان، اسنادی برایمان باقی گذاشته‌اند که گواه درهم‌تنیدگی بین توسعه فرهنگ ریاضی و مسائل مربوط به انتقال این فرهنگ است [۵۳، ۵۶]. در عرصه پهنای رویدادهای اجتماعی، اقتصادی و سیاسی که همراه با تحول آموزش ریاضی بوده‌اند، دو پیشرفت مهم و اثرگذار را مطرح می‌کنیم. اول اختراع صنعت چاپ در قرن پانزدهم است که امکان سواد جهانی و انتقال آسان دانش ریاضی را به افراد بیشتری فراهم آورد. طی چند قرن بعد، این امر باعث پیشرفت دیگری شد: ایجاد مدارس برای آموزش همگانی. در نتیجه، ریاضی که ۶۰۰ سال قبل موضوعی اسرارآمیز بود، به موضوعی بدل شد که عملاً تمام دانش‌آموزان جهان آن را مطالعه می‌کردند.

قرن‌ها، نقش معلمان ریاضی و پژوهشگران ریاضی به میزان زیادی همپوشانی داشت. به تدریج که موضوعات ریاضی پیشرفته شدند، این همپوشانی به استادان ریاضی در دانشگاه‌ها منتقل شد که پژوهش را به عنوان بخشی از حرفه خود، انجام می‌دادند. با این حال در مدارس ابتدایی و متوسطه، تفکیک بین آموزش ریاضی و پژوهش در ریاضی آشکارتر شد و این تمایز به تنوع در تولید مقالات و نوشته‌ها در زمینه ریاضی انجامید. از یک سو کتاب‌های درسی که هدفشان به طور خاص آموزش ریاضی مدرسه‌ای بود، منتشر می‌شدند و از سوی دیگر گزارش‌های نتایج جدید پژوهش در ریاضی. به گفته استروویک [۹۲] فرآیند حرفه‌ای شدن پژوهشگران ریاضی، به واسطه پژوهش‌های علمی در سال‌های انقلاب صنعتی شتاب زیادی گرفت. انقلابی که باعث شکل‌گیری «طبقات اجتماعی جدید با دیدگاهی جدید نسبت به زندگی و علاقه‌مند به علم و آموزش‌های فنی-حرفه‌ای» شد (ص. ۱۴۱). در این بین، دیدگاه‌های دموکراتیک نوین که نشأت گرفته از انقلاب فرانسه بود، «به زندگی آکادمیک حمله کرد؛ نقدهایی علیه طرز تفکر منسوخ‌شده مطرح شد؛ مدارس و دانشگاه‌ها باید اصلاح و نوسازی می‌شدند» (ص. ۱۴۲). در قرن نوزدهم، «مشغله اصلی ریاضی‌دانان تنها عضویت در فرهنگستان‌های علمی نبود، آن‌ها معمولاً در استخدام دانشگاه‌ها یا مدارس فنی بودند و در کنار حرفه تدریس، پژوهش نیز می‌کردند» (ص. ۱۴۲).

تقریباً در اواسط قرن نوزدهم حرفه معلمی ریاضی در سطح ابتدایی و متوسطه، شکل تازه‌ای به خود گرفت که نه تنها به نوگرایی ملت‌ها ربط داشت بلکه با ظهور و بروز اتفاقات اجتماعی جدید نیز در ارتباط بود که به تدریج در قالب انجمن‌ها و اتحادیه‌های کارگری جدید، جنبش‌های سیاسی و اجتماعی و اقداماتی جهت همبستگی نمود می‌یافتند. حال دیگر انتقال دانش ریاضی، مسئله‌ای خصوصی و بر عهده خانواده‌ها یا گروه‌های مذهبی نبود بلکه به کاری عمومی و جزو مسئولیت دولت‌ها تبدیل شده بود. در سال‌های بعد، تأسیس نظام‌های ملی آموزشی جدید در کشورهای جدید و قدیمی آغاز شد. مسئله اصلی در این فرآیند، تولید برنامه‌های درسی، تهیه کتاب‌های درسی مناسب و حل مشکلات مربوط به آموزش

و استخدام معلمان بود. مدت کوتاهی پس از این همه اتفاقات، ضرورت تأمل بر مشکلات ذاتی این ساختار کلی موجب پدید آمدن مجله‌ها و اتحادیه‌های ویژه شد. در چنین شرایطی است که داستان ما در مورد گذار از «آموزش و ریاضی» به «آموزش ریاضی» آغاز می‌شود.

۲. ارتباطات ریاضی

ریاضی‌دانان مانند تمام دانشمندان، همیشه به انتقال نتایج پژوهش‌های خود احساس نیاز کرده‌اند. آن‌ها برای دستیابی به این هدف، مدت‌های طولانی بر ارتباطات خصوصی خود با ریاضی‌دانان دیگر متکی بودند، اما پس از تأسیس فرهنگستان‌ها و انجمن‌ها، به تدریج به تدوین و انتشار گزارش فعالیت‌های علمی خود پرداختند. در پی تغییرات ایجاد شده در محیط‌های فرهنگی و اجتماعی که نتیجه انقلاب صنعتی و انقلاب فرانسه بود، ابزارهای ارتباطی جدیدی ایجاد شد و اولین مجله‌های تخصصی ریاضی پدید آمدند. این مجله‌ها در ابتدا دوامی نداشتند یا این که مانند *مجله سالنامه ریاضی محض و کاربردی*^۱ در فرانسه تنها چند دهه دوام آوردند (۱۸۱۰-۱۸۳۲). اما به زودی نشریه‌های دوره‌ای مهمی منتشر شدند که برخی از آن‌ها هنوز هم منتشر می‌شوند. برای مثال در سال ۱۸۲۶ *مجله نشریه‌ای در باب ریاضی محض و کاربردی*^۲ به همت آگوست لئوپلد کریل^۳ و در سال ۱۸۳۶، *مجله ریاضی محض و کاربردی*^۴ توسط ژوزف لیوویل^۵ منتشر گشت. این مجله‌ها و انواع مشابه آن‌ها که در آن زمان در دسترس بودند، نه تنها حاوی مقالات پژوهشی اصیل بودند بلکه یادداشت‌های مستخرج از آثار برجسته ریاضی و چکیده‌های مقالات مهم را نیز شامل می‌شدند و از این طریق یعنی با ارائه نتایج جدید و آثار مهم که به راحتی در دسترس همه خوانندگان (از جمله پژوهشگران تازه‌کار) قرار می‌گرفت، در پیشرفت ریاضی سهمی شدند. این مجله‌ها عمده‌تاً پژوهشی بودند و خوانندگان بین‌المللی داشتند. حدوداً در اواسط قرن نوزدهم، نوع دیگری از مجله که معمولاً به آن *مجله بینابینی*^۶ (واسط)^۷ اطلاق می‌شد، پدید آمد که محتوای این گونه مجله‌ها مربوط به ریاضیات دوره متوسطه و دانشگاهی بود. برای مثال، بین سال‌های ۱۸۷۷ تا ۱۸۸۱ *مجله ریاضی مقدماتی و ویژه*^۸ (به سردبیری جاستین بورگت^۹) منتشر شد و در سال ۱۸۸۲ به *مجله ریاضیات ویژه*^{۱۰} (به سردبیری گاستون آلبرت گوهریر دو لانچامپ^{۱۱}) تغییر نام داد. مخاطب برخی از این مجله‌های بینابینی صرفاً معلمان و دانش‌آموزان ریاضی بودند که برای ورود به مدارس خاص آماده^{۱۲} منظور از این واژه، رتبه‌بندی مجله نیست، بلکه شأنیت و مأموریت مجله است.

^۱ Annales de Mathematiques Pures et Appliquees ^۲ Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik

^۳ August Leopold Crelle ^۴ Journal de Mathematiques Pures et Appliquees ^۵ Joseph Liouville

^۶ Intermediate Journal ^۷ Journal de Mathématiques Élémentaires [et Spéciales] ^۸ Justin Burget

^{۱۰} Journal de Mathématiques Spéciales ^{۱۱} Gaston Albert Gohierre de Longchamps

می‌شدند و محتوای ریاضی مقالات چاپ‌شده در آن‌ها در سطحی بین دبیرستان و دانشگاه قرار داشت. پیشتر در بریتانیا، مجلات دوره‌ای نظیر *روزنامه بانوان*^۱ یا *سالنامه بانوان*^۲ که شماره اول آن در سال ۱۷۰۴ منتشر شد و تایمز آموزشی^۳ که از ۱۸۴۷ تا ۱۹۲۹ منتشر می‌شد، هر یک به نحوی در رشد دانش ریاضی سهم داشتند و این کار را از طریق طرح پرسش‌های ریاضی برای خوانندگان غیرحرفه‌ای انجام می‌دادند. مجله تایمز آموزشی که با مرکز تربیت معلم در ارتباط بود (۱۸۴۹)، محصول انجمن معلمان ریاضی بود (۱۸۴۶). این انجمن برای بهبود استانداردهای آموزش مدارس متوسطه تأسیس شده بود و به گفته هاوزن [۵۲] «ابتدا معلومات لازم را در اختیار معلمان و دانش‌آموزان قرار می‌داد» (ص. ۴۳). نشریه «مسائل و راه‌حل‌های ریاضی از تایمز آموزشی» از این مجله نشأت گرفت و بین سال‌های ۱۸۶۴ تا ۱۹۱۸ منتشر می‌شد (به سردبیری ویلیام جان کلارک میلر^۴).

در دنیای رنگارنگ مجله‌هایی با ماهیت‌های مختلف که در قرن نوزدهم پدید آمدند، شناسایی مجله‌هایی که به‌طور خاص به آموزش ریاضی دوره متوسطه بپردازند، دشوار است. در واقع نشانه‌ای که از آن می‌شد فهمید محتوای یک مجله معطوف به ریاضیات دوره متوسطه است، واژه «مقدماتی» در عنوان این مجله‌ها بود؛ اگرچه معنای این اصطلاح هم در مجله‌های مختلف، متفاوت بود. نمونه‌های این نوع مجلات، سه نشریه فرانسوی با عنوان‌های *مجله ریاضی مقدماتی*^۵ (به سردبیری هنری ووبرت^۶، انتشار در سال ۱۸۷۶)، *مجله ایتالیایی ریاضی مقدماتی* (به سردبیری لانچامپ، انتشار در سال ۱۸۸۲)، *آموزش ریاضی*^۷ (سردبیران ژان گریس^۸ و هنری ووبرت، انتشار در سال ۱۸۹۸)، و *مجله ایتالیایی ریاضی مقدماتی*^۹ (به سردبیری جیووانی ماسا^{۱۰}، تاریخ شروع سال ۱۸۷۴) بودند. گاهی مدیران مسئول و سردبیران این مجله‌ها، معلمان مدارس بودند و به‌طور مشخص، اغلب نویسندگان *مجله ایتالیایی ریاضی* در ایتالیا معلمان مدارس دوره متوسطه بودند. تاریخ انتشار این مجله‌ها نشان می‌دهد که مجله‌های مربوط به آموزش ریاضی در سطح متوسطه دیرتر از مجله‌های پژوهشی ریاضی متولد شدند. البته این تأخیر قابل توجیه است زیرا معلمان ابتدایی و متوسطه که در زمان تأسیس نظام‌های آموزشی در کشورهای مختلف، در تدارک حرفه‌ای‌گری و هویت‌سازی برای خود بودند، خوانندگان اصلی این نوع مجله‌ها بودند.

پدید آمدن مجله‌های مختص آموزش ریاضی اغلب با همکاری انجمن‌های معلمان ریاضی بود و در برخی موارد برعکس، مجلات دوره‌ای سبب تأسیس انجمن‌های حرفه‌ای می‌شدند. برای مثال، در سال ۱۹۱۵ در ایالات متحده آمریکا، MAA (جامعه ریاضی آمریکا^{۱۱}) مسئولیت ماهنامه آمریکایی ریاضی^{۱۲}

^۱ The Ladies' Diary ^۲ Woman's Almanack ^۳ The Educational Times ^۴ William John Clarke Miller

^۵ Journal de Mathématiques Élémentaires ^۶ Henri Vuibert ^۷ L'Éducation Mathématique ^۸ Jean

Griess ^۹ Rivista di Matematica Elementare ^{۱۰} Giovanni Massa ^{۱۱} Mathematical Association of

America ^{۱۲} American Mathematical Monthly

را به عهده گرفت که مخاطبان‌ش معلمان ریاضی بودند و از سال ۱۸۹۴ به‌طور خصوصی منتشر می‌شد. علاوه بر این انجمن معلمان ریاضی ایالت‌های میامی و مریلند، انتشار فصل‌نامه‌ای با نام «معلم ریاضی»^۱ را در سپتامبر ۱۹۰۸ آغاز کرد که همزمان با تأسیس «شورای ملی معلمان ریاضی»^۲ (NCTM) در سال ۱۹۲۰، به‌عنوان مجله رسمی این شورا انتخاب شد.

در ایتالیا مجله فصل‌نامه ریاضی^۳ در سال ۱۸۸۶ تأسیس و به ارگان رسمی انجمن ملی معلمان ریاضی و علوم ریاضی ایتالیا تبدیل شد. در موارد دیگری نیز تأسیس انجمن معلمان ریاضی به انتشار مجله‌های جدید با هدف پخش اطلاعات و ایده‌های نو منتهی شد. مثلاً در سال ۱۸۹۱ در آلمان انجمن حمایت از آموزش علوم و ریاضی آلمان^۴ تأسیس و به‌دنبال آن مجله راهنمای آموزش ریاضی و علوم^۵ در سال ۱۸۹۵ منتشر گشت. در بریتانیا انجمن بهبود آموزش هندسه^۶ (AIGT) که در سال ۱۸۷۱ تأسیس شده بود، در سال ۱۸۹۷ به انجمن ریاضی تبدیل شد. این انجمن به انتشار مجله The Mathematical Gazette که چاپ آن از سال ۱۸۹۴ آغاز شده بود، ادامه داد. در فرانسه، APMEP (انجمن معلمان ریاضی در آموزش عمومی^۷) فعالیت‌ها و انتشار بولتن خود را در سال ۱۹۱۰ آغاز کرد.

ایجاد ارتباطات از طریق مجله‌های مختص ریاضی (و گاهی همراه با علوم دیگر) با رشد جامعه ریاضی‌دانان و سپس آموزش‌گران ریاضی همراه شد. فهرست برخی از ۱۸۲ فصل‌نامه ریاضی در کاتالوگی که توسط انجمن ریاضی در بریتانیا (۱۹۱۳) تهیه شده بود هنوز هم موجود است و بسیاری از موارد جدید نیز باید به آن اضافه شود. بعضی از این مجله‌ها پژوهشی بودند و برخی هم به آموزش ریاضی می‌پرداختند که مجلات مربوط به آموزش ریاضی در قرن بیستم رشد قابل توجهی پیدا کردند به‌طوری که در فهرست گردآوری‌شده توسط شویرینگ^۸ و ریشتر^۹ [۸۰] ۲۵۳ عنوان به چشم می‌خورد و برخی از آن‌ها در [۴۶] و [۴۷] مورد بررسی قرار گرفتند.

همان‌طور که اشاره کردیم در دهه‌های قبل از سال ۱۹۰۰، مهم‌ترین انجمن‌های ملی معلمان ریاضی تأسیس شدند. این انجمن‌ها و مجله‌هایشان به ارتقای ارتباط و شکل دادن به هویت معلمان ریاضی کمک زیادی کردند. نقش این انجمن‌ها به‌طور خاص، به‌لحاظ ایجاد انگیزه و هدایت اصلاحات صورت گرفته در آن دوره حائز اهمیت بود. این اصلاحات، در راستای به‌روزرسانی ریاضی مدرسه‌ای همسو با روندهای

^۱The Mathematics Teacher ^۲National Council of Teachers of Mathematics ^۳Periodico di Matematica

^۴Deutscher Verein zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts

^۵Unterrichtsbblätter für Mathematik und Naturwissenschaften ^۶Association for Improvement of Geometrical Teaching ^۷Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

^۸Schubring ^۹Richter

جدید پژوهشی و به منظور تولید برنامه‌های درسی ریاضی متناسب با نیازمندی‌های عصر نوآوری صنعتی و فناوریانه بود. طبق مشاهدات نابوناند^۱ [۶۸]، درست است که روح اصلاحات اغلب با شخصیت‌های قدرتمندی نظیر جان پری^۲ در بریتانیا، فلیکس کلاین^۳ در آلمان، و چارلز امیل ارنست کارلو بورله^۴ در فرانسه تجسم یافت، اما برنامه‌های اصلاحات که با همکاری اتحادیه‌های معلمان به عنوان نقش‌آفرینان مهم مورد بحث قرار گرفت، اجرا شد و منتشر گشت.

در ایالات متحده آمریکا، انجمن ریاضی آمریکا^۵ (AMS) در سال ۱۸۸۸ تأسیس شد و تأکید همیشگی آن بر پژوهش (در دوره‌های بعد از متوسطه) بوده و هست. الیاکین هستینگز مور^۶ در سخنرانی‌ای که به عنوان رئیس AMS در سال ۱۹۰۲ ارائه نمود، از عقاید پری دفاع کرد، (مور ۱۹۰۳) این خشم بسیاری از اعضای AMS را برانگیخت. در بریتانیا انجمن بهبود آموزش هندسه (AIGT) و بعدها انجمن ریاضی، با هدف حمایت از اصلاحات در برنامه درسی هندسه متولد شد. در سوئیس به پیشنهاد جامعه معلمان ریاضی، برنامه‌های جدیدی برای تعریف نموداری توابع مطرح شدند. در سال ۱۹۰۶ پس از سخنرانی امانوئل بیک^۷ در نشست سالانه انجمن معلمان مجارستان، کمیسیونی مسئول مطالعه اصلاحات و تغییرات کلی آموزش ریاضی متوسطه توسط همان انجمن شد و بیک را به عنوان اولین رئیس خود منصوب نمود. گاهی که تدریس ریاضی به موضوعی حاشیه‌ای تبدیل شده است، نقش مهم انجمن‌های معلمان در دفاع از آموزش ریاضی، مشهود بوده است. برای مثال در ایتالیا هدف انجمن معلمان ریاضی Mathesis که در سال ۱۸۹۵ تأسیس شد، حمایت از تدریس ریاضی در مقابل افول آن بود که از دهه ۱۸۹۰ آغاز شده بود. علاوه بر این انجمن‌ها که اغلب‌شان هنوز هم به حیات خود ادامه می‌دهند و کاملاً سرپا هستند، انجمن‌های جدیدی نیز تأسیس شده‌اند و بسیاری از آن‌ها مجله، بولتن و خبرنامه منتشر و نشست‌های ملی و فعالیت‌های دیگر را سازماندهی می‌کنند.

اغلب، هم معلمان و هم ریاضی‌دانان حرفه‌ای در این فعالیت‌های ابتکاری مشارکت داشتند. ابتکارهایی هم بود که معلمان دوره متوسطه به تنهایی آن‌ها را سروسامان دادند؛ این اتفاق برای مثال در ایتالیا، در دوره آغازین انجمن‌های معلمان رخ داد. مورد دیگر را می‌توان در فرانسه مثال زد که در آن ریاضی‌دانان دانشگاهی این ابتکارات را به دست گرفتند و جنبش‌های اصلاحی را هدایت کردند. مشکل رابطه بین این دو گروه (ریاضی‌دانان و معلمان ریاضی) و نیاز به تقسیم مسئولیت‌ها و اختیارات، همیشه در دورنمای توسعه آموزش ریاضی و تبدیل آن به یک رشته دانشگاهی، دخیل بوده است.

^۱Nabonnand ^۲John Perry ^۳Felix Klein ^۴Charles E'mile Ernest Carlo Bourlet ^۵American Mathematical Society ^۶Eliakin Hastings Moor ^۷Emanuel Beke

۳. آموزش ریاضی بدون مرز

مجله‌های ملی و انجمن‌های معلمان در بسیاری از کشورها، به ابزار مهمی در انتشار ایده‌ها و اطلاعات بین معلمان تبدیل شدند و اهمیت حیاتی خود را در شکل دادن به هویت معلمان ریاضی اثبات کردند. همچنین با توجه به این که مضمون‌های مطرح شده در آن‌ها بیشتر مربوط به نظام‌های آموزشی ملی در کشورها بود و خوانندگان آن‌ها را نیز همان معلمان تشکیل می‌دادند، تعجبی ندارد که اغلب همکاران و حامیان آن‌ها، از همان کشور بودند و اقدامات انجمن‌های معلمان عمدتاً محدود به پرداختن به مشکلات ملی می‌شد. در مجله‌هایی که به آموزش ریاضی اختصاص داشتند، مشارکت مؤلفان خارجی بسیار اندک بود و عموماً نوشته‌های ایشان به زبان‌های محلی ترجمه می‌شد. با وجود ملی بودن بسیاری از این مجلات و انجمن‌ها و پرداختن به مسائل بومی هر کشور، می‌توانیم با تأمل بر مشکلات تدریس ریاضی در آغاز قرن بیستم، برخی زمینه‌های مشترک را شناسایی کنیم. اکثر بحث‌های مربوط به سازمان‌دهی برنامه درسی بر سه مضمون اصلی استوار بود:

- رابطه بین بخش‌های برنامه‌ها؛
- دقت در مقابل شهود؛
- رابطه بین ریاضی و رشته‌های دیگر علمی.

در این بین، نیاز به فراتر رفتن از مباحث مربوط به سازماندهی مجدد برنامه‌های درسی آشکار شد و تشخیص داده شد که لازم است روش‌های جدید تدریس با ملاحظات زیر در نظر گرفته شوند:

- «رویکردهای عملی به تدریس» مبتنی بر مشاهده، آزمایش و آزمایشگاه؛
- یافته‌های تازه در مورد رشد فکری کودکان؛
- تمرکز بر کاربردها.

به دلیل وجود ویژگی‌های مشترک متعدد بین مسائل آموزش ریاضی در کشورهای مختلف و پذیرفتن مزایای محتمل همکاری‌های بین‌المللی، حرکت‌هایی در راستای رسیدن به حل مشکلات مربوط به تدریس و سایر مسائل آموزشی ایجاد شد. در ادامه به تشریح دو ابتکار اصلی خواهیم پرداخت که به میزان زیادی در جریان این جهانی شدن^۱ سهیم بودند.

^۱Internationalism

۴. مجله تدریس ریاضی^۱

در نیمه دوم قرن نوزدهم، اندیشه جهانی شدن در بسیاری از وجوه جامعه جریان داشت. سرعت حمل و نقل در حال افزایش بود و پیشرفت‌های فناوری، ارتباط راه دور را تسهیل می‌کردند. در چنین شرایطی ظهور ایده برگزاری جشنواره‌ها و نمایشگاه‌های جهانی تعجبی نداشت؛ جایی که امکان نمایش تولیدات صنعتی و فناوری‌های جدید و تبادل دیدگاه‌ها و پروژه‌ها فراهم می‌شد. اولین نمایشگاه جهانی در لندن (۱۸۵۱) برگزار شد و پس از ۳۰ سال با برپایی نمایشگاه‌هایی در پاریس، وین، فیلادلفیا و ملبورن، ادامه پیدا کرد. اندیشه جهانی شدن به تمام جنبه‌های زندگی از جمله مطالعه و آموزش ریاضی سرایت پیدا کرده بود. با برگزاری کنگره جهانی ریاضی‌دانان در سال ۱۸۹۳ در شیکاگو، سنگ بنای جهانی سازی ریاضی و برگزاری همیشگی کنگره‌های جهانی ریاضی‌دانان^۲ (ICM) گذاشته شد (شروع از سال ۱۸۹۷). یکی از مروجان سنت برپایی این کنگره‌ها، ریاضی‌دان فرانسوی چارلز آنگ لازان^۳ بود که دیدگاه فرهنگی او درباره ماهیت ریاضی و آرمان‌های اجتماعی‌اش درباره برادری و همبستگی بین ابناء بشر، مشوق وی برای این کار بود [۳۸].

پس از کنگره پاریس در سال ۱۹۰۰، این کنگره‌ها هر چهار سال یک بار، برگزار شده‌اند (به استثنای وقفه ناشی از دو جنگ جهانی). این نشست‌های منظم، به میزان زیادی به شکل‌گیری هویت جامعه جهانی ریاضی‌دانان پژوهشگر کمک کرد. اتحادیه جهانی ریاضی (IMU) در سال ۱۹۲۰ تأسیس شد و با وجود انحلالش در سال ۱۹۳۲، در سال ۱۹۵۱ مجدداً برقرار و در سال ۱۹۵۲ اولین مجمع عمومی اتحادیه جدید تشکیل شد.

اما به دو دلیل روشن، ایده جهانی شدن، به آسانی قابل انتقال به حوزه آموزش ریاضی نبود: (الف) مسائل آموزشی عمده‌تاً ملی هستند؛ و (ب) موقعیت معلمان ریاضی با ریاضی‌دانان متفاوت است به‌ویژه این که معلمان، فرصت‌ها و منابع مالی کمتری برای سفر و برقراری ارتباط با هم دارند. با وجود این مجله تدریس ریاضی در سال ۱۸۹۹ به همت لازان و ریاضی‌دان سویسی، هنری فهر^۴ راه‌اندازی شد و بدین ترتیب آموزش ریاضی نیز تحت تأثیر جهانی شدن قرار گرفت. مأموریت و چشم‌انداز این نشریه که در شماره اول از سوی هیأت تحریریه آن اعلام شد، پیوستن آموزش ریاضی به جنبش همبستگی، جهانی شدن و ارتباطات در آن زمان بود.

جهانی بودن مجله تدریس ریاضی، نشانگر تفاوت بین این مجله و دیگر مجله‌هایی بود که به امر تدریس ریاضی می‌پرداختند: این مجله بلافاصله اقدام به چاپ مقالاتی در مورد وضعیت آموزش ریاضی

^۱L'Enseignement Mathématique ^۲International Congresses of Mathematicians ^۳Charles-Angé

Laisant ^۴Henry Fehr

در کشورهای مختلف نمود. در بین اعضای هیأت تحریریه مجله، ریاضیدانان و تاریخ‌دانان ریاضی به چشم می‌خوردند که پیش از این علاقه خالصانه خود را نسبت به مشکلات تدریس ریاضی (خصوصاً کلاین) و ارتباطات در جامعه ریاضی (به‌ویژه یوستا میتاگ - لفلر^۱ سردبیر مجله Acta Mathematica) ابراز کرده بودند.

سال‌های آغازین و توسعه مجله تدریس ریاضی توسط فورینگتی [۳۴، ۳۷] تشریح شده است. این مجله نه تنها به سبب جهانی بودنش بلکه به علت قلمرویی که ترسیم کرده بود، مجله‌ای خاص تلقی می‌شد. در شماره ششم (۱۹۰۴)، هیأت تحریریه اعلام کردند که از نظر آنان واژه "enseignement" (تدریس) معنای خیلی گسترده‌ای دارد؛ از تدریس به دانش‌آموزان گرفته تا تدریس به معلمان و در واقع یکی از آن‌ها بدون دیگری نمی‌تواند وجود داشته باشد. به همین دلیل، صریحاً هدف خود را برای اختصاص دادن فضایی بیشتر به طرح مسائل فلسفی، روش‌شناختی و تاریخی بیان کردند. از نظر آن‌ها، معلمان باید افق‌های دید خود را فراتر از برنامه کلاس‌های درس و نظام آموزشی کشورشان گسترش می‌دادند.

مجله تدریس ریاضی محصول محیط و جامعه ریاضی بود. اما فهر در ژنو تدریس می‌کرد، یعنی جایی که روان‌شناسان به نام، یعنی ادوارد کلاپارد^۲ و تتودور فلورنوی^۳ در حال فعالیت بودند. آن‌ها از این مجله برای اجرای پرسش‌نامه‌ای استفاده کردند که هدفش بررسی چگونگی تولید محتوای ریاضی توسط ریاضی‌دانان بود. این مطالعه به این دلیل حائز اهمیت بود که به جنبه‌هایی اشاره داشت که صرفاً شناختی نبودند - حوزه‌ای که امروزه به آن حوزه عاطفی گفته می‌شود. از سوی دیگر ریاضی‌دانان پژوهشگری نظیر آنری پوانکاره، مقالاتی در این مجله منتشر کردند که بر جنبه‌های مربوط به ماهیت اکتشاف در ریاضی متمرکز بود.

۵. پیدایش و پیشرفت پروژه‌ای جهانی: ICMI اولیه

در سال ۱۹۰۵، دیوید یوجین اسمیت^۴ مقاله‌ای در مجله تدریس ریاضی منتشر کرد که در آن به حمایت از گسترش همکاری‌های بین‌المللی و تشکیل کمیسیونی در هر کنفرانس جهانی ریاضی پرداخت که هدف آن، مطالعه مسائل و مشکلات تدریس ریاضی در کشورهای مختلف باشد [۸۷]. این مقاله در چهارمین کنگره جهانی ریاضی‌دانان، زمینه را برای تشکیل کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی فراهم نمود (رُم، ۱۹۰۸) و بدین ترتیب، اولین «کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی»^۵ به ریاست فلیکس کلاین، شکل گرفت. این کمیسیون در دهه‌های اول حیاتش با نام CIEM (کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی)^۶ در

^۱Gustaf Mittag-Leffler ^۲Edouard Claparede ^۳Theodore Flournoy ^۴David Eugene Smith

^۵International Commission on the Teaching of Mathematics ^۶Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique in France

فرانسه یا IMUK (کمیسیون جهانی آموزش ریاضی^۱) در آلمان شناخته می‌شد. اگرچه این کمیسیون، از آن زمان تاکنون از نظر جایگاه اجتماعی و چشم‌اندازها دچار دگرگونی‌های زیادی شده است، هنوز هم می‌توان آن را اولین ICMI تلقی نمود.

اهمیت تأسیس ICMI فراتر از ایجاد یک ساختار سازمانی است. نکته حائز اهمیت این است که ICMI به وجود یک جامعه جهانی اشاره داشت که کانون اصلی توجه‌اش، تدریس ریاضی بود. با توجه به این که اعضای اولیه ICMI کشورها بودند و نمایندگان آن کشورها عمدتاً ریاضی‌دانان دانشگاهی بودند، تعجبی نداشت که فعالیت‌های ICMI برای مدتی طولانی، درون جامعه ریاضی‌دانان صورت می‌گرفت. طی نشست‌های ICMI این کمیسیون گزارش‌های خود را ارائه می‌کرد و دستوراتی برای فعالیت‌های آتی دریافت می‌نمود [۳۵، ۳۸، ۶۵] در سال‌های نخست، دستاوردهای اصلی ICMI گزارش‌های ملی مربوط به تدریس ریاضی در کشورهای مختلف و تحقیقات بین‌المللی در مورد موضوع‌های مهم درباره تدریس ریاضی بود. اگرچه بنابر ادعای صریح کلاین [۵۸] ICMI تمام سطوح تدریس ریاضی را به رسمیت می‌شناخت، اما عملاً توجه اصلی به سطوح متوسطه، آموزش بعد از مدرسه^۲ / دانشگاه و آموزش معلمان معطوف بود. توجه به اولویت‌های زیر در فهرست فعالیت‌های صورت گرفته توسط ICMI بین سال‌های ۱۹۰۸ و ۱۹۱۵ مشهود است:

- وضعیت فعلی این سازمان و روش‌های تدریس ریاضی؛
- رویکردهای جدید در تدریس ریاضی؛
- نقش دقت در تدریس ریاضی در سال‌های اول متوسطه و انفجار شاخه‌های متعدد ریاضی؛
- تدریس ریاضی به دانش‌آموزان رشته‌های علوم طبیعی و علوم تجربی؛
- تعلیم ریاضی به فیزیک‌دانان دانشگاهی؛
- شهود و آزمایش در تدریس ریاضی دوره متوسطه؛
- نتایج به‌دست آمده درباره گنجاندن حساب دیفرانسیل و انتگرال در سال‌های بالاتر دوره اول متوسطه؛
- جایگاه و نقش ریاضی در آموزش‌های پیشرفته فنی – حرفه‌ای؛
- تحقیق درباره آموزش معلمان ریاضی دوره متوسطه در کشورهای مختلف.

مانند بسیاری از مؤسسات علمی دیگر ICMI نیز طی جنگ جهانی اول متحمل بحرانی عمومی شد و دوره مابین دو جنگ جهانی، زمان رکود فعالیت‌های ICMI بود [۷۹]. پس از پایان جنگ جهانی دوم،

^۱Internationale Mathematische Unterrichtskommission ^۲Tertiary

اولین مجمع عمومی IMU در سال ۱۹۵۲ در رم برگزار شد و از آن پس ICMI به زیرکمیسیون دائمی IMU تبدیل شد.

با این حال، اوضاع تغییر کرد و در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ دستورکار قدیمی که مبتنی بر تحقیقات و گزارش‌های ملی بود، برای رویارویی با وضعیت جدید، ناکافی به نظر می‌رسید. همچنین به‌منظور رسیدگی مؤثرتر به مشکلات آموزشی، لازم بود که در مورد رابطه با ریاضی‌دانان، تجدیدنظر صورت گیرد.

۶. اصلاحات برنامه درسی در قرن بیستم

۱.۶. اصلاحات در آغاز قرن بیستم. همزمان با تولد ICMI موضوعات مربوط به تولید برنامه‌های درسی، بحث داغ در بسیاری از کشورها شد. این بحث‌ها، نه تنها به مسائل مشترک برنامه درسی ریاضی در کشورهای مختلف می‌پرداخت، بلکه مسائل خاص کشورها را نیز در بر می‌گرفت. برای مثال، هم در بریتانیا و هم در ایتالیا، بحث بر سر این که آیا کتاب «اصول اقلیدس» برای تدریس هندسه مناسب است یا خیر، بسیار مناقشه‌برانگیز شده بود. در اوایل دهه ۱۸۷۰، AIGT (انجمن بهبود آموزش هندسه^۱) برای رسیدگی و به چالش کشیدن سنت استفاده از تمرین‌های تکراری برای امتحانات ورودی در دانشگاه‌های بریتانیا، تأسیس شد. در پی این مباحث، برای کتاب‌های درسی جایگزین‌های متعددی پیشنهاد شد و تغییراتی نیز در آزمون‌های ورودی صورت گرفت. اما در سال ۱۹۰۱ سخنان سخنان مدعو «انجمن پیشرفت علوم بریتانیا»^۲، جان پری^۳ به‌نوعی بر آموزش ریاضی در سراسر جهان اثر گذاشت. پری به کلیت نظام آموزش ریاضی (در آن زمان) حمله کرد که به ادعای وی ذهن کودکان، علایق آن‌ها، کاربردهای ریاضی و ارتباط و اتصال بین حوزه‌های مختلف ریاضی در آن در نظر گرفته نشده بود. ایده ریاضیات کاربردی پری که برای درس هندسه به‌کار گرفته شد، این بود که در اولین برخورد با هندسه، دانش‌آموزان باید درگیر کار کردن با خط‌کش، پرگار، نقاله، گونیا و قیچی بشوند. در انگلستان، «نهضت پری»^۴ باعث بحث‌های زیادی در مورد برنامه درسی ریاضی و نیاز به بازسازی آموزش ریاضی متوسطه شد [۵۰]. این جنبش، بسیاری از کشورهای دیگر را نیز تحت تأثیر قرار داد که از آن جمله می‌توان به ژاپن که پری مدت کوتاهی در آنجا تدریس کرده بود [۸۲]، و ایالات متحده آمریکا اشاره نمود که همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، مور در آنجا استدلال‌ها و ایده‌های پری را در رابطه با آموزش ریاضی پذیرفته بود [۶۷].

^۱ Association for the Improvement of Geometrical Teaching ^۲ British Association for the Advancement of Science

^۳ John Parry ^۴ Parry movement

در سال ۱۸۶۷/۱۸۶۸ در ایتالیا، اقتباسی از کتاب *اصول اقلیدس*^۱ به عنوان اولین کتاب درسی ایتالیا پس از اتحاد^۲، منتشر شد. مؤلفان این کتاب، ریاضی دانان مشهوری بودند که از ایده محض بودن هندسه در مقابل انتقادات ابراز شده در ایتالیا و بریتانیا، دفاع می کردند. اصلاح طلبان ایتالیایی بر اهمیت آماده سازی و انتشار راهنماهای مناسب بر اساس روش اقلیدسی تأکید داشتند. در ایتالیا، پژوهش در حوزه هندسه داشت رونق می گرفت و بسیاری از پژوهشگران مهم، در تألیف کتاب های درسی مشارکت داشتند. برای مدارس سطح پایین تر در دوره متوسطه، تدریس هندسه شهودی متداول شد که بر فعالیت های مشاهده ای و تجربی مبتنی بود.

با نزدیک شدن به پایان قرن نوزدهم، در ایالات متحده آمریکا، «کمیت ده نفره» منصوب شد تا توصیه هایی در مورد استاندارد سازی محتوا و روش های برنامه درسی مدارس آمریکا، ارائه کنند [۵۵]. زیر کمیته ریاضی، طیفی از توصیه ها را برای برنامه درسی ریاضی از دوره ابتدایی گرفته تا دبیرستان تولید کرد که می توان آن ها را در واژه های کلیدی زیر خلاصه کرد: «تقویت فعالیت های ذهنی دانش آموزان» و این که «قواعد ریاضی باید به طور استقرایی^۳ به دست آیند، نه به شکلی جزمی».

یکی از اصلاحات انجام شده در سال ۱۹۰۲ در فرانسه که به طور خاص، هدفش دبیرستان بود، اعلام نیاز نسبت به ضرورت فعالیت های ذهنی جدید بشری از جمله، ریاضی بود. اصلاح طلبان، خواستار واقع گرایی بیشتری در ریاضی مدرسه ای و نشان دادن کاربردهای زیاد تر برای علوم زیستی شدند [۴۲]. یکی از وجوه مهم این اصلاحات، گنجانیدن مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال در دوره متوسطه بود. به یاد داریم که طی این دوره، فرانسه کشوری پیشتاز در آنالیز ریاضی بود.

هم اصلاحات فرانسوی و هم نهضت پری که خواهان تأکید بر ورود درس حسابان به برنامه درسی دوره متوسطه بودند، برای نهضت اصلاحات در آلمان به رهبری کلاین، انگیزه بخش شدند. از جمله اهداف اصلی نهضت اصلاحی کلاین با عبارت کلیدی «استدلال تابعی»، انتقال برخی از مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال دانشگاهی به دوره متوسطه بود. با این حال، محتوای این اصلاحات، محدود به سال های پایانی مدرسه نبود بلکه اصلاحات از پایه های پایین تر شروع می شد و بسیاری از معلمان را درگیر می نمود [۷۷]. در حال حاضر، تأکیدی که بر مفهوم تابع به عنوان سنگ بنای مفهومی آموزش و یادگیری جبر و هندسه می شود، یادآور همان نهضت اصلاحی در آلمان است [۹۶] در آن برنامه به طور خاص، نقش هندسه تحلیلی در مطالعه توابع، خاطرنشان شده بود و در نتیجه، پیوندی بین هندسه و جبر

^۳ منظور استقرای تجربی و از جزء به کل رفتن است.

مدرسه‌ای ایجاد شد. علاوه بر این «برنامه ارلانگر کلاین^۱» که هندسه را به مثابه مطالعه خواص ثابت تحت گروهی از تبدیل‌ها توصیف می‌کرد، انگیزه‌ای برای کار عمیق‌تر روی تبدیلات هندسی در تدریس ریاضی فراهم آورد.

پس از آن که کلاین که مؤسس ICMI بود، در سال ۱۹۰۸ به عنوان اولین رئیس این کمیسیون برگزیده شد، مروج اصلاحاتی در سطح جهانی و بر اساس ایده‌های اصلاحات آلمانی شد. مقایسه بین‌المللی برنامه‌های درسی که بخشی از برنامه کاری ICMI از آغاز شکل‌گیری آن بود، در راستای ترویج پیشنهاد کلاین بود [۷۸]. اگرچه تمام کشورها در این طرح، فعالانه شرکت نکردند، باز هم بسیاری از آن‌ها، فعالیت‌های چشمگیری جهت اصلاح برنامه‌های درسی خود انجام دادند. به گفته شوبرینگ [۷۷]، این کشورها شامل اتریش، بلژیک، دانمارک، فرانسه، آلمان، بریتانیا، مجارستان، سوئد و ایالات متحده آمریکا بودند.

تحلیل محتوای برنامه‌های درسی در کشورهای مختلف، ما را با هاوسون [۵۱] هم‌صدا کرد که تا اواخر دهه ۱۹۵۰، توافق زیادی در این باره وجود داشت که منظور از جبر در برنامه درسی مدرسه‌ای، چیست. در این تعبیر مورد اتفاق از جبر مدرسه‌ای، ابتدا از حروف برای نشان دادن اعداد یا متغیرها استفاده می‌شد. سپس نوبت به ساخت فرمول‌های جبری می‌رسید^۲ و بعد از نوشتن معادلات به صورت جبری، به ترتیب، فرمول یا راه‌حلی برای معادلات خطی، معادلات درجه دوم، دستگاه معادلات خطی و خواص ریشه‌های معادله‌های درجه دوم و سوم ارائه می‌شد. در مقابل، تفاوت‌های قابل توجهی در تدریس هندسه به چشم می‌خورد که ناشی از میزان نزدیکی به اصول اقلیدس، سطح دقت، استفاده از ابزارهای جبری یا تحلیلی، تجربی یا شهودی، استفاده از تبدیل‌های هندسی و توجه به هندسه فضایی بود. با وجود این، در اغلب کشورها این اتفاق نظر وجود داشت که در تدریس هندسه، توجه به تعدادی از قضیه‌های کلاسیک هندسی، ضروری است. این قضیه‌ها شامل قضیه فیثاغورس، قضیه تالس یا تقاطع^۳، قضیه‌های مربوط به دایره و هم‌نهشتی‌ها و خواص تشابه بود.

۲.۶. ریاضیات مدرن / جدید. تصور عمومی این است که دومین اصلاحات بین‌المللی در دهه ۱۹۶۰ را جمعی از ریاضی‌دانان تحت نام بورباکی در سال ۱۹۳۲ شکل دادند. علاقه گروه بورباکی به آموزش ریاضی در دهه ۱۹۵۰ آغاز شد، یعنی زمانی که برخی از اعضای آن به کمیسیون جهانی CIEAEM

^۲ منظور نوشتن معادلات به صورت جبری است.

^۱Klein's Erlanger Program ^۳Intercept theorem

(کمیسیون جهانی مطالعه بهبود تدریس ریاضی^۱) پیوستند که توسط کالب گاتنگو^۲ و با هدف مطالعه و بهبود تدریس ریاضی تأسیس شده بود [۳۰]. این کمیسیون، متشکل از افرادی با پیشینه‌های مختلف بود (ریاضی‌دانان، متخصصان تعلیم و تربیت، روان‌شناس‌ها، معرفت‌شناسان و معلمان متوسطه). اقدامات اصلی CIEAEM در سال‌های اولیه را می‌توان به این صورت خلاصه کرد: مردم‌سالاری کردن ریاضی^۳، روش تدریس فعال^۴، و مشارکت واقعی معلمان. از بین ریاضی‌دانان این گروه پژوهشی، می‌توان به هواداران بورباکی^۵ نظیر ژان دیودونه^۶، گوستاو شوکه^۷، و آندره لیکنروویچ^۸ اشاره کرد که هر سه، در کتابی که پیازه^۹ و همکاران [۷۳] نوشتند نیز نقش داشتند که یکی از دو کتاب توسط CIEAEM ویرایش شده بود. در آن کتاب، مؤلفان تصریح کردند که ریاضیات جدید، فرصت‌هایی در رابطه با ایجاد اصلاحات در تدریس ریاضی ایجاد کرده است و دیودونه ادعا کرد که جوهره ریاضی، استدلال کردن با نمادهای انتزاعی است.

نهضت «ریاضی جدید» که در اروپا پدید آمد، با جنبشی که به‌طور موازی در ایالات متحده آمریکا آغاز شد، ریشه‌های مشترک داشت [۶۶]. نهضت ریاضی جدید در اوایل دهه ۱۹۵۰، توسط مکس بیرمن^{۱۰} و با تأسیس کمیته ریاضی مدرسه‌ای در دانشگاه ایلینویز^{۱۱} (UICSM) آغاز شد.

بلافاصله پس از پرتاب اسپاتنیک^{۱۲} در سال ۱۹۵۷، انجمن ریاضی آمریکا، گروه مطالعاتی ریاضی مدرسه‌ای^{۱۳} (MSG) را تشکیل داد تا برنامه درسی جدیدی برای دبیرستان تدوین کند. در سال ۱۹۵۸، ادوارد جی. بگل^{۱۴} که آن زمان در دانشگاه ییل بود، به مدیریت این گروه منصوب شد [۴۳، ۱۰۰]. در بین تعداد بسیار زیاد برنامه‌های درسی که طی دوره ریاضی جدید در ایالات متحده آمریکا پیشنهاد شدند، شاید MSG اثرگذارترین آن‌ها بود. تجارب این گروه و گروه‌های متعدد دیگری که برای تولید برنامه درسی ریاضی تقریباً در همان زمان شکل گرفته بودند، نشان می‌داد که همگی از علم روان‌شناسی بهره برده‌اند [۵۵].

^۵ اعضای گروه بورباکی آن چنان نسبت به آن تعصب داشتند که آن را به‌مثابه یک نحله ایدئولوژیک یا یک حزب سیاسی می‌دانستند و به این دلیل، به هوادارانش، Bourbakists می‌گفتند که در میان آن‌ها، این سه از همه معروف‌تر، یعنی متعصب‌تر یا وفادارتر به گروه بودند.

^{۱۲} اسپاتنیک، یک مجموعه سه‌تایی از ماهواره‌ها بود که اولین ماهواره در ۴ اکتبر ۱۹۵۷ توسط اتحاد جماهیر شوروی سابق، از پایگاه فضایی بایکونور به مدار زمین پرتاب شد. پرتاب اسپاتنیک به مدار زمین، آغازگر عصر فضا و مسابقه فضایی بود. اسپاتنیک معادل روسی کلمه مسافر است.

^۱Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

^۲Caleb Gattengo ^۳ Democratization of Mathematics ^۴Active Pedagogy ^۵Jean Dieudonné

^۶Gustave Choquet ^۷André Lichnerowicz ^۸Piaget ^۹Max Beberman ^{۱۰}Illinois Committee

on School Mathematics ^{۱۱}School Mathematics Study Group ^{۱۲}Edward G. Begle

تمام این جریان‌های مختلف اصلاحات مربوط به ریاضیات مدرن یا جدید، در سال ۱۹۵۹ در یک کنفرانس جهانی که در رویامونت^۱ در نزدیکی پاریس برگزار شد، گرد هم آمدند. این کنفرانس توسط OEEC (سازمان همکاری اقتصادی اروپا)^۲ سازماندهی شد و مارشال استون^۳ رئیس وقت ICMI ریاست آن را به عهده داشت. اعضای CIEAEM خصوصاً دیودونه که در رابطه با گذار از مدارس متوسطه به دانشگاه سخنرانی کرد، نقش مهمی ایفا کردند. دیودونه معتقد بود که شروع آموزش هندسه (در دوره متوسطه) باید از اعداد حقیقی باشد. سپس با ایجاد قواعدی برای انجام عملیات روی مجموعه‌ای از اشیاء تعریف نشده^۴ پیش می‌رود تا یک ساختار فضای برداری ایجاد شود. پس از آن، روابط طولی به کمک ضرب اسکالر، معرفی می‌شوند. تمام هندسه اقلیدسی را می‌توان در سه درس به روش اصل موضوعی، ارائه کرد. در این شیوه ارائه هندسه، ویژگی‌های مثلث‌ها نقشی ندارند (OEEC، ۱۹۶۱).

اشاره کردیم که در همان سال یعنی ۱۹۵۹، کنفرانس وودز هول^۵ با هدف کلی‌تر بهبود آموزش علوم، در ایالات متحده آمریکا برگزار شد و در آن دانشمندان، ریاضی‌دانان، روان‌شناسان و بقیه گرد هم آمدند [۱۷].

اگرچه هدف کنفرانس رویامونت، تحقق اصلاحات برنامه درسی ریاضی در اروپا بود، چون ایالات متحده آمریکا و کانادا هم برای شرکت در آن دعوت شده بودند، می‌شود استدلال کرد که اصلاحات بین‌المللی فراتر از کشورهای اروپایی، مورد نظر بود. نتیجه عملی این کنفرانس این بود که در سال ۱۹۶۲ در دوبروونیک^۶ یوگسلاوی، گروهی^۷ از خبرگان جمع شدند تا برنامه پیشرفته‌ای برای تدریس ریاضی در دوره متوسطه، تولید کنند. در این کمیسیون، یک برنامه درسی هندسه برای دانش‌آموزان گروه سنی ۱۵-۱۸ تولید شد. در آن برنامه، صفحه مختصات دکارتی به عنوان یک فضای برداری دوجبری با ضرب اسکالر، تعریف شد. همسو با پیشنهادهای شوکه^۸ (OEEC، ۱۹۶۲)، قرار شد که این مفاهیم از طریق اصول موضوع معرفی شوند. با وجود این، برای کودکان ۱۱ تا ۱۵ ساله، در راستای پیشنهادهای ریاضی‌دان بلژیکی، پل لیووا^۹، رویکرد شهودی‌تری برای تدریس هندسه توصیه شد. در برنامه‌ای که به جبر مربوط می‌شد، محتوا شامل مجموعه‌ها، توابع و کاربردها، مقدمه‌ای بر اعداد حقیقی، آشنایی با نظریه اعداد، ترکیبیات، گروه‌ها و ساختارها، عملگرهای خطی و ماتریس‌ها بود که برخی از این‌ها، به مباحث استاندارد در بسیاری از برنامه‌های درسی تبدیل شده است. مضمون اصلی هماهنگ‌کننده در این برنامه‌ها، نظریه

^۷ در قالب یک کمیسیون

^۱Royaumont ^۲Organisation for European Economic Co- operation ^۳Marshall Stone ^۴A set of undefined objects ^۵Woods Hole Conference ^۶Dubrovnic ^۸Choquet ^۹Paul Libois

مجموعه‌ها بود که به‌شدت، زبان به‌کار رفته در کتاب‌های درسی را که برای ریاضی جدید نوشته شدند، تحت تأثیر قرار داد.

هم در اروپا و هم در ایالات متحده آمریکا، مسیر نوآوری از دانشگاه آغاز می‌شد و بعد، به دوره متوسطه و سپس ابتدایی، پس می‌رفت. نظریه مجموعه‌ها در تمام سطوح آموزشی حضور داشت و برای مثال، جنبه‌های شمارشی و ترتیبی^۱ اعداد طبیعی از همان پایه‌های اول دوره ابتدایی، معرفی شدند. در بسیاری از کشورها، برنامه‌های درسی ریاضیات جدید به‌طور رسمی، به تصویب رسیدند. نسخه تصویب شده این برنامه‌ها در فرانسه و بلژیک کاملاً در راستای دیدگاه‌های گروه بورباکی بود.

اگرچه نهضت‌های مربوط به ریاضی مدرن/جدید، خیلی زود موجب برانگیختن نقدهای قوی شد (برای مثال [۱، ۵۹، ۹۳])، همین مباحثه‌های فراوان در مورد تغییرات ریاضیات مدرسه‌ای، سکوی پرتابی برای انجام اصلاحات منسجم‌تر بعدی در دهه ۱۹۶۰ میلادی شد. در بریتانیا، «پروژه ریاضی مدرسه»^۲ در سال ۱۹۶۱ آغاز شد و تلاش‌های ادیت بیگز^۳ و «پروژه نافیلد»^۴، باعث محبوبیت استفاده از مواد ملموس و روش‌های آزمایشگاهی در برنامه‌های ریاضی مدارس دوره ابتدایی در بریتانیا شدند. در سال ۱۹۶۷، «کمیته اسکاندیناوی برای نوسازی ریاضیات مدرسه‌ای»^۵ (شامل کشورهای دانمارک، فنلاند، نروژ، و سوئد) با الهام از ریاضی جدید، یک ریزمواد^۶ جدید تهیه کردند. یکی از شناخته‌شده‌ترین اعضای این کمیته، بنت کریستیانسن^۷ دانمارکی بود. در سال ۱۹۶۸، «مرکز آموزش ریاضی»^۸ کارلسروهه توسط هانس گئورگ اشتاینر^۹ و هاینز کانل^{۱۰}، در شهر کارلسروهه^{۱۱} در آلمان تأسیس شد. به‌دنبال آن، در سال ۱۹۷۳، «مؤسسه آموزش ریاضی» (IDM)^{۱۲} در بیله‌فلد توسط اشتاینر، مایکل اوت^{۱۳} و هاینریش بائرسفلد^{۱۴} و با این هدف تأسیس شد که تدریس مدرسه‌ای را با پژوهش نظری ترکیب کند. در سال ۱۹۶۹ در فرانسه، اولین سری «مؤسسات پژوهشی تدریس ریاضی» (IREM)^{۱۵} در لیون، پاریس و استراسبورگ، تأسیس شدند. در اوایل دهه ۱۹۷۰، «گروه مشارکتی برای پژوهش در آموزش ریاضی»^{۱۶}، در مرکز آموزش ریاضی دانشگاه ساوث همپتون با همکاری جفری هاوسون و بریان توایتس^{۱۷} تشکیل شد. در سال ۱۹۷۱، هانس فرودنتال^{۱۸} «مؤسسه توسعه تدریس ریاضی (IOWO)»^{۱۹} را بنا نهاد. ابتکار^{۲۰} Syllabus (به آن، سرفصل دروس نیز گفته می‌شود).

^۱Cardinal and ordinal aspects of natural numbers ^۲School Mathematics Project: SMG ^۳Edith Biggs ^۴Nuffield Project ^۵Nordic Committee for the Modernization of School Mathematics ^۶Bent Christiansen ^۷Zentrum für Didaktik der Mathematik (Centre for the Didactics of Mathematics) ^۸Hans Georg Steiner ^۹Heinz Kunle ^{۱۰}Karlsruhe ^{۱۱}Institut für Didaktik der Mathematik ^{۱۲}Michael Otte ^{۱۳}Heinrich Bauersfeld ^{۱۴}Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques: IREM ^{۱۵}Collaborative Group for Research in Mathematics Education ^{۱۶}Bryan Thwaites ^{۱۷}Hans Freudenthal ^{۱۸}Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs: IOWO (Institute for the Development of Mathematics Teaching)

این عمل، ریشه در «گروه کاری ریاضی»^۱ داشت که در سال ۱۹۳۶، توسط تاتیانا ارنفست-آفانسووا^۲ تأسیس شده بود. فرودنتال در نشست‌های این گروه شرکت می‌کرد و در پی آن، اولین گام در ایجاد نهضت «ریاضیات واقعیت-مدار واقع‌گرا» برداشته شد که در آغاز، رهبری آن را فرودنتال بر عهده داشت [۸۶]. مباحثی جدید مانند آن‌هایی که هواداران گروه بورباکی می‌پسندیدند، مثل بردارها، تبدیل‌ها، ماتریس‌ها و نظریه مجموعه‌ها، در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در کشورهای متعدد گنجانده شد و تأکید بیشتر بر احتمال و آمار، پیدا کرد. دهه ۱۹۷۰، سال‌های باروری پروژه‌های زیادی بود و ارائه ۱۵ پروژه در گزارش سومین کنگره جهانی آموزش ریاضی^۳ (ICMI - ۳) که در سال ۱۹۷۶ در کارلسروهه آلمان برگزار شد، گواه این ادعاست. این موارد و تغییرات دیگر در حوزه آموزش ریاضی، در شماره ویژه مجله مطالعات آموزشی در ریاضی^۴ با عنوان «تغییرات در حوزه آموزش ریاضی از اواخر دهه ۱۹۵۰- ایده‌ها و آگاهی: گزارش ICMI^۵» (۱۹۷۸)، بازگو شده است.

۳.۶. اصلاحات خزنده^۶. علاوه بر این نوآوری‌های قوی در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، اصلاحات خزنده‌ای نیز صورت گرفت که هم بر محتوای برنامه و هم بر روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای، اثرگذار بود. تحقیقات تجربی روان‌شناسان، ابزارهای کمک آموزشی جدید و نهضت‌های اصلاحی اوایل قرن بیستم، علاقه‌ای در بین ریاضی‌دانان نسبت به آزمایشگاه‌های ریاضی پدید آورد [۱۵] که در آن‌ها، دانش‌آموزان به شکلی فعال، از ابزارهای ترسیمی، ماشین‌های محاسبه و دست‌ورزی‌ها^۷، استفاده می‌کردند. در آغاز قرن بیستم، یک ریاضی‌دان آلمانی به نام پیتر تروتلین^۸ بیش از ۲۰۰ الگوی کمکی برای تدریس هندسه تدوین کرد [۹۷]. در اواسط قرن بیستم، این الگوها توسط سازندگان و تولیدکنندگان مشهوری نظیر لودویگ بریل^۹ (دارمشتات^{۱۰}) و مارتین شیلینگ^{۱۱} (در هاله و بعد لایپزیک^{۱۲}) تولید و توزیع شدند و به شکل گسترده‌ای در دانشگاه‌ها و دانشکده‌های فنی آلمان مورد استفاده قرار گرفتند.

پس از جنگ جهانی دوم، استفاده از مواد ملموس در بسیاری از زمینه‌ها، از سر گرفته شد. در سال ۱۹۴۵، سالنامه «شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM)^{۱۳}، به ابزارهای اندازه‌گیری و ترسیمی و ایجاد الگوهای فیزیکی سه‌بُعدی، اختصاص داده شد. یکی از مروجان فعال این حوزه، گاتگنو^{۱۴} بود که فعالیت‌های اولیه CIEAEM را بر استفاده از مواد ملموس متمرکز کرده بود [۴۱]. استفاده از مواد

^۱Mathematics Working Group ^۲Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa ^۳International Congress on Mathematics Education

^۴Educational Studies in Mathematics ^۵Change in Mathematics Education

Since the Late 1950s—Ideas and Realisation: An ICMI ^۶Creeping Reforms ^۷Manipulatives

^۸Peter Treutlein ^۹Ludwig Brill ^{۱۰}Darmstadt ^{۱۱}Martin Shilling ^{۱۲}In Halle and then Leipzig

^{۱۳}National Council of Teachers of Mathematics: NCTM ^{۱۴}Gattegno

ملموس با یک تقدم و تأخر، تأثیرات آموزشی مهمی بر کارهای معلمی با نام اما کاستلنوا^۱ داشت. همچنین، گاتگنو و زلتان دیینز^۲، ریاضی‌دان و روان‌شناس، به شدت از استفاده از دست‌ورزی‌ها نظیر میله‌های کوپیزنر^۳ و بلوک‌های منطقی^۴ در فعالیت‌های کلاسی، حمایت کردند. حضور دیینز در ICME-۱ در لیون فرانسه در سال ۱۹۶۹، گواهی بر علاقه ICMI به استفاده از مواد ملموس بود.

روان‌شناسان دیگری مثل ژان پیاژه، بر این نهضت اثرگذار بودند. ویلمور^۵ [۹۹] و پرایس^۶ [۷۵] به اهمیت این امر در تغییر طرز تفکر در مورد تدریس و یادگیری ریاضی اشاره کردند. لیبوا^۷ از این مواد در اکول دکرولی^۸ در بروکسل استفاده کرد و در بریتانیا، «انجمن معلمان ریاضی^۹» (ATM) به شدت حامی ابتکارات گاتگنو در ارتقای استفاده از مواد ملموس بود. این مواد، به ابزاری برای شهود و آزمایش در کلاس درس تبدیل شدند و محیط مدرسه را برای پذیرفتن نوآوری‌های بعدی در حوزه فناوری ریاضی، آماده کردند [۷۶]. گاتگنو، مؤلف نرم‌افزارهای نوآورانه‌ای برای آموزش مفاهیم مقدماتی شمارش و فیلم‌هایی برای آموزش هندسه بود که در آن‌ها، برخی از مضامین فیلم‌های ژان نیکوله^{۱۰}، بسط داده شده بود [۷۴]. در گزارش «اولین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی» (ICME-۱) که در سال ۱۹۶۹ برگزار شد، شاهد اشاره به بازی‌ها، کاربرگ‌ها، فیلم‌ها، اسلایدهای آموزشی و مواد ملموس برای استفاده در کلاس درس هستیم. موضوع رابطه بین استفاده از این مواد آموزشی با روش‌شناسی جدید فعالیت‌های کلاسی، از جمله کارگروهی و بحث کلاسی، نیز مطرح شد. در آن زمان، رایانه‌ها در حال ورود به مباحث مربوط به آموزش ریاضی بودند. اشاره صریح به نقش رایانه‌ها در ریاضی مدرسه‌ای و به‌ویژه در مورد ریاضی کاربردی، از سوی بریایان تویتس^{۱۱}، یکی از سخنرانان عمومی ICME-۱ صورت گرفت و فردریک پاپی^{۱۲} نیز راجع به «ریزرایانه‌ها» صحبت کرد [۷۲]. علاقه اولیه به جنبه‌های الگوریتمی یا ریاضیات گسسته، جایگاهی برای برنامه‌نویسی به‌عنوان ابزار رسیدن به دقت بیشتر، ایجاد کرد [۴۰].

در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰، توجه به محیط‌های آموزشی یا جهان‌های خُرد معطوف شد که نمونه آن، برنامه «هندسه لاک‌پشت^{۱۳}» بود که توسط سیمور پاپرت^{۱۴}، در ICME-۲ ارائه شد [۷۱، ۷۰، ۴۹]. برای Emma Castelnuovo جدیدترین جایزه «کمیسون بین‌المللی تدریس ریاضی» به‌مناسبت بزرگداشت این معلم به نام او، تأسیس شد.

^{۱۳} «هندسه لاک‌پشتی» (Turtle Geometry) مبتنی بر زبان برنامه‌نویسی لوگو (Logo Programming Language) است. در این هندسه، از یک نشانگر که در این برنامه یک لاک‌پشت است، روی یک صفحه مختصات دکارتی استفاده می‌شود. نکته مهم در این نرم‌افزار این است که حرکت لاک‌پشت برداری است، یعنی جهت‌دار است و فاصله، از نقطه آغاز حرکت در نظر گرفته می‌شود.

^۱Zoltan Dienes ^۲Cuisenaire rods ^۳Logic blocks ^۴Willmore ^۵Price ^۶Libois ^۷Ecole Decroly

^۸Association of Mathematics Teacher ^۹Jean Nicolet ^{۱۰}Bryan Thwaites ^{۱۱}Frédérique Papy

^{۱۲}Seymour Papert

تدریس ریاضی نرم‌افزار ارائه می‌شد از جمله نرم‌افزارهای پیشگام در هندسه پویا که به احیای بخش‌هایی از ریاضی مانند اثبات‌ها و هندسه اقلیدسی کمک کردند. فناوری به‌مثابه ابزاری برای تغییر برنامه‌های درسی و عمل تدریس در نظر گرفته شد و فعالیت‌های ریاضی، هم به‌کمک الگوسازی یا پردازش داده‌ها در آمار، و هم توسط آزمایش کردن و تصویرسازی یا تجسم، می‌توانست تقویت شود. پژوهش‌هایی در مورد نقش فناوری و چگونگی به‌کارگیری آن برای تدریس هندسه طراحی و اجرا شد. در این پژوهش‌ها، ابتدا دیدگاه ساخت‌وسازگرایی به مفهوم عام آن، مورد استفاده قرار گرفت. سپس دیدگاه‌های نظری دیگر و به‌طور خاص، دیدگاه تعاملات اجتماعی^۱ که یادگیری طی آن‌ها صورت می‌گرفت، نیز مورد توجه قرار گرفت [۶۱]. استفاده از «نرم‌افزار هندسه پویا»^۲ به‌عنوان یک میانجی بین ساخت و سازگرایی و سطوح نظری دیگر، مورد بررسی قرار گرفت و بر نیاز به ساختن^۳ برنامه درسی دقیق، تأکید شد [۱۴].

افزایش قابلیت دسترسی به ماشین حساب‌های معمولی، ماشین حساب‌های علمی و ماشین حساب‌های گرافیکی، موجب شکل‌گیری رویکردهای تجربی جالب در امر تدریس شد. از یک سو، توجه به جنبه‌های الگوریتمی معطوف شده بود [۲۷] و از سوی دیگر، چگونگی پرداختن به بعضی مباحث، مانند بحث تابع، در مدارس متوسطه‌ای که از فناوری جدید استفاده می‌کردند، موضوع تحقیقات قرار گرفت [۴۵]. البته پیش از این، در ICME-۲ که در اکسپتر برگزار شد، یک گروه کاری به‌طور صریح، به بررسی نقش فناوری در تدریس ریاضی پرداخته بودند. در ICME-۳ در کارلسروهه، پرداختن به فناوری با ارائه پنج فعالیت رسمی، انجام شد. مقاله مروری^۴ ارائه‌شده توسط فی [۳۱] در ICME-۶ در بوداپست، به تشریح پیشرفت‌ها در استفاده از فناوری طی این دوره پیشگامانه اختصاص دارد. اولین شماره از مجموعه مطالعات ICMI که در سال ۱۹۸۴ انجام شد، به «رایانه‌ها و نظریه اطلاعات»^۵ اختصاص داشت [۲۱].

۷. از آموزش و ریاضی، تا آموزش ریاضی

۱.۷. ظهور رویکردهای جدید در آموزش ریاضی. در دهه ۱۹۵۰، هم پژوهش در ریاضی تغییر جهت داد، هم نقش ریاضی در جامعه متحول شد. پیشرفت در فناوری و ارتباط سیاست با رقابت‌های فضایی^۶ و پرده آهنین^۷، باعث ارتقای استفاده از ریاضی شد. دولت‌ها، توانمندی در آموزش ریاضی را

^۶ اشاره به پرواز اسپاتنیک در سال ۱۹۵۷ توسط شوروی سابق و شروع رقابت‌های فضایی بین دو بلوک شرق و غرب دارد.
^۷ Iron Curtain «پرده آهنین»، تمثیلی برای تقسیم اروپا به اروپای غربی (متحدان آمریکا) و اروپای شرقی (متحدان شوروی سابق) بود که بعد از پایان جنگ جهانی دوم و شروع جنگ سرد، اتفاق افتاد و به‌تدریج با فرو ریختن دیوار برلین در سال ۱۹۸۹، این پرده نازک‌تر شد تا آن که در سال ۱۹۹۱، به تاریخ پیوست.

به چشم قدرت جهانی می‌نگریستند. در این میان، از مدارس خواسته شد تا آماده رویارویی با جمعیت به سرعت رو به افزایش و مشکلات آموزشی ناشی از آن شوند. با توجه به پیچیدگی مسائل آموزشی در حال بروز، معلوم شد که مطالعه صرف و مقایسه برنامه‌های آموزشی و درسی که جزو فعالیت‌های اصلی ICMI به شمار می‌آمد، برای مقابله با این وضعیت، کافی نیست. ضروری بود تا رویکردهای نوین به آموزش ریاضی که مناسب شرایط اجتماعی و ریاضی جدید باشند، مورد توجه قرار گیرد [۴۰]. سازمان‌های تازه تأسیس نظیر CIEAEM و گروه‌های برنامه‌ریزی درسی در ایالات متحده آمریکا، بر همکاری بین ریاضی‌دانان، روان‌شناسان، آموزشگران معلمان ریاضی و معلمان ریاضی تأکید داشتند. بدین ترتیب، نیاز به تخصص حرفه‌ای جدیدی حس می‌شد که کریگوسکا^۱ [۶۰]، جنبه اصلی آن را «پژوهش پیشگام»^۲ نامید؛ حوزه‌ای پژوهشی که آموزش ریاضی را به عنوان یک شاخه علمی مستقل، به رسمیت شناخت. فرودنتال [۳۳] معتقد بود که تاریخ ثابت کرده است مسائل و مشکلات را نباید صرفاً ناشی از جنبه سازماندهی دانست. به همین دلیل، با پایان گرفتن دهه ۱۹۶۰، علایق پژوهشی از مباحث مربوط به برنامه‌های درسی، به سمت مطالعات گسترده‌تر راجع به ابعاد مختلف برنامه‌های درسی، معطوف شد. در نتیجه روندی به سمت گسترش قلمرو مداخله در برنامه‌های درسی آغاز شد که برای مثال می‌توان به تولید برنامه درسی برای دوره‌های پیش‌دبستانی، فنی-حرفه‌ای و آموزش بزرگسالان اشاره کرد. همچنین، ضرورت انجام تحقیقات دقیق‌تر علمی در حوزه آموزش ریاضی، اعلام شد. یک مورد جدی مربوط به اهمیت پژوهش تجربی را بگل در اولین ICME که در سال ۱۹۶۹ برگزار شد، مطرح کرد. بگل که در آن زمان استاد دانشگاه استنفورد بود، در سخنرانی عمومی خود، مقتدرانه از اهمیت روش تحقیق تجربی^۳ سخن گفت. به گفته بگل [۴]:

«... در تمام بحث‌هایمان، از جنبه‌های یقینی (حقایق^۴) غفلت کرده‌ایم. ... اغلب پاسخ‌هایی که ارائه کرده‌ایم، توجیه تجربی اندکی دارند. تردید دارم که بسیاری از پاسخ‌هایی که برای پرسش‌هایمان در رابطه با آموزش ریاضی ارائه کرده‌ایم، کاملاً غلط باشند. بلکه معتقدم آن پاسخ‌ها معمولاً بیش از حد ساده‌انگارانه بوده‌اند و رفتارها و دستاوردهای ریاضی دانش‌آموزان واقعی بسیار پیچیده‌تر از آن است که این پاسخ‌ها به ما باوراندند (ص. ۲۳۳).»

در ایالات متحده آمریکا، علاقه‌مندی نسبت به پژوهش‌های تجربی در حوزه آموزش ریاضی در حال

^۳ روش‌های تجربی (empirical) در علوم تربیتی، همیشه اهمیت داشته و دارند. با این حال، جامعه ریاضی ایران، با خطر استفاده از نام این روش در تحقیقات به اصطلاح «آموزش ریاضی» مواجه است که بدون رعایت دقت لازم و نظارت جدی بر چگونگی انجام آن‌ها، می‌رود تا از آموزش ریاضی، چیز دیگری بسازد!

گسترش بود و تا اواسط دهه ۱۹۶۰ چندین کنفرانس در رابطه با اولویت‌های پژوهشی آموزش ریاضی برگزار شد.

در سال ۱۹۶۸ نیز، در درون «جامعه آمریکایی تحقیقات آموزشی»^۱، یک «گروه با علاقه ویژه»^۲ پژوهشی در رابطه با آموزش ریاضی، شکل گرفت [۵۵]. با وجود این که پژوهش‌های تجربی مورد اقبال بسیاری از کشورهای دیگر نبود، اما افزایش تعداد مجله‌ها و مراکز پژوهشی بین‌المللی، این دیدگاه را دستخوش دگرگونی کرد. فر و گلیمان^۳ [۲۹] در کتاب روندهای جدید در آموزش ریاضی^۴ که توسط یونسکو منتشر شد، این موضوع را عنوان کردند:

«هدف اصلی نهضت اصلاح در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای در دو دهه اخیر، بهبود عملکرد آموزشی بود. هرچند این نهضت، برای افزایش تعداد یا کیفیت مطالعات پژوهشی در حوزه آموزش ریاضی طراحی نشده بود، به میزان زیادی، افراد را به انجام چنین پژوهش‌هایی ترغیب کرد؛ یکی به این دلیل که از مصلحان برنامه‌های درسی خواسته شده بود تا نشان دهند که کارشان می‌تواند باعث ایجاد تغییراتی در کلاس درس شود؛ دوم به این دلیل که این مصلحان تشخیص داده‌اند که تغییرات آتی در صورتی می‌تواند بهتر مدیریت شود که درک بیشتری از تدریس و یادگیری ریاضی داشته باشیم؛ و سوم به این سبب که هیجان برنامه درسی، بسیاری از پژوهشگران جدید را جذب مطالعه مسائل و مشکلات موجود در آموزش ریاضی کرده است (ص ۱۲۷).»

همچنین تمایل فزاینده‌ای نسبت به پذیرش متخصصان آموزش ریاضی در جامعه دانشگاهی در حال شکل‌گیری بود. در «قطع‌نامه اولین کنگره جهانی آموزش ریاضی»^۵ (۱۹۶۹) این امر مفروض گرفته شده بود که آموزش ریاضی خودش در حال تبدیل شدن به یک علم است و مسائل خاص خود را دارد که با محتوای ریاضی و آموزش [پداگوژی] مربوط‌اند. در این کنگره ICME درخواست شده بود که جایگاهی برای علم جدید آموزش ریاضی در مؤسسه‌های پژوهشی یا دانشگاه‌هایی که دانشکده‌های ریاضی آن‌ها مناسب این رشته هستند، در نظر گرفته شود.

این بحث درباره هویت مستقل آموزش ریاضی یا آموزگاری ریاضی^۶ - اصطلاحی که در بعضی کشورها، بیشتر مورد پسند است - در ICME-۲ که در سال ۱۹۷۲ برگزار شد، ادامه یافت. برای مثال،

^۲ SIG : Special Interest Group در انجمن مطالعات برنامه درسی ایران نیز، چندین «سیگ» یا «گروپ» با همین هدف، ایجاد شده است.

^۱American Educational Research Association: AERA ^۳Glaymann ^۴New Trends in Mathematics Teaching ^۵Resolutions of the First International Congress on Mathematical Education ^۶Didactics of Mathematics

آنا زوفیا کریگوسکا^۱، در «گروه کاری تربیت معلم برای آموزش معلمان آینده^۲ دوره متوسطه» که مسئولیت هماهنگی آن را اشتاینر^۳ به عهده داشت، چهار جنبه از آموزش ریاضی را شناسایی کرد: تحلیل ایده‌های ریاضی، آموزشی، فرهنگی و محیطی مناسب؛ مقدمه‌ای بر پژوهش؛ ماهیت و وضعیت کودک؛ و تجربه عملی [۴۹]. بنت کریستنسن^۴ [۲۰] بین آموزش ریاضی و آموزگاری ریاضی، تمایز قائل شد. از نظر وی، آموزگاری ریاضی فرآیندی تعاملی بین معلمان و دانش‌آموزان کلاس است، در حالی که آموزش ریاضی مطالعه خود این فرآیند است. کریستنسن آموزش ریاضی را یک شأنت علمی جدیدی می‌داند و اشاره نمود که متخصصان این رشته، کسانی که آن‌ها را «آموزشگران ریاضی» می‌نامند، باید به ارائه درس‌های آن بپردازند و نه آموزشگران عمومی.

۲.۷. ابتکارات تازه در آموزش ریاضی. بازنگری در مورد نقش و روش‌های آموزش ریاضی که در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ صورت گرفت، بحث‌های فراگیری را به دنبال داشت که شامل بازنگری در مورد رابطه بین ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی، و برنامه‌ای برای تدوین روش‌های جدید ارتباط بین خودآموزشگران ریاضی بود. دو رئیس ICMI با انرژی خاصی با این مسائل روبه‌رو شدند - هاینریش بنکه^۵ و فرودنتال [۳۹]. بنکه پس از تولد دوباره ICMI در دهه ۱۹۵۰، کوشید تا روابط مدیریتی با ریاضی‌دانان، از جمله مسائل مالی را حل و فصل کند و به دنبال اهداف و حوزه اختیارات جدید برای ICMI بود. اما این کافی نبود: گسست فرهنگی با ریاضی‌دانان ضروری بود و این کار توسط فرودنتال از دو جنبه که مشخصه وابستگی به جامعه ریاضی شناخته می‌شدند، انجام شد: مجله‌ها و کنفرانس‌های ریاضی. فرودنتال هر دو ابتکار را مستقل از IMU (اتحادیه بین‌المللی ریاضی) انجام داد.

مجله تدریس ریاضی که ارگان رسمی ICMI از زمان تأسیس آن بود، در حال تبدیل شدن به مجله‌ای ریاضی بود که در آن، فضایی اندک به مسائل آموزشی اختصاص داشت. از سوی دیگر، مجله‌های حرفه‌ای تدریس ریاضی، محلی بودند و با توجه به مأموریت و چشم‌اندازشان، برای چاپ مقاله‌های پژوهشی درباره آموزش، مناسب نبودند. به همین دلیل در سال ۱۹۶۸، فرودنتال مجله مطالعات آموزشی در ریاضی^۶ (ESM) را تأسیس کرد [۳۶]. به گفته هانا [۴۶] این ابتکار، به گروه‌های دیگر هم انگیزه داد تا مجله‌های پژوهشی در حوزه آموزش ریاضی منتشر کنند. برای مثال

^۲ منظور از «معلمان آینده» prospective همان teachers دانشجو - معلمان هستند که معمولاً دوره‌هایی را که می‌گذرانند، به «دوره‌های قبل از خدمت» معروف‌اند. اگر چه با سیاست‌گذاری‌های جدیدی که از طرف دانشگاه فرهنگیان در حال تدوین است، همه این نام‌ها و اصطلاحات در ایران، ممکن است تغییر یابند.

(Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) (اکنون مجله بین‌المللی آموزش ریاضی)^۱) ابتدا در سال ۱۹۶۹ منتشر شد (اولین سردبیران آن امانوئل روهل^۲ و اشتاینر بودند) و مجله پژوهش در آموزش ریاضی^۳ (JRME) از سال ۱۹۷۰ منتشر شد (اولین سردبیر آن دیوید سی. جانسون^۴ بود). ESM و مجله‌های معاصر به ابزارهای مهمی بدل شدند که پرسش‌ها، روش‌ها و پژوهش در رشته «آموزش ریاضی» از طریق آن‌ها توسعه یافت، گزارش شد و مورد بحث قرار گرفت.

روش‌های جدید رسیدن به سطح جهانی نیز به توسعه آموزش ریاضی سرعت بخشیدند. ICMi در آغاز شکل‌گیری‌اش، از کنفرانس‌های مهمی حمایت کرد که کنفرانس میلان (۱۹۱۱) و کنفرانس پاریس (۱۹۱۴) را می‌توان مثال زد. اما به دلیل برگزار نشدن کنفرانس‌ها طی جنگ جهانی اول و پس از آن، تنها مکان برنامه‌ریزی شده برای طرح مسائل مربوط به آموزش ریاضی، بخش‌هایی در «کنگره جهانی ریاضی‌دانان» بود که هر چهار سال یک بار برگزار می‌شود. در این کنگره‌ها، بخش‌هایی به آموزش ریاضی اختصاص داده می‌شد که معمولاً فلسفه ریاضی، تاریخ و منطق را نیز در بر می‌گرفت. سازماندهی این موضوعات شکل‌های مختلفی داشت، ولی با هم ارائه شدن یا تفکیک آن‌ها، بستگی به نظر کمیته‌های علمی-اجرایی داشت. در این کنگره‌ها، هیچ‌وقت یک سخنرانی عمومی به آموزش ریاضی اختصاص نیافت. در دهه ۱۹۶۰، نهضت «ریاضیات جدید» باعث تشکیل نشست‌های مهمی در ایالات متحده آمریکا و اروپا شد که تمرکزشان بر پژوهش در آموزش ریاضی بود. ICMi در سازماندهی برخی از این کنفرانس‌ها، با یونسکو همکاری داشت. گاه‌گاهی، طیف مخاطبان گسترش می‌یافت و معلمان را نیز در بر می‌گرفت. فرودنتال، موفق به تثبیت سنت برگزاری کنگره جهانی آموزش ریاضی (ICME) در تاریخ‌های منظم شد. اولین مورد از این کنفرانس‌ها (۱۹۶۹ در لیون)، طبق الگوی سنتی به صورت ارائه چندین سخنرانی، سامان یافت. اما در دومین کنفرانس در اکستر^۵ (بریتانیا) در سال ۱۹۷۲، گروه‌های کاری سازماندهی شدند و پروژه‌هایی با هدف ایجاد فرصت برای بحث راجع به ایده‌ها، ارائه شد. از زمان ۳- ICME (کارلسروهه، ۱۹۷۶) به بعد، نشست‌های ICME هر چهار سال یک‌بار برگزار می‌شود. همچنین دیدگاه‌های تازه‌ای در نگرش به آموزش ریاضی از درون جامعه ریاضی‌دانان نیز شکل گرفت. جمله پایانی سخنرانی هاسلر ویتنی^۶، ریاضی‌دانی که در سال ۱۹۷۹ به ریاست ICMi رسید، گواهی بر معطوف شدن توجه به یادگیرنده بود:

«ما نیز به فکر کردن در مورد موضوع‌های درسی عادت کرده‌ایم و این که کودکان چطور آن را یاد می‌گیرند. باید کار خود را با کودکان آغاز کنیم تا ببینیم آن‌ها واقعاً چه هستند.»

^۱The International Journal on Mathematics Education (former ZDM) ^۲Emmanuel Röhl ^۳Journal for Research in Mathematics Education ^۴David C. Johnson ^۵Exter ^۶Hassler Whitney

در ۳ - ICME در کارلسروهه، اولین گروه‌های مطالعاتی وابسته به ICME تأسیس شدند - HPM (گروه بین‌المللی رابطه بین تاریخ و آموزش ریاضی)^۱ و PME (گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی)^۲ [۳۸]. با تشکیل این گروه‌ها، دوره جدیدی از نشست‌ها^۳ و انتشار منظم گزارش‌های آن‌ها شروع شد. این کار، نشان از سیر تکاملی و پشتیبانی از پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی بود.

۸. خوشه‌هایی از مباحث خاص در «دیسپلین» آموزش ریاضی

تا اواسط دهه ۱۹۷۰، تمایلات جدید گفته شده در بخش قبلی، خود را به شکلی واضح‌تر در سطح جهانی، نشان دادند. پس از آن که معلوم شد تلاش برای یافتن سمت و سوی [مناسب] برای آموزش ریاضی، مستلزم چیزی بیش از بحث درباره برنامه‌های درسی به تفکیک پایه‌ها و سطوح مختلف تحصیلی است، در پایان سال ۱۹۷۴، مقامات ICMI با اعضای یونسکو ملاقات کردند تا زمینه را برای تهیه جلد چهارم از مجموعه کتاب‌های روندهای جدید در تدریس ریاضی، فراهم کنند. این کار، گام مهمی در تعمیق بحث‌ها درباره مسائلی بود که پیش از این مطرح شده بودند. هدف از این کار، نه تنها شناسایی مشکلات عمده در زمینه آموزش ریاضی، بلکه هدایت و پایش جهت‌گیری و شدت تغییراتی بود که در حوزه آموزش ریاضی در حال وقوع بودند [۸۹]. روش‌شناسی متناسب با مباحث عمیق در فصل‌های کتاب، منجر به طرح رویکردهای گسترده‌تری نسبت به مشکلات آموزش ریاضی شد [۲۴]. از نتیجه آماده‌سازی دقیق این کتاب، در سومین ICME که در سال ۱۹۷۶ در کارلسروهه برگزار شد، رونمایی شد و این فصلی برجسته در تاریخ آموزش ریاضی به‌شمار می‌آید.

یکی از پیامدهای این رویکرد عمیق این بود که چهارمین جلد از کتاب روندهای تازه، شامل فصل‌هایی بود که به بحث درباره مشکلات مربوط به برنامه‌های درسی در سطوح مختلف اختصاص یافته بودند؛ از جمله می‌توان به آموزش بزرگسالان، تدریس در سطح دانشگاهی و استفاده از فناوری اشاره نمود. این مسائل در سطحی به مراتب عمیق‌تر از قبل، مورد بحث قرار گرفتند و تجزیه و تحلیل منتقدانه فرآیند تولید برنامه‌های درسی و مباحث مربوط به ارزشیابی دانش‌آموزان، معلمان و مواد آموزشی، در این کتاب عرضه شد. اهمیت جلوتر رفتن از مباحث مربوط به برنامه‌های درسی، مورد توجه قرار گرفت و از آن، استقبال شد: «تا همین اواخر، هم تحقیق و هم توسعه، تنها بر یکی از دو عامل تعیین‌کننده در فرآیند

^۳ این نشست‌ها شامل کنفرانس، سمینار و همایش هستند و نکته مهم این است که از زمان تشکیل هر کدامشان تا به امروز، با هر تناوبی که در زمان تأسیس برایش در نظر گرفته شده بود، به‌طور منظم برگزار شده است.

یادگیری: دانش‌آموز یا برنامه‌درسی، متمرکز بود و تأثیر معلم یا زمینه کلی تدریس در آن‌ها، نادیده گرفته می‌شد.» [۲] این کتاب همچنین شامل فصلی درباره زندگی حرفه‌ای معلمان ریاضی و فصلی دیگر درباره اهداف آموزش ریاضی بود.

برگزاری سومین ICME در کارلسروهه و انتشار چهارمین جلد از کتاب روندهای تازه، نقطه آغاز شکل‌گیری چندین شاخه تخصصی برای پرداختن به مشکلات خاص آموزش ریاضی در سطح جهانی شد. ما این شاخه‌ها را در بستر سه حوزه دسته‌بندی کرده‌ایم: (الف) ارتباط با روان‌شناسی؛ (ب) مطالعه ابعاد اجتماعی، فرهنگی و سیاسی؛ و (ج) موضوعیت داشتن نظریه‌های آموزش ریاضی.

۱.۸. روان‌شناسی و آموزش ریاضی. از اواخر قرن نوزدهم، یافتن پاسخ برای مسائل مربوط به تدریس و یادگیری ریاضی، در حوزه‌هایی خارج از ریاضی دنبال می‌شده است. تلفیق شایستگی‌های علوم تربیتی مختلف و سایر حوزه‌های علمی دانشگاهی مانند پداگوژی، روان‌شناسی، فلسفه و پزشکی، سهم مهمی در این امر داشته است. کارهایی که در ابتدا در این حوزه انجام شد، به دانش‌آموزان دارای نیازهای خاص مربوط می‌شد. اما خیلی زود آشکار شد که روش‌های به‌کار رفته در این موارد، برای مواجهه با مشکلات مربوط به آموزش و یادگیری کودکان عادی در مدارس ابتدایی نیز مناسب‌اند. محتوای ریاضی مورد بررسی، عمدتاً مربوط به حساب بود، اما استفاده از مواد ملموس، بر تدریس هندسه نیز اثرگذار بود. آموزشگران، به کار آموزش دانشجو - معلمان در مدارس عملی^۱ پرداختند؛ مدرسی که با هدف آزمایش کردن روش‌های تدریس جدید تأسیس شده و اداره می‌شد. در این مدارس، کار عملی به‌شدت با پژوهش درآمیخته بود و این گونه، دو جریان پژوهشی مختلف در حال نسج گرفتن بود: یکی دغدغه پژوهش در مورد روش‌های تدریس را داشت و دیگری، علاقه‌مند به مشاهده رفتار دانش‌آموزان [حین یادگیری] بود. هر دو جریان، هم ریشه در نظریه‌های یادگیری داشتند که می‌خواست بدانند در ذهن/ مغز یادگیرنده چه می‌گذرد (مثلاً نظریه پیاژه) و هم ریشه در نظریه‌های تدریس داشتند که به بحث درباره رفتارهای کودک حین فرآیند یادگیری می‌پرداخت (مانند نظریه برونر).

^۱ Practice Schools / restorative practice منظور مدرسی است که در آن، معلمان آینده تحت نظارت مستقیم یک مربی از دانشگاه یا یک مؤسسه آموزش عالی و معلم کلاس در همان مدرسه، به کارآموزی و آموختن «اصول و فنون تدریس» یا به معنای وسیع‌تر، پداگوژی می‌پرداختند. این الگو، یکی از قدیمی‌ترین و مرسوم‌ترین مدل‌های آموزش‌های حرفه‌ای از جمله پزشکی، نظامی، مهندسی و امر تدریس است. این نوع آموزش معمولاً در فضاهای طراحی‌شده و با نظارت و کنترل مسئولان کارآموزی یا کارورزی صورت می‌گیرد و در حوزه‌های مختلف، هرکدام نام متفاوتی دارند. مهم این است که این مدارس، ارتباطی با «مدارس تجربی» که جان دیویی مبتکر و مبلغ آن بود، ندارند. ولی در ایران، عمدی یا سهوی، زمره تأسیس مدارس تجربی برای تربیت معلم آینده شنیده می‌شود که منظور مورد اول، یعنی مدارس عملی است و این خلط مطلب، تبعات ناگوار فراوان دارد. همه این‌ها تأکید دوباره‌ای بر ضرورت شناخت تاریخ هر علم است.

تأثیر کارهای متخصصان پداگوژی^۱ و روان‌شناسان بر آموزش ریاضی، احتمالاً در ابتدای قرن نوزدهم و توسط یک آموزشگر سوییسی به نام یوهان هاینریش پستالوزی^۲ آغاز شد. کارهای پستالوزی بر تدریس و یادگیری حساب و هندسه در مدارس ابتدایی اروپا ([۵۲، ۲۵]) و ایالات متحده آمریکا [۱۸] اثرگذار بودند. یکی از پیروان وی به نام فردریش فروبل^۳ مؤسس مهد کودک^۴ به صورت یک سازمان در آلمان بود. فروبل دانش‌آموزانش را به یادگیری از طریق بازی و فعالیت‌های دیگر واداشت. او از بلوک‌های چوبی برای تدریس حساب و اشیاء هندسی ملموس برای تدریس هندسه استفاده می‌کرد.

یوهان فردریش هربارت^۵ اندیشمند دیگری بود که بر شیوه تدریس ریاضی در مدارس تأثیر گذاشت. حدود سال ۱۹۰۰، ایده‌های هربارت تدریس در دوره ابتدایی و آموزش معلمان را در کشورهای مختلف تحت تأثیر قرار داد [۵۰]. با وجود این که هربارت، معلمان را به رعایت مراحل تدریس^۶ ترغیب می‌کرد، اما دیدگاه‌هایش در مورد رابطه بین تدریس و یادگیری با چیزی که بعدها به عنوان ساخت‌وسازگرایی شناخته شد، سازگار بوده است. دیدگاه‌های وی همچنین تا حد زیادی مبتنی بر تعامل‌های انسانی و اجتماعی بوده است.

از طرف دیگر، در ایالات متحده آمریکا توسعه علاقه‌مندی به آموزش کودکان متأثر از نوشته‌های جان دیویی^۷ بود. او در سال ۱۹۸۶، در دانشگاه شیکاگو یک مدرسه آزمایشگاهی^۸ تأسیس کرد. دیویی در سال ۱۹۰۴ به دانشگاه کلمبیا رفت و بقیه دوران کاری‌اش را در آنجا سپری کرد. دیویی کل فرآیند یادگیری را در چارچوب عمل می‌نگریست. برای مثال، در مورد یادگیری ریاضی، یکی از فرض‌های اولیه او این بود که کودک در نتیجه حل مسائل عملی، مفهوم کمیت را درک می‌کند [۹۱]. همین ایده یادگیری فعال^۹ در آثار ماریا مونته‌سوری^{۱۰} مؤسس مدرسه‌ای برای کودکان در رم و اُوید دِکِرولی^{۱۱}، مؤسس «مدرسه آرمیتاژ»^{۱۲}

^۱ در زبان‌های فارسی یا انگلیسی، واژه مناسبی که جامعیت «پداگوژی» را داشته باشد، تقریباً وجود ندارد. به همین دلیل در هر دو زبان از همین واژه لاتین برای اشاره به اصول و فنون تدریس و هر آن چه که در کلاس درس واقع می‌شود تا یادگیری را ارتقاء بخشد، استفاده می‌شود.

^۲ واژه Kindergarten به معنای «باغ کودکان» است و در آمریکا و کانادا با همین نام وارد زبان انگلیسی شده است. مهد کودک یک سازمان مدنی جدید است.

^۳ علت این تذکر آن است که در ظاهر، پیروی از یک دیدگاه سلسله‌مراتبی با روح ساخت و سازگرایی منافات دارد. اما نویسندگان به استناد تاریخ، نشان داده‌اند که وجوه انسانی - اجتماعی و ماهیت تدریسی که هربارت پیشنهاد داده بود، با اصول اساسی ساخت‌وسازگرایی، همسویی قابل‌ملاحظه‌ای دارد.

^۴ École de l'Ermitage مونته‌سوری و دِکِرولی هر دو بر اساس آگاهی و بینشی که نسبت به جسم و روان انسان داشتند، به تربیت کودکان اقدام کردند. به‌طور مشخص دِکِرولی، مرکزی دور از هیاهوی شهر (که شاید وجه تسمیه «آرمیتاژ» باشد) درست کرد و در آن، به تربیت کودکان «غیرطبیعی» با روش‌هایی که خود ابداع کرده بود و محوریت آن‌ها علائق کودکان ←

^۲Johann Heinrich Pestalozzi ^۳Friedrich Fröbel ^۵Johann Friedrich Herbart ^۷John Dewey

^۸Laboratory school ^۹Active learning ^{۱۰}Maria Montessori ^{۱۱}Ovide Decroly

در بروکسل نیز به چشم می‌خورد. این دو پزشک بودند و روش‌های آموزش آن‌ها ریشه گرفته از کار با کودکان دارای ناتوانی‌های جزئی بود. روش دِکرولی مبتنی بر مشاهده جهان پیرامون بود، اما مونته‌سوری مواد آموزشی خاصی (materiale strutturato) تولید کرد که هدفشان کمک به ایجاد توان یادگیری مستقل در کودکان بود. پس از این دوره، آزمایشگاه‌های روان‌شناسی متعددی اغلب توسط روان‌شناسان نظیر آلفرد بینه^۱، روان‌شناس فرانسوی که به سبب خدماتش در نظریه هوش و آزمون‌سازی شهرت دارد و کلاپارد^۲، عصب‌شناس و روان‌شناس کودک سوئیسی، در اروپا تأسیس شد. در آزمایشگاه‌های بینه و کلاپارد، معمولاً تلاش کودکان برای یادگیری ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گرفت.

در ایالات متحده آمریکا، پژوهش در زمینه یادگیری ریاضی توسط ادوارد لی تورندایک^۳ روان‌شناس رفتارگرا که علاقه زیادی به یادگیری ریاضی داشت و ویلیام بروئل^۴ معلم، روان‌شناس، آموزشگر ریاضی و روان‌شناس تربیتی صورت گرفت. بروئل و تورندایک، با وجود داشتن دیدگاه‌های نظری متفاوت، هر دو معتقد به نهضتی بزرگتر بودند که در پی ایجاد علم آموزش^۵ بود. در سال ۱۹۲۲، تورندایک کتاب روان‌شناسی حساب^۶ خود را منتشر کرد و اندکی بعد نیز، کتاب روان‌شناسی جبر^۷ (۱۹۲۳) را به چاپ رساند. این دو کتاب مبتنی بر نظریه پیوندگرایی^۸ در دیدگاهی «ارتباط‌گرایانه» بودند و قصدشان تقویت مجموعه کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای بود که تورندایک نوشته بود. در مقابل دیدگاه‌های رفتاری‌تر تورندایک، بروئل با دنبال کردن ایده‌های استاد راهنمای خود، چارلز اچ. جاد^۹ بر اهمیت «یادگیری معنادار»^{۱۰} در مقابل روش‌های «طوطی‌وار»^{۱۱} تأکید کرد [۵۷].

نظریه‌های روان‌شناسی رفتاری («رفتارگرایی»^{۱۲}) که از طریق آزمایش روی حیوانات توسعه یافته بودند، بعداً طی سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۰ توسط بوریس فردریک اسکینر^{۱۳} با یادگیری مدرسه‌ای، مرتبط شدند. اسکینر بر «شرطی‌شدن کنشگر»^{۱۴} از طریق «فرآیندهای تقویت»^{۱۵} تأکید کرد که اساس شکل‌گیری رفتار تلقی می‌شوند. طبق نظریه تدریس مبتنی بر رفتارگرایی، تغییر در رفتار می‌تواند از طریق آموزش بود، پرداخت. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «بین آموزش و تناسب» با نام و نشان زیر مراجعه کنید:

Depaepe, Marc. (۲۰۱۲). Between Educationalization and Appropriation: Selected Writings on the History of Modern Educational Systems. Leuven University Press

Edward Lee Thorndike^۳ در فارسی، این نام به «تورندایک» ترجمه شده است، در حالی که «تورندایک» به تلفظ انگلیسی آن نزدیک‌تر است.

Operant conditioning^{۱۴} در کتاب‌های روان‌شناسی ترجمه شده به زبان فارسی، از معادل «شرطی‌سازی عامل» نیز استفاده شده است.

^۱ Alfred Binet ^۲ Claparède ^۳ William Brownell ^۴ Science of Education ^۵ Psychology of Arithmetic

^۶ Psychology of Algebra ^۷ Theory of Associations in a “connectivist” perspective ^۸ Charles H. Judd

^۹ Meaningful learning ^{۱۰} Rote ^{۱۱} Behaviourism ^{۱۲} Burrhus Frederic Skinner ^{۱۳} Reinforcement

processes

برنامه‌ریزی شده صورت بگیرد (یا چیزی که بعداً به آن «یادگیری در حد تسلط»^۱ و «یادگیری به کمک رایانه»^۲ گفته شد). این ایده‌ها کاربردهای بسیار گسترده‌ای در تدریس ریاضی [۸۴] و به‌ویژه در نظریهٔ هوادار استفادهٔ زود هنگام از رایانه داشتند.

با این حال، عمده‌ترین تأثیر روان‌شناختی بر آموزش ریاضی از جانب روان‌شناس سوئیسی، ژان پیاژه بود. پیاژه طی مطالعهٔ رفتار کودکان به‌روش بالینی و شناسایی «مراحل شناختی»، روش‌هایی را ابداع کرد که باعث گسترش مباحث مربوط به آموزش ریاضی در دورهٔ ابتدایی شدند. مراحل شناختی پیاژه، موازی با مراحل تدریس جروم برونر در ایالات متحدهٔ آمریکا بود. اما همان‌طور که کیل پاتریک [۵۵] اشاره می‌کند، تنها «پس از ورود روان‌شناسی شناختی در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، دورانی که مشخصه‌اش، دسترسی به آثار پیاژه از طریق ترجمهٔ انگلیسی آن‌ها و تفسیر مجددشان توسط جروم برونر بود، پژوهشگران آموزش ریاضی توجه عاقلانه‌تری به نظریه‌های روان‌شناختی و همکاری بیشتر با روان‌شناسان نشان دادند» (ص. ۱۸).

از سوی دیگر، هرچند لو سمنوویچ ویگوتسکی^۳ روسی و پیاژه در یک سال متولد شدند، در دههٔ ۱۹۶۰ بود که تأثیر ایده‌های ویگوتسکی بر آموزش ریاضی آغاز شد. این تأخیر، ناشی از ترجمه نشدن آثار وی [به زبان انگلیسی] و فقدان علاقه به دیدگاه اجتماعی در این حوزه بود. دیدگاه‌های ویگوتسکی، به‌ویژه در رابطه با نقش مهم تعامل اجتماعی در جلو راندن یادگیرندگان در میانهٔ «دامنهٔ تقریبی توسعه»^۴ (ZPD) اهمیت بسیاری داشت. از نظر ویگوتسکی، تمام دانش به‌طور اجتماعی ساخته شده و از طریق فرآیندهای مشترکی که یادگیرندگان، تجربه‌های شخصی خود را با هم به اشتراک می‌گذارند، درونی می‌شود. از این ایده چنین نتیجه‌گیری می‌شد که روابط نزدیک و حامیانه، نقش مهمی در رشد دانش فرد دارد. طبق دیدگاه میانجی‌گری فرهنگی، جهان معانی در کودک، با استفاده از ابزارها (مصنوعات) و نشانه‌ها توسعه می‌یابد. طی ۲۵ سال گذشته، نظریهٔ ویگوتسکی به‌طور گسترده‌ای در آموزش ریاضی به‌کار برده شده است و تمرکز بر فعالیت‌های ریاضی گروهی از یادگیرندگان یا دست‌کم دو نفر یادگیرنده به‌جای یک فرد، بوده است [۵].

اندیشمندانی نظیر کالب گاتگو، زلتان دینز، ریچارد اسکمپ^۵ و افرایم فیشباین^۶، که هم در ریاضی و هم در علوم تربیتی آموزش دیده بودند، سهم مهمی در ایجاد رابطه بین آموزش ریاضی و علوم تربیتی داشته‌اند. کارهای اسکمپ و فیشباین موجب برانگیختن تفکر دربارهٔ نقش عوامل روان‌شناختی در تدریس Mastery learning در بعضی ترجمه‌های فارسی، از معادل «یادگیری در حد چیرگی» استفاده شده است.

^۱Computer-assisted learning: CAL ^۲Lev Semēnovič Vygotsky ^۳Zone of Proximal development

^۴Richard Skemp ^۵Efraim Fischbein

و یادگیری ریاضی در پایه‌های بالاتر شد. اسکمپ [۸۳] بین درک «ابزاری»^۱ و «درک رابطه‌ای»^۲، تمایز قائل شد. از نظر وی، درک ابزاری نتیجه یادگیری مکانیکی قواعد، قضیه‌ها و کاربرد فوری آن‌ها است. در صورتی که درک رابطه‌ای، نتیجه درگیر شدن شخصی یادگیرنده با اشیاء، موقعیت‌ها، مسئله‌ها و ایده‌های ریاضی است. ما مدیون کارهای عمیق فیشباین در مورد تعامل بین شهود و دقت در آموزش ریاضی هستیم [۹۵]. هم اسکمپ و هم فیشباین، جزو مؤسسان «گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی»^۳ (PME) بودند. فیشباین اولین رئیس PME و اسکمپ دومین رئیس آن بود. در ۱- ICME میزگردی در مورد مسائل روان‌شناختی در آموزش ریاضی سازماندهی شد که فیشباین آن را اداره می‌کرد و در ۲- ICME نیز با مدیریت وی ادامه یافت. در مقدمه گزارش ۲- ICME هاوسون [۴۹] بر اهمیتی که روان‌شناسی پیازه در رابطه با ریاضی دوره ابتدایی داشت، تأکید کرد. او اشاره کرد که تعداد افرادی که در گروه کاری «روان‌شناسی یادگیری ریاضی»^۴ شرکت کرده بودند بیش از تمام گروه‌های کاری دیگر در آن کنگره بوده است. به گفته هاوسون [۴۹] موضوعی که در این دو میزگرد به بحث گذاشته شد، «تمام و کمال، بر آموزش ریاضی، صحنه گذاشت» (ص. ۱۵).

فیشباین در مقدمه «مجموعه مطالعات ICMI»^۵ که به سال ۱۹۹۰ منتشر شد، یک تحلیل پژوهشی در حوزه روان‌شناسی آموزش ریاضی برای PME تدوین کرد^۶ و در آن مدعی شد که «مسائل روان‌شناسانه یادگیری و استدلال ریاضی، به لحاظ علمی همچنان‌گیز و در عین حال، واقعاً با آموزش ریاضی مرتبط هستند» (ص. ۴). این جمله، تجلی بیش از یک سده تعامل بین روان‌شناسان و آموزشگران ریاضی است. در حقیقت، اگرچه بسیاری از حوزه‌های دانش نظیر روان‌شناسی، فلسفه، پزشکی، جامعه‌شناسی، زبان‌شناسی و مردم‌شناسی، با آموزش ریاضی پیوند خورده‌اند، اما از نظر مفهومی، حامی اصلی توسعه آموزش ریاضی، روان‌شناسی بوده است.

۲.۸. ابعاد اجتماعی، فرهنگی و سیاسی. در سال ۱۹۷۲، در فصل اختصاص یافته به آموزش ریاضی در جلد سوم روندهای تازه در تدریس ریاضی^۷ [۲۹]، سه حوزه پژوهشی پیشنهاد شد که شامل برنامه‌های درسی، روش‌ها و مواد آموزشی، یادگیری و یادگیرنده، و تدریس و معلمان بود. چهار سال بعد تا زمان برگزاری ۳- ICME در کارلسروهه، در فصل مربوط به همان مبحث در جلد چهارم این کتاب [۲] امکان انجام فعالیت‌های پژوهشی با فهرست کردن پنج حوزه تازه پژوهشی، بسط داده شد.

^۱Instrumental ^۲Relational Understanding ^۳The International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME ^۴The Psychology of Learning Mathematics ^۵ICMI Studies Series ^۶Fischbein, E. (1990). Introduction. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 1-13). Cambridge, UK: Cambridge University Press. ^۷New Trends in Mathematics Teaching

این حوزه‌ها عبارت بودند از بررسی تعامل‌ها، مطالعه وضعیت کلاس‌های درس واقعی، علایق پژوهشی معلمان، توسعه مجموعه^۱ روش‌های پژوهش، و جهت‌گیری نظری. رویدادها و دیدگاه‌های ارائه شده در ICME-۳ در آموزش ریاضی سودمند بودند و باعث اتخاذ دیدگاه‌های جامع‌تری نسبت به آن شدند. همچنین گسترش علائق پژوهشی آینده‌نگر، با درک وسیع‌تری از ابعاد مربوط به جایگاه و نقش ریاضی و آموزش ریاضی در جامعه، همراه بود. در اواخر دهه ۱۹۷۰، علاقه رو به رشدی نسبت به اهمیت عوامل اجتماعی، چه در بحث‌های مربوط به نقش ریاضی در برنامه‌های درسی و چه در چگونگی مداخله عوامل اجتماعی و فرهنگی در تدریس و یادگیری ریاضی، به چشم می‌خورد. باور رو به رشدی ایجاد می‌شد مبنی بر این که آموزش ریاضی^۲ «نه تنها باید به شناخت فرآیند تعامل در کلاس درس، بلکه به آموزش ریاضی به‌مثابه جنبه‌ای از رفتارهای اجتماعی نیز بپردازد»؛ یعنی «فرآیند توسعه آموزش ریاضی، در دل توسعه کلیت نظام آموزشی، جای دارد» [۲]. این دیدگاه در جای دیگری نیز ابراز شده بود [۷]. در تمهیداتی که برای ICME-۳ شده بود، دو تمایل قبلی نسبت به این مضمون در کانون توجه قرار گرفت. بازتاب تمایل اول که اوپیراتان دی آمبروسو^۳ [۲۲] از آن دفاع می‌کرد، بر اهداف و مقاصد کلی آموزش ریاضی، دیده شد. تمایل دیگری که بائرسفلد [۲] در کنار موارد دیگر از آن جانبداری می‌کرد، اهمیت مطالعه تعامل‌ها در فرآیند تدریس - یادگیری بود.

در دهه ۱۹۸۰ این دو حوزه یعنی دیدگاه وسیع در مورد پایگاه‌های فرهنگی و اجتماعی تدریس و یادگیری ریاضی و به تبع آن توسعه دامنه پژوهش در آن‌ها، شاهد پیشرفت‌های قابل‌توجهی بودند. شرح اولیه دی‌آمبروسو درباره اهداف آموزش ریاضی که برای ICME-۳ تهیه شده بود، به دیدگاهی گسترده‌تر بدل شد و در سخنرانی عمومی وی در ICME-۵ در آدلاید^۴ ارائه شد [۲۳، ۲۴] و این، اولین باری بود که مفهوم «ریاضیات قومی»^۵ در یک رویداد بزرگ جهانی در آموزش ریاضی، مطرح شد. او پیشنهاد کرد که آموزش ریاضی، باید گوناگونی طرز تلقی‌های فرهنگی و تمایز فرهنگی بین «گروه‌های اجتماعی که ریشه‌های فرهنگی، شیوه‌های تولید و مالکیت، ساختار و تضاد طبقاتی و احساس امنیت و [حفظ] حقوق فردی کاملاً تعریف شده دارند»، در نظر گرفته شود [۲۳]. توجه به شیوه‌های گوناگونی که ریاضی با فرهنگ‌ها و محافل اجتماعی متمایز، آمیخته شده و بازتاب پیامدهای این توجه بر آموزش ریاضی، به تحقیقات پرتب و تاب در این رابطه، دامن زد. این امر موجب شد که بسیاری از این پژوهش‌ها، به بررسی فعالیت‌های ریاضی در زندگی روزانه گروه‌ها و حرفه‌های اجتماعی بپردازند که بهایی به آن‌ها داده

^۱Didactics در بسیاری از کشورهای اروپایی از جمله فرانسه و آلمان، به جای Education از Didactics استفاده می‌کنند. در زبان فارسی، این دو واژه که معادل هم هستند، به «آموزش» معروف شده ولی به تناسب، «تعلیم و تربیت» هم گفته می‌شود.

^۲Repertoire ^۳Ubiratán D'Ambrosio ^۴Adelaide ^۵Ethnomathematics

نشده و از ریاضی نهفته در فرهنگ‌های مختلف، پرده‌برداری شود. این نوع پژوهش، موجب برانگیخته شدن مطالعات و تأملات بیشتری بر شیوه‌های آموزشی مرتبط با آن‌ها شد.

تقریباً در همان زمان نیز در اروپا، دو مسیر پژوهشی شکل گرفت که به ابعاد اجتماعی تدریس و یادگیری ریاضی ارج نهاد. بائرسفلد [۳] اثر اولیه خود را در مورد ابعاد اجتماعی «پنهان»^۱ در تعامل بین معلم و دانش‌آموزان در کلاس درس ریاضی، منتشر کرد. گی بروسو^۲ [۱۶] نیز در سنت پژوهش در فرانسه غوطه‌ور شد و نظریه‌ای برای توجه به مخاطرات (تله‌ها) تبدیل ریاضیات علمی به دانش ریاضی مدرسه‌ای، تبیین نمود. در سال‌های بعد، هر دو مسیر مطالعاتی، شاهد پیشرفت‌های عمده‌ای بودند. تا پایان دهه ۱۹۸۰، به‌طور پیوسته، نتایج پژوهش‌های انجام شده درباره تأثیر ابعاد اجتماعی و فرهنگی بر برنامه‌های درسی ریاضی و تدریس و یادگیری ریاضی، در نشریه‌های پژوهشی آموزش ریاضی، ارائه می‌شد. استیگ ملین - آلسن^۳ در کتابی که در سال ۱۹۸۷ منتشر کرد، پس از بحث در مورد عدم تطابق بین صلاحیت‌های^۴ ریاضی دانش‌آموزان در مدرسه و زندگی روزانه، استدلال کرد که پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی، نیازمند به رسمیت شناختن این [واقعیت] بودند که ابعاد سیاسی، به شکلی اجتناب‌ناپذیر، در مرکز تدریس و یادگیری ریاضی قرار داشت [۶۴].

به کمک بازاندیشی می‌توان به این مسئله پی برد که سال ۱۹۸۸، سالی کلیدی در توسعه پژوهش در آموزش ریاضی بود. در آن سال، مجله مطالعات آموزشی در ریاضی، شماره ویژه خود را به «مطالعات اجتماعی-فرهنگی در آموزش ریاضی» اختصاص داد. بیشاپ [۹] کتابی هم در این موضوع نوشته بود.^۵ در ۶ - ICME که در بوداپست برگزار شد، «برنامه ویژه روز پنجم درباره ریاضی، آموزش و جامعه»^۶، به «بررسی ابعاد سیاسی آموزش ریاضی» اختصاص یافت [۵۴]. همچنین در سخنرانی عمومی دوازدهمین کنفرانس PME تریزینا نونز^۷، گزارشی پژوهشی ارائه داد که با یک تیم انجام داده بود. این گزارش، جزئیات صلاحیت‌های ریاضی کودکان بی‌سواد را که به عنوان فروشنده دوره‌گرد در خیابان‌های شهرهای برزیل کار می‌کردند، به تصویر کشید [۱۹]. به تعبیر استفان لرمان^۸ [۶۲]، این چرخش اجتماعی، حاکی از «ظهور نظریه‌هایی در جامعه پژوهشی آموزش ریاضی بود که معنا، تفکر و استدلال را، محصول فعالیت‌های اجتماعی تلقی می‌کردند» (ص. ۲۳). می‌توانیم در این چرخش اجتماعی، از منظر آموزشی نیز تحلیل نقش ریاضی و آموزش ریاضی را در جامعه بگنجانیم؛ کاری که طنین بازتاب‌های اولیه دی‌امبرسیو در

^۴ Competency در بعضی ترجمه‌ها، از معادل «شایستگی» نیز استفاده شده است.

^۱Hidden ^۲Guy Brousseau ^۳Stieg Mellin-Olsen ^۵Bishop, A. J. (1988b). Mathematical Enculturation. A cultural perspective on Mathematics Education. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

^۶Fifth Day Special Programme ^۷Terezinha Nunes ^۸Stephen Lerman

مورد اهداف آموزش ریاضی است [۲۲]. در اواسط دهه ۱۹۹۰، اوله اسکوفس موز^۱ ([۸۵]) به بحث درباره روابط بین ریاضی، جامعه و شهروندی پرداخت. وی با تأکید بر قدرت ریاضی در جوامع معاصر، پیشنهاد اتخاذ یک موضع انتقادی را در آموزش ریاضی مطرح کرد که در آن، فرصت طرح یک دیدگاه جامع برای پیوند دادن مباحث جهانی شدن، محتوا و کاربردهای ریاضی، به عنوان مبنایی برای کنش‌ها/ عمل‌های اجتماعی و قدرتمند کردن جامعه از طریق سواد ریاضی، فراهم شود.

۹. دغدغه نظریه

درک این نکته که آموزش ریاضی باید به دنبال جایگاهی مناسب در حوزه فعالیت‌های دانشگاهی باشد، پیش از این در آغاز قرن بیستم نیز محسوس بود [۵۵]. یکی از قطع‌نامه‌هایی که در اولین IMCE (۱۹۶۹) به تصویب رسید، مربوط به نیازمندی به یک «نظریه آموزش ریاضی^۲» بود (ص. ۴۱۶). از اواسط دهه ۱۹۷۰ و بعد از ICME-۳ تلاش برای تبیین چنین نظریه‌ای بارزتر شد. استاینر که در IDM در دانشگاه بیله‌فلد مستقر بود، رهبری یک جریان فشار برای تبیین نظریه و بازتاب بر آن را به عهده گرفت. او یک گروه مطالعاتی بین‌المللی به نام نظریه آموزش ریاضی (TME) را تشکیل داد که تا سال ۱۹۹۲ پنج کنفرانس برگزار کرد و گروه ویژه ثابت کنفرانس‌های جهانی بود. مناظره‌هایی توسط این گروه در مورد ماهیت، امکان‌ها، حدود و ثغور و مشروعیت آموزش ریاضی به عنوان یک حوزه علمی، صورت گرفت [۸۸] و بحث‌های قبلی را بسط داد (برای مثال [۴] و [۲]) و پژوهشگران برجسته‌ای را از چندین کشور، درگیر کرد. رابطه بین آموزش ریاضی و سایر حوزه‌های دانش (روان‌شناسی، علوم تربیتی، جامعه‌شناسی، ریاضی و غیره)، قدرت تبیینی پارادایم‌های^۳ رقیب، روایی/ اعتبار^۴ نظریه‌های بومی/ محلی^۵ خانگی، رابطه بین نظریه و عمل و تأملاتی بر تغییرات برنامه‌های درسی، از جمله خدمات متعدد این گروه بود. در دسترس‌ترین تولیدات این گروه، دو کتاب بود که یکی توسط استاینر و فرماندل [۸۹] در مورد اصول و روش‌شناسی آموزش ریاضی تألیف شد و دیگری [۶] ارائه مروری جامع بر آموزش ریاضی از دید سایر آموزشگران ریاضی در جهان بود. چندین کتاب در صدد توجیه تنوع پژوهش در حوزه آموزش ریاضی برآمده‌اند ([۱۲]، [۱۳]، [۲۸]، [۴۴]، [۸۱]) و خصوصاً این کتاب سومین دانشنامه). در تلاش برای توصیف این تنوع، بیشاپ [۱۱، ۱۰] توجه را به سنت‌های پژوهشی معطوف نمود که نتیجه تربیت، پیشینه فرهنگی و آموزش پژوهش^۶ بودند [۱۰]. در سال ۱۹۹۲، بیشاپ سازه^۶ خود را برای توصیف ویژگی‌های سه سنت

^۳Paradigms الگوها، مدل‌ها، نمونه‌های ذهنی و معادل‌های دیگری نیز برای پارادایم انتخاب شده است ولی هیچ‌کدام جامعیت این واژه را ندارند.

^۱Ole Skovsmose ^۲Theories of Mathematics Education ^۳Validity ^۴Home-grown ^۵Construct

مختلف به‌کارگرفت و بعدها از آن به‌عنوان پیشینه‌ای برای بازتاب بر رابطه بین پژوهش و عمل آموزشی، استفاده کرد^۱ [۱۱]. یکی از این سنت‌ها، فنون تدریس یا همان پداگوژی است که به نقش معلمانی ارج می‌نهد که بر عمل تدریس خود بازتاب دارند و مؤلفه‌های کلیدی آن، آزمایش کردن و مشاهده است. نمود سنت تجربی- علمی^۲ را می‌توان در مقاله بگل که در سال ۱۹۶۹ در ICME-۱ ارائه شد، مشاهده کرد و «کلید در گنج دانش و فرآیند پژوهش، متوجه روش‌های کسب شواهد و تحلیل غالباً کمی آن‌ها شد.» [۱۰] مورد سوم، سنت «اندیشمندان فیلسوف - فیلسوفان مدرسی^۳» است که مبتنی بر تجزیه و تحلیل، نظریه‌پردازی منطقی و نقادی است. حقیقت تدریس، تجلی ناقص این پیشنهادهای نظری است.

مراجع

- [1] Ahlfors, L. V., Bacon, H. M., Bell, C., Bellman, R. E., Bers, L., & Birkhoff, G. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher*, 55, 191-195.
- [2] Bauersfeld, H. (1979). Research related to the mathematical learning process. In H. G. Steiner & B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV, pp. 199-213). Paris, France: UNESCO.
- [3] Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 23-41.
- [4] Begle, E. G. (1969). The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 232-244.
- [5] Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 155-162). Melbourne, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [6] Biehler, R., Scholz, R. W., Sträßer, R., & Winkelmann, B. (Eds.). (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [7] Bishop, A. (1979). Editorial statement. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 1.

^۱ در سال ۱۳۷۶ (۱۹۹۷ میلادی) پروفیسور بیشاپ سخنران مدعو دومین کنفرانس آموزش ریاضی بود که در کرمانشاه برگزار شد. در بازگشت به تهران، از ایشان درخواست شد که در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی برای کارشناسان آن دفتر، سخنرانی کنند. عنوان سخنرانی بیشاپ، «سنت‌های تحقیقات آموزشی و توسعه برنامه درسی ریاضی» بود و در آن، به‌طور مشخص این بحث را مطرح کردند. این سخنرانی توسط خانم دکتر زهرا گویا ترجمه می‌شد و نوار آن، به همت خانم دکتر سهیلا غلام آزاد پیاده شد و در مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۱، در صفحه‌های ۸ تا ۱۵ به چاپ رسید. از علاقه‌مندان دعوت می‌شود که مشروح این بحث را در آن شماره مطالعه نمایند.

- [8] Bishop, A. J. (Ed.). (1988a). Special issue: Socio-cultural studies in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 117–268.
- [9] Bishop, A. J. (1988b). Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- [10] Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 710–723). New York, NY: Macmillan.
- [11] Bishop, A. J. (1998). Research, effectiveness, and the practitioners' world. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity, An ICMI Study* (pp. 33–45). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [12] Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [13] Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. S. (Eds.). (2003). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [14] Borba, M., & Bartolini Bussi M. G., (2008). Report of the Working Group 4. Resources and technology throughout the history of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 289–300). Roma, Italy: Istitutedella Enciclopedia Italiana.
- [15] Borel, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue Générale des Sciences*, 10, 431–440.
- [16] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- [17] Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- [18] Cajori, F. (1890). *The teaching and history of mathematics in the United States*. Washington, DC: Government Printing Office.
- [19] Carraher, T. (1988). Street mathematics and school mathematics. In A. Borbás (Ed.), *Proceedings of the twelfth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–23). Veszprém, Hungary: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

- [20] Christiansen, B. (1975, January). European mathematics education—The future. Paper presented at the Sixth Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers.
- [21] Churchhouse, R. F., Cornu, B., Howson, A. G. Kahane, J.-P., van Lint, J. H., Pluvinage, F., Ralston, A., & Yamaguti, M. (1986). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. ICMI Study series. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [22] D'Ambrosio, U. (1979). Overall goals and objectives for mathematical education. In H. G. Steiner & B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV, pp. 180–198). Paris, France: UNESCO.
- [23] D'Ambrosio, U. (1985). Sociocultural basis for mathematics education. In M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education* (pp. 1–6). Boston, MA: Birkhäuser.
- [24] D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 173–181.
- [25] De Moor, W. A. (Ed.). (1995). Vormleer—An innovation that failed. *Paedagogica Historica*, 31(1), 103–113.
- [26] Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). A mathematics education ghost story: Herbartianism and school mathematics. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice—Proceedings of the annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia*, Melbourne (pp. 313–321). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- [27] Engel, A. (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. Stuttgart, Germany: E. Klett Verlag.
- [28] English, L. D. (Ed.). (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. Mahlab, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [29] Fehr, H. E., & Glaymann, M. (Eds.). (1972). *New trends in mathematics teaching* (Vol. III). Paris, France: UNESCO.
- [30] Félix, L. (1985). Essai sur l'histoire de la CIEAEM. In J. de Lange (Ed.), *Mathématiques pour tous... à l'âge de l'ordinateur* (pp. 375–378). Utrecht, The Netherlands: OW & OC.
- [31] Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 237–272.

- [32] Fischbein, E. (1990). Introduction. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1–13). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [33] Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modernes des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique*, 2(9), 28–44.
- [34] Furinghetti, F. (2003). Mathematical instruction in an international perspective: The contribution of the journal *L'Enseignement Mathématique*. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de *L'Enseignement Mathématique* (pp. 19–46). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [35] Furinghetti, F. (2007). Mathematics education and ICMI in the proceedings of the International Congresses of Mathematicians. *Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1—Festschrift Ubiratán D'Ambrosio*, 97–115.
- [36] Furinghetti, F. (2008). Mathematics education in the ICMI perspective. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 3(2), 47–56.
- [37] Furinghetti, F. (2009). The evolution of the journal *L'Enseignement Mathématique* from its initial aims to new trends. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the conference on “On-going Research in the History of Mathematics Education” (pp. 31–46). Reykjavik, Iceland: University of Iceland.
- [38] Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2008). The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008). The history of ICMI. Retrieved from <http://www.icmi-history.unito.it/>
- [39] Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2010). People, events, and documents of ICMI's first century. *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica, nova època*, 3(2), 11–50.
- [40] Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F., & Giacardi, L. (2008). ICMI renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 131–147). Roma, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- [41] Gattegno, C., Servais, W., Castelnuovo, E., Nicolet, J. L., Fletcher, T. J., Motard, L., Campedelli, L., Biguenet, A., Peskette, J. W., & Puig Adam, P. (1958). *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel, Switzerland: Delachaux & Niestlé.

- [42] Gispert, H. (2009). Two mathematics reforms in the context of twentieth century France: Similarities and differences. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 4, 43–50.
- [43] Griffiths, H. B., & Howson, A. G. (1974). *Mathematics, society and curricula*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [44] Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.
- [45] Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. New York, NY: Springer.
- [46] Hanna, G. (2003). Journals of mathematics education, 1900–2000. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 69– 84). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [47] Hanna, G., & Sidoli, N. (2002). The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 123–156.
- [48] Hodgson, B. R. (2009). ICMI in the post-Freudenthal era: Moments in the history of mathematics education from an international perspective. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: Proceedings of the conference on “On- going research in the History of Mathematics Education” (pp. 79–96). Reykjavik, Iceland: The University of Iceland.
- [49] Howson, A. G. (Ed.). (1973). *Developments in mathematical education*. Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [50] Howson, A. G. (1982). *A history of mathematics education in England*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [51] Howson, A. G. (2003). Geometry: 1950–70. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique (pp. 115–131). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [52] Howson, A. G. (2010). Mathematics, society, and curricula in nineteenth-century England. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 5(1), 21–51.

- [53] Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (in press). Handbook on history of mathematics education. New York, NY: Springer.
- [54] Keitel, C., Damerow, P., Bishop, A., & Gerdes, P. (Eds.). (1989). Mathematics, education, and society. Paris, France: UNESCO.
- [55] Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 3–38). New York, NY: Macmillan.
- [56] Kilpatrick, J. (1994). History of mathematics education. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), International encyclopedia of education (2nd ed., pp. 3643–3647). Oxford, UK: Pergamon.
- [57] Kilpatrick, J., & Weaver, J. F. (1977). The place of William A. Brownell in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 382–384.
- [58] Klein, F. (1923). Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand. 4. Felix Klein, Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen, 5, 24.
- [59] Kline, M. (1973). Why Johnny can't add: The failure of the new mathematics. New York, NY: St. Martin's Press.
- [60] Krygowska, A. Z. (1968). Méthodologie de l'enseignement des mathématiques sujet d'étude au niveau supérieur. In N. Teodorescu (Ed.), Colloque International UNESCO "Modernization of mathematics teaching in European countries" (pp. 435–448). Paris, France: UNESCO.
- [61] Laborde, C. (2008). <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/LABORD.pdf> Retrieved 20 July 2011.
- [62] Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on mathematics teaching and learning (pp. 19–44). London, UK: Ablex Publishing.
- [63] Mathematical Association. (1913). Catalogue of current mathematical journals, etc. with the names of the libraries in which they may be found compiled for The Mathematical Association. London, UK: G. Bell & Sons.
- [64] Mellin-Olsen, S. (1987). The politics of mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- [65] Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., & Arzarello, F. (Eds.). (2008). The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education. Rome, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.

- [66] Moon, B. (1986). The “new maths” curriculum controversy: An international story. London, UK: Falmer Press.
- [67] Moore, E. H. (1903). The foundations of mathematics (Presidential Address at the Annual Meeting of the American Mathematical Society, New York, 1902). Bulletin of the American Mathematical Society, 9, 402–424.
- [68] Nabonnand, P. (2007). Les réformes de l’enseignement des mathématiques au début du XXe siècle. Une dynamique à l’échelle internationale. In H. Gispert, N. Hulin, & M.-C. Robic (Eds.), Science et enseignement (pp. 293–314). Paris, France: INRP-Vuibert.
- [69] Organisation for European Economic Co-operation (OEEC) (1961). Mathématiques nouvelles. Paris, France: Author. Organisation for European Economic Co-operation (OEEC) (1962). Un programme moderne de mathématiques pour l’enseignement secondaire. Paris, France: Author.
- [70] Papert, S. (1972a). Teaching children thinking. Mathematics Teaching, 58, 2–7.
- [71] Papert, S. (1972b). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 3, 249–262.
- [72] Papy, F. (1969). Minicomputer. Educational Studies in Mathematics, 2, 333–345. Pellerey, M. (1989). Oltre gli insiemi. Napoli, Italy: Tecnodid.
- [73] Piaget, J., Beth, E. W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). L’enseignement des mathématiques. Neuchâtel, Switzerland: Delachaux et Niestlé.
- [74] Powell, A. B. (2007). Caleb Gattegno (1911–1988): A famous mathematics educator from Africa. Revista Brasileira de História da Matemática Especial no 1—Festschrift Ubiratan D’Ambrosio, 199–209.
- [75] Price, M. (1995). The AMT and the MA: A historical perspective. Mathematics Teaching, 150, 6–11. Resolutions of the First International Congress on Mathematical Education (1969). Educational Studies in Mathematics, 2, 416.
- [76] Ruthven, K. (2008). Mathematical technologies as a vehicle for intuition and experiment: A foundational theme of the International Commission on Mathematical Instruction, and a continuing preoccupation. International Journal for the History of Mathematics Education, 3(1), 91–102.
- [77] Schubring, G. (2000). The first international curricular reform movement in mathematics and the role of Germany—A case study in the transmission of concepts. In A. Gagatsis, C. P.

- Constantinou, & L. Kyriakides (Eds.), *Learning and assessment in mathematics and science* (pp. 265–287). Nicosia, Sicily: Department of Education, University of Cyprus.
- [78] Schubring, G. (2003). *L'Enseignement Mathématique and the first International Commission (IMUK): The emergence of international communication and cooperation*. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson, & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of L'Enseignement Mathématique, Monographie 39 de L'Enseignement Mathématique* (pp. 49–68). Geneva, Switzerland: International Commission on Mathematical Instruction.
- [79] Schubring, G. (2008). The origins and early incarnations of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 113–130). Rome, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana. See also: The origins and the early history of ICMI. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 3(2), 3–33.
- [80] Schubring, G., & Richter, J. (1980). *International bibliography of journals in mathematics education. Schriftenreihe des IDM 23/1980*. Bielefeld, Germany: IDM.
- [81] Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.). (1998). *Mathematics education as a research domain—A search for identity: An ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [82] Siu, M. K. (2009). Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: *Proceedings of the conference on “On-going research in the History of Mathematics Education”* (pp. 197–208). Reykjavik, Iceland: University of Iceland.
- [83] Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–27.
- [84] Skinner, B. F. (1954). The science of learning and the art of teaching. *Harvard Educational Review*, 24(2), 86–97.
- [85] Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- [86] Smid, H. (2009). Foreign influences on Dutch mathematics teaching. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), “Dig where you stand”: *Proceedings of the “Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education”* (pp. 209– 222). Reykjavik, Iceland: The University of Iceland.

- [87] Smith, D. E. (1905). Opinion de David Eugene Smith sur les réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, 7, 469–471.
- [88] Steiner, H.-G., Balacheff, N., Mason, J., Steinbring, H., Steffe, L. P., Brousseau, G., et al. (Eds.). (1984). *Theory of mathematics education (TME)*. Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
- [89] Steiner, H. G., & Christiansen, B. (Eds.). (1979). *New trends in mathematics teaching* (Vol. IV). Paris, France: UNESCO.
- [90] Steiner, H.-G., & Vermandel, A. (Eds.). (1988). *Foundations and methodology of the discipline of mathematics education (didactics of mathematics)*. Proceedings of the 2nd TME Conference. Bielefeld, Germany: University of Bielefeld and University of Antwerp.
- [91] Stemhagen, K. (2008). Doin' the Math: On meaningful mathematics-ethics connections. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(1), 59–66.
- [92] Struik, D. J. (1987). *A concise history of mathematics* (4th ed.). New York, NY: Dover Publications.
- [93] Thom, R. (1973). Modern mathematics. Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education*. In *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 194–209). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [94] Thwaites, B. (1969). The role of the computer in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 346–359.
- [95] Tirosh, D., & Tsamir, P. (2008). Intuition and rigor in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 47–61). Roma, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- [96] Törner, G., & Sriraman, B. (2005). Issues and tendencies in German Mathematics-didactics: An epochal perspective. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 197–202). Melbourne, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [97] Treutlein, P., & Wiener, H. (1912). *Verzeichnis mathematischer Modelle*. Sammlungen H. Wiener und P. Treutlein. Leipzig – Berlin, Germany: B. G. Teubner.
- [98] Whitney, H. (1983). Are we off the track in teaching mathematical concepts? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematics education* (pp. 283–296). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- [99] Willmore, T. (1972). The mathematical societies and associations in the United Kingdom. The American Mathematical Monthly, 79(9), 985–989.
- [100] Wooton, W. (1965). SMSG. The making of a curriculum. New Haven, CT: Yale University Press.

زهرا گويا: دانشگاه شهيد بهشتی، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: zahra_gooya@yahoo.com

امیرحسین آشنا: تهران، دانشکده رفاه، گروه آموزش ریاضی

رایانامه: ahashna@yahoo.com

سیر تاریخی تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران

مانی رضائی

چکیده

پژوهش در مورد سیر برنامه درسی با تمرکز بر کتاب‌های درسی ریاضی در ایران، یکی از حوزه‌هایی است که مطالعات اندکی در آن صورت گرفته و در اسناد بررسی شده، کمتر گزارش‌های پژوهشی در این زمینه، مشاهده شد. این مسئله عمومیت دارد و درباره سیر تحول سایر کتاب‌های درسی نیز مطالعات اندکی انجام شده است. تنها ممکن است پژوهش‌های پراکنده‌ای در قالب پایان‌نامه‌های تحصیلات تکمیلی انجام شده باشد که کمتر در دسترس عموم قرار دارند. در این مقاله، بنابر ضرورت آشنایی با سیر تحول کتاب‌های درسی ریاضی و اهمیت نقشی که دارالفنون در این مورد داشته، ابتدا ریشه‌های تاریخی این دوره مرور شده و سپس کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای بر مبنای برنامه‌های درسی، بررسی و دسته‌بندی شده‌اند.

۱. مقدمه

آشنایی با سیر تحول کتاب‌های درسی ریاضی و مسیر طی شده آن تا حال حاضر، موجب می‌شود تا بعضی از دلایل وجود یا عدم وجود محتوای مطالب درسی ریاضی در برنامه‌های درسی مدرسه‌ای روشن شود. برای این منظور، ابتدا به عوامل مؤثر در شکل‌گیری برنامه‌ها اشاره شده است و سپس با تمرکز بر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در سال‌های پس از شروع برنامه آموزش رسمی متوسطه (۱۳۰۴) تاکنون، محتوای آن‌ها مورد بررسی موشکافانه‌تری قرار گرفته است.

عبارات و کلمات کلیدی. دارالفنون، کتاب درسی ریاضی، آموزش رسمی، برنامه درسی، سیر تاریخی، تحول برنامه ریاضی متوسطه.

انتظار می‌رود که تغییرات برنامه درسی و تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، بر اساس نظرهای شخصی و بدون بررسی کارشناسانه انجام نشود. در عوض، ضروری است که شناخت سیر تحول برنامه، خصایص و مسائل و تنگنای آن، اولین قدم اساسی و ضروری برای تولید هر برنامه درسی باشد. این مطالعات، زمینه‌ای است تا دست‌اندرکاران تعلیم و تربیت کشور و محققان مسائل آموزش و پرورش، بیش از پیش به انجام پژوهش‌های لازم در این زمینه رهنمون شوند. یافته‌های چنین پژوهش‌هایی می‌تواند به تصمیم‌گیری‌های برنامه‌ای مناسب‌تری بیانجامد.

۲. روش‌شناسی

این پژوهش با روش تحلیل تاریخی و تحلیل اسنادی یا روش کتابخانه‌ای انجام شده است. داده‌ها از طریق اسناد تاریخی، فراتحلیل یافته‌های پژوهش‌های موجود و نتایج اعلام شده مطالعات بین‌المللی، جمع‌آوری شد. در ابتدا، تمام اسناد در دسترس در کتابخانه سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش بررسی شد؛ سپس در جریان این پژوهش، منابع دیگری از طریق ارجاعات منابع اصلی شناسایی و مطالعه شد. اگرچه تمرکز اصلی این مطالعه بر بازه زمانی سال‌های بعد از تصویب رسمی آموزش متوسطه در ایران است، در این پژوهش بازه زمانی سیر تحول کتاب‌های درسی ریاضی، از زمان دارالفنون تا سال ۱۳۸۸ است. این دوره، پیش از تغییراتی است که در همین سال‌ها شروع شده و به تألیف کتاب‌های درسی جدید منجر شده است.

۱.۲. تعریف عملیاتی. از آنجا که برای واژه دوره متوسطه، تعبیرهای مختلفی وجود دارد، ضروری است برای آن تعریف عملیاتی ارائه شود. دوره متوسطه، در آغاز به شش سال پایانی پیش از دانشگاه اطلاق می‌شد و بعد از آن، به دو دوره سه ساله (سیکل اول و دوم) تقسیم شد. سپس چهار سال تحصیلی بعد از دوره راهنمایی، دوره متوسطه نامیده شد. در تغییر نظام آموزش متوسطه در سال ۱۳۷۱، این دوره چهار ساله، به سه سال متوسطه و یک سال پیش‌دانشگاهی تقسیم شد. در آخرین تغییرات نظام آموزشی مبتنی بر سند تحول آموزش و پرورش، دوره‌های تحصیلی قبلی، به‌صورت شش سال ابتدایی، سه سال دوره اول متوسطه و سه سال دوره دوم متوسطه (۳-۶)، تعریف شده است. با توجه به موضوع این تحقیق و با هدف انجام یک بررسی همه‌جانبه، شش سال دوم تحصیلی محور اصلی پژوهش شد. لیکن با تغییرات متعدد نظام آموزشی، به‌جای محدود شدن به سال‌های تحصیلی خاص، محتوای مطالب درسی ارائه شده در دوره‌های مختلف مورد توجه قرار گرفت.

۲.۲. محتوای مطالب درسی. در بررسی کتاب‌های درسی در سال‌های مختلف، تمرکز بر مطالبی است که محتوای آن در دوره اخیر در دوره متوسطه دوم ارائه می‌شود. ولی به دلیل آن‌که در وضعیت فعلی، کتاب‌های درسی با فراز و فرود بسیار روبه‌رو بوده و هست و این تغییرات همچنان ادامه دارد (تا سال ۱۳۹۴)، از حیثه این پژوهش کنار گذاشته شد. بنابراین پایان دوره مورد بررسی در این پژوهش، مقارن با پایان نظام متوسطه پیش از سال ۱۳۸۸ است.

۳. پیشینه پژوهش

دوره مورد بررسی در این پژوهش، به فاصله زمانی اجرای برنامه آموزش رسمی دوره متوسطه در ایران (۱۳۰۴ هجری شمسی) تا زمان حاضر اختصاص دارد. لیکن با توجه به اهمیتی که آشنایی با سیر تاریخی تحولات برنامه‌های آموزشی کشور دارد، بررسی اجمالی زمینه‌های آن از زمان تأسیس دارالفنون به عنوان اولین مدرسه مدرن در ایران، ضروری است. در پژوهش انجام شده، پیشینه مورد بررسی از دو جنبه مورد مطالعه قرار گرفته است: نخست، سیر تاریخی تغییر و تحولات کلی نظام‌های آموزش رسمی در ایران و دوم، دوره‌های تاریخی در تغییر کتاب‌های درسی ریاضی در ایران. با این حال، با توجه به کثرت منابع تاریخی در زمینه مطالعات انجام شده درباره وضعیت نظام آموزشی، دسترسی به برنامه‌های آموزشی، آسان‌تر از بررسی علل تغییر کتاب‌های درسی بود. اما با توجه به محدود بودن منابع و یافته‌های پژوهشی درباره درس ریاضی، در بیشتر موارد، بررسی برنامه‌های درسی ریاضی از طریق بررسی کتاب‌های درسی ریاضی در هر یک از این دوره‌ها انجام شد و سیر تغییر محتوای آموزشی و مواد درسی را به گزارشی دیگر وانهادیم.

۱.۳. سه دوره تغییرات نظام‌های آموزشی در ایران. به اعتقاد بعضی از محققان، ریشه‌های آموزش رسمی در ایران را باید در دوره قاجار و پس از تلاش‌های اصلاحی کوتاه مدت عباس میرزا (فوران، [تاریخ ترجمه] ۱۳۷۷؛ ص ۲۴۷) و به دنبال آن، تلاش‌های امیرکبیر جستجو کرد که شاخص‌ترین آن‌ها، تأسیس دارالفنون بوده است (رینگر، [تاریخ ترجمه] ۱۳۸۱؛ ص ۸۷). با تأسیس دارالفنون، معلمان اروپایی به ایران وارد شدند (روزنامه وقایع اتفاقیه، ۱۲۶۸ هجری قمری، شماره ۴۲) و ورود این معلمان، منجر به شکل‌گیری فرهنگی خاص در آموزش و همچنین محتوای درسی شد. به گفته عیسی صدیق (۱۳۵۵)، تاریخ تعلیم و تربیت در ایران را می‌توان به سه دوره کلی تقسیم کرد:

۱) دوره نخست از تأسیس دارالفنون (۱۲۶۸ هجری قمری) تا تأسیس حکومت مشروطه (۱۳۲۴ هجری قمری): در تاریخ طولانی آموزش کشور، دارالفنون نخستین آموزشگاهی است که دولت تمام مخارج

تأسیس، نگهداری و اداره آن را بر عهده گرفت. به همین دلیل، می‌توان از آن به‌عنوان مبدأ تحول در آموزش ایران یاد کرد.

۲) دوره دوم از حکومت مشروطه تا پایان جنگ جهانی اول (۱۳۳۷ هجری قمری یا ۱۲۹۷ خورشیدی): عیسی صدیق بیان می‌کند که هم‌زمان با صدور فرمان مشروطه، مسئولیت امور مملکت به عهده ملت واگذار شد. اما چون بین آزادیخواهان و مشروطه‌طلبان از یک طرف و محمدعلی شاه و اعوانش از طرف دیگر، کشمکش بود، نشانی از فعالیت کسی در زمینه فرهنگ و آموزش و پرورش به چشم نمی‌خورد.

۳) دوره سوم از ۱۲۹۷ تا زمان حاضر. پس از پایان جنگ جهانی اول و تشکیل دولت وثوق‌الدوله، وزارت فرهنگ به نصیرالدوله (احمد بدر) سپرده شد و دولت برای نخستین بار به‌طور رسمی به تربیت آموزگار در داخل کشور اقدام کرد. با تأسیس و گسترش مدارس جدید، برنامه‌های تعلیماتی، کتاب‌های درسی و روش‌های اداره مدرسه متأثر از مدارس اروپایی بودند و دولت در برنامه‌ها و کتاب‌های درسی به تدریج دخالت کرد.

بر اساس این تقسیم‌بندی، می‌توان تحول کتاب‌های درسی ریاضی را متناسب با امکانات و نیازهای آن زمان بررسی کرد. در دوره نخست (تأسیس دارالفنون تا حکومت مشروطه)، ریشه‌های اولیه تعیین محتوای کتاب‌های درسی شکل گرفت. دوره دوم با فراز و فرودهای اجتماعی روبه‌رو شد و کمتر نشانی از توجه به آموزش در آن بود. اما دوره سوم را می‌توان سرآغاز تدوین کتاب‌های متنوع‌تر در همه حوزه‌ها از جمله ریاضی دانست.

۲.۳. ریاضیات دارالفنون. با مطالعه تاریخ دوره قاجار می‌توان تا حدودی تصویری از ریاضیات دارالفنون به‌دست آورد. نکته قابل تأمل در این تصویر آن است که برنامه‌ریزی درسی و تدریس ریاضی در دارالفنون، با معلمان خارجی آغاز شد. به‌نوشته رضاقلی‌خان هدایت (رئیس مدرسه دارالفنون)، نخستین معلم ریاضی دارالفنون، کاپیتان زتی (ایتالیایی) بود که پس از ورود به مدرسه فوت کرد. محبوبی اردکانی (۱۳۷۰)، کرشیش (اتریشی) را نیز معلم ریاضی و مهندسی دارالفنون معرفی نموده و پس از آن، بوهرلر (فرانسوی) برای مدت مدیدی، معلم ریاضی دارالفنون بود و سپس نمبرک (فرانسوی) جانشین وی شد. نبود زبان مشترک بین معلمان و دانش‌آموزان، آشکارترین مشکل تدریس در دارالفنون بود. از یک سو، معلمان زبان فارسی نمی‌دانستند و از سوی دیگر، دانش‌آموزان قادر به یادگیری زبان‌های اروپایی نبودند. بدین سبب در یک دوره طولانی، آموزش رسمی ریاضی در دارالفنون به‌کمک هفت مترجم با نام‌های: محمد زکی مازندرانی؛ عبدالرسول‌خان مهندس اصفهانی؛ عبدالغفار نجم‌الدوله؛ علیخان ناظم‌العلوم؛ آقاخان بن حسینقلی مهندس؛ علی‌محمد فره‌وشی؛ غلامحسین رهنما؛ رضا نجمی تبریزی

(ملقب به مهندس الممالک) و محمد وحید تنکابنی، انجام شد (روزنامه شفق سرخ، شماره ۲۷۴۱، ص. ۳).

اقدام دیگر، انتخاب خلیفه (جانشین یا دستیار معلم) برای هر شعبه (رشته) در دارالفنون بود. در درس ریاضی، سال‌ها میرزا ملک‌خان خلیفه درس ریاضی بود که پس از فوت کاپیتان زتی، تمام امور تدریس ریاضی بر عهده وی گذاشته شد. هرچند به‌گفته محبوبی اردکانی (۱۳۷۰)، در صلاحیت میرزا ملک‌خان تردید بوده است. مهدی‌قلی‌خان هدایت در کنار نام هر یک از معلمان، مترجم وی را نیز معرفی کرده است. برای نمونه، مترجم کرشیش که درس‌های حساب، هندسه، اشکال هندسی، علم مساحت، و چند درس ریاضی دیگر را تدریس می‌کرد، میرزا زکی مازندرانی معرفی شده است (کیان‌فر، روضه الصغای ناصری، جلد ۱۰). در میان کتاب‌های ریاضی در دوره‌های بعد، نام هر یک از این مترجمان، به‌عنوان نویسندگان یک یا چند کتاب به‌چشم می‌خورد.

در گزارش روزنامه وقایع اتفاقیه (شماره ۳۹۴، ص. ۷-۵)، در هفتمین سال تأسیس دارالفنون، آموزش ریاضی در سه سطح که مرتبه نامیده شده، به این شرح ارائه شده بود: در مرتبه اول؛ دانش‌آموزان، علم حساب را به اتمام رسانده و در هندسه، سطح‌ها و مجسمات (اجسام سه بعدی) و مثلثات و در جبر و مقابله، تا آخر مسائل درجه ۲ و لگاریتم و قلعه‌سازی و محاصره و جغرافیا و علم نقشه‌خوانی را آموخته‌اند. در این گزارش، از محتوای مرتبه دوم چیزی نیامده و فقط اشاره شده که «خلیفه ریاضی آن‌ها، میرزا علی‌اکبر است». برای مرتبه سوم نیز مانند مرتبه دوم، به تنها موردی که اشاره شده این است که به‌جای میرزا علی‌اکبر، «خلیفه ریاضی، محمد میرزا است». روی هم رفته در هر سه مرتبه، ۲۰ نفر به یادگیری ریاضی مشغول بودند و به‌تدریج، نقش درس‌های ریاضی با توسعه این مدرسه، پررنگ‌تر شد.

اگرچه درس‌های دارالفنون در ابتدا نظامی‌گری بود، اما مسئولان وقت دریافتند باید برنامه دارالفنون به‌گونه‌ای تغییر کند که فارغ‌التحصیلان آن، در تمام عرصه‌ها و رشته‌ها قادر به چرخاندن امور مملکت باشند. بر همین اساس، در ششمین سال تأسیس دارالفنون و پس از انتخاب علیقلی میرزا اعتضادالسلطنه به‌عنوان ریاست مدرسه، تغییراتی کلی در دارالفنون و متون آموزشی و درس‌ها داده شد تا «صاحبان مناسب و اهل حرف و تجارت»، فرزندان خود را برای آموزش رهسپار دارالفنون کنند. اعتضادالسلطنه کوشش بسیاری کرد که دارالفنون را از آموزشگاهی به سبک و سیاق نظامی، هرچه بیشتر، به یک پلی‌تکنیک واقعی شبیه کند (رینگر، [تاریخ ترجمه] ۱۳۸۱).

استخدام مترجمان خارجی که در ایران بودند و فارسی می‌دانستند از جمله تلاش‌های اعتضادالسلطنه بود. همچنین برای نخستین بار نام چند ایرانی به‌عنوان معلم (و نه خلیفه) ریاضی به‌چشم می‌خورد که

برای نمونه، می‌توان به سلیمان‌خان؛ آقاخان؛ مهدی‌خان؛ میرزا محمود، و عبدالغفار نجم‌الدوله که نخستین کتاب مثلثات (مثلثات مستقیمه الخطوط) را نگاشت، اشاره نمود. در بررسی سیر تاریخی کتاب‌های درسی ریاضی در ایران، توجه به دو اتفاق یکی «ترجمه کتاب‌ها» و دیگری «چاپخانه دارالفنون» ضروری است. مثلاً برای ترجمه، دانش‌آموزان دارالفنون موظف بودند هنگام تعطیلی مدرسه به کار ترجمه بپردازند و از سوی دیگر، معلمان مدرسه نیز مایل بودند آثارشان به فارسی ترجمه شود. تقریباً تمام آثار ریاضی معلمان ایرانی و فرنگی مدرسه در چاپخانه دارالفنون منتشر شد. آثار منتشر شده در حوزه ریاضیات را در این چاپخانه، می‌توان در چهار زمینه دسته‌بندی کرد:

- (۱) علم حساب و اجزای آن، از جمله جبر و مقابله؛
 - (۲) هندسه و اجزای آن که مثلثات نیز در این دسته قرار می‌گیرد؛
 - (۳) سیاق و ریاضیات اجتماعی که از نظر تعداد اثر، نسبت به دو موضوع قبل بسیار کمتر است؛
 - (۴) ریاضیات و هندسه نظامی که با توجه به تأکید مسائل نظامی، هندسه نقش پررنگی داشت.
- بررسی اسناد آموزشی از زمان تأسیس آموزش رسمی متوسطه در ایران تاکنون، نشان می‌دهد که در رابطه با تغییر و تحولات کتاب‌های درسی، شش دوره قابل شناسایی است که در بخش بعد، به اجمال معرفی می‌شوند.

۴. دوره‌های تاریخی در تغییر کتاب‌های درسی ریاضی

با توجه به اسناد به‌دست آمده و کتاب‌های موجود در بخش آرشیو کتابخانه سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، همچنین بررسی پیشینه تاریخی تغییر و تحولات کلی نظام آموزش‌های رسمی در ایران، از زمان شروع آموزش متوسطه در سال ۱۳۰۴ تاکنون، کتاب‌های درسی ریاضی، به شش دوره کلی قابل تقسیم هستند که عبارت‌اند از کتاب‌های دارالفنون از ۱۳۰۴ تا ۱۳۱۷؛ کتاب‌های وزارتی از ۱۳۱۷ تا ۱۳۴۱؛ کتاب‌های هماهنگ از ۱۳۴۱ تا ۱۳۵۴؛ کتاب‌های دوره ریاضیات جدید از ۱۳۵۴ تا ۱۳۷۱؛ کتاب‌های نظام واحدی از ۱۳۷۱ تا ۱۳۸۸؛ و کتاب‌های اخیر از ۱۳۸۸ تاکنون، که به هر یک به اختصار پرداخته می‌شود.

۱.۴. کتاب‌های دارالفنون (۱۳۰۴ تا ۱۳۱۷). در این دوره، برای هر سال تحصیلی یک یا دو کتاب درسی به چشم می‌خورد و حتی کتاب‌هایی برای دو سال متوالی وجود دارد. برای نمونه، می‌توان به «جبر» ح. آزر (۱۳۱۶)، «جبر» محمد و ابوالقاسم نراقی (۱۳۱۶) برای دوم متوسطه اشاره کرد. تمام کتاب‌های این دوره خطی است و به‌ندرت دارای فهرست هستند. روند درس‌ها نیز به‌صورت تعریف،

بیان مثال و قضیه است. تعداد تمرین‌ها اندک است، اما تعدادی مسئله حل شده هم وجود دارد. نگارش کتاب‌ها دقیق است و واژه‌گزینی در کتاب‌های مختلف، تا حد زیادی هماهنگ است. در این دوره، سه موضوع هندسه، جبر و حساب به‌عنوان مباحث اصلی، و رسم و مثلثات به‌عنوان مباحث فرعی معرفی شده‌اند.

کتاب‌ها با عنوان‌های کلی «کتاب هندسه»، «کتاب حساب»، «کتاب جبر»، «دوره مقدماتی جبر»، «جبر و مقابله»، «جبر و مثلثات» و «هندسه و رسم» برای سال‌های مختلف تحصیلی است. بسیاری از کتاب‌ها، به قلم یا ترجمهٔ معلمان دارالفنون یا لیسانسیه‌های دانشسرای عالی است. از مؤلفان کتاب‌های این دوره می‌توان از این افراد نام برد: میرزا رضاخان مهندس‌الملک (رضا مهندس نجمی)، میرزا غلامحسین خان رهنما، مترجم همایون، میرزا سید باقرخان، ح. آرزوم (شریعت‌زاده)، محمدصادق صدیقی، عبدالحسین رحیمی، میرزا محمدخان وحید تنکابنی (محمد وحید)، محمدحسین مدرس نهاوندی، محمد نراقی، ابوالقاسم نراقی، حسین هورفر، عبدالله نجم‌آبادی، محمود مهران، احمد مهران، حسین مجذوب، حسین رزاقی، عزت‌الله والا، مصطفی زمانی، محسن هنریخش.

۲.۴. کتاب‌های وزارتی (۱۳۱۷ تا ۱۳۴۱). این دوره را می‌توان بر مبنای تحولات اجتماعی به دو بخش تقسیم کرد: دورهٔ نخست از سال ۱۳۱۷ تا ۱۳۳۲ است که با تألیف کتاب‌های متعددی همراه است؛ و دورهٔ دوم از سال ۱۳۳۳ تا ۱۳۴۱ است که در آن زمان، سرمایه‌گذاری‌های زیربنایی برای توسعهٔ آموزش صورت گرفت. با تصویب هیأت دولت (۱۳۱۷)، کار سفارش تهیه و چاپ کتاب به گروهی از استادان و دبیران سپرده شد و در این دوره، حدود ۸۰ کتاب درسی یکدست و هماهنگ با عنوان «کتاب وزارتی»، تألیف و بازنویسی شد. کتاب‌ها از نظر شکل و محتوا، از کیفیت بهتری نسبت به کتاب‌های دورهٔ پیشین برخوردار بودند. اما با اشغال ایران در سال ۱۳۲۰، دولت توان ادامه حمایت از تألیف و چاپ کتاب‌های درسی را از دست داد. در این زمان، هم ناشران برای کسب درآمد و هم مؤلفان برای تبادل تجربیات خود، اقدام به چاپ کتاب‌های گوناگون کردند. وزارت فرهنگ به همهٔ کتاب‌هایی که از نظر ظاهر مناسب بود و فهرست مطالب آن با برنامهٔ اعلام شده از سوی وزارتخانه مطابقت داشت، اجازهٔ انتشار داد. در این شرایط، چاپ کتاب‌های متعدد تا حدی بود که به‌جای ۸۰ کتاب درسی، بیش از ۴۲۸ کتاب درسی چاپ شد و مورد تأیید قرار گرفت.

این موضوع از یک سو، موجب تنوع کتاب‌ها شد و از سوی دیگر، دوباره‌کاری‌هایی را به همراه داشت. برای نمونه، کتاب «هندسه برای سال سوم دبیرستان‌ها» با فهرست مطالب یکسان، شامل نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، شکل‌های متشابه، مختصری از نقشه‌برداری، خط و صفحه، چندوجهی‌ها و اجسام

دوار، توسط هفت گروه از مؤلفان روانه بازار شد. نکته مهمی که در بررسی این کتاب‌ها معلوم شد این است که در برخی از آثار، هیچ تفاوت معناداری به چشم نمی‌خورد. علاوه بر این، تا پیش از سال ۱۳۲۴، کتاب‌ها اغلب توسط یک یا دو نفر تألیف شده بود. در حالی که به تدریج، تألیف کتاب‌های درسی ریاضی به صورت مشترک توسط چند مؤلف از این زمان شروع شد. برای نمونه، در همین دوره احمد بیرشک و پرویز شهریاری، با نوشتن چندین کتاب درسی به جمع مؤلفان پیوستند و همکاری ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری، منجر به تدوین مجموعه‌ای جامع از کتاب‌های ریاضی شد. همچنین کتاب‌هایی توسط علی افضلی‌پور و ابوالقاسم نراقی به‌عنوان یک گروه و محمد وحید و تقی فاطمی به‌عنوان گروهی دیگر، منتشر گردید.

این روند ادامه داشت تا این‌که از سال ۱۳۳۳ به بعد، توجه ویژه‌ای به بودجه وزارت فرهنگ شد و هر سال مبلغ قابل‌توجهی به این بودجه افزوده شد و متعاقباً مدارس ابتدایی و متوسطه بسیاری در سراسر کشور تأسیس گردید. این اتفاق، انگیزه رقابت بیشتری را بین ناشران ایجاد کرد و باعث پدید آمدن تغییرات کیفی در کتاب‌ها شد. به‌طور مشخص، گروه‌های مشترک بزرگ‌تری برای تألیف کتاب‌های درسی ریاضی شکل گرفت که از آن جمله، می‌توان به گروه هدف (هنر، دانش، فرهنگ) متشکل از احمد بیرشک، حسن حریری، احمدعلی شریفی، جهانگیر شمس‌آوری، غلامحسن صفری لنگرودی، عبدالغنی علیم مروستی، باقر نحوی، احمد مدنی‌پور، اقتدار هروآبادی اشاره نمود. همچنین تقی فاطمی، موسی آذرنوش، باقر نحوی و محسن هنربخش نیز اقدام به انتشار کتاب‌های مشترکی کردند. علاوه بر این‌ها، از یک سو پرویز شهریاری، محمدباقر ازگمی، باقر امامی، غلامرضا بهنیا و علی اصغر شیخ‌رضائی فعالیت خود را گسترش دادند و از سوی دیگر، محمدعلی مجتهدی، حسین بحرانی، هوشنگ منتصری و محمدتقی زاوشی، کتاب‌های متعددی تألیف و منتشر کردند.

در ادامه این همکاری‌های مشترک، مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی به جذب معلمان دیگر همت گماردند و اکثر گروه‌ها با افزودن نام‌های بیشتر، مخاطبان خود را افزایش دادند. برای نمونه، مجموعه خرد (خودآموز ریاضی دبیرستان) شامل معلمان گروه هدف، با جمع دیگری از معلمان تهران، کتاب‌های خود را منتشر کردند. همچنین به جمع گروه پرویز شهریاری، ۶۳ نفر از معلمان تهران پیوستند و کتاب‌های خود را روانه بازار کردند. در همین دوره، معلمان ریاضی در شهرستان‌ها نیز به تدوین و انتشار کتاب‌های چندمؤلفی اقدام کردند. برای نمونه در سال ۱۳۳۵، کتاب «جبر» سوم دبیرستان تألیف معلمان ریاضی مشهد منتشر شد. در همین سال، با عنوان هیأت معلمان ریاضی در تبریز، شیراز و اصفهان نیز، کتاب‌های مشابهی تألیف شدند. چاپ کتاب‌های متنوع بدون آن‌که تفاوت چندانی با یکدیگر داشته باشند، موجب

شد تا در سال ۱۳۵۵ و تنها اندکی پس از تجربه کتاب‌های چندمؤلفی، شورای عالی وزارت فرهنگ ضمن تغییر برنامه دوره متوسطه، با توجه به کثرت کتاب‌های درسی تألیف شده، برنامه‌ریزی برای نظارت بر چاپ کتاب‌های درسی را در دستور کار خود قرار داد.

۳.۴. کتاب‌های هماهنگ (۱۳۴۱ تا ۱۳۵۴). در راستای تصمیم وزارت فرهنگ برای نظارت بر چاپ کتاب‌های درسی، سازمان کتاب‌های درسی ایران در اسفند ۱۳۴۱ تأسیس شد و مسئولیت نظارت و ایجاد نظم در تألیف و چاپ کتاب‌های درسی، بر عهده این سازمان گذاشته شد. این سازمان نیز علاوه بر سامان دادن نسبی به کتاب‌ها، آن‌ها را با ظاهری هماهنگ منتشر کرد. در سال ۱۳۴۵، برنامه‌ریزی برای تغییر کلی ساختار نظام آموزشی از شش سال ابتدایی و شش سال متوسطه (۶-۶)، تبدیل به پنج سال ابتدایی، سه سال دوره راهنمایی تحصیلی و چهار سال متوسطه (۴-۳-۵) شد و مجموعه کتاب‌های درسی ریاضی آن با کمترین تغییرات تا سال ۱۳۵۴ مرتب تجدید چاپ شدند. در این میان، یکی از مواردی که جلب توجه می‌کند این است که بیشتر مؤلفان کتاب‌های این دوره، از بین مؤلفان تأثیرگذار دوره پیشین انتخاب شدند. در این میان، نام ابوالقاسم قربانی، حسن صفاری، موسی آذرنوش، احمد بیرشک، جمال عصار، جهانگیر شمس‌آوری، محمدعلی مجتهدی، عبدالغنی علیم مروستی، باقر نحوی، محسن هنربخش، حسین بحرانی، پرویز شهریاری، تقی فاطمی، هوشنگ منتصری، محمد تقی زاوشی، باقر امامی، محمدباقر ازگمی، غلامرضا بهنیا، حسن حریری، اقتدار هروآبادی، علی‌اصغر شیخ‌رضائی، احمد مدنپور، احمدعلی شریفی و غلامحسن صفری‌لنگرودی به چشم می‌خورد که هر یک مستقیم یا غیرمستقیم، سهمی در تألیف کتاب‌های این دوره داشتند.

۴.۴. کتاب‌های ریاضی جدید (۱۳۵۴ تا ۱۳۷۱). تحت تأثیر تحولات جهانی و همزمان با تغییر نظام آموزشی در ایران، کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه برای تمام پایه‌های متوسطه، از نو تألیف و منتشر شدند. این کتاب‌ها به سفارش سازمان کتاب‌های درسی ایران، به شرح زیر تألیف شدند:

- حساب و جبر (اول، دوم، سوم): ابوالقاسم قربانی؛
- هندسه (اول، دوم، سوم): احمد بیرشک و محمد طاهر معیری؛
- مثلثات (دوم و سوم): علی حسن‌زاده ماکویی، هوشنگ طاهری و احمد فیروزنیا؛
- جبر و آنالیز (چهارم): غلامرضا مسجدی، جلیل‌الله قراگزلو و هدایت‌الله موسوی؛
- هندسه تحلیلی (چهارم): حسین غیور، حسین مجذوب زنجانی و محمد طاهر معیری؛
- ریاضیات جدید (اول، دوم، سوم، چهارم): فرشید مین‌باشیان و میرزا جلیلی.

تفاوت اصلی کتاب‌های این دوره با دوره‌های قبل، تألیف کتاب‌های ریاضیات جدید بود که به مباحثی از ریاضی اختصاص داشت که پیش از آن، دانشجویان در درس‌های دانشگاهی با آن‌ها روبه‌رو می‌شدند. همچنین تفاوت بارزی بین ارائه مطالب هندسه با روش‌های متداول در سنت‌های آموزشی قبل از این دوره وجود داشت. کتاب‌های این دوره، با فراز و فرودهای اجرایی نیز مواجه شد. از سال ۱۳۵۵، کمبود کتاب درسی در تمام کشور مشهود بود که نارضایتی عمومی را به دنبال داشت و این وضع تا زمان پیروزی انقلاب اسلامی ادامه داشت (مجیدی، ۱۳۶۴). پس از آن، با تأسیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی در سال ۱۳۵۸، فعالیت در زمینه‌های پژوهش، برنامه‌ریزی، تألیف، چاپ و توزیع کتاب‌های درسی به این سازمان سپرده شد. در سال ۱۳۶۰، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی این سازمان، کار بازنگری کتاب‌های درسی را بر عهده گرفت. مقایسه کتاب‌های قبلی با کتاب‌های بازنگری شده در این سال (و سال بعد)، نشان می‌دهد که بجز کتاب‌های ریاضیات جدید (در پایه‌های مختلف)، سایر کتاب‌های ریاضی با تغییرات اندکی تجدید چاپ شدند.

در سال ۱۳۶۵، با تصویب شورای عالی انقلاب فرهنگی، شورای تغییر بنیادی نظام آموزش و پرورش آغاز به کار کرد و حاصل کار این شورا به‌عنوان کلیات نظام آموزش، در تیرماه سال ۱۳۶۸ مورد تأیید شورای عالی انقلاب فرهنگی قرار گرفت. یک سال بعد، طرح تغییر نظام آموزشی، توسط وزارت آموزش و پرورش و هدایت شورای تغییر بنیادی نظام آموزش و پرورش تهیه شد که در دی‌ماه ۱۳۶۹ به تصویب شورای عالی انقلاب فرهنگی رسید. بدین ترتیب، مقدمات برنامه‌ریزی و طراحی تفصیلی و اجرای آزمایشی آن فراهم شد.

۵.۴. کتاب‌های واحدی (۱۳۷۱ تا ۱۳۸۸). در سال ۱۳۷۰، «نظام جدید آموزش متوسطه» به تصویب رسید. همان‌طور که از عنوان پیدا است، این طرح تنها پیشنهاد ایجاد تغییر در دوره متوسطه را داشت. در شاخه نظری متوسطه، دو تغییر اساسی اتفاق افتاد که یکی جدا کردن سال آخر یا پایه چهارم دبیرستان از سه پایه دیگر و دیگری، طرح آزمایشی نیم‌سالی- واحدی برای دوره متوسطه بود که در سال تحصیلی ۱۳۷۱-۷۲، اجرای آزمایشی آن از پایه اول متوسطه آغاز شد و در سال ۱۳۷۷، این طرح در کشور فراگیر شد. این در حالی بود که با گذشت مدت کوتاهی، به دلیل مسائل گوناگون از جمله مشکلات اجرایی، در سال ۱۳۷۸، نظام نیم‌سالی- واحدی به سالی- واحدی تغییر یافت.

نسبت به دوره‌های قبل، برنامه تدوین شده برای تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در این دوره تغییرات اساسی پیدا نمود. با وجود این، همین کتاب‌ها نیز به دلیل مشکلات اجرایی که معلمان در تدریس با آن‌ها مواجه شدند، یک سال پس از تألیف اولیه مورد ارزشیابی کشوری قرار گرفتند. پس از اعلام نتایج

ارزشیابی انجام شده از چهار کتاب درسی ریاضیات ۱ و ۲ و هندسه ۱ و هندسه ۲، این کتاب‌ها مورد بازنگری واقع و تغییراتی در آن‌ها ایجاد شد. به‌طور مشخص، کتاب ریاضیات ۱ و ۲ بازنویسی و سپس خلاصه شدند و از حجم تمرین‌های آن‌ها نیز کاسته شد. کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲، تألیف مجدد شدند. از این گذشته، بعد از فراگیر شدن «نظام جدید آموزش متوسطه» در سال ۱۳۷۷، کتاب هندسه تحلیلی و جبرخطی دوره پیش‌دانشگاهی، پس از اجرا در یک دوره چهار ساله، دوباره تألیف شد و در بازنویسی آن، رویکرد جبرخطی کمتر شد.

در هر صورت، تغییر این نظام آموزشی از «نیم‌سالی-واحدی» به «سالی-واحدی»، با تغییرات اندکی در کتاب‌های درسی همراه بود و در مواردی که تغییری در کتاب‌های درسی ریاضی ایجاد شد، تنها از مطالب آن‌ها کاسته شد. اما دو درس هندسه ۱ و هندسه ۲ که به‌ترتیب در پایه‌های اول و دوم متوسطه ارائه می‌شدند، بدون تغییری در محتوای این دو کتاب درسی، به پایه‌های دوم و سوم متوسطه منتقل شدند.

۶.۴. کتاب‌های اخیر ریاضی از ۱۳۸۸ تاکنون. در این دوره به تشخیص سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان، ضرورت تغییر برنامه اجتناب‌ناپذیر دانسته شد. از یک سو، تغییرهای جزئی و کلی نظام آموزشی و تغییر ساعت‌های درسی و از سوی دیگر، تغییرات محتوایی کتاب‌های درسی ریاضی، موجب شد تا تغییر و بازنویسی کتاب‌ها اهمیت ویژه‌ای پیدا کند. با این همه، رویکرد دفتری که مسئولیت این تغییرها را به عهده دارد چندان شفاف نبوده و نیست. نقل قول زیر که بخشی از گفت‌وگوی نویسنده با مدیر (وقت) گروه ریاضی این دفتر است، نشان‌دهنده عدم شفافیتی است که به آن اشاره شد (رضائی، ۱۳۹۲).

... بحث جدی تغییر برنامه درسی ریاضی پایه اول متوسطه مطرح بود ... برای تغییر برنامه ریاضی اول متوسطه نمی‌توانستیم بدون برنامه شروع کنیم ... این سند می‌بایست وقتی که اول متوسطه تغییر می‌کند، به‌صورت خودکار و ناخودآگاه پایه‌های دیگر را هم تحت تأثیر خودش قرار دهد ... اولین مسئله این بود که با چه رویکردی باید حرکت کنیم ... در نهایت، کتاب [اول متوسطه] برای چاپ ارسال شد، البته هم‌زمان می‌بایستی ما روند سند [برنامه درسی ملی] را هم با دقت بالاتری مورد توجه قرار می‌دادیم ... تا حد امکان سعی‌مان بر این بود که در طراحی سند و برنامه درسی، سند طوری باشد که از پایه ۱ تا ۱۲، دیگر خللی در ریاضی اول متوسطه به‌وجود نیامورد؛ چه از نظر رویکردی، چه از نظر محتوایی.

۵. سخن پایانی

در این مرور اجمالی بر سیر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، نکات مختلفی از جمله روند این فرآیند و دست‌اندرکاران آن معرفی شد. اما ورود همه‌جانبه به این بحث و بازتاب آن بر وضعیت فعلی، نیازمند داده‌های وسیع‌تر به‌ویژه آنچه که در سال‌های اخیر- از ۱۳۸۷ به بعد- رخ داده، و تحلیل عمیق‌تر آن‌ها است. بدین سبب، به‌جای هر جمع‌بندی و سخنی، نویسنده مناسب می‌داند که با اشاره به نقل قول مستقیم بخشی از «نگاشت سوم سند برنامه درسی ملی» (۱۳۹۱؛ ص ۳۳)، این بحث را به پایان برساند:

ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به‌شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند به‌طور منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و درباره پدیده‌های پیرامونی تئوری‌های جامع بسازند. وجه مهم ریاضی توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است. بنابراین توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می‌باشد [تأکیدها در اصل است].

مراجع

- [۱] اداره امتحانات و برنامه‌ها (۱۳۱۸). بخشنامه: برنامه تحصیلات متوسطه. ماهنامه آموزش و پرورش، سال نهم، شماره ۷ و ۸، صص ۱۳۷ تا ۱۴۰.
- [۲] رضائی، مانی (۱۳۹۲). از سند برنامه درسی ریاضی تا کتاب درسی: گفت‌وگو با مدیر گروه ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری. رشد آموزش ریاضی، سال ۳۰، شماره ۴، شماره مسلسل ۱۱۲، (تابستان ۱۳۹۲). صص ۲۶ تا ۳۴.
- [۳] رضائی، مانی (۱۳۹۳). بررسی کتاب‌های درسی ریاضی دوره متوسطه از شروع برنامه رسمی در ایران. دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی. سال دوم، شماره ۳، بهار و تابستان ۱۳۹۳. صص ۷۱ تا ۹۲.
- [۴] روزنامه شفق سرخ، سال ۱۳۱۳ (۱۹۳۴ م). کتابخانه، موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی.
- [۵] روزنامه وقایع اتفاقیه (۱۲۶۸ هجری قمری). کتابخانه، موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی.
- [۶] رینگر، مونیکا ام. (۱۳۸۱). آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی در دوران قاجار. مترجم: مهدی حقیقت‌خواه. انتشارات ققنوس، تهران.
- [۷] صدیق، عیسی (۱۳۵۵). دوره مختصر تاریخ فرهنگ ایران. شرکت طبع کتاب، تهران.
- [۸] فوران، جان (۱۳۷۷). تاریخ تحولات اجتماعی ایران. مترجم: احمد تدین، انتشارات رسا، تهران.
- [۹] کیان‌فر، جمشید (۱۳۸۵). تاریخ روضه الصفای ناصری. نشر اساطیر، تهران.

- [۱۰] گویا، زهرا (۱۳۷۸). سیر تحول و شکل‌گیری برنامه‌دستی آموزش متوسطه در ایران. فصلنامه تعلیم و تربیت: ویژه‌نامه برنامه‌دستی. سال ۱۵، شماره ۱، شماره مسلسل ۵۷، (بهار ۱۳۷۸). صص ۵۹ تا ۹۶.
- [۱۱] ماهنامه تعلیم و تربیت (۱۳۰۴). ابلاغ پروگرام در مورد کلاس تهیه. سال اول، شماره دهم.
- [۱۲] ماهنامه تعلیم و تربیت (۱۳۰۴). سال اول، شماره یازدهم و دوازدهم، بهمن و اسفند ۱۳۰۴.
- [۱۳] مجموعه مصوبات شورای عالی آموزش و پرورش. ۱۳۸۳.
- [۱۴] مجموعه مصوبات شورای عالی آموزش و پرورش. ۱۳۸۹.
- [۱۵] مجیدی، موسی (۱۳۶۴). تاریخچه مختصر کتاب‌های درسی و سیر تطور آن در ایران (از دارالفنون تا به امروز). فصلنامه تعلیم و تربیت، سال اول، شماره ۴ (زمستان ۱۳۶۴)، صص ۶۵ تا ۹۵.
- [۱۶] محبوبی اردکانی، حسین (۱۳۵۴). تاریخ مؤسسات تمدنی جدید در ایران. جلد ۱ و ۲، دانشگاه تهران.
- [۱۷] مصحفی، عبدالحسین (۱۳۸۱). تاریخچه تألیف کتاب‌های درسی در ایران. رشد آموزش ریاضی، سال ۱۹، شماره ۶۷، صص ۱۲ تا ۱۸.
- [۱۸] هدایی، محمد (۱۳۸۸). بیست سال آزمودن و جستن: نگاهی به برنامه‌های درسی دوره متوسطه عمومی در دو دهه نخست قرن حاضر. فصلنامه تعلیم و تربیت، شماره ۹۸، تابستان ۱۳۸۸، صص ۶۷ تا ۱۰۰.

سنتزی* از فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی، آموزش پیش دبستانی تا پایان دوره کارشناسی و جنبش حقوق مدنی

ای. دوبینسکی و آر. پی. موزز

برگردان: سهیلا غلام آزاد

سرآغاز

رابرت موزز در دانشگاه هاروارد، تحت راهنمایی ویلارد فن اُرمان کواین^۱ - ریاضی‌دان و فیلسوف به نام، فلسفه ریاضی خوانده است. او در دبیرستان‌های شهرهای نیویورک، جکسون در ایالت می‌سی‌سی‌پی و میامی در فلوریدا تدریس کرده است. وی که شخصی برجسته در جنبش حقوق مدنی^۲ در سال‌های ۱۹۶۰ بود، در حال حاضر مشغول تولید یک برنامه درسی جبر برای دوره‌های متوسطه اول و دوم است تا بتواند دانش‌آموزان متعلق به گروه‌های محروم^۳ را نیز مخاطب قرار دهد و برای آن‌ها، جبر را قابل یادگیری کند.

اد دوبینسکی بیست و پنج سال از عمر خود را صرف پژوهش در آنالیز تابعی برای حل مسئله

* گرچه برای واژه synthesis معادل‌های مختلفی مانند پیوند، ترکیب، تلفیق و غیره وجود دارد، اما هیچ‌یک به رسایی خودش نیست.

Dubinsky, E. & Moses R. P. (2011). Philosophy, Math Research, Math Ed Research, K-16 Education, and the Civil Rights Movement: A Synthesis. Notices of the AMS. Vol.58, No. 3, pp. 401-409.

Ed Dubinsky اد دوبینسکی استاد بازنشسته ریاضی و آموزش ریاضی. نشانی الکترونیکی او: edd@math.kent.edu
Robert P. Moses رابرت پی. موزز رئیس پروژه جبر است. نشانی الکترونیکی او: ben@algebra.org
W.V.O.Quine کواین، ریاضی‌دان و فیلسوف معروف آمریکایی و استاد دانشگاه هاروارد بود که در سال ۱۹۰۸ به دنیا آمد و در سال ۲۰۰۰ از دنیا رفت. او نابه‌ای در منطق ریاضی، نظریه مجموعه‌ها، فلسفه زبان و فلسفه منطق بود. برای اطلاعات بیشتر، به سایت <http://www.wvquine.org/wvq-drop.html> مراجعه کنید-م.

^۱Civil Rights Movement ^۲Underrepresented Groups

تقریب کراندار گروتندیک^۱ و بیست و پنج سال دیگر را هم وقف پژوهش در آموزش ریاضی دانشگاهی (دوره کارشناسی) کرده است. او نظریه‌ای در مورد یادگیری ریاضی دوره کارشناسی تبیین نموده و برنامه‌های درسی نوآورانه‌ای برای چندین درس در دوره کارشناسی طراحی کرده است. دویینسکی هم مانند موزز، در جنبش حقوق مدنی سال‌های ۱۹۶۰، فعال بوده است.

احتمالاً تجارب مشترکمان در مبارزه برای حقوق بشر و داشتن دغدغه درک چگونگی عملکرد ذهنی دانش‌آموزانی که تلاش می‌کنند ریاضی یاد بگیرند، به ما اجازه داد تا با وجود پیشینه‌ها و تجربه‌های مختلف زندگی، بتوانیم به سبب علاقه‌ای که به افزایش دسترسی همه دانش‌آموزان به جبر دبیرستان داشتیم، به ویژه دانش‌آموزان متعلق به گروه‌های محروم، با هم ارتباط آکادمیک برقرار کنیم. نکته مهم این است که یک ریاضیدان توانسته است در یک پروژه جبری در حال تکوین، با یک فیلسوف آموزشگر ریاضی مشارکت داشته باشد و ما هر دو امیدواریم که در سال‌های آینده، این پروژه به رشد و توسعه خود ادامه دهد.

هدف این مقاله، بحث درباره تفکری است که باعث شد دو متخصص از دو تبار مختلف، برای توسعه آموزش ریاضی مدرسه‌ای، با هم مشارکت معنادار و اثربخش داشته باشند. به این منظور، بعضی نتایج حاصل از این همکاری را شرح خواهیم داد. ابتدا هر یک از ما به طور جداگانه، دیدگاهمان را درباره معرفت‌شناسی یادگیری ریاضی ارائه می‌کنیم؛ سپس در مورد چگونگی ترکیب این دو دیدگاه بحث خواهیم کرد و آنگاه برنامه درسی جبر دبیرستانی خود را که به حساب پیمانه‌ای^۲ مربوط می‌شود، توصیف می‌کنیم. سرانجام، شرح می‌دهیم که چطور پروژه جبری که توسط موزز پایه‌گذاری شده است، به جنبش حقوق مدنی مربوط می‌شود.

داستانِ اد

در بیست و پنج سالی که صرف پژوهش در آنالیز تابعی و تدریس ریاضی در دوره کارشناسی در شش دانشگاه و پنج کشور و سه قاره کرده‌ام، همیشه به تدریس اثرگذار ریاضی علاقه‌مند بوده‌ام. متأسفانه با وجود امتحان کردن روش‌های متعدد مشهور و متداول (روش سقراطی^۳، آموزش خود - گام^۴، یادگیری در حد تسلط^۵، و غیره)، آنچه ارائه دادم، اغلب اوقات تدریسی بی‌اثر بود. من مدرسی خوب و مشتاق تدریس بودم و نسبت به این که کارم را خوب انجام دهم، جدی و همیشه مراقب و متوجه دانشجویانم بودم. آن‌ها نیز من و درس‌هایی را که تدریس می‌کردم، دوست داشتند. اما به استناد مشاهداتم، می‌دانستم که در مقایسه با دانشجویان سایر مدرسان، دانشجویانم چیز چندانی بیشتری در کلاس‌های من، یاد نمی‌گرفتند

^۱Grothendieck's Bounded Approximation Problem ^۲Modular Arithmetic ^۳Modified Socratic

^۴Self-paced Instruction ^۵Mastery Learning

و این وضعیت برایم کمبود شدیدی به حساب می‌آمد، همان‌طور که بسیاری از گزارش‌های ملی دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ نیز بیان‌گر همین نتیجه بودند.

با ناامیدی، فهمیدم که اگر بخواهم توانایی یادگیری دانشجویانم را به‌طور قابل‌توجهی بهبود بخشم، اول باید از چگونگی فرآیند یادگیری ریاضی در آن‌ها سر در بیاورم. یعنی لازم بود بفهمم که وقتی دانشجو در تلاش برای درک یک مفهوم ریاضی است، چه چیزی ممکن است در ذهن وی بگذرد و برای این که دانشجو در یادگیری ریاضی‌اش موفق باشد، به چه نوع فعالیت‌های ذهنی نیاز دارد؟ من فکر می‌کردم هر چه فرآیند یادگیری ریاضی را بهتر بشناسم، بیشتر قادر خواهم بود تا رهیافت‌های پداگوژیکی مناسبی بیابم که بتوانم به دانشجویان/ دانش‌آموزان کمک کنم تا درگیر فعالیت‌های ذهنی مناسب شده و موفق‌تر شوند. در نتیجه شروع به مطالعه در حوزه یادگیری ریاضی کردم.

طی دو سال اول حرفه جدیدم، زیاد مطالعه کردم (می‌گویم جدید، زیرا کمی بعد از شروع، تمام علاقه‌ام به آنالیز تابعی خشکید). بعضی از نوشته‌جات مربوط به حوزه آموزش ریاضی را که خواندم، خوب بودند؛ ولی بیشترشان چندان برایم سودمند نبودند. سرانجام، وقتی آثار پیازه را خواندم، تازه متوجه شدم نویسنده‌ای را پیدا کرده‌ام که فرآیند ذهنی یادگیری ریاضی را درک کرده است. یادم می‌آید وقتی یک دانشجوی جوان آنالیز تابعی بودم، با مفهوم دوگان فضای موضعاً محدب خیلی مشکل داشتم. با مفهوم تابع‌های خطی که روی عضوهای فضای موضعاً محدب عمل می‌کنند، مشکلی نداشتم. اما فهم ایده انجام عملیات روی این تبدیلات، قرار دادن آن‌ها در یک مجموعه و مجهز کردن آن مجموعه به اعمال جبری و حتی توپولوژی، برایم واقعاً سخت بود. می‌فهمیدم که این تابع‌های خطی، اعمالی روی عضوهای یک فضای برداری انجام می‌دهند، اما از درک چگونگی انجام این عمل‌ها ناتوان بودم. در آن زمان، این موضوع به‌طور وحشتناکی برایم گیج‌کننده بود. مدتی طولانی تقلا کردم و سرانجام در این بخش ریاضی خبره شدم، اما نمی‌توانستم بگویم که چه در ذهنم گذشته بود.

بعدها که بحث تبدیلات^۱ پیازه را خواندم و متوجه شدم که محتوای تبدیل شده، می‌تواند به‌صورت طرحواره‌هایی پویا در ذهن فرد شکل بگیرد و در نتیجه آن طرحواره‌ها، محتوایی برای تبدیلات سطح بالاتر شوند، فهمیدم که به نقطه اول بازگشته‌ام و با مطالعه سیر تاریخی شکل‌گیری مفاهیم ریاضی، دریافتم که این مرحله آخر هنوز هم برای تک‌تک دانشجویان خیلی سخت است. اما به تدریج و با مطالعه بیشتر، متوجه شدم که شناسایی ساختمان‌های ذهنی که برای درک مفاهیم ریاضی لازم است و پیازه آن‌ها را به صورت یک نظریه مرحله‌ای^۲ معرفی کرده است، امکان‌پذیر است. این دیدگاه مرا قانع می‌کرد که می‌توانم پاسخ سؤال‌هایم را در مورد شناخت یادگیری دانشجویان بیابم. پس با ایده‌های پیازه بیشتر کار کردم و

^۱Transformations ^۲Stage Theory

آن‌ها را در قالب نظریه‌ای صریح و روشن به نام APOS بیان کردم. APOS یک «علامت اختصاری»^۱ است که از حرف‌های اول واژه‌های عمل^۲ (A)، فرآیند^۳ (P)، شیء^۴ (O) و طرحواره^۵ (S) تشکیل شده است و این نظریه توسط تیمی از ریاضی‌دانان و محققان آموزش ریاضی به سرپرستی من، تولید شد (مراجعه شود به آسیالا^۶ و همکاران، ۱۹۹۶).

نظریه APOS

نظریه APOS بر پایه این اصل پیازده بنا شده است که فرد برای یادگیری مفاهیم مختلف از جمله مفاهیم ریاضی، سازوکارهای ذهنی معینی را برای ساختن ساختارهای ذهنی به کار می‌برد و سپس از این ساختارها، برای پرداختن به موقعیت‌های مسئله‌گونه در ریاضی استفاده می‌کند. با توجه به این اصل، فرد برای هر مفهوم ریاضی، می‌تواند ساختاری ذهنی بسازد که برای آن مفهوم مناسب و برای درک، یادگیری و به کارگیری آن مفهوم، قابل استفاده باشد (آسیالا^۷ و همکاران، ۱۹۹۶). اگر کسی ساختارهای مناسب را ساخته باشد، مفاهیم ابتدایی اما پایه‌ای ریاضی، به سادگی و خیلی زود از طریق تجارب زندگی عادی، حدس و آزمایش، و بحث و گفتگو با همسالان، قابل درک می‌شوند. بعدها، با استفاده از چنین ساختارهایی، مفاهیم پیشرفته‌تر را می‌توان بدون مشکل و با هر روش آموزشی (پداگوژی) که بتواند مفهوم را به ساختارها مرتبط کند، یاد گرفت. ولی اگر کسی ساختار مناسب یک مفهوم را در اختیار نداشته باشد، تقریباً غیرممکن است که آن را یاد بگیرد.

این جنبه از نظریه پیازده، می‌تواند پدیده‌ای را در رابطه با یادگیری ریاضی توضیح دهد که به نظر می‌رسد، جهانی است. تقریباً هر کسی، ابتدایی‌ترین مفاهیم ریاضی را از قبیل شمارش، ترتیب، تشکیل مجموعه‌ها و مفهوم عدد، یاد می‌گیرد. به تدریج که ریاضی پیشرفته‌تر می‌شود، فرد ممکن است برای مدتی، احساس کند که ایده‌های ریاضی تقریباً واضح هستند و فقط لازم است که نام مفهوم گفته شود یا شاید توضیح داده شود و بعد از آن، تقریباً بلافاصله و به صورت خودبه‌خودی، درک می‌شود. این دوره «خودبه‌خودی بودن» به فرد بستگی دارد و می‌تواند برای بازه‌های زمانی متفاوتی (از ماه‌ها تا دهه‌ها) دوام داشته باشد. اما تقریباً برای همه، زمانی فرامی‌رسد که ایده‌ها سخت‌تر می‌شوند و یادگیری می‌تواند با تأخیر صورت گیرد و شاید سرانجام، متوقف شود. در چنین مواقعی است که مداخله معلمان، همکلاسی‌ها و کتاب‌های درسی، ضروری می‌شود. در چنین مواقعی، طبق اصل پیازده- که شرح می‌دهد چه وقت مداخله لازم است و چه وقت لازم نیست- آنچه اتفاق می‌افتد این است که انواع مداخله‌ها می‌توانند تعادل موجود

^۱ Acronym ^۲ Actions ^۳ Processes ^۴ Objects ^۵ Schemas ^۶ Asiala et al ^۷ Asiala

ذهنی فرد را بر هم بزنند تا او به تعادلی جدید برسد. این نوع مداخله‌ها زمان‌بر است، زیرا فرد برای ساختن ساختارهای جدید ذهنی به منظور مقابله با مفاهیم پیچیده‌تر، درگیر فرآیند یادگیری می‌شود. به تعبیرِ پیازه، مراحل یادگیری به این ترتیب است که فرد در آغاز، با مفاهیم ابتدایی ساختارهای ذهنی‌اش را کم و بیش به صورت خودکار و از طریق تجارب معمولی روزانه خود، می‌سازد. سپس به تدریج که مفاهیم ریاضی و ساختارهای آن پیچیده‌تر می‌شوند، حتی برای قوی‌ترین پژوهشگران ریاضی نیز درک کامل آن‌ها مشکل می‌شود و نیازمند تأمل و تمرکز بر چیزهایی است که یاد گرفته‌اند. نکته مهم در فرآیند یادگیری این است که نوع مشکل یا گاهی نقطه توقف برای افراد مختلف، فرق می‌کند. در واقع، می‌توان گفت که وسعت ساختارهای ذهنی که فرد می‌تواند با حداقل مداخله بسازد، نشان دهنده استعداد ریاضی او است.

این اصل، پیامد مهمی برای آموزش دارد؛ این که تدریس باید به دانشجویان کمک کند تا در ساختارهای ذهنی موجودشان، تا جایی که ممکن است، توانایی هضم و جذب ریاضیاتی که با آن مواجه می‌شوند، افزایش یابد. یعنی برای این که دانشجویان پیشرفت بیشتری داشته باشند، تدریس باید کمک کند تا ساختارهای ذهنی جدید و قوی‌تر و توانایی هضم و جذب ریاضی بیشتر و پیشرفته‌تر در دانشجویان ایجاد شود و توسعه یابد.

این ایده‌ها، سؤال‌های مشخصی را در ذهن ایجاد می‌کند از این قبیل که ”برای یادگیری یک مفهوم ریاضی خاص، از چه ساختارهای ذهنی می‌توان استفاده کرد و با دانستن آن‌ها، چطور می‌توان به دانش‌آموزان/ دانشجویان در ساختن آن مفاهیم کمک نمود؟ این‌ها از جمله سؤالاتی هستند که نظریه APOS و راهبردهای پداگوژیکی مبتنی بر آن، سعی می‌کنند به آن‌ها پاسخ دهند. بنابر این نظریه، ساختارهای ذهنی برای یادگیری ریاضی شامل عمل‌ها، فرآیندها، اشیاء و طرحواره‌ها است. همچنین سازوکارهای ذهنی مورد استفاده برای تولید این ساختارهای ذهنی، شامل درونی‌سازی^۱ و فشرده‌سازی^۲ است. یک عمل عبارت از تبدیل یک شیء فیزیکی یا ذهنی است که نیازمند آموزش مشخص است و لازم است که به‌طور صریح و گام‌به‌گام اجرا شود. شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی زمانی در ذهن آغاز می‌شود که یادگیرنده، یک شیء ریاضی را از طریق یک یا چند عمل، تبدیل به شیء یا اشیاء ریاضی دیگری می‌کند. هنگامی که فرد عملی را تکرار کند و بر آن تمرکز داشته و تأمل کند، آن عمل می‌تواند طی فرآیندی ذهنی، درونی شود. یک فرآیند، ساختاری ذهنی است که همان کاری را انجام می‌دهد که یک عمل هنگام درونی‌شدن، انجام می‌دهد. از آنجا که همه این‌ها به‌طور کامل در ذهن فرد انجام می‌شود، او می‌تواند جریان اجرای تبدیل را بدون این که مجبور به اجرای صریح هر قدم آن باشد، تصور کند. با توجه به ساختار فرآیند، می‌توان با وارونه کردن یا هماهنگ کردن دو یا چند فرآیند از طریق ترکیب آن‌ها، فرآیند

^۱Interiorization ^۲Encapsulation

جدیدی ایجاد کرد. اگر کسی از فرآیندی به عنوان یک کلیت^۱ آگاهی یابد، می‌فهمد که تبدیلات می‌توانند یا به‌طور صریح یا در تصور وی، روی آن کلیت عمل کنند و ساخته شوند. در چنین حالتی می‌گوییم فرد، این فرآیند را به‌صورت یک شیء ذهنی، فشرده‌سازی کرده است. گاهی هم که فرد با اشیاء ذهنی کار می‌کند، لازم است شیء را در فرآیندی که از دل آن برآمده، مجدداً بسط^۲ دهد (باز کند). هرچند این ساختارها، توصیف می‌کنند که چگونه فرد یک تبدیل واحد را در ذهن می‌سازد، باید توجه داشت که هر ساختاری که برای یک موضوع یا مفهوم ریاضی تشکیل می‌شود، شامل بسیاری اعمال، فرآیندها و اشیاء است که لازم است در یک چارچوب منسجم که طرحواره خوانده می‌شود، سازماندهی شده و به هم متصل شوند. حروف اول ساختارهای ذهنی عمل، فرآیند، شیء، و طرحواره، کلمه APOS را تشکیل می‌دهند.

تعیین اعمال، فرآیندها، اشیاء، و طرحواره‌های خاص برای یک مفهوم ریاضی، نیازمند تحقیق و روش‌شناسی خاصی است که هدف این مقاله نیست. با این حال، مطالعه مفهومی از ریاضی دوره ابتدایی مثلاً تقسیم یک عدد بر کسر که یکی از مشکلات متداول دانش‌آموزان و حتی بعضی از معلمان است، می‌تواند مفید باشد. درک درست از تقسیم بر یک عدد، مستلزم این است که نخست آن عدد را یک شیء بدانیم و سپس فکر کنیم که چند تا از آن شیء، در این مقسوم یافت می‌شود؟ حال در مورد مفهوم کسر، مثلاً $\frac{2}{3}$ ، فکر کنید. اگر کسی یک شیء خاص، مثلاً یک پای سیب^۳ یا یک مستطیل را بردارد، آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کند و دو تا از آن‌ها را بردارد، یعنی فقط برحسب چنین فعالیتی به $\frac{2}{3}$ فکر کند، معلوم می‌شود که او، $\frac{2}{3}$ را به عنوان ”عمل“، درک کرده است. بعد از تکرار چنین عملی و تمرکز بر آن، این فرد ممکن است بتواند یک فرآیند درونی بسازد که از طریق آن، یک شیء نامعلوم را در تصور خود، به سه قسمت تقسیم کند و دو تا از آن‌ها را بردارد. در این صورت، او $\frac{2}{3}$ را یک «فرآیند» در نظر گرفته است؛ درکی که اغلب مردم، بدون سختی زیاد به آن می‌رسند و یک قدم ضروری و مشکل برای درک تقسیم یک عدد بر $\frac{2}{3}$ است. مثلاً، برای تقسیم ۵ بر $\frac{2}{3}$ ، وقتی پرسیده می‌شود که «چند تا $\frac{2}{3}$ در ۵ وجود دارد؟»، این سؤال مستلزم درک $\frac{2}{3}$ به عنوان یک ”شیء“ است. بدون چنین درک درستی، فکر کردن به جواب این مسئله، سخت است. ولی اگر فرد، فرآیند تقسیم کردن به ۳ قسمت و انتخاب ۲ قسمت از آن را که تا حدودی موجودیت انتزاعی دارد، فشرده‌سازی کند، درک این جواب ساده‌تر می‌شود. البته، تجربه نشان می‌دهد که یادگیرندگان برای چنین درکی، نیازمند کمک و آموزش هستند. اما چگونگی مداخله آموزشی برای این که فرآیند $\frac{2}{3}$ به عنوان یک شیء دیده و خوانده شود، امری نابدیهی است. در بخش بعدی، روش‌هایی را که ممکن است به یادگیرندگان در این امر کمک کند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

^۳ Apple Pie نوعی کیک گرد که در ایران نیز مرسوم شده است.

مطالب فوق، شرحی مختصر از تجزیه و تحلیلی است که مستلزم پژوهش‌های زیاد است و لازم است که برای هر مفهوم ریاضی که می‌خواهیم دانش‌آموزان/ دانشجویان آن را یاد بگیرند، انجام شود. بعد از آشنایی با چگونگی به‌کارگیری این ایده‌ها در ریاضیات مقدماتی، نظریه APOS را به‌عنوان صورت‌بندی جدیدی از نظریه پیازه، به گونه‌ای تبیین می‌کنم که بتواند برای تجزیه و تحلیل یادگیری مفاهیم ریاضی پیشرفته‌تر نیز به‌کار گرفته شود.

پداگوژی مبتنی بر APOS : نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای

کارم را با جستجو برای رویکردهای پداگوژیکی که با این نظریه متناسب باشند، شروع کردم. می‌خواستم راه‌هایی پیدا کنم تا دانش‌آموزان/ دانشجویان را تهیج کنم که پس از تجزیه و تحلیل نظری مفاهیم، هر وقت که لازم بود، ساختارهای ذهنی مورد نیاز را بسازند. متوجه شدم که می‌توان از طریق واداشتن دانش‌آموزان/ دانشجویان به نوشتن برنامه‌های خاص یا فقط کدهای رایانه‌ای، خیلی در این جهت پیش رفت. یعنی برای هر ساخت‌وساز ذهنی شکل گرفته پس از تجزیه و تحلیل APOS، می‌توان یک تکلیف رایانه‌ای مانند نوشتن برنامه یا فقط کد، پیدا کرد که اگر دانش‌آموز/ دانشجویی درگیر انجام آن شود، به احتمال نسبتاً زیاد، خواهد توانست ساخت‌وسازهایی ذهنی بسازد که منجر به یادگیری ریاضی شود. من نمی‌گویم که تکلیف رایانه‌ای، یک ساختار ذهنی است، ولی چنین تکلیفی، تجربه‌ای است که ذهن یادگیرنده را به سمت یک یا چند ساخت‌وساز ذهنی هدایت می‌کند. برای روشن‌تر شدن این بحث، مثالی می‌زنم:

مفهوم تابع را در نظر بگیرید. طبق نظریه APOS، درک مفهوم تابع با درک “عمل” شروع می‌شود. یعنی معمولاً تابع به‌عنوان عبارتی جبری/ مثلثاتی در نظر گرفته می‌شود که با اعداد و نمادی مانند x یا نظایر آن، فهمیده می‌شود. “عمل” شامل جایگزین کردن x با یک عدد، انجام محاسبات مشخص در آن عبارت و به‌دست آوردن یک عدد به‌عنوان جواب است. “عمل” از خارج هدایت می‌شود، یعنی بر پایه فرمولی است که برای فرد اجرا کننده، یک عمل خارجی است. با تکرار و تمرکز بر عمل انجام شده، یادگیرنده می‌تواند این عمل را درونی کند^۱، یعنی یک ساختار ذهنی بسازد که همان کاری که توسط “عمل” از خارج انجام می‌شود، از طریق “فرآیند” که یک ساختار ذهنی جدید است، تبدیل به یک عمل داخلی شود. “فرآیند” به فرد اجازه می‌دهد که “عمل” را در حال اجرا (بدون این که واقعاً مجبور به اجرای آن باشد)، تصور کند. پس از آن، می‌توان به تابع این طور نگریست که “چیزی وارد می‌شود، عملی روی آن انجام می‌شود و چیزی خارج می‌شود”. بعد از این مرحله، می‌توان با هماهنگ کردن دو یا چند

^۱interiorize

فرآیند، فرآیندی جدید به دست آورد، یا آن که فرآیندی را اول در ذهن و بعد اگر لازم بود، با کمک مداد و کاغذ، وارونه یا معکوس کرد. سرانجام، اگر فردی بخواهد عملی روی این فرآیند ذهنی انجام دهد، اول باید آن را به عنوان یک کل ببیند و به طور ذهنی آن را در یک شیء فشرده کند تا بتواند از آن، یک طرحواره ذهنی بسازد. (برای جزئیات بیشتر، مقاله آسیالا و همکاران، ۱۹۹۶ را ببینید). حال، پداگوژی مناسبی که بتوان بر اساس این تجزیه و تحلیل نظری بنا کرد کدام است؟

برای استفاده از این ابزار نظری، لازم است معلم در آغاز، ایده‌ای راجع به نقطه شروع دانش‌آموزان/ دانشجویان برای ایجاد طرحواره‌های ذهنی‌شان داشته باشد. او باید بفهمد که آیا دانش‌آموز/ دانشجو، تابع را تنها به عنوان یک "عمل" می‌شناسد یا قادر به درک تابع به عنوان یک "فرآیند" هم هست، ولی هنوز نمی‌تواند این "فرآیند" را در یک "شیء" فشرده کند. بالأخره، مسئله این است که معلم چگونه می‌تواند به کمک مواد آموزشی، فعالیت‌های ذهنی دانش‌آموزان/ دانشجویان را بشناسد تا درس را جلو ببرد. دانش‌آموزان/ دانشجویان نیز برای این که درک خوبی از پیشرفت‌شان داشته باشند، باید با فعالیت‌های ذهنی خود آشنا باشند. در این راستا، یافته‌های پژوهشی به شاخص‌هایی رسیده‌اند تا بتوان به کمک آن‌ها و با استفاده از تجزیه و تحلیل، APOS در مورد این که حدوداً، دانش‌آموزان/ دانشجویان در چه مرحله‌ای قرار دارند، حدس‌های معقولی زد. برای مثال، اگر دانش‌آموزی/ دانشجویی اصرار داشت (همان‌طور که بسیاری چنین می‌کنند) که شرط وجود تابع، داشتن فرمولی صریح برای آن است، می‌توان حدس زد که احتمالاً درک این دانش‌آموز/ دانشجو از مفهوم تابع، در سطح عمل است. از سوی دیگر، اگر دانش‌آموز/ دانشجو چگونگی تشکیل مجموعه‌های توابع را بفهمد و تشخیص دهد که مشتق، می‌تواند عملگری باشد که تابع را به تابعی دیگر تبدیل کند، آنگاه شاید تفکر این دانش‌آموز/ دانشجو در مورد تابع در سطح شیء باشد.

در جریان کار با همکاران مختلف، همه متوجه شدیم که مفاهیم ریاضی بسیاری را می‌توان برحسب این اعمال، فرآیندها و اشیاء، تجزیه و تحلیل کرد. چنین تجزیه و تحلیل‌هایی می‌توانست مشکلات دانش‌آموزان/ دانشجویان را برحسب ساخت و سازهای ذهنی انجام نشده، توضیح دهد. از سوی دیگر، ما دریافتیم که اگر از دانشجویان می‌خواستیم که عملی ریاضی انجام دهند و یک برنامه رایانه‌ای بنویسند که بیان‌کننده آن عمل باشد، در اجرای این تکلیف، دانشجویان مایل بودند که این عمل را به صورت فرآیند، درونی کنند. حتی هیجان‌انگیزتر این بود که اگر پس از این تکلیف، دانشجو برنامه دیگری می‌نوشت که برنامه اول را به عنوان ورودی می‌پذیرفت، آن را به طریقی تبدیل می‌کرد و برنامه جدیدی پس می‌داد. یعنی این دانشجو به احتمال زیاد، قادر شده بود این فرآیند را فشرده‌سازی کند و آن را به عنوان یک شیء

ببیند. حرکت کردن مدام بین عمل و فرآیند در مفهوم‌سازی ایده‌های ریاضی، که برای ریاضی‌ورزی بسیار ضروری است، تقریباً بدون دردسر، از این پداگوژی نتیجه شد (ولر^۱ و همکاران، ۲۰۰۳).

بر اساس این ایده‌ها، یک رویکرد پداگوژیکی سازمان یافته ابداع کردیم. در این رویکرد، مواد درسی به واحدهای کوچکی تقسیم می‌شود که آموزش هر کدام، یک هفته طول می‌کشد. هر هفته، شامل انجام چرخه‌ای از سه نوع کار است. کار نخست این است که دانشجویان (اغلب در گروه‌های مشارکتی)، در آزمایشگاه رایانه روی نوشتن برنامه‌ها و کدهای طراحی شده برای پروراندن ساخت و سازهای ذهنی که می‌تواند به آن‌ها در درک مفاهیم آن واحد کمک کند، کار می‌کنند. آن‌ها این کار را خارج از کلاس انجام می‌دهند. دوم این که در کلاس درس، دانشجویان (باز هم به صورت گروهی) روی تکلیف‌هایی کار می‌کنند که به گونه‌ای طراحی شده‌اند که به دانشجویان، در تبدیل ساختارهای ذهنی‌شان به درک مفاهیم ریاضی، کمک کنند. سوم، با این فرض که اکثر دانشجویان به تدریج به درک و فهمی از ریاضی رسیده‌اند که با نوع درک ریاضیدانان متناسب است، تمرین‌هایی طراحی می‌شوند که هدف آن‌ها، تمرین، تقویت و گسترش دانشی است که در حال ایجاد است (آسیالا و همکاران، ۱۹۹۶).

ما درس‌های دوره کارشناسی را مبتنی بر این رویکرد، طراحی و اجرا کرده‌ایم. تمام کتاب‌های درسی نوشته شده دارای این ساختار هستند و محتوای آن‌ها، نشان‌دهنده این چرخه سه قسمتی است. با استفاده از هر دو روش پژوهش کمی و کیفی در مورد عملکرد و نگرش دانشجویان، پژوهش‌های تجربی انجام داده‌ایم. نتایج این پژوهش‌ها حاکی از این بود که این رویکرد، می‌تواند در کمک به دانشجویان برای یادگیری مفاهیم پیشرفته ریاضی در موضوعاتی مانند انواع درس‌های ریاضی عمومی دانشگاهی، ریاضی گسسته، جبر مجرد، و جبر خطی خیلی مؤثر باشد (ولر و همکاران، ۲۰۰۳). البته باید اذعان داشت که این رهیافت پداگوژیکی مستلزم وجود مدرسانی است که نه تنها فکرشان را در مورد یادگیری و تدریس به‌طور چشم‌گیر و معنادار تغییر داده‌اند، بلکه تلاش قابل‌توجهی برای یادگیری این روش نیز به خرج می‌دهند. ما معتقدیم که این استلزامات، از جمله چیزهایی است که گزینش گسترده این روش را در تدریس ریاضی دوره کارشناسی، محدود کرده است.

داستان باب

در سال تحصیلی ۱۹۸۸-۱۹۸۷، من به‌عنوان یکی از والدین، به‌طور داوطلب در «برنامه آزاد»^۲ در مدرسه مارتین لوتر کینگ پسر^۳ در شهر کمبریج واقع در ایالت ماساچوست، به کلاس هشتمی‌ها جبر

^۱Weller ^۲Open program ^۳Martin Luther King Jr. School

تدریس می‌کردم. پسر^۱، او در این کلاس بود و از دوستانش هم خواسته بود که به این کلاس بیایند تا موقع یادگیری جبر، احساس تنهایی نکنند. یکی از دوستانش که می‌خواست عضو گروه باشد، جدول ضرب بلد نبود. من او را در این کلاس پذیرفتم و هر روز کنار هم، کار می‌کردیم. وقتی به سؤالاتی در مورد محور اعداد رسیدیم، متوجه شدم که موقع جمع کردن اعداد صحیح روی محور اعداد، او همیشه پاسخ‌های یکسان به دست می‌آورد. یعنی، او دائم به سؤالی غیر از آنچه کتاب می‌پرسید، پاسخ می‌داد. در حقیقت، این دانش‌آموز فقط یک سؤال در مورد اعداد در ذهنش داشت و آن، “چندتا” بود. مشکل من هم پیدا کردن سؤال دیگری در مورد اعداد بود که در ذهن وی ایجاد کنم.

سرانجام، سؤال “کدام راه” را انتخاب کردم. این سؤال، بخشی از روال روزانه و اصطلاحات مورد استفاده او بود. مثلاً او می‌دانست چطور بپرسد که “کدام راه به مرکز خرید؟” یا “کدام راه به منزل دوستش؟” می‌رود، اما نمی‌توانست سؤال‌های “چندتا” را با سؤال‌های “کدام راه”، به عنوان بخشی از مفهوم عدد، تلفیق کند. در نتیجه یکی از دغدغه‌های من این شد که چگونه سؤال‌هایی از جنس “کدام راه”، را با درک وی از عدد، در شرایطی برابر با “چندتا” قرار دهم.

یک روز برای رفتن از کمبریج به بوستون، وارد «تی استاپ»^۲ در خط «رد لاین»^۳ در ایستگاه متروی «سانترال اسکوائر»^۴ شده و متوجه شدم که در بلندگو از همه مسافران خواسته می‌شود که اول، نسبت به جهت حرکت خود، تصمیم بگیرند [منظور از چه مبدئی به چه مقصدی] و بر اساس آن، خط خود را انتخاب کنند - یعنی دو پاسخ برای سؤال “کدام راه” وجود داشت. در این موقع، ایده‌های کواين^۵ را در مورد فرآیند تولید بعضی از مفاهیم ریاضیات مقدماتی از طریق یادگیری تجربی به یاد آوردم- ایده‌ای که برنامه آموزشی “برنامه آزاد” در مدرسه مارتین لوترکینگ پسر، از آن الهام گرفته بود. با مشاهده این پدیده، به همراه سایر معلمان و دانش‌آموزان مدرسه، به این ایستگاه مترو رفتیم و از دانش‌آموزان خواستیم که در مورد سوار شدن به مترو مطلب بنویسند، حرف بزنند و نقاشی کنند. ما این بازنمایی‌ها^۶ را به عنوان “بازنمایی عقل سلیم”^۷ آن‌ها در نظر گرفتیم - آنچه که کواين آن را “گفتمان معمولی” می‌خواند. سپس از دانش‌آموزان خواستیم که جنبه‌های مهم این بازنمایی‌ها را به عنوان ویژگی‌های آن‌ها شناسایی کنند. آنگاه با دانش‌آموزان درباره ویژگی‌های بدیهی مانند سوار شدن در ابتدای مسیر و پیاده شدن در مقصد و ویژگی‌هایی که خیلی هم بدیهی نبودند، مثل مکان‌ها و موقعیت‌های نسبی توقفگاه‌ها، بحث و گفتگو کردیم.

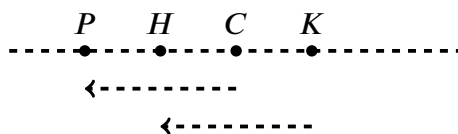
^۴ Central Square این ایستگاه مترو، در بین راه دانشگاه هاروارد تا ام.آی.تی قرار دارد و واقع در خیابان ماساچوست است.

^۱Omo ^۲T- Stop ^۳Red Line ^۵Quine ^۶Representation ^۷Common sense

کواين اين فرآيند، يعنى حرکت از گفتمان معمولی به زبان منظم مورد استفاده در ریاضی را "ریاضی‌وار کردن"^۱، رویدادها می‌شناسد. با اقتباس از نظریه کواين، بازنمایی‌های عقل سلیم را "حرف عامه"^۲ و بازنمایی‌های منظم یا قاعده‌مند را "حرف خاص"^۳ نامیدیم. سپس دانش‌آموزان را درگیر فرآیند ساخت نمادها کردیم؛ نمادهایی در قالب بازنمایی‌های تصویری و مجرد برای ویژگی‌هایی که قصد ریاضی‌وار کردن آن‌ها را داشتیم. به این ترتیب، برای ویژگی‌های گوناگون این رفت و آمدهای درون‌شهری، بازنمایی‌های تصویری و بازنمایی‌های مجرد تولید کردیم.

با گذشت زمان، مشخص شد دانش‌آموزانی که این رفت و آمدها را ریاضی‌وار کردند، استعاره‌ها و تصوراتی قوی برای جمع و تفریق کسب کرده‌اند که با استعاره‌های آن‌ها برای اعمال حسابی، خیلی تفاوت داشت. برای نمونه، می‌توان به مفهوم "جابجایی" به عنوان یک شیء ریاضی برای پاسخ دادن به دو نوع سؤال "چندتا" و "کدام راه" اشاره نمود. دو سؤال زیر را در نظر بگیرید: "روی نقشه ردلاین، میدان پورتر^۴ نسبت به سانترال اسکوئر در کمبریج، کجا قرار دارد؟" و "هاروارد اسکوئر^۵ نسبت به کندال اسکوئر^۶، کجا قرار دارد؟"

مبنای هر دو سؤال، مفهوم موقعیت نسبی دو ایستگاه در مسیر ردلاین است و پاسخ هر دو، یکسان است: "دو ایستگاه دورتر". این پاسخی به دو نوع سؤال "چندتا" و "کدام راه" است. همچنین، نمایش هندسی این پاسخ، جابجایی دو مکان یا دو نقطه است. دانش‌آموزان به تغییر مکان از سانترال اسکوئر به پورتر اسکوئر، به صورت شروع از سانترال اسکوئر و سپس دو واحد جابجایی فکر کردند و حرکت از کندال اسکوئر به هاروارد اسکوئر را به صورت شروع از کندال اسکوئر و دو واحد جابجایی تصور کردند. بنابراین دو تغییر مکان داریم که دارای تعداد مساوی توقف بوده و در جهت یکسان هستند، یعنی این دو حرکت، جابجایی یکسانی را نشان می‌دهند.



ما این نمودار را "بازنمایی تصویری" برای این رفت و آمدها می‌خوانیم. بازنمایی "حرف عامه"، گزاره‌های زیر هستند:

پورتر دو ایستگاه دورتر از سانترال است.

هاروارد دو ایستگاه دورتر از کندال است.

^۱Mathematizing ^۲Ordinary Discourse ^۳Regimented Language ^۴Porter Square ^۵Harvard Square

^۶Kendal Square

”حرف خاص“ شامل اشاره دقیق به مکان و موقعیت نسبی ایستگاه‌ها است. این بازنمایی، عمل ”جمع“ را با حرکت از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر در یکی از دو جهت و علامت ”تفریق“ را با مقایسه ایستگاه پایانی (مقصد) نسبت به ایستگاه آغازین (مبدأ)، نشان می‌دهد. به عبارت دیگر،

با شروع از کندال اسکوئر و دو ایستگاه نقل مکان، به هاروارد اسکوئر می‌رسیم.

این ”حرف خاص“، منجر به جمع می‌شود.

ایستگاه هاروارد در مقایسه با کندال، ۲ ایستگاه دورتر است

این ”حرف خاص“، منجر به تفریق می‌شود. برای این ریاضی‌ورزی^۱، بعضی از ایستگاه‌ها را به‌عنوان معیار^۲ انتخاب کردیم. سپس با دانش‌آموزان در مورد اختصاص دادن نمادهایی مانند ۰ (صفر) برای معیار، x_1 برای مکان کندال (یکی از ایستگاه‌ها)، x_2 برای مکان هاروارد (یک ایستگاه دیگر)، و Δx برای جابجایی، بحث و گفتگو کردیم. در چنین وضعیتی، اولین جمله ”حرف خاص“ چنین می‌شود:

$$x_1 + \Delta x = x_2$$

و دومین ”حرف خاص“ می‌شود:

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

ما می‌توانیم فرآیند ریاضی‌وار کردن این نوع جمله‌ها را در هشت مرحله زیر خلاصه کنیم:

۱. شناسایی جمله مورد مشاهده.
- هاروارد دو ایستگاه دورتر از کندال است.
۲. شناسایی اسامی در جمله‌ها.
- هاروارد، کندال.
۳. شناسایی مُسند (خبر یا دلالت) جمله‌ها.
- در این حالت، مُسند رابطه تساوی (”است“) بین اسم (”هاروارد“) و شی حاصل از به‌کارگیری عمل (”دو ایستگاه دورتر“) روی اسم (”کندال“) است.
۴. ساخت یک نماد تصویری برای اسم(ها).
- این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.
۵. ساختن یک نماد تصویری برای مُسند.
- این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.

۶. ساختن یک بازنمایی تصویری برای این جمله.

این نمودار، مسیر رفت و آمد شده در بالا را نشان می‌دهد. این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.

۷. ترجمهٔ جملهٔ مشاهده شده، به جمله‌ای با استفاده از زبان منظم یا قاعده‌مند.

دو راه برای انجام این کار وجود دارد:

الف. با شروع از کندال، دو ایستگاه بعد به هاروارد می‌رسیم.

ب. موقعیت هاروارد در مقایسه با کندال، ۲ ایستگاه دورتر است.

(۱) شناسایی نمادهای مرسوم که برای ترجمهٔ زبان منظم یا قاعده‌مند به نمادهای مرسوم ریاضی و انجام آن ترجمه، مورد نیاز هستند. برای ایستگاه‌های هاروارد و کندال، می‌توانیم به ترتیب $L(H)$ و $L(K)$ و علامت + را برای "حرکت" و - را برای "در مقایسه با" در نظر بگیریم. این نمادگذاری، منجر به بازنمایی نمادین مجرد دو جملهٔ زیر می‌شود:

$$\text{الف.} \quad L(K) + -2 = L(H)$$

$$\text{ب.} \quad L(H) - L(K) = -2$$

این دستورالعمل برای تبدیل یک تجربه به بیان ریاضی، که می‌توان آن را در طیف گسترده‌ای از موقعیت‌ها اعمال کرد، به همراه دانش‌آموزانی که واقعاً این موقعیت را تجربه می‌کنند، نشان‌دهندهٔ دستاورد اصلی یک پداگوژی است که "یادگیری تجربی" نامیده می‌شود.

یک سنتز

در تلفیق ایده‌هایی که در برنامهٔ درسی جبر توضیح داده شد، از ساختار توصیف شده در داستان باب، به عنوان چارچوب هدایت‌کننده استفاده شد. در این برنامه، به "عمل"، "فرآیند"، و "شیء"های ممکن که دانش‌آموزان می‌توانند در ذهنشان بسازند، به همان گونه که در داستان اد توصیف شد، توجه شده است. برای نمونه، بخشی از برنامه شامل استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای با بازی‌های معین و بحث و نوشتن درباره آن‌هاست. از سوی دیگر، بسیاری از جزئیات این بازی‌ها، با توجه به لزوم ایجاد ساختارهای ذهنی و معین پیشنهاد شده توسط نظریهٔ APOS، طراحی می‌شوند. ما می‌توانیم از تلفیق این دو "داستان" استفاده‌های بسیاری بکنیم. مثلاً رابطه‌ای مانند زیر را در نظر بگیرید که در هر کتاب جبر پایه دبیرستانی دیده می‌شود:

$$a - b = a + -b$$

در این رابطه، هر دوی a و b می‌توانند عدد صحیح باشند. همان‌طور که در بحث رفت و آمدهای داستان باب دیدیم، یک عدد صحیح را می‌توان یک حرکت با تعداد معینی از قدم‌ها و در جهتی معین، یا مکانی روی محور اعداد قلمداد کرد. پس سؤال این است که عدد صحیح، یک حرکت است یا یک مکان؟ نظریه APOS در داستانِ اد، این ابهام ظاهری را حل می‌کند. اگر عدد صحیح را به حرکت تعبیر کنیم، آنگاه بنابر نظریه APOS، یک فرآیند است و فشرده‌سازی آن فرآیند، شیئی است که در مورد عدد صحیح، مکانی روی محور اعداد است. با سازوکار فشرده‌سازی و وارونه کردن این فرآیند، ممکن است تعبیرمان را از عدد صحیح به عنوان یک حرکت یا یک مکان، بارها تغییر دهیم. حال فرض کنید از مکان b شروع به (این) حرکت می‌کنیم:

$$a + -b$$

این تغییر مکان، با حرکت از معیار (مبدأ) به مکان a و انجام حرکت $-b$ برای رسیدن به مکان $a + -b$ که برعکس فرآیند فشرده‌سازی است، انجام می‌شود (گاهی آن را $a + -b$ نیز می‌خوانیم). حالا می‌توانیم با شروع حرکت از مکان b ، حرکت $a + -b$ را ایجاد کنیم که بر اساس تعبیرمان از عمل "جمع"، ما را به مکان

$$b + (a + -b)$$

می‌رساند که این هم با استفاده از خاصیت‌های استاندارد اعداد صحیح، برابر با مکان a است^۱. به‌طور خلاصه، به ما گفته شده اگر از b شروع کرده و حرکت $(a + -b)$ را ایجاد کنیم، آنگاه به a می‌رسیم. علاوه بر این، بنابر تعبیرمان از "تفریق"، این حرکت فقط $a - b$ است. پس داریم

$$a - b = a + -b.$$

این رابطه به نظر روشن‌تر از آن است که برای ریاضی‌دانان باتجربه بیان شود، اما به‌صراحت می‌توان گفت که تقریباً در هر کتاب درسی جبر دبیرستانی وجود دارد و برای دانش‌آموزان، از قسمت‌های سخت شروع جبر است.

ما برای تولید برنامه برای کلاس درس، محتوا را به قطعاتی تقسیم می‌کنیم. هر قطعه را با تجربه‌ای، مثل یک بازی، شروع می‌کنیم. دانش‌آموزان بازی را انجام داده و اطلاعات چشم‌گیری را ثبت می‌کنند. سپس هر دانش‌آموز، توصیفی از آنچه را که موقع انجام بازی اتفاق افتاده می‌نویسد. آن‌ها به نوشتن جمله‌های کامل و منظم در بندهای مختلف یا همان "حرف عامه"، تشویق می‌شوند. سپس در یک

^۱ قبل از این که این روابط توضیح داده شوند، این خواص در برنامه درسی ریاضی ما آمده است (این پانویس از نویسندگان است).

بحث کلاسی، معلم به دانش‌آموزان در تشخیص ویژگی‌های بازی یعنی “حرف خاص”، “عمل”‌هایی که با این ویژگی‌ها اجرا می‌شوند، و گزاره‌ای که هدف بازی یا “فرآیند ریاضی‌ورزی” را توصیف می‌کند، یاری می‌رساند. آنگاه از دانش‌آموزان خواسته می‌شود برای پاسخ‌گویی به سؤالات معین طراحی شده برای پیش بردن آن‌ها به سمت ریاضی‌وار کردن یک موقعیت، بیشتر به صورت گروهی کار کنند. این بحث، با توصیف معلم از زبان و نمادهایی که توسط ریاضیدان‌ها استفاده می‌شود، به پایان می‌رسد. همچنین می‌توانیم از این رویکرد در تعبیر دو معادله خیلی مهم که در دروس ریاضی بعد از جبر می‌آید، استفاده کنیم:

$$x_2 - x_1 = \Delta x$$

$$x_1 + \Delta x = x_2$$

بنابر تعبیرمان از تفریق، رابطه اول مبین این است که نتیجه مقایسه x_2 با x_1 ، Δx است. یعنی این حرکتی است که ما را از x_1 به x_2 می‌برد. به عبارت دیگر، اگر از x_1 شروع کنیم و حرکت Δx را انجام دهیم، به x_2 می‌رسیم که بنا به تعبیرمان از جمع، دقیقاً معادله دوم است.

البته این دو معادله، چیزی بیش از حساب ساده را شامل نمی‌شود، اما برای انجام دادن همان حساب با هر نوع درک و فهمی، دانش‌آموزان به تعبیرها یا استعاره‌های مفیدی برای این معادلات احتیاج دارند. ما معتقدیم استعاره‌هایی که برای جمع و تفریق اعداد صحیح ارائه کرده‌ایم، می‌توانند تعبیرهای لازم را فراهم کنند.

یک مثال

به عنوان آخرین مثال، به اختصار، رئوس مطالب برنامه درسی برای موضوع حساب پیمانده^۱ که مبتنی بر چند بازی خاص است، ارائه می‌شود. در بحث این بازی‌ها و آنچه که در کلاس درس اتفاق می‌افتد، توضیح می‌دهیم که چطور این پداگوژی، به ایده‌های مطرح در داستان‌های اد و باب، مربوط می‌شود.

اولین هدف این واحد درسی برای دانش‌آموزان، درک عمل ریاضی “تقسیم با باقیمانده”، برای تقسیم عدد صحیح مثبت a بر عدد صحیح مثبت b برحسب معادله کلاسیک زیر است:

$$a = qb + r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, b - 1. \quad (1)$$

^۱Modular Arithmetic

این بخش از درس، با یک بازی به نام “چرخیدن به دور مکان‌ها”^۱ شروع می‌شود. در این بازی، دوازده جایگاه وجود دارد که نشان‌دهنده اعداد روی صفحه ساعت یا دایره البروج سال‌های چینی^۲ است. در آغاز بازی، یک جایگاه به عنوان مبدأ انتخاب می‌شود (به‌طورکلی، انتخاب‌ها توسط دانش‌آموزان کلاس با قدری راهنمایی از جانب معلم انجام می‌شود) و در طول بازی، یک دانش‌آموز در آن جایگاه می‌نشیند. بازی به این ترتیب است که دانش‌آموزان، یک عدد صحیح انتخاب می‌کنند و دانش‌آموز دوم به محل شروع می‌رود و با حرکت از میان جایگاه‌ها، آنقدر می‌شمارد تا به عدد انتخاب شده برسد. در حین حرکت دانش‌آموز دوم، دانش‌آموز اول که در جایگاه نشسته، تعداد دفعاتی را که دانش‌آموز دوم از جلوی او گذشته و همچنین جایگاه آخری را که به آن می‌رسد، یادداشت می‌کند.

ویژگی‌های این بازی عبارت‌اند از: مکان شروع، تعداد مکان‌هایی که باید از آن‌ها گذشت، تعداد گردش‌ها و مکان پایانی. عمل این بازی، شمردن مکان‌ها است و گزاره‌ای سؤال‌ی مبنی بر این که “چند گردش وجود دارد؟”. مقصود از این بازی برای دانش‌آموزان این است که فرآیند حرکت از میان جایگاه‌ها و گردش به دور دایره را در ذهن خود بسازند. ما این کار را نخست با واداشتن دانش‌آموزان به ضرب کردن اعداد صریح b در اعداد q و اضافه کردن مقادیر r که کمتر از b هستند و دوم، با درونی کردن این عمل به فرآیندی که همین کار را می‌کند، انجام می‌دهیم. دلیل انجام این کار آن است که یک تجزیه و تحلیل APOS، فرآیند ذهنی زیربنایی (۱) را به عنوان عکس فرآیند ضرب کردن b با q و اضافه کردن r بیان می‌کند.

بازی بعدی هم به همین شکل انجام می‌شود با این تفاوت که این بار، به جای انتخاب تنها یک عدد برای شروع برای تعداد چرخش‌ها، دانش‌آموزان عدد دیگری به عنوان میزان افزایش آن تعداد نیز (که باید عددی بین ۰ تا ۱۱ باشد)، انتخاب می‌کنند. اساساً ویژگی‌های این بازی نیز با بازی قبلی یکسان است، اما عمل ضرب تعداد گردش‌ها در ۱۲ و میزان افزایش برای پاسخ به این گزاره که “چند جایگاه پیموده شده است؟”، به آن اضافه شده است. با این ریاضی‌ورزی، دانش‌آموزان به درک فرمول اصلی تقسیم با باقیمانده (۱) هدایت می‌شوند. این بازی، بیانگر یک فرآیند ذهنی است که در آن، گذشتن از دوازده جایگاه، در یک “گردش”^۳ فشرده‌سازی شده است.

بازی بعدی برای کمک به دانش‌آموزان در معکوس کردن فرآیند ذهنی ضرب کردن تعداد گردش‌ها در ۱۲ و اضافه کردن میزان افزایش، طراحی شده است. این بازی با در نظر گرفتن دوازده جایگاه به نمایندگی از اعداد روی صفحه ساعت نیز، انجام می‌شود و عدد ساعت‌ها برای نشان دادن زمان سپری

^۱Winding Around Positions ^۲Chinese Years Zodiac ^۳Wind

شده است. با کار کردن به صورت گروهی، دانش‌آموزان از ۱۲ شروع می‌کنند و ساعت را می‌شمارند تا تعداد گردش‌ها و میزان افزایشی که زمان نهایی را روی (صفحه) ساعت نشان می‌دهد، تعیین کنند. ویژگی‌های این بازی عبارت‌اند از: زمان سپری شده، تعداد گردش‌ها، و باقیمانده یا زمان پایان. در این بازی، عمل شامل تقسیم زمان سپری شده بر ۱۲ برای یافتن تعداد گردش‌ها (خارج قسمت) و زمان پایان (باقیمانده) است. ریاضی‌ورزی این بازی، تقسیم با باقیمانده است و با همان فرمول (۱) نمادگذاری می‌شود، با این تفاوت که در اینجا، بیان‌کننده معکوس آن فرآیند است که شامل ضرب تعداد گردش‌ها در ۱۲ و اضافه کردن میزان افزایش برای به دست آوردن کل بود. در حالی که فرآیند معکوس، شامل شروع با کل، تعیین تعداد گردش‌ها و تعیین باقیمانده است.

حال می‌توان همه این بازی‌ها را با جایگزین کردن هفت روز هفته به جای دوازده ساعت، تکرار نمود. سپس با بحث کردن راجع به آن چه که در همه این بازی‌ها مشترک است، یعنی ریاضی‌وار کردن این بازی‌ها، به این جمع‌بندی می‌رسیم که برای به دست آوردن مفهوم یک عدد صحیح به پیمانه n به طوری که در آن n ، برابر ۱۲، ۷، یا هر عدد صحیح مثبت دیگری باشد، همنهشتی به پیمانه n ، افراز مجموعه‌هایی از اعداد صحیح و رابطه بین هم‌ارزی و افراز را مجاز می‌سازد.

سپس می‌توان برای انجام حساب، به بازی‌های ساعت و روزهای هفته با استفاده از همان منظر معرفت‌شناسی و همان پداگوژی بازگشت. برای عمل جمع، به سادگی می‌توان بازی گردش را با دو عدد انجام داد که عدد اول نقطه شروع (ساعت ۱۲ یا یکشنبه) و عدد دوم نقطه پایان است. ایده عمیق ریاضی موجود در این بازی (که به احتمال زیاد به همین دلیل، در دسترس دانش‌آموزان قرار می‌گیرد) آن است که می‌توان برای جمع کردن دو عدد a و b به پیمانه n یا اول آن‌ها را جمع کرد و بعد هم‌ارز آن را در پیمانه n یافت، یا اول هم‌ارز آن‌ها را یافت و بعد در پیمانه n آن‌ها را جمع کرد. البته ویژگی‌های گروه $\mathbb{Z}_n$ با عمل جمع به پیمانه n را می‌توان به طور کامل برحسب گردش به دور ساعت یا در تقویم، مورد بحث قرار داد.

برای عمل ضرب، بازی جمع را چندین بار با همان عدد انجام می‌دهیم. این کار باعث می‌شود دانش‌آموزان به ضرب، به عنوان تکرار جمع توجه کنند. پداگوژی استفاده شده در اینجا نیز کاملاً مثل قبلی‌ها شامل بحث گروهی دانش‌آموزان، گفتگو راجع به ویژگی‌ها، ریاضی‌ورزی از طریق انجام اعمال روی این ویژگی‌ها، ارزشیابی گزاره‌ها و تخصیص نمادها است که نتیجه همه این‌ها، درک مفهوم ضرب به پیمانه n است. چون مبناهای ۱۲ و ۷ مورد استفاده قرار گرفتند، دانش‌آموزان می‌توانند مستقیماً پدیده ریاضی وضع اصول موضوع برای یک میدان را که در دستگاه پیمانه ۷ صدق می‌کند اما در دستگاه پیمانه

۱۲ صدق نمی‌کند، تجربه کنند. حتی ممکن است بعضی از دانش‌آموزانِ باهوش‌تر، به فکر کردن در مورد ویژگی‌های ۱۲ و ۷ که منجر به این تفاوت می‌شود، علاقه‌مند شوند.

پروژه جبر و جنبش حقوق مدنی

ایالات متحده آمریکا برای پایه‌ریزی اقتصادی نظام طبقاتی ایجاد شده بعد از جنگ داخلی، صنعت فولاد را با به خدمت گرفتن برده‌وار مردان جوان سیاه پوست در آلاباما^۱ ساخت و صنعت نساجی‌اش را بر پایه حقوق ناچیزی که بین کارگران پنبه‌چین در می‌سی‌سی‌پی توزیع می‌کرد^۲، بنا نهاد. جنبش حقوق مدنی، مظاهر نظام طبقاتی را با ایجاد خواست عمومی برای امکانات رفاهی همگانی، رأی‌گیری و حزب دموکرات ملی، برچید. با وجود این، آشکارترین مظهر این نظام طبقاتی، در مدارس عمومی باقی مانده است. پروژه جبر، حُلف مستقیم جنبش حقوق مدنی سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۶۵ در آمفی تئاتر می‌سی‌سی‌پی، درست سروقت این بُعد از کارِ ناتمام جنبشِ ملت می‌رود.

موضوع بحث ما این است که با استیلای فناوری اطلاعات و پیچیدگی فزاینده جامعه، ریاضی هم مانند خواندن و نوشتن، بخش اصلی سواد شهروندی است. یعنی تاریخ نشان می‌دهد که ریاضی‌دانان و متخصصان آموزش ریاضی در آمریکا خواسته یا ناخواسته، به وسط تنگناهای بنیادی اجتماعی هل داده شده‌اند و از آن‌ها انتظار رفته است که برای خروج از تنگناهایی مانند توافق و سازگاری آرمان‌ها در اعلامیه استقلال آمریکا^۳ و مواجهه قانون اساسی ایالات متحده با ساختارهای نژادی و طبقاتی و میراث برده‌داری و تبعیض نژادی^۴، راه‌حل‌های مناسب ارائه دهند. حاصل آن که، در سال ۱۸۷۵، کنگره حاضر نشد درخواست رئیس جمهور را برای متمم مشروطیت تضمین حق آموزش برای همه کودکان از جمله برده‌های آزاد شده در سطح دولت فدرال، مورد رسیدگی قرار دهد. کنگره، لایحه قانونی حقوق مدنی را تصویب کرد، اما دیوان عالی در سال ۱۸۸۳، اعلام کرد که کنگره حق نداشته است این کار را انجام دهد و این طور شد که صحنه برای هشتاد و یک سال تبعیض‌های جدی نژادی و طبقاتی مهیا گشت.

دادگاه تصمیم گرفت که به‌منظور دسترسی همگانی به امکانات رفاهی، متممی بر قانون اساسی بزند که از طریق آن، مردم به‌جای شهروندان کشور، شهروندان ایالت‌ها باشند، در حالی که طبق قانون اساسی، حق رأی و عضویت در ساختارهای حزبی سیاسی کشور و آموزش در مدارس دولتی، برایشان محفوظ بماند.

^۱Blackmon, Slavery by Another Name ^۲Barry, Rising Tide; Lemann, Redemption and the Promised

Land ^۳The Declaration of Independence ^۴Jim Crow

حکم دیوان عالی کشور در سال ۱۹۵۴، این وضعیت قانون اساسی در ارتباط با آموزش کودکان کشور را به چالش نکشید. بلکه بند "حمایت برابر"^۱ از متمم چهاردهم قانون اساسی را تأیید کرد که طبق آن، ایالت‌ها به‌جای دولت فدرال و بر اساس قانون اساسی، موظف به فراهم نمودن دسترسی برابر به آموزش مدرسه‌ای دولتی برای تمام شهروندان هستند. همان‌طور که جیمز بریانت کونانت در سال ۱۹۶۱ به ما یادآوری کرد، آشکارترین تجلی نظام طبقاتی کشور، خود را در نظام آموزشی نشان داد (کونانت، ۱۹۶۱).

این نابرابری در سال ۱۹۶۸ تأیید شد، زمانی که چهارصد دانش‌آموز دبیرستانی مکزیکایی-امریکایی، مدرسه را به قصد شرکت در راهپیمایی به‌منظور تقاضا برای برخورداری از امکانات فیزیکی بهتر و معلمان بهتر، ترک کردند. مادران آن‌ها نیز شکایت کردند و مورد آن‌ها یعنی "مدرسه مستقل سن آنتونیو در منطقه رودریگز" در ۲۱ مارس ۱۹۷۳، مورد تصمیم‌گیری قرار گرفت:

رای اکثریت دادگاه لوئیس پاول در رودریگز این است که آموزش یک حق اساسی نیست، چون به‌طور صریح یا ضمنی در قانون اساسی تضمین نشده است.

حکم پاول در عمل تضمین کرد که آموزش مدارس دولتی، واضح‌ترین مظهر نظام طبقاتی کشور بماند که در حال حاضر از طبقه هم‌گذشته و به نژاد نیز گسترش یافته است. این وضعیت هنوز هم برقرار است. وقتی در سال ۱۹۶۰، رابرت کندی به ریاست جمهوری آمریکا رسید، دانشجویان سیاه‌پوست در دانشگاه‌ها و کالج‌های سیاه‌پوستان، پا به عرصه تاریخ گذاشتند: "در اول فوریه سال ۱۹۶۰، چهار دانشجوی آفریقایی-آمریکایی در محوطه غذاخوری وولورث گرینز برو در ایالت کارولینای شمالی، تحصن کردند و مؤدبانه درخواست خدمات نمودند. تقاضای آن‌ها رد شد. وقتی از این دانشجویان خواسته شد که آنجا را ترک کنند، آن‌ها در صندلی‌های خود باقی ماندند. مقاومت منفی و تحصن صلح‌آمیزشان، به مشتعل شدن جنبش جوانان در به چالش کشیدن نابرابری نژادی در سراسر جنوب، کمک کرد."

دانشجویان متحصن خواستار تغییر عملی در وضعیت قانونی خود بودند: به‌منظور دسترسی به امکانات رفاهی همگانی، آن‌ها خواستار داشتن موقعیت و شأنی برابر با سایر شهروندان کشور بودند نه این که تنها شهروندان ایالتی به‌حساب آیند. این تقاضا یک سال بعد با اعتراض "سواران آزادی"^۲، شفاف‌تر شد.

^۲ Freedom Riders، در این حرکت، سیاه‌پوستان برای اولین بار وارد اتوبوس‌های عمومی سفیدپوستان شدند و این خود سرفصل جدیدی در مبارزات ضدنژادپرستی در ایالات متحده بود.

^۱Equal Protection

با تشکر زیاد از الابرک^۱، جنبش تحصن تبدیل به شبکه‌ای از رهبران تحصن با عنوان "کمیته هماهنگی دانشجویی عدم خشونت"^۲ یا SNCC شد. سپس آموزی مور، از این انرژی تولید شده توسط نهضت SNCC برای اعتراض به وضعیت کشاورزان (سهم‌گیر) در دلتای می‌سی‌سی‌پی و بی‌توجهی قانون اساسی به آن‌ها استفاده کرد و بالأخره به یمن تلاش‌هایش به مردم می‌سی‌سی‌پی حق رأی داده شد. در حقیقت، SNCC از کشاورزان (سهم‌گیر)، نه تنها در مطالبه حقوق خود به‌عنوان شهروند کشور و داشتن حق رأی، بلکه در مطالبه وضعیت برابر با توجه به مشارکت در ساختار حزب دموکراتیک ملی و امکان نامزد شدن یک آمریکایی-افریقای تبار برای ریاست جمهوری حمایت کرد.

رابرت (باب) موزز، همکار نویسنده این مقاله و رئیس و پایه‌گذار پروژه جبر، مدیر کمیته هماهنگی دانشجویی عدم خشونت یا SNCC در ایالت می‌سی‌سی‌پی بود. او می‌سی‌سی‌پی را در سال ۱۹۶۵ و کشور را در سال ۱۹۶۶ ترک کرد و به‌همراه همسرش ژانت، راهی تانزانیا شد و آنجا زندگی مشترکشان را شروع کردند. آن‌ها در سال ۱۹۷۶ به‌همراه چهار فرزندشان: می‌شا، اموال (امو)، تاباسوری (تابا) و مالیکا، به ایالات متحده برگشتند. در بازگشت، کار باب در خانواده این بود که مطمئن شود بچه‌ها تکالیف ریاضی خود را انجام داده‌اند و این کار را به‌عنوان یکی از والدین داوطلب در "برنامه آزاد" مدرسه مارتین لوترکینگ پسر در شهر کمبریج واقع در ایالت ماساچوست، برای تدریس جبر به فرزندش می‌شا و سه نفر از همکلاسی‌های او که در سال ۱۹۸۲ پایه هشتم را شروع کردند، ادامه داد. باب در سال ۱۹۸۲ "بورس مک‌آرتور"^۳ را دریافت کرد و برای پرداختن به موضوع جبر برای همه کلاس هشتمی‌ها، آن را در "برنامه آزاد" هزینه کرد و "پروژه جبر" را با آن، راه‌اندازی نمود. این پروژه ناگزیر، با وقایع می‌سی‌سی‌پی و مقوله‌ای که از جنبش حقوق مدنی می‌سی‌سی‌پی در سال‌های ۱۹۶۱-۱۹۶۵ به حالت تعلیق درآمده بود، مرتبط است. با توجه به وضعیت کودکان کشور و حقوق تصریح شده آن‌ها در قانون اساسی و با توجه به آموزش آن‌ها در مدارس دولتی/آموزش عمومی، واضح است که تا همه کودکان از حق آموزش در مدارس دولتی به‌عنوان شهروندان کشور برخوردار نشوند، آموزش عمومی در آمریکا، همچنان مظهر آشکار نظام طبقاتی در کشور باقی خواهد ماند.

نتیجه‌گیری

امروز، پروژه جبر، در همکاری با "سازمان‌های خواهر"^۴ مانند پروژه جوانان با حمایت بنیاد ملی علوم و سایر سازمان‌های عمومی و خصوصی، یک حرکت ملی است که تلاش دارد تجارب آموزشی کودکان

^۱Ella Baker ^۲The Student Nonviolent Coordinating Committee ^۳MacArthur Fellowship ^۴Sister

محروم چارک پائینی جامعه را دگرگون کند. پروژه جبر، مثالی از نخستین فعالیت‌هایی است که نشان می‌دهد چگونه افرادی از حوزه‌های علمی مختلف مانند فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی و نیز معلمان و مدیران حوزه‌های آموزشی از پیش‌دستانی گرفته تا پایان دوره کارشناسی در دانشگاه (۱۶ - k)، با همکاری افرادی مثل ما که برای برقراری عدالت اجتماعی و اقتصادی در آمریکا مبارزه می‌کنیم، می‌توانند زمینه‌های مشترکی پیدا کنند تا با هم کار کنند و در حل بعضی از مسائل بزرگ که کشورمان در قرن بیست و یکم با آن رو به رو است، مشارکت داشته باشند.

مراجع

- [1] M. Asiala, A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews, and K. Thomas, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education* 6 (1996), pp. 1-32.
- [2] John M. Barry, *Rising Tide*, Touchstone Book, Simon and Schuster, 1998.
- [3] Douglas A. Blackmon, *Slavery by Another Name*, Anchor Books, a division of Random House Inc., 2009.
- [4] J. B. Conant, *Slums and Suburbs*, McGraw-Hill, 1961, pp. 8-11.
- [5] L. Delpit, *Other People's Children: Conflict in the Classroom*, The New Press, 1995.
- [6] Supreme Court Justice John Marshall Harlan's dissent, Civil Rights Cases 1883. See also Plessy v. Ferguson: Harlan's Great Dissent by Charles Thompson, Louis D. Brandeis School of Law, U. of Louisville.
- [7] Nicholas Lemann, *The Promised Land*, Vintage Books, 1992.
- [8] *Redemption*, Farrar, Strauss and Giroux, 2006.
- [9] Robert P. Moses, *Constitutional People*, written testimony submitted to the United States Senate Judiciary Committee by Robert P. Moses, Tuesday, September 4, 2007. <http://judiciary.authoring.senate.gov/hearings/testimony.cfm>.
- [10] W. V. O. Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, 1980, pp. 102-103.
- [11] *Quintessence*, Belknap Press of Harvard University Press, 2004, pp. 172-173.
- [12] *Philosophy of Logic*, Harvard University Press, 1986, pp. 5-7, 95-102.
- [13] *Pursuit of Truth*, Harvard University Press, 1992, pp. 1-21.
- [14] *The Philosophy of W. V. Quine, The Library of Living Philosophers*, Volume XVIII, edited by Lewis Edwin Hahn and Paul Arthur Schilpp, 1988, p. 169 (*Quine's Grammar* by Gilbert

Harman, pp. 165–180 and *Quine: Reply to Gilbert Harman*, pp. 181–188), see also Charles Parson, *Quine on the Philosoph of Mathematics*, pp. 369–395, and *Quine: Reply to Charles Parson*, pp. 396–403.

- [15] United States of America, Plaintiff v. State of Mississippi, et al., Defendants: Civil Action No. 3312, Comparison of Education for Negroes and White Persons, 1890–1963, Answers to Interrogatories of State of Mississippi, In the United States District Courtfor the Southern District of Mississippi, Jackson Division.
- [16] K. Weller, J. Clark, E. Dubinsky, S. Loch, M. McDonald, and R. Merkovsky, Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. In A. Selden, G. Harel,& F. Hitt (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. 2003 (pp. 97–131), American Mathematical Society, Providence, RI.
- [17] C. Vann Woodward, *The Strange Career of Jim Crow*, commemorative edition, Oxford University Press, 2001.

سهیلا غلام آزاد: پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش
 رایانامه: soheila_azad@yahoo.com

تحلیل محتوای برنامه درسی معادلات دیفرانسیل*

یونس کریمی فردین پور

چکیده

در این مقاله، به روش تحلیل محتوا و با استفاده از چارچوب نظری برنامه درسی واقعیت مدار در حوزه آموزش معادلات دیفرانسیل، شامل چهار مقوله «متصل به واقعیت بودن»، «نزدیک به دانشجویان ماندن»، «مرتبط با مسائل جامعه بودن» و «جبری-عددی-هندسی بودن» همه مثال‌های فصل اول و دوم کتاب معادلات دیفرانسیل بویس، دیپریمما و میتریا مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتیجه حاصل از این یافته‌ها حاکی از نقش پررنگ «برنامه درسی واقعیت مدار» در این کتاب است. در پایان، پیشنهاد بازنگری سرفصل معادلات دیفرانسیل، با تأکید بر وجه واقعیت‌مداری داده شده است.

۱. مقدمه

در این مقاله، ضمن معرفی نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار و مقایسه آن با رویکردهای عمده برنامه درسی معادلات دیفرانسیل، به بررسی تأثیرات بالقوه این نهضت بر کتاب معادلات دیفرانسیل (بویس^۱ و همکاران، ۲۰۱۰) در مثال‌های کتاب می‌پردازیم. این تحقیق از آن جهت ضرورت دارد که تحلیل محتوای این کتاب، در واقع مبنای پیشنهاد تشکیل کمیسیون بازنگری سرفصل معادلات دیفرانسیل دوره کارشناسی رشته‌های مهندسی و علوم پایه^۲ است. بنابراین جا دارد که سرفصل کتاب‌های

عبارات و کلمات کلیدی. آموزش ریاضی، ریاضی واقعیت مدار، برنامه درسی، معادلات دیفرانسیل، تحلیل محتوا .

* این مقاله مستخرج است از طرح پژوهشی با عنوان «آموزش معادلات دیفرانسیل: برنامه درسی واقعیت مدار»

^۱Boyce ^۲New Math

معادلات دیفرانسیل با ویژگی‌های معرفی‌شده توسط نظریه آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، محک زده شود تا وضعیت کنونی آموزش معادلات دیفرانسیل در ایران و جهان از این منظر مورد مطالعه قرار گیرد.

۲. پیشینه پژوهش

به گفته غلام آزاد (۱۹۹۳)، در اواخر دهه ۷۰ میلادی فرودنتال و همکارانش در اعتراض به نهضت «ریاضی جدید» در آمریکا و رویکرد آموزش ریاضی مکانیکی در هلند، نظریه آموزش ریاضی واقعیت‌مدار را به منظور اصلاح فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی، تبیین نمودند. فلسفه زیربنایی آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این بود که یادگیرنده لازم است که درک ریاضی خود را از طریق کار روی زمینه‌هایی که برای او با معنا است، کسب کند. به عقیده فرودنتال، برای آن‌که ریاضی از ارزش انسانی برخوردار باشد، باید متصل به واقعیت باشد، نزدیک به یادگیرنده بماند و مرتبط با مسائل جامعه باشد. در واقع، فرودنتال به جای این‌که ریاضی را موضوعی بداند که باید منتقل شود، بر آن به عنوان یک فعالیت انسانی تأکید داشت. او عقیده داشت آموزش باید فرصت هدایت‌شده‌ای برای مدل‌سازی در اختیار یادگیرنده قرار دهد تا ریاضی را از طریق انجام دادن، بازآفرینی کند. بر این اساس، در آموزش ریاضی نباید بر ریاضی به عنوان یک نظام بسته تأکید کرد بلکه باید بر فعالیت و فرآیند ریاضی‌ورزی تکیه شود. بنابراین فرودنتال در آن زمان، معماری ریاضی بورباکی (نام مستعار گروهی از ریاضیدانان عمدتاً فرانسوی که در قرن بیستم، مکتب خاصی در آموزش ریاضی پایه‌گذاری کردند. آن‌ها بر ریاضی دقیق تأکید داشتند و در پی بنا نهادن کل ریاضی بر اساس نظریه مجموعه‌ها بودند) را به عنوان پایه‌ای برای تدریس ریاضی رد کرد، زیرا اعتقاد داشت که تنها راه یادگیری ریاضی ابداع دوباره آن تحت راهنمایی‌های مناسب است که البته باید از سال‌های اول آموزش ابتدایی شروع شود و طبعاً طی سال‌های تحصیل، گسترش پیدا کند. آموزش ریاضی واقعیت‌مدار از طریق معرفی دو نوع ریاضی‌ورزی معرفی شد: ریاضی‌ورزی افقی^۱ که به جنبه کاربردی ریاضی مربوط می‌شد و ریاضی‌ورزی عمودی^۲ که به جنبه رویه‌ای آن مربوط می‌شد.

در ریاضی‌ورزی افقی یادگیرنده به انواعی از ابزار ریاضی دست می‌یابد که می‌توانند به او در سازمان‌دهی و حل مسئله در موقعیت زندگی واقعی، کمک کنند. اما ریاضی‌ورزی عمودی فرآیند سازمان‌دهی دوباره در خود نظام ریاضی است. ریاضی‌ورزی افقی، رفتن از دنیای زندگی واقعی به دنیای نمادها است؛ در حالی که ریاضی‌ورزی عمودی به معنای حرکت درون دنیای نمادها است. فرودنتال تأکید می‌کند که این دو شکل ریاضی‌ورزی دارای ارزش برابر هستند. به علاوه، باید توجه داشت که ریاضی‌ورزی می‌تواند در سطوح مختلف درک و فهم اتفاق بیفتد. در واقع، اهمیت آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این

^۱Horizontal Mathematization ^۲Vertical Mathematization

است که از طریق آن، یادگیرندگان می‌توانند نسبت به دانش ریاضی خود احساس مالکیت یا تعلق کنند، یعنی ریاضی را از آن خود بدانند. باید توجه داشت که واژه واقعیت‌مدار، به تمام موقعیت‌هایی اشاره دارد که در ذهن یادگیرنده واقعی است.

در اوایل قرن ۲۱ میلادی، نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار در پاسخ به نگاه سنتی و رویکرد جبری غالب در آموزش معادلات دیفرانسیل، توسط راسموسن^۱ (۲۰۰۱) معرفی شد. این در حالی بود که راسموسن و وایتهد (۲۰۰۳)، سنت تدریس تحلیلی و رویه‌های حل معادلات دیفرانسیل را با ارزش می‌دانستند اما معتقد بودند که آموزش معادلات دیفرانسیل، نیازمند فعالیت‌های ریاضی‌ورزی^۲ است. بدین سبب چند سال بعد، بر اساس یافته‌های پژوهشی خود، به این نتیجه رسیدند که برنامه درسی و شیوه‌های آموزشی درس معادلات دیفرانسیل باید به گونه‌ای طراحی شوند که فرصت‌های مناسبی در اختیار دانشجویان قرار دهد تا آن‌ها بتوانند کاوشگرانه و با انجام دادن فعالیت‌های مناسب، به بازآفرینی حل معادلات دیفرانسیل بپردازند. در ادامه، راسموسن و کون^۳ (۲۰۰۷) دریافتند که تضمین‌کننده موفقیت در اتخاذ رویکرد واقعیت‌مدار به آموزش معادلات دیفرانسیل، این است که دانشجویان، دریافت‌کنندگان منفعل حل‌های جبری از پیش آماده شده برای انواع معادلات نباشند. بلکه باید به سمت استفاده از فرصت‌هایی برای بازآفرینی معادلات دیفرانسیل از طریق مدل‌سازی و سپس حل آنها هدایت شوند. این نهضت بر اساس نظریه آموزش ریاضی واقعیت‌مدار^۴ آغاز شده بود که هانس فرودنتال^۵ ریاضیدان هلندی، در تقابل با اشاعه ریاضی رویه‌های موسوم به «ریاضی جدید»، در دهه ۶۰ میلادی در آمریکای شمالی، مطرح نمود.

در واقع، همان‌طور که برای فرودنتال ریاضی‌دان، انجام دادن ریاضی به‌مراتب مهم‌تر از خود ریاضی به‌عنوان یک محصول حاضر و آماده بود، از دیدگاه راسموسن (۲۰۰۱) به‌عنوان یک آموزشگر ریاضی، آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، فرآیند انجام دادن حل معادلات دیفرانسیل بود که به‌مراتب مهم‌تر از خود راه‌حل حاضر و آماده بود. علاوه بر این، فرودنتال معتقد بود که ریاضی باید تدریس شود تا سودمند باشد و در عین حال، تأکید داشت که این مهم از طریق تدریس ریاضی سودمند^۶ به نتیجه نخواهد رسید، زیرا هر مبحث ریاضی در زمینه‌های محدودی می‌تواند سودمند باشد. در همین راستا، راسموسن و همکارانش نیز معتقد بودند که در رابطه با تدریس سودمند معادلات دیفرانسیل، رویکرد جبری به آموزش حل معادلات دیفرانسیل به‌تنهایی به نتیجه نمی‌رسد، زیرا مبحث تحلیلی و رویه‌ای حل معادلات دیفرانسیل تنها در زمینه‌های محدودی می‌تواند سودمند باشد.

^۱Rasmussen ^۲Mathematizing ^۳Kwon ^۴Realistic Mathematics Education: RME ^۵Freudenthal

^۶Useful Mathematics

در مجموع، دیدگاه راسموسن و همکارانش نسبت به آموزش معادلات دیفرانسیل را می‌توان چنین خلاصه کرد که لازم است قبل از هر چیز، آموزش معادلات دیفرانسیل هم به‌عنوان یک فرآیند و هم یک فعالیت انسانی دیده شود که انتظار می‌رود محصول نهایی آن، مدل‌سازی باشد. با چنین نگاهی به آموزش معادلات دیفرانسیل، این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان آموزش را شکل داد که این دو هدف، محقق شوند. در پاسخ به این سؤال، نهضت آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، به‌عنوان یک نظریهٔ یاددهی-یادگیری در آموزش معادلات دیفرانسیل، برای نخستین بار توسط راسموسن (۲۰۰۱) در آمریکا معرفی شد و طی دههٔ آخر قرن بیستم و دههٔ اول قرن بیست و یکم، توسعه یافت.

در قرن بیست و یکم، دلیل اصلی توجه همزمان آموزشی عالی و آموزش ریاضی مدرسه‌ای به مبحث معادلات دیفرانسیل، قابلیت‌های این حوزه در بحث آموزش مدل‌سازی^۱ است. اهمیت معادلات دیفرانسیل در این است که از پدیده‌های سادهٔ فیزیکی و مهندسی مانند رشد نمایی، دستگاه‌های فنر-جرم و مدل‌های الکتریکی گرفته تا فرآیندهای طبیعی دینامیکی با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند و برایشان کاربری صنعتی پیدا می‌شود. در واقع، مدل‌سازی‌های مسائل دنیای واقعی معمولاً از تلفیق و تعمیم این مدل‌های ساده و بنیادی حاصل می‌شوند که اطلاعات جامعی از این مدل‌های ساده فیزیکی و مهندسی در مبحث معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود. معادلات دیفرانسیل یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که در قرن هفدهم میلادی توسط نیوتن و لایبنیتز طی مطالعات حساب دیفرانسیل و انتگرال شکل گرفت و تا آخر قرن هجدهم، بسیاری از روش‌های مقدماتی حل جبری معادلات دیفرانسیل معمولی، توسط ریاضیدانان برجسته‌ای مانند برادران برنولی، اویلر و لاگرانژ کشف شدند.

برای این‌که مسائل دنیای واقعی با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی شده و حل شوند، اغلب نیازمند سه رویکرد جبری^۲، عددی^۳ و هندسی^۴ حل معادلات دیفرانسیل هستیم. منظور از رویکرد جبری در آموزش معادلات دیفرانسیل، همان آموزش کلاسیک و مرسوم است. در این رویکرد، ابتدا مشخص می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل به چه رده‌ای (معمولی یا با مشتقات جزئی، خطی یا غیرخطی^۵، مرتبهٔ اول یا دوم و سایر) تعلق دارد. سپس روش‌ها و الگوریتم‌های مشخصی برای حل آن اعمال می‌شود (کریمی فردین پور، ۱۳۹۳). در سراسر قرن نوزدهم در زمینهٔ حل معادلات دیفرانسیل، بیشتر به بررسی مسائل نظری وجود، یکتایی جواب و بسط به سری‌های توانی پرداخته شد. در این بین، تلاش برای حل تعدادی از معادلات دیفرانسیل که با روش‌های جبری حل‌شدنی نبودند، به ابداع و توسعهٔ روش‌های تقریب عددی برای این

^۱Mathematical Modeling ^۲Algebraic (Analytic) ^۳Numerical ^۴Geometric (Graphical, Qualitative) ^۵Nonlinear Differential Equations

گونه معادلات انجامید. ولی کاربرد رویکرد عددی در حل معادلات دیفرانسیل به دلیل محدودیت محاسبات دستی، تا گسترش رایانه‌ها و نرم‌افزارها به تعویق افتاد.

شروع قرن بیستم برای معادلات دیفرانسیل، با ابداع رویکرد هندسی (گرافیکی، کیفی) حل معادلات دیفرانسیل آغاز شد. هدف این رویکرد، به‌ویژه برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، درک رفتار کیفی جواب‌ها از دیدگاه هندسی بود (راسموسن، ۲۰۰۱). در ادامه این تحولات، قرن بیست و یکم برای آموزش معادلات دیفرانسیل، با تلاش برای تلفیق رویکردهای جبری، عددی و گرافیکی همراه بوده است (راسموسن^۱، ۲۰۰۱). به باور راسموسن، با استفاده از پیشرفت‌های فناوری در کنار رویکردهای جبری (تحلیلی) و عددی، می‌توان به آموزش هندسی (کیفی، گرافیکی) معادلات دیفرانسیل پرداخت. راسموسن و وایتهد (۲۰۰۳) معتقدند با این‌که معادلات دیفرانسیل مبحثی قدیمی است، اما با تلفیق سه رویکرد هندسی، عددی و جبری، معادلات دیفرانسیل تبدیل به منبعی غنی از مسائل جذاب و مهم در بحث سیستم‌های دینامیکی^۲ با کاربردهای متنوع صنعتی شده است.

۳. معرفی پژوهش

برای تجزیه و تحلیل مثال‌های موجود در کتاب معادلات دیفرانسیل بویس، از چارچوب نظری معرفی شده توسط فرودنتال و راسموسن (۲۰۰۱) استفاده شد. از دیدگاه آن‌ها، مسائل معادلات دیفرانسیل با توجه به فرض‌ها و رویکرد مدل‌سازی، به چهار دسته متصل به واقعیت، نزدیک یادگیرنده، مرتبط با مسائل جامعه و رویکرد جبری-عددی-هندسی تقسیم می‌شوند که برای آشنایی با این تقسیم بندی، مثال‌هایی ارائه می‌شود. در فصل اول، مثال مدل‌سازی یک شیء در حال سقوط به صورت زیر مطرح شده است:

فرض کنید شیئی در جو نزدیک سطح دریا در حال سقوط است. معادله دیفرانسیلی بنویسید که این حرکت را تشریح کند. (ص. ۲۰)

در این مثال، همه چیز واقعی است. یک مسئله مدل‌سازی کامل که شروع آن از دنیای واقعی است. زمینه ارائه شده برای مسئله معنادار است. شیء در حال سقوط به تجربیات واقعی مخاطب متصل است. او بارها سقوط یک شیء را مشاهده کرده و درک واقعی از آن دارد. چیزی در صورت مسئله وجود ندارد که استفاده از واحد خاصی را ایجاب کند. بنابراین هر انتخاب منطقی، مجاز است. یعنی هر دانشجویی با توجه به تجربه و دانش خود، در انتخاب واحد مناسب مختار است. مثلاً اگر دانشجو جرم را با کیلوگرم و نیرو را با نیوتن اندازه‌گیری کند، آنگاه شتاب گرانش در نزدیکی سطح زمین (سطح دریاهای آزاد) برابر ۹/۸ متر بر مجذور ثانیه خواهد بود. چون دانشجو خودش واحدها را انتخاب می‌کند، عقل سلیم در این

^۱Rasmussen ^۲Dynamical Systems

فرآیند مدل سازی نقشی برجسته دارد. از این رو می توان گفت این مسئله، نزدیک دانشجو باقی می ماند. تصریح سقوط شیء در نزدیکی سطح دریا نیز کمک می کند که مدل سازی متصل به واقعیت باشد. از طرف دیگر، مقاومت هوا در برابر حرکت اشیاء، با مسائل جامعه از قبیل کاهش مصرف سوخت مرتبط است. مثلاً هرچه مقاومت هوا در برابر حرکت یک وسیله نقلیه بیشتر باشد، مصرف سوخت نیز بیشتر خواهد بود؛ یا این که هرچه مقاومت هوا در برابر سقوط یک شیء بیشتر باشد، سرعت برخورد با زمین، کمتر خواهد بود.

مسئله سقوط شیء، علاوه بر رویکرد جبری، در مثال شماره ۲ همین فصل (ص. ۳)، با رویکرد هندسی نیز مدل سازی شده است. با استفاده از رویکرد هندسی جواب تعادل، یا همان سرعت تعادل که متناظر با توازن بین گرانش و مقاومت هوا است، به دست آمده است. در واقع، رویکرد هندسی نشان می دهد اگر سرعت شیء در حال سقوط، بیشتر از سرعت تعادل باشد، در اثر مقاومت هوا، سرعتش کاهش و به سرعت تعادل نزدیک می شود. اگر سرعت شیء در حال سقوط کمتر از سرعت تعادل باشد، در اثر گرانش سرعت بیشتر شده و به سرعت تعادل نزدیک تر می شود. این مطلب نیز که از بررسی مسئله با رویکرد هندسی حاصل شده است، نزدیک عقل سلیم دانشجو و متصل به واقعیت است. در نتیجه رویکرد جبری و رویکرد هندسی مانند مکملی در کنار هم کمک می کنند تا معادله دیفرانسیل مدل سازی شده، واقعیت مدار باشد. بالآخره، معادله دیفرانسیل حاصل از مثال ۱ و ۲، در مثال ۳ همین فصل (ص. ۵)، به صورت مسئله لجستیک جمعیت موش ها، مطرح می شود:

گروهی از موش های صحرایی را در نظر بگیرید که در یک ناحیه روستایی معین زندگی می کنند. اگر شکارچی در کار نباشد، فرض می کنیم که جمعیت موش ها با نرخی متناسب با جمعیت فعلی آن ها افزایش یابد. اما در همان همسایگی چند جغد زندگی می کنند که روزانه ۱۵ موش صحرایی را شکار می کنند. (ص. ۵)

در صفحه ۱۰ کتاب توضیح داده شده است که معادله دیفرانسیل شیء در حال سقوط، اثرات متقابل گرانش و مقاومت هوا را تشریح می کند. همزمان، معادله دیفرانسیل لجستیک جمعیت موش ها، اثرات متقابل زاد و ولد موش های صحرایی و شکار جغدها را بیان می کند. هر دوی این معادلات دیفرانسیل به شکل کلی $\frac{dy}{dt} = ay - b$ هستند که a و b عددهای ثابت هستند. با این که ظاهر مسئله های شیء در حال سقوط و لجستیک جمعیت موش ها کاملاً متفاوت است، اما با یک نوع معادله دیفرانسیل مدل سازی می شوند. در اینجا ریاضی ورزی افقی و ریاضی ورزی عمودی با هم ادغام می شوند. هر دو مسئله متصل به دنیای واقعی، نزدیک به عقل سلیم دانشجو و با مسائل جامعه مرتبط اند. همچنین هر دو مسئله با رویکرد

جبری حل شده و سپس جواب حاصل، با رویکرد هندسی مورد تأیید قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، در هر دو مسئله، منحنی‌های جواب حاصل از رویکرد هندسی، وجود جواب تعادل را نشان می‌دهند که این نتیجه از طریق رویکرد جبری به دست نمی‌آید. اما پس از این‌که وجود جواب تعادل توسط رویکرد هندسی شناسایی شد، مورد تأیید رویکرد جبری نیز قرار گرفت. درک رابطه بین رویکرد جبری و هندسی، بخشی از ریاضی‌ورزی عمودی در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار است. بخش دیگری از ریاضی‌ورزی عمودی در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، به درک رابطه رویکرد عددی با رویکردهای دیگر حل معادلات دیفرانسیل برمی‌گردد. در آخر فصل دوم، شکل دیگری از معادله لجستیک جمعیت مطرح و با تلفیق رویکرد عددی و هندسی، بررسی می‌شود. این نوع از معادله لجستیک جمعیت و مسئله مالی (نرخ بهره) زیر که ظاهری کاملاً متفاوت دارند، با یک نوع معادله دیفرانسیل، یعنی معادلات دیفرانسیل تفاضلی مرتبه اول، مدل‌سازی می‌شوند.

یک دانش‌آموخته دانشگاه ۱۰۰۰۰ دلار برای خرید ماشین وام گرفته است. اگر نرخ بهره ۱۲٪ باشد، میزان پرداخت لازم ماهیانه چقدر باشد تا تمام وام در چهار سال بازپرداخت شود؟ (ص. ۱۳۳). مثال‌های مطرح‌شده، نشان‌دهنده آموزش معادلات دیفرانسیل با رویکرد واقعیت‌مدار است، زیرا دارای ملاک‌های ریاضی‌ورزی افقی و ریاضی‌ورزی عمودی هستند. در عین حال این مسئله‌های مدل‌سازی با ریاضی‌ورزی افقی متصل به دنیای واقعی، نزدیک عقل سلیم دانشجویان و از مسائل مربوط به جامعه به حساب می‌آیند. در ضمن همزمان، با ریاضی‌ورزی عمودی و تلفیق رویکردهای جبری، عددی و هندسی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

رویکرد آموزش معادلات دیفرانسیل اغلب رویکرد سنتی است (هبره^۱، ۲۰۱۰). این رویکرد در یک دنیای مجرد که هیچ اشتراکی با دنیای زندگی واقعی یا دگیرندگان ندارد، ارائه می‌شود و مشخصه آن، تمرکز بر انجام تحلیل‌های جبری صرف و توجه کمتر به کاربردها است. در این رویکرد، از مدرسان انتظار می‌رود به‌طور مستقیم تدریس کنند و برای حل هر معادله دیفرانسیل معروف، یک الگوریتم استاندارد به دانشجویان ارائه دهند. یادگیری در این رویکرد، بیشتر متکی به تکرار و تمرین است و عمده فعالیت‌های دانشجویان، مبتنی بر حفظ کردن الگوها یا الگوریتم‌ها است. در رویکرد سنتی، چالش اصلی زمانی رخ می‌دهد که دانشجویان با مسائلی بجز آن‌هایی که قبلاً حفظ کرده‌اند، روبه‌رو می‌شوند. در همین حال، با پررنگ‌تر شدن حضور فناوری در تمام عرصه‌های یادگیری، آموزش معادلات دیفرانسیل نیز به سمت رویکرد عددی که مسائل مدل‌سازی آن به‌ظاهر از دنیای واقعی تأمین می‌شود، متمایل شد. در این رویکرد، دانشجویان ترغیب می‌شدند تا با استفاده از ماشین حساب یا رایانه، به کشف روابط بین

^۱A. Habre

متغیرهایی مانند x و y بپردازند؛ در حالی که رابطه آن‌ها با $\frac{dy}{dx}$ معنی پیدا می‌کند. اما در رویکرد هندسی، ابتدا خانواده مهمی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معرفی می‌شوند که در آن‌ها، متغیر مستقل به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود. چنین معادلات دیفرانسیلی که به‌شکل $\frac{dy}{dx} = f(y)$ هستند، خودگردان^۱ نامیده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل خودگردان در چارچوب مسائل واقعی مربوط به رشد یا زوال و در گستره‌ای از پزشکی گرفته تا محیط زیست، اقتصاد جهانی، مهندسی و غیره، کاربرد دارند. معادلات دیفرانسیل خودگردان، جداسازی (تفکیک‌پذیر) بوده و با رویکرد جبری، قابل حل هستند. اما هدف اصلی تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل (رویکرد هندسی)، نشان دادن این موضوع است که چگونه اطلاعات کیفی مهم را می‌توان با استفاده از روش‌های هندسی و گرافیکی و بدون حل جبری، به‌دست آورد. تحلیل رفتار کیفی معادلات دیفرانسیل، این امکان را فراهم می‌کند تا با رسم منحنی‌های جواب معادله دیفرانسیل خودگردان که به‌طور کیفی صحیح باشد، رفتار بلندمدت معادله را پیش‌بینی نمود.

در جستجوی جایگزینی برای رویکرد غالب و سنتی به برنامه درسی معادلات دیفرانسیل، راسموسن (۲۰۰۱) هیچ‌یک از رویکردهای جبری، عددی یا هندسی را به‌تنهایی دنبال نکرد. به‌طور مشخص، آن‌ها با غالب شدن تنها یک رویکرد مخالفت کردند و با استفاده از چارچوب نظری آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، فرصتی ایجاد نمودند تا برنامه درسی معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار شکل بگیرد. در این رویکرد، موقعیت دنیای واقعی یا مسئله زمینه‌دار، به‌عنوان نقطه شروع یادگیری معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود. سپس از طریق فعالیت‌های ریاضی‌ورزی افقی، کشف اتفاق می‌افتد. این یعنی دانشجویان، مسئله را سازمان‌دهی نموده و سعی می‌کنند که جنبه‌های ریاضی مسئله را تشخیص دهند و قواعد و رابطه‌ها را کشف کنند. سپس با استفاده از ریاضی‌ورزی عمودی، مفاهیم ریاضی را توسعه می‌دهند. در آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، مسائل زمینه‌مدار اهمیت بسیار زیادی دارند و از این منظر است که این رویکرد، تبدیلی در مقابل رویکرد جبری و سنتی صرف به آموزش معادلات دیفرانسیل به حساب می‌آید. در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، شرایط متفاوت است و مسائل زمینه‌دار، به‌عنوان منبعی برای فرآیند یادگیری عمل می‌کنند. به عبارت دیگر، در آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، مسائل زمینه‌دار و موقعیت‌های زندگی واقعی، هر دو برای شکل‌گیری مفاهیم ریاضی و به‌کار بردن آن مفاهیم، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این نوع آموزش، دانشجویان ضمن کار با مسائل زمینه‌دار، می‌توانند ابزار درک و فهم ریاضی را توسعه دهند. به این صورت که دانشجویان، ابتدا راهبردهایی را تبیین می‌کنند که با زمینه مسئله ارتباط نزدیک دارند. بعد از آن، جنبه‌های خاصی از موقعیت زمینه

^۱Autonomous

مسئله می‌تواند عمومیت بیشتری پیدا کند، یعنی زمینه مسئله کم و بیش، مشخصه یک مدل را به خود می‌گیرد و در این صورت به حل سایر مسائل مرتبط با آن کمک می‌کند. سرانجام، این مدل‌ها دستیابی دانشجویان را به دانش ریاضی رسمی‌تر، امکان‌پذیر می‌سازد.

۴. روش پژوهش

جلد اول ویراست نهم کتاب درسی معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسئله‌های مقدار مرزی بویس (۱۳۹۰) در سال اول یا دوم دوره‌های کارشناسی رشته‌های فنی و مهندسی ارائه می‌شود. این جلد، شامل هفت فصل با نام‌های: مقدمه، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، معادلات خطی مرتبه دوم، معادلات خطی مرتبه بالاتر، جواب‌های سری معادلات خطی مرتبه دوم، تبدیل لاپلاس، دستگاه معادلات خطی مرتبه اول است. در مطالعه حاضر، تمام مثال‌های مطرح شده در کتاب مورد بررسی قرار گرفتند. هر یک از مثال‌ها، یک واحد تحلیل در نظر گرفته شدند. مضمون مورد نظر برای تحلیل محتوا، واقعی بودن زمینه‌های مورد استفاده و نزدیک بودن آن‌ها به تجربه‌های دانشجویان بود.

انتخاب کتاب معادلات دیفرانسیل بویس به این دلیل انجام شد که یکی از معروف‌ترین کتاب‌های درسی معادلات دیفرانسیل در جهان و ایران است. در واقع با وجود این‌که چندین کتاب درسی تألیفی و ترجمه‌ای برای معادلات دیفرانسیل موجود است، کتاب معادلات دیفرانسیل بویس همچنان مورد توجه مدرسان معادلات دیفرانسیل قرار دارد. در پژوهش حاضر، تعداد ۳۴ مثال فصل‌های اول و دوم کتاب با استفاده از چارچوب نظری آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار، کدگذاری شدند. کدگذاری‌ها توسط محقق و در دو زمان متفاوت، با فاصله زمانی شش ماه انجام شد. میزان توافق بین این دو کدگذاری، نشان دهنده پایایی نتایج کدگذاری بود.

۵. تحلیل محتوای کتاب

در پیشگفتار کتاب آمده است که:

این کتاب از دیدگاه یک متخصص ریاضیات کاربردی نوشته شده است که علاقه‌اش به معادلات دیفرانسیل گاهی کاملاً نظری، گاهی بیش از حد کاربردی و اغلب جایی میان این دو است.

در اینجا ملاحظه می‌شود که مؤلفان کتاب، صراحتاً جهت‌گیری از تجرید به سمت واقعیت را مورد نظر داشته‌اند. البته در ادامه، این نکته را مورد تأکید قرار داده‌اند که:

علت اصلی گنجاندن مطالب نسبتاً مفصل درباره کاربردها و مدل سازی ریاضی در کتاب این است که دانشجویان قانع شوند که مدل سازی ریاضی، اغلب به معادلات دیفرانسیل منجر می شود و معادلات دیفرانسیل در گستره متنوعی از رشته ها، بخشی از بررسی مسئله ها است.

در رویکرد آموزش ریاضی واقعیت مدار، چنین تأکیدی به معنای ریاضی و رزی افقی و اهمیت آن است. پس ملاحظه می شود که تأکید کتاب بر کارایی ریاضی در حل مسائل واقعی و اهمیت یادگیری آن برای دانشجویان است.

مسئله های غیر عادی، اغلب نیازمند استفاده از ابزارهای متنوع- جبری، عددی و هندسی- هستند. روش های مداد و کاغذی، اغلب باید با استفاده مؤثر از رایانه ترکیب شوند. ... پس دانشجویان باید به این تشخیص برسند که تحقیق درباره مسئله ای دشوار، ممکن است هم به تحلیل جبری و هم به محاسبه نیاز داشته باشد که برای تعیین بهترین ابزار برای هدفی خاص نیازمند قضاوتی مناسب است؛ و این که نتایج را معمولاً می توان به شکل های متنوعی ارائه کرد. معتقدیم که مهم است که دانشجویان درک کنند که هدف از حل یک معادله دیفرانسیل به ندرت، صرف به دست آوردن جواب است. ... جواب به خودی خود هدف نیست. ... این مسئله ها نوعاً مسئله هایی هستند که در کاربردهای معادلات دیفرانسیل ظاهر می شوند.

اگرچه در کتاب به صراحت، به «واقعیت مدار بودن» به عنوان رویکرد آموزشی این کتاب اشاره نشده است، ولی تأثیر آن را تقریباً می توان در اکثر تأکیده های آموزشی مؤلفان، مشاهده نمود. برای مثال، آنان معتقدند که «مسئله های غیر عادی اغلب نیازمند استفاده از ابزارهای متنوع- جبری، عددی و هندسی- هستند» و از دانشجویان انتظار دارند تا «به این تشخیص برسند که تحقیق درباره مسئله ای دشوار، ممکن است هم به تحلیل جبری و هم به محاسبه نیاز داشته باشد». مؤلفان همچنین تصریح کرده اند که «هدف از حل یک معادله دیفرانسیل، به ندرت صرف به دست آوردن جواب است» و «جواب به خودی خود، هدف نیست»؛ تأکیده هایی که برآمده از دیدگاه نظری «ریاضیات واقعیت مدار» است. بدین سبب، پیش فرض گرفتن «واقعیت مدار» بودن مثال های مطرح شده در این کتاب، ضروری است.

۶. نتایج

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل مثال های کتاب با استفاده از چارچوب نظری آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت مدار، نشان داد که تمام مثال های فصل های اول این کتاب از نظر ماهیتی، واقعیت مدار هستند، اما سهم مثال های واقعیت مدار در فصل دوم، کمتر است. در واقع، از مجموع ۳۴ مثال مورد

بررسی در پژوهش حاضر، تعداد ۱۴ مثال یعنی حدود ۴۲٪ درصد مثال‌ها، در دسته مسائل واقعیت‌مدار به معنای مسائل مطرح‌شده در دنیای واقعی با رویکرد جبری، عددی، هندسی یا تلفیقی از این رویکردها قرار گرفتند. این با «واقعیت‌مدار بودن» و «کاربردی بودن» که یکی از اهداف اصلی کتاب است، هم‌راستا است. سهم مسائل «ریاضی‌ورزی افقی» حدود ۴۲ درصد است و ۵۹ درصد مثال‌ها، در دسته «ریاضی‌ورزی عمودی» جای دارند. هیچ موردی هم از مثال‌های ریاضی‌ورزی عمودی که تلفیق همزمان سه رویکرد جبری، عددی و هندسی در حل معادله دیفرانسیل است، در بین مثال‌های فصل اول و فصل دوم کتاب وجود ندارد.

در فصل دوم، بجز مثال‌های مطرح‌شده در بخش‌های ۳-۲ و ۵-۲ که مربوط به «ریاضی‌ورزی افقی» هستند، بقیه مثال‌ها در دنیای ریاضی و رویه‌ای مطرح شده‌اند و به نظر می‌رسد واقعیت‌مدار بودن آن‌ها مورد توجه قرار نگرفته است. در حقیقت، تمام فصل دوم وضعیت خوبی در این رابطه ندارد و تنها حدود ۳۰٪ از مسائل این فصل جزو دسته ریاضی‌ورزی افقی هستند. اما وضعیت فصل اول بهتر است، زیرا ۱۰۰٪ مثال‌های مطرح‌شده در آن، در دسته ریاضی‌ورزی افقی قرار می‌گیرند. ۷۰٪ مثال‌های فصل دوم با رویکرد جبری و رویه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به نظر می‌رسد نویسندگان کتاب از طرح مثال‌های «به‌ظاهر زمینه‌مدار» بیم داشته‌اند، چراکه پژوهش‌های مختلف از جمله گابرایت و استیلمن (۲۰۰۱) نشان می‌دهند که چون زمینه مسئله‌های «به‌ظاهر زمینه‌مدار»، دنیای واقعی نیست، معمولاً تأثیری در آموزش فرآیند مدل‌سازی ندارند. بنابراین دانشجویان می‌توانند بدون آسیب زدن به مسئله، زمینه را حذف کرده و مسئله را در دنیای ریاضی رویه‌ای حل نمایند که این اتفاق، موجب بی‌اعتمادی دانشجویان به کاربردهای واقعی ریاضی می‌شود. نتایج تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و فصل دوم کتاب معادلات دیفرانسیل، در جدول شماره ۱ به تفکیک هر بخش آمده است.

جدول شماره ۱: تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و دوم

بخش	تعداد مثال	متصل به واقعیت	نزدیک دانشجو یان	مرتبط با مسائل جامعه	جبر	عددی	هندسی	جبر عددی	جبر هندسی	عددی هندسی	جبر هندسی
-1-1	3	3	3	3	1	0	2	0	3	0	
	مثال 1	+	+	+	+	-	-	-	+	-	
	مثال 2	+	+	+	-	-	-	-	+	-	
	مثال 3	+	+	+	-	-	+	-	+	-	
-2-1	2	2	2	2	2	0	2	0	2	0	
	مثال 1	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
-1-2	4	0	0	0	4	0	4	0	4	0	
	مثال 1	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 3	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 4	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
-2-2	3	0	0	0	3	0	3	0	3	0	
	مثال 1	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 3	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
-3-2	4	4	4	4	4	1	1	1	1	0	
	مثال 1	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	+	+	+	+	+	-	+	-	-	
	مثال 3	+	+	+	+	-	-	-	-	-	
	مثال 4	+	+	+	+	-	-	-	-	-	
-4-2	4	0	0	0	4	0	4	0	1	0	
	مثال 1	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 3	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
	مثال 4	-	-	-	+	-	+	-	+	-	
-5-2	5	5	5	5	5	0	5	0	5	0	
	مثال 1	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 2	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 3	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 4	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
	مثال 5	+	+	+	+	-	+	-	+	-	
-6-2	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0	
	مثال 1	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
	مثال 2	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
	مثال 3	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
	مثال 4	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
-7-2	3	0	0	0	3	0	0	0	0	0	
	مثال 1	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
	مثال 2	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
	مثال 3	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
-8-2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	مثال 1	-	-	-	-	-	+	-	+	-	
-9-2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	
	مثال 1	-	-	-	-	-	+	-	+	-	

۷. بحث پایانی

نتایج حاصل از تحلیل محتوای مثال‌های فصل اول و فصل دوم نشان داد که به‌طور واقعی، ۴۲٪ مثال‌ها را می‌توان در رده «ریاضی واقعیت‌مدار» قرار داد و با وجود تأکید مؤلفان بر اهمیت «مدل‌سازی» و «کاربرد»، این تحقیق نشان داد که این هدف، در مورد ۵۸٪ مثال‌های دو فصل اول کتاب، مورد غفلت قرار گرفته است. در عوض، مسائل «بدون زمینه» در این کتاب، حضور نسبتاً پررنگی دارند و با وجود این‌که با مسائل «مدل‌سازی» واقعی تفاوت جدی دارند، ولی می‌تواند نقطه شروع خوبی برای معرفی رویکرد جبری حل معادلات دیفرانسیل به دانشجویان باشد.

نکته مهمی که لازم است به آن توجه نمود این است که معرفی رویکرد «واقعیت‌مدار» برای آموزش معادلات دیفرانسیل، به معنای تجویز نسخه‌ای برای مدرسان درس معادلات دیفرانسیل نیست که در تمام کلاس‌های درس خود و برای حل تمام مثال‌ها آن را به‌کار برند. به‌طور مشخص، نزدیک دانشجویان بودن یک موقعیت یا یک مسئله زمینه‌دار، به معنای واقعی بودن آن زمینه یا مسئله است که به‌شدت، به حوزه زمانی و مکانی مخاطبان وابسته است.

برای مثال، مسئله زمینه مدار مربوط به کبوتر نامه‌رسان، برای دانشجویان ایرانی ممکن است معنادار نباشد، در حالی که ممکن است برای دانشجوی غربی معنادار باشد. به این دلیل، طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی بومی مانند پروژه‌های مربوط به محیط زیست مناطق مختلف ایران، اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. می‌توان به‌جای مسئله مربوط به انقراض کبوتر نامه‌رسان، مسئله‌های واقعی درباره گونه‌های مختلف جانوران ایرانی را مطرح کرد. در این شرایط، تقاضای اجرای آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار با سرفصل فعلی معادلات دیفرانسیل، نه تنها امکان‌پذیر نیست بلکه می‌تواند آسیب‌رسان نیز باشد. مثلاً ممکن است به‌جای طراحی فعالیت‌های مدل‌سازی اصیل، مدرسان معادلات دیفرانسیل به دلیل نداشتن الگوهای مناسب و منابع در دسترس، مسائل «مستقل از زمینه» را به‌جای مسائل مدل‌سازی اصیل طراحی کنند که این هر دو، خطراتی را در پی خواهد داشت، زیرا این گونه مسائل باعث می‌شوند تا غیرواقعی بودن مسائل ریاضی و ساختگی بودن موقعیت‌های مسئله ریاضی در ذهن دانشجویان تداعی شود و این ذهنیت، موجب بی‌اعتمادی دانشجویان نسبت به ریاضی گردد.

با توجه به این‌که حتی در آخرین سرفصل مصوب درس معادلات دیفرانسیل که از طرف دفتر برنامه‌ریزی آموزش عالی وابسته به وزارت علوم، تحقیقات و فناوری در تاریخ ۱۳۸۸/۲/۲۶ منتشر شده است، رویکرد هندسی (گرافیکی یا کیفی) حل معادلات دیفرانسیل و تلفیق آن با رویکردهای جبری و عددی نادیده گرفته شده است، طبیعی است آموزش معادلات دیفرانسیل واقعیت‌مدار نیز نادیده گرفته شود. در حالی که به باور متخصصان آموزش معادلات دیفرانسیل، مسائل دنیای واقعی از طریق تلفیق همزمان این سه رویکرد، مدل‌سازی می‌شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود تا با بازنگری سرفصل درس معادلات دیفرانسیل توسط یک کمیسیون تخصصی در این دفتر، آموزش رویکرد هندسی حل معادلات دیفرانسیل در دوره‌های کارشناسی، مورد مطالعه امکان‌سنجی قرار گیرد.

مراجع

- [۱] بویس، دابلو؛ دیپرما، آر؛ و میتریا، دی. (۱۳۹۴)، معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسائل مقادیر مرزی. ترجمه حمیدرضا ظهوری زنگنه، ویرایش نهم، چاپ ششم، انتشارات فاطمی.

- [۲] غلام آزاد، سهیلا. (۱۳۹۳)، ردپای آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در ریاضیات مدرسه‌ای در ایران، دو فصلنامه نظر و عمل در برنامه درسی، دوره ۲، شماره ۳، ۴۷-۷۰.
- [۳] کریمی فردین پور، یونس. (۱۳۹۳). بررسی ارائه مدل تحلیل خطا و رابطه آن با پیشرفت تحصیلی دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهر در درس معادلات دیفرانسیل. آموزش مهندسی ایران. گروه علوم مهندسی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران. ۱۱۱-۱۳۳.۶۳.
- [۴] فرودنتال، اچ. (۱۹۷۹) ریاضی جدید با آموزش جدید. ترجمه سحر ظهوری زنگنه و زهرا گویا (۱۳۸۱). مجله رشد و آموزش ریاضی، شماره ۷۰، صص ۲۸ تا ۳۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- [5] Boyce, W., DiPrima, R., & Mitrea, D. (2010). Elementary differential equations and boundary value problems. ebook: Wiley.
- [6] Galbraith, P. & Stillman, G. (2001). Assumptions and context: pursuing their role in modelling activity. In J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, and S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education: ICTMA 9: Application in science and technology*, (pp. 300-310). Chichester: Horwood.
- [7] Habre, A. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 29, 94-107.
- [8] Rafiepour, A. and Stacey, K. (2009). Applying a mathematical literacy framework to the Iranian Grade 9 mathematics textbook. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 433-440. Thessaloniki, Greece: PME.
- [9] Rafiepour, A. and Stacey, K. and Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*. 24:403-421.
- [10] Rasmussen(e), C., and Whitehead, K. (2003). Research Sampler 7: Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. 10, 12: AMC.
- [11] Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 20, 55-87.
- [12] Rasmussen, C., & Kwon, O. N. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 189-194.

یک ریاضیدان برای دبیرستان می‌نویسد

دن فندل

برگردان: شیوا زمانی

مختصری از زندگی‌نامه نویسنده

وقتی دوره تحصیلات تکمیلی خود را آغاز کردم، تنها هدفم این بود که یک ریاضیدان محقق شوم. زمانی که هنوز دانشجوی کارشناسی ریاضی در دانشگاه هاروارد (فارغ‌التحصیل ۱۹۶۶) بودم، با درس‌های ریچارد براور^۱ در نظریه گروه‌های متناهی، سرشوق آمده بودم و لذا به توصیه او به دانشگاه ییل رفتم تا با والتر فیت^۲ کار کنم. مدرک دکترای خود را در ۱۹۷۰ گرفتم و مقاله‌ای که از رساله دکتری‌ام استخراج شد در مجله جبر^۳ شماره ژانویه ۱۹۷۳ چاپ شد.

در اوایل سال ۱۹۶۹ که هنوز مشغول تحصیل در دوره دکتری بودم، به این نتیجه رسیدم که اگر فعالیت‌هایم را بر کمک به بهبود آموزش عمومی در مدارس متمرکز کنم، بهتر می‌توانم مهارت‌هایم را در خدمت به مردم به‌کار بندم. در طی دوره دکتری‌ام و پس از آن، در نیوهمپتون، کنکتیکت، و در کامپتون و اوکلند کالیفرنیا در مدارس عمومی کار کردم. در این مدارس، یک متخصص ریاضی بودم که با کلاس‌هایی پر از دانش‌آموزان ابتدایی یا دوره اول متوسطه کار می‌کردم. اگرچه از این کار لذت می‌بردم، به تدریج متوجه نیاز معلمان به فهم عمیق‌تر ریاضیات پایه شدم و به این نتیجه رسیدم که اگر مستقیماً در آماده‌سازی معلمان کار کنم، تأثیر کارم بیشتر خواهد بود. در سال ۱۹۷۳، به دانشکده ریاضی دانشگاه ایالتی سان‌فرانسیسکو ملحق شدم و در آنجا بیش از ۳۰ سال با دانشجو - معلمان که دوره پیش از خدمت را می‌گذراندند و

(Dan Fendel) دن فندل استاد بازنشسته ریاضی دانشگاه ایالتی سان‌فرانسیسکو است.

^۱Richard Brauer ^۲Walter Feit ^۳A characterization of Conway's group Journal of Algebra

معلمان فعال در کلاس‌های درس در تمامی سطوح کار کردم و همزمان، درس‌های سرویسی مانند حسابان و درس‌های سطح بالا برای دانشجویان سال بالای کارشناسی ریاضی، و درس‌هایی در دوره کارشناسی ارشد خودمان را تدریس کردم.

در سال ۱۹۸۹ فرصتی را که ممکن است تنها یک‌بار در زندگی رخ دهد، یافتم. از من دعوت شد که به پروژه‌ای ملحق شوم که در آن زمان در مراحل اولیه خود بود و هدفش این بود که یک برنامه درسی مسئله - محور برای دبیرستان‌ها پدید بیاورد که در آن، دیدگاه‌ها و توصیه‌های طرح‌شده در آخرین گزارش‌ها مبنی بر نیاز به اصلاحات برنامه درسی، لحاظ شده باشد. من این دعوت را پذیرفتم و همراه با دایان ریسک^۱ (که دکترایش را در سال ۱۹۷۵ از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی گرفته بود)، مبدل شدم به یکی از مؤلفان برنامه ریاضیات تعاملی (برت). طی یک دهه پس از آن یا چیزی در همین حدود، من با یک تیم فوق‌العاده از آموزش‌گران و معلمان ریاضی در یک فرآیند فشرده نوشتن، آزمون، بازنویسی، بازنویسی و دوباره بازنویسی کار کردم تا یک برنامه چهار ساله تولید کنم. در سال ۱۹۹۹ برنامه درسی برت یکی از معدود برنامه‌هایی بود که از سوی وزارت آموزش ایالات متحده به‌عنوان «نمونه» (بالاترین رتبه) انتخاب شد. از این برنامه درسی در بیش از ۱۰۰۰ مدرسه در ایالات متحده، و در بسیاری از مدارس خارج از ایالات متحده استفاده شد.

نوشتن برنامه درسی

یکی از بزرگترین چالش‌ها در نوشتن یک برنامه درسی در هر سطحی، با معنا و قابل فهم کردن مفاهیم پیچیده همزمان با حفظ تمامیت آن‌ها برای دانش‌آموزان است. هر کسی که خیره‌شدن چشم‌ها را هنگام ارائه ریاضیات دقیق همراه با ریزه‌کاری فراوان دیده باشد، تأیید خواهد کرد که دانش ریاضی و درستی آنچه بیان می‌شود، به خودی خود موجب تدریس خوب نمی‌شود. نوشتن برنامه درسی مستلزم درک عمیق ریاضیات و دیدی واقع‌گرایانه به شیوه فکرکردن دانش‌آموزان است و از این رو صرف نظر از این که یک رویکرد از لحاظ ریاضی چقدر ظریف یا از نظر زیبایی‌شناسی چقدر راضی‌کننده است، اگر مناسب دانش‌آموزان نباشد، نویسنده برنامه درسی باید دستش باز باشد که آن را کنار بگذارد و سپس چیز دیگری بیابد که کارا تر باشد.

در اینجا دو مثال از فرآیند پیشرفت برنامه درسی خودمان ارائه می‌دهم. امیدوارم توضیح این که چطور توانستم در این پروژه سهمی داشته باشم، به ریاضیدانان دیگر کمک کند که برنامه‌های درسی مشابه‌ای بنویسند.

^۱Diane Resek

مقدار مورد انتظار

ما می‌خواهیم شهروندان قادر باشند دربارهٔ موضوعاتی که به شانس و داده‌ها مربوط هستند، تصمیم‌های هوشمندانه‌ای بگیرند و این در حالی است که اغلب دانش‌آموزان حتی امروزه هم با درکی مبهم از آمار و احتمال، دبیرستان را ترک می‌کنند. به همین دلیل مدیران پروژهٔ ما تصمیم گرفتند که بر این موضوعات، بیش از آن چیزی که در برنامهٔ درسی سنتی دبیرستان‌ها بود، تأکید کنیم. به‌ویژه، مقدار مورد انتظار را مفهومی کلیدی در احتمال یافتیم. گام مهم، محدود کردن توجه به وضعیت‌هایی بود که فضاهای نمونه‌ای متناهی بودند. معلوم شد که در این موارد، به‌راحتی می‌توان یک تعریف صوری از مقدار مورد انتظار، یعنی مجموعی از حاصل‌ضرب‌های مقدارها و احتمال‌ها، ارائه داد. برای مثال، مقدار مورد انتظار در پرتاب یک تاس (سالم) برابر با مجموع $1 \times (\frac{1}{6}) + 2 \times (\frac{1}{6}) + 3 \times (\frac{1}{6}) + 4 \times (\frac{1}{6}) + 5 \times (\frac{1}{6}) + 6 \times (\frac{1}{6})$ است که می‌شود $\frac{21}{6}$ یا $3\frac{1}{2}$. برای وضعیت‌های دیگر، حتی اگر احتمال‌ها یکی هم نباشند، تعریف مشابه است. در یک کتاب درسی، مقدار مورد انتظار به‌سادگی به‌صورت $\sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$ تعریف می‌شود که در آن، $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای نمونه‌ای برآمدهای ممکن و $p(x_i)$ احتمال برآمد x_i است.

اما اگرچه احتمالاً برای من ریاضیدان از نظر ظرافت خوشایند بود که از این تعریف استفاده کنم، انجام این کار در قبال دانش‌آموزان، محکوم به شکست بود (البته منظورم اکثر قریب به اتفاق دانش‌آموزان دبیرستانی است، نه معدود افرادی که می‌توانند تفکر انتزاعی داشته باشند و دکتر ریاضی شوند).

در جایگاه یک ریاضی‌دان، می‌دانم که بسیاری از تعریف‌ها با یکدیگر هم‌ارزند، اما از دید فردی با تجربهٔ تدریس در کلاس‌های دبیرستان، می‌دانم که عبارت «فضای نمونه‌ای» و استفاده از نماد مجموع، اندیس‌های پایین و سایر نمادگذاری‌های صوری به «از حق‌ه در آمدن چشم» دانش‌آموزان منجر می‌شود. بنابراین به‌جای تعریف صوری قبلی، ما یک تعریف هم‌ارز بر مبنای ایدهٔ «میانگین بلندمدت» را انتخاب کردیم. به این ترتیب قبل از به‌کار بردن عبارت رسمی «مقدار مورد انتظار»، برنامهٔ درسی برت به دانش‌آموزان تجربه‌های ملموسی می‌دهد، مانند این‌که از آن‌ها می‌خواهد انداختن یک تاس را به دفعات بسیار، بسیار زیاد تصور کنند و آنچه را که از میانگین این پرتاب‌ها انتظار دارند، محاسبه کنند. دانش‌آموزان، بر پایهٔ تجربه و شهود می‌فهمند که اگر تعداد پرتاب‌ها «به اندازهٔ کافی بزرگ باشد»، نسبت پرتاب‌های مساعد با هر برآمد، «بسیار نزدیک» به مقدار احتمال رخداد آن برآمد خواهد بود. (در واقع دانش‌آموزانی که از برت استفاده می‌کنند به جایی می‌رسند که این را، اساساً معنای احتمال می‌بینند.) برای مثال، اگر ۶۰۰ بار پرتاب کنند، می‌توانند انتظار حدود ۱۰۰ پرتاب را برای هر برآمد ممکن تاس

داشته باشند. در این حالت، دانش‌آموزان برت، تعداد کل پرتاب‌ها را

$$1 \times 100 + 2 \times 100 + 3 \times 100 + 4 \times 100 + 5 \times 100 + 6 \times 100 (= 2100)$$

و مقدار مورد انتظار را $3,5 = \frac{2100}{600}$ محاسبه خواهند کرد.

در این مورد، شهود دانش‌آموزان از احتمال، کمک خوبی به آنان می‌کند. آن‌ها می‌بینند که اگر نسبت پرتاب‌ها برای هر برآمد کمی با $\frac{1}{6}$ فرق داشته باشد، تعداد کل پرتاب‌ها تغییر می‌کند، اما مقدار میانگین چندان تغییر نمی‌کند، زیرا این تعداد کل بر یک «عدد بزرگ» تقسیم می‌شود. پس از کار با چند محاسبه مشابه، دانش‌آموزانی که درک کافی از خاصیت توزیعی به‌دست بیاورند، می‌بینند که نتیجه چنین محاسباتی مستقل از تعداد واقعی پرتاب‌ها است.

سقوط آزاد

یکی از واحدهای برنامه درسی محبوب من در برت، این سناریو در سیرک است: یک بازیگر روی چرخ و فلکی قرار دارد که با سرعتی ثابت می‌چرخد. یک گاری با یک تشت آب، بر مسیر مستقیم با سرعت ثابتی روی ریلی زیر چرخ و فلک در حال حرکت است. بازیگر قرار است طوری از چرخ و فلک در حال حرکت بپرد که در تشت آب فرود آید. بر اساس پارامترهای مشخصی که داده شده (مانند سرعت‌های حرکت، ابعاد چرخ و فلک، و وضعیت اولیه گاری و بازیگر)، بازیگر چه زمانی باید بپرد؟

مسئله، شامل ملاحظات ریاضی بسیاری است. این مسئله در برنامه درسی برت ابزاری است برای تعمیم محاسبات مثلثاتی در مثلث‌های راست‌گوشه به توابع مثلثاتی. همچنین شامل ایده تجزیه بردار است، چون دانش‌آموزان سرعت «هواپرد» اولیه بازیگر را - یعنی سرعت بازیگر در لحظه جدا شدن - ناشی از حرکت خود چرخ و فلک در نظر می‌گیرند.

در اینجا می‌خواهم بر نسخه ساده‌شده این مسئله که دانش‌آموزان در ابتدا حل می‌کنند، متمرکز شوم که در آن، از سرعت اولیه بازیگر صرف‌نظر می‌شود. (اگر چرخ و فلک به اندازه کافی آهسته حرکت کند، این سرعت اولیه تنها اثر کوچکی بر سقوط بازیگر دارد.) به عنوان بخشی از تحلیل، دانش‌آموزان باید تعیین کنند که چقدر طول می‌کشد تا بازیگر مسافت داده‌شده‌ای را سقوط کند.

هرچند بعضی از دانش‌آموزان دبیرستانی با رابطه $s = \frac{1}{2}gt^2$ از درس‌های علوم خود آشنا هستند، تنها تعداد کمی از آن‌ها از این‌که این رابطه از کجا آمده چیزی می‌دانند. به‌ویژه، حتی اگر بدانند که در سقوط آزاد شتاب ثابت است، این را درک نمی‌کنند که این موضوع چه دخلی به آن رابطه دارد.

اگر بخواهیم به زبان ریاضی سخن بگوییم، تصمیم گرفتیم که ثابت بودن شتاب را مانند یک اصل موضوع در نظر بگیریم. در جایگاه یک ریاضی‌دان و نویسنده برنامه درسی، با این چالش روبه‌رو بودم که راهی برای رسیدن از این اصل به آن رابطه پیدا کنم و در انجام این کار با این محدودیت مواجه بودم که برای دانش‌آموزان دبیرستانی، بر پایه آنچه از بخش‌های قبلی برنامه درسی برت می‌دانستند، چه چیز با معنا است.

ما چندین رویکرد را هم با معلمان و هم با دانش‌آموزان دبیرستانی آزمایش کردیم تا به رویکردی رسیدیم که به درد می‌خورد. در ریاضیات حرفه‌ای، تعریف سرعت متضمن مفهوم مشتق است. به عبارت دیگر، می‌توان مسافت طی‌شده را با محاسبه انتگرال تابع سرعت به‌دست آورد. این شهود، راهی را به من نشان داد که از فهم دانش‌آموزان از مساحت برای دستیابی به عبارتی برای نمایش مکان برحسب زمان، استفاده کنم. اولین قدم، ایجاد یک ارتباط شهودی بین مساحت زیر نمودار تابع سرعت و مسافت کل طی شده بود. به‌عنوان بخشی از این کار، تصمیم گرفتیم دانش‌آموزان برت روی فعالیتی کار کنند که بخش اول آن این بود:

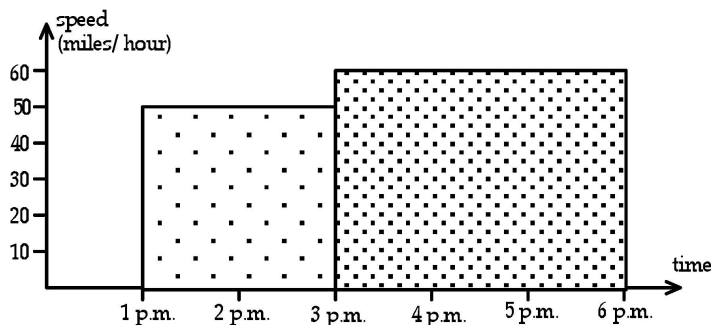
کورت از ۱ بعدازظهر تا ۳ بعدازظهر با سرعت متوسط ۵۰ مایل بر ساعت، و سپس از ۳ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر با سرعت متوسط ۶۰ مایل بر ساعت رانندگی کرد.

الف. نموداری بکشید که سرعت کورت را به‌صورت تابعی از زمان روی کل دوره زمانی ۱ تا ۶ بعدازظهر نمایش دهد و سرعت او را برای هر یک از دو دوره زمانی ۱ تا ۳ بعدازظهر و ۳ تا ۶ بعدازظهر ثابت بگیرید.

ب. توضیح دهید چگونه از مساحت‌های زیر این نمودار استفاده می‌کنید تا کل مسافتی را که او طی کرده است، نمایش دهید.

نمودارهایی که دانش‌آموزان تولید می‌کنند مانند شکل زیر است، و مشاهده می‌کنند که وقتی از ایده آشنای «نرخ×زمان=مسافت» برای پیدا کردن مسافت طی‌شده استفاده می‌کنند، همان محاسبه‌ای را انجام می‌دهند که برای پیدا کردن مساحت دو مستطیل انجام می‌دهند.

در حین بحث در مورد سؤال ۱، دانش‌آموزان برت عموماً به‌طور شهودی می‌بینند که حتی اگر سرعت ثابت نباشد، این ارتباط بین مساحت و مسافت طی‌شده باز هم باید برقرار باشد (در جریان به‌دست آوردن این دیدگاه، معلمان اندیشه‌ای را در ذهن دانش‌آموزان پایه می‌گذارند که ممکن است بعدها به ایده تقریب سطح زیر نمودار تابع، با مستطیل‌ها منجر شود). پس از کسب این بصیرت، دانش‌آموزان به بخش دوم فعالیت می‌روند:



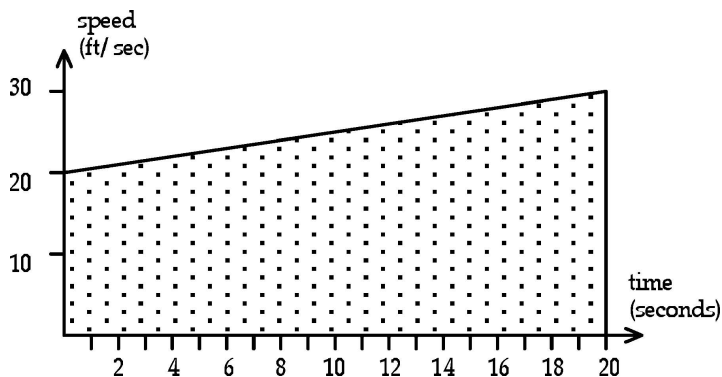
دونده‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت بیست پا بر ثانیه حرکت می‌کند. هنگام ظهر، او شروع به افزایش سرعتش می‌کند. سرعت او با آهنگ رشد ثابت افزایش می‌یابد طوری که بیست ثانیه بعد، به سی پا در ثانیه می‌رسد.

الف. نمودار سرعت دونده را به صورت تابعی از زمان برای این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای رسم کنید.

ب. سرعت متوسط او برای این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای چیست؟

پ. توضیح دهید چگونه از مساحت استفاده کنیم تا کل مسافتی را که او در این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای دویده است، بیابیم.

برای قسمت ب سؤال ۲، دانش‌آموزان برت عموماً رویکردی کاملاً شهودی را در پیش می‌گیرند و می‌گویند چون سرعت از نرخ ثابت ۲۰ پا بر ثانیه به ۳۰ پا بر ثانیه افزایش یافته است، پس سرعت متوسط، ۲۵ پا بر ثانیه است. اما آن‌ها این را هم تشخیص می‌دهند که قسمت پ سؤال ۲ صورت تغییر یافته‌ای از قسمت ب سؤال ۱ قبلی است - اینجا مساحت، همان‌طور که در زیر مشاهده می‌کنید، به جای این‌که ترکیبی از مستطیل‌ها باشد، یک دوزنقه است. پس از کار با این ایده که مسافت کل طی شده باز هم مساحت است،



دانش‌آموزان می‌توانند شهود خود را از این‌که سرعت متوسط، «نقطهٔ وسط» بین سرعت اولیه و سرعت نهایی است، تأیید کنند. به‌علاوه، می‌توانند نقش فرض «شتاب ثابت» را ببینند. کنار هم گذاشتن این ایده‌ها، به این نتیجه منجر می‌شود:

اگر یک شیء با شتاب ثابت حرکت کند، آنگاه سرعت متوسط آن روی هر بازهٔ زمانی، متوسطِ سرعت اولیه و سرعت نهایی آن در آن بازهٔ زمانی است.

تنها با چند گام کوچک می‌توان از این نتیجه به رابطهٔ سقوط آزاد رسید:

- اگر سرعت از صفر شروع شود و با آهنگ g افزایش یابد، آنگاه پس از t ثانیه، سرعت برابر با gt است.

- بنابراین سرعت متوسط در t ثانیه $\frac{0+g}{2}$ است.

- بنابراین مسافت کل طی‌شده در t ثانیه $\frac{gt}{2}t$ است.

با طی کردن این گام‌ها در مورد چند مثال خاص، دانش‌آموزان برت می‌توانند رابطهٔ کلی را به‌دست آورند.

چند درس

مثال‌های بالا چند نکتهٔ مهم را که ممکن است برای نویسندگان برنامه‌های درسی آتی مفید باشد،

نشان می‌دهد:

- درک منعطف و عمیق از یک مفهوم ریاضی می‌تواند دیدگاهی از چگونگی ارائهٔ آن مفهوم به دانش‌آموزان به‌دست دهد. چنین درکی تأثیر زیربنایی در توسعهٔ برنامهٔ درسی برت داشته است.

– درمورد مقدار مورد انتظار، مهم بود که تشخیص دهیم تعریف دیگری از مقدار مورد انتظار وجود دارد که به‌لحاظ ریاضی هم‌ارز تعریف استاندارد است.

– درمورد سقوط آزاد، کلید فهم مطلب، تشخیص این موضوع بود که چگونه مسافت طی‌شده را می‌توان توسط مساحت نمایش داد.

- تولید برنامهٔ درسی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مستلزم تصویر روشنی است از آنچه آن‌ها می‌دانند، آنچه نمی‌دانند، عمق درک آن‌ها از آنچه می‌دانند، و تصویر روشنی از آنچه شهود آن‌ها احتمالاً به آن‌ان می‌گوید.

– برای مقدار مورد انتظار، دانش‌آموزان برت می‌دانستند چطور جمع کل و میانگین را

بیابند. این را هم به‌طور شهودی قبول داشتند که اگر مخرج یک کسر «بزرگ» باشد، آنگاه یک

تغییر کوچک در صورت کسر، مقدار کسر را خیلی تغییر نمی‌دهد. اما چون اکثر دانش‌آموزان دبیرستانی با صورتگرایی نمادی راحت نیستند، به‌کارگیری خاصیت توزیعی برای اثبات این‌که اندازه نمونه اهمیتی ندارد، برای آن‌ها معنایی نخواهد داشت.

– برای سقوط آزاد، مهم بود که بدانیم دانش‌آموزان با ایده «نرخ×زمان=مسافت» راحت هستند و این را هم می‌دانند که چگونه مساحت‌های مربوطه را پیدا کنند. (توجه: اگر این موضوع هنوز قسمتی از پیش‌زمینه درسی دانش‌آموزان نبوده، نویسنده برنامه درسی لازم است که فکر کند چطور آن را قبل از این‌که در اینجا به‌کارگیرد، معرفی کند.)

• اگر می‌خواهیم دانش‌آموزان یک تعریف یا رابطه را بفهمند و به‌کار بگیرند، لازم است با استفاده از موقعیت‌های ملموس، آن تعریف را به‌تدریج بسازیم.

– درمورد مقدار مورد انتظار، بعد از کار با تاس و مثال‌هایی شامل میانگین، تعریف مطرح شد. فهم عمیق از معنای احتمال برای ساختن مفهوم مقدار مورد انتظار حیاتی بود.

– در مورد سقوط آزاد، با شهود دانش‌آموزان درباره وضعیت‌هایی که شامل سرعت ثابت و درک آن‌ها از مساحت بود، شروع کردیم. سپس این را با مثال‌های مشخصی ترکیب کردیم تا شهودشان را تقویت کنیم و بسط دهیم و ارتباط‌های لازم را بسازیم.

• آزمون واقعی یک بخش از برنامه درسی، کارایی آن در کلاس‌های درس است.

– برای مقدار مورد انتظار، بعضی از معلمان می‌خواستند مقدار مورد انتظار را با استفاده از «روش کسر» تعریف کنند. [منظورشان از این عبارت، تعریف بر اساس دستور $\sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$ بود. عموماً به این دلیل می‌خواستند از این رویکرد استفاده کنند که این تعریف را در درس‌های دانشگاهی خود آموخته بودند.] معلمانی که «روش کسر» را امتحان کردند، سردرگمی قابل‌توجهی را در میان دانش‌آموزان گزارش کردند و به همین سبب، به رویکرد «در بلندمدت» تغییر رویه دادند و درک بهتری را در دانش‌آموزان ایجاد نمودند.

– برای سقوط آزاد، پیش از جمع‌بندی در مورد روشی که اینجا توضیح دادیم، روش‌های دیگری را هم امتحان کرده بودیم. معلمان گزارش دادند که دانش‌آموزان اصل «میانگین‌گیری از نقاط انتهایی» را قبول می‌کردند، اما هیچ درکی از این‌که چرا این کار مجاز است نداشتند. آن‌ها اشاره داشتند که رویکردی که اینجا توضیح دادیم، موفق بوده چون هم موافق شهود دانش‌آموزان بوده و هم از دانش قبلی آن‌ها استفاده مفید می‌کرده است.

رعایت این نتایج هدایت‌گر، مطالبات دیگری را در من ایجاد کرد. به‌عنوان ریاضی‌دان، من «درکی عمیق و منعطف» از اکثر مفاهیم ریاضی داشتم، اما خیلی زود فهمیدم که باید از آمار که بخش مهمی از برنامه درسی است، خیلی بیشتر بدانم. تشخیص این‌که دانش‌آموزان چه می‌دانستند و شهود آن‌ها چه چیزی به آن‌ها می‌گفت، مستلزم صرف ساعت‌ها وقت در کلاس‌های درس دبیرستان و صحبت با دانش‌آموزان بود (که لذت‌بخش بود). اصل ساختن تدریجی و ملموس ایده‌ها در خلال سال‌ها تجربه معلمی در مدرسه، ملکه ذهن من شده بود، اما نیاز به توجه دائم به این کار بود؛ به‌ویژه که من در سطح متفاوتی از آموزش ریاضی کار می‌کردم.

این بُعد از موضوع که آیا چیزی واقعاً در کلاس درس به‌کار می‌آید یا نه، چالشی شخصی‌تر بود. لازم بود من بتوانم چیزی را که ماه‌ها برایش وقت صرف کرده بودم تا تکمیل شود، دور بیندازم و با رویکردی جدید شروع کنم. می‌بایست این کار را بارها بیشتر از آن‌که می‌خواستم، انجام دهم، اما پاداش نهایی این کار، ارزش انجامش را داشت.

به‌طور کلی، این کار برای من، به‌عنوان یک ریاضی‌دان، به همان اندازه قضیه‌ها یا اثبات‌هایی که تا آن زمان مطرح کرده بودم، چالشی و راضی‌کننده بود و حسی که از سهم بودن در پیشرفت جامعه به من دست داد قطعاً بهتر از آنی بود که امیدوار بودم از تحقیق در خودِ ریاضی به‌دست بیاورم.

چارچوب برنامه‌ریزی درسی ریاضی مبتنی بر اصول دوگانی، نیازهای فکورانه و استدلال پی‌درپی: DNR

مسعود بهرامی بیدکلمه

چکیده

در این مقاله، چارچوب برنامه‌ریزی درسی موسوم به DNR معرفی و روند شکل‌گیری و پیوندهای آن با تحولات چند دهه اخیر این حوزه بررسی شده است. این چارچوب ریشه در دستاوردهای حوزه یادگیری، تلاش‌های انجام گرفته در حوزه برنامه‌ریزی درسی ریاضی و جریان مداوم پژوهش‌های انجام گرفته توسط گرشن هرل دارد و می‌تواند معیارهای روشنی برای طراحی و تدوین برنامه درسی ریاضی در اختیار برنامه‌ریزان این حوزه قرار دهد.

۱. مقدمه

طی چند دهه اخیر، به‌ویژه با پایان دوره موسوم به «ریاضیات جدید»^۱ بازنگری و تصحیح مداوم برنامه‌های درسی و تلاش برای بهبود و ارتقای آن‌ها، به جریانی مداوم در حوزه برنامه‌ریزی درسی بدل شده است. تداوم این جریان در مقیاس جهانی یا ملی، گاه در قالب بازبینی بنیادین برنامه‌ها و گاه در قالب اصلاح موارد جزئی نمود یافته است. برای لزوم بازنگری در برنامه‌های درسی دلایل متعددی را می‌توان برشمرد:

- تغییر اهداف، چشم‌اندازها و انتظارات آموزشی؛

عبارات و کلمات کلیدی. برنامه‌ریزی درسی ریاضی، دوگانی، نیازهای فکورانه، استدلال پی‌درپی، DNR .

^۱New Math Era

- فراگیر شدن استفاده از محصولات متنوع فناوریانه مانند ماشین حساب، رایانه، اینترنت، نرم افزارهای آموزشی و تخته‌های هوشمند؛
- مطالعه نتایج حاصل از اجرای برنامه‌های درسی در حال اجرا؛
- دستاوردهای تازه در حوزه مطالعات نظری.

برنامه‌ریزی درسی به معنای عام، طراحی نقشه برای ایجاد فرصت‌های مناسب یادگیری به‌منظور رسیدن به هدف‌های در نظر گرفته شده برای یادگیرندگان است. با این تعبیر، برنامه درسی، محدوده‌ای بیش از یک موضوع درسی خاص را در بر می‌گیرد، اما نقش پررنگ ریاضیات در موضوعات آموزشی، گستره چشمگیر مخاطبان و ویژگی‌های یگانه آن، توجه خاص به برنامه‌ریزی درسی در حوزه آموزش ریاضی را به ضرورتی اجتناب‌ناپذیر تبدیل کرده است.

«اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای^۱» از جمله بارزترین نتایج تلاش‌های انجام شده برای تبیین مبانی برنامه‌ریزی درسی ریاضی تا انتهای قرن بیستم است که در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط شورای ملی معلمان ریاضی^۲ (آمریکای شمالی) منتشر شد. در دوره پانزده ساله بعد از انتشار این سند که نقطه عطفی در تبیین معیارهای برنامه‌ریزی درسی ریاضی به حساب می‌آید، تلاش‌ها و مطالعات پژوهشگران حوزه آموزش ریاضی، وجوه تازه‌ای از ملزومات برنامه‌ریزی درسی ریاضی را آشکار کرده و بازتاب بر این یافته‌ها به ارائه چارچوب‌های تازه‌ای در این حوزه منجر شده است. در این نوشتار به معرفی یک چارچوب نظری برای آموزش و یادگیری ریاضی می‌پردازیم که توسط گرشن هَزل^۳ طراحی و تدوین شده است و با توجه به سه رکن اصلی آن، دوگانی^۴ نیازهای فکورانه^۵ و استدلال پی‌درپی^۶، به اختصار DNR نامیده می‌شود. روند معرفی این چارچوب در قالب زیر سازماندهی شده است:

- معرفی کوتاه هَزل؛
- پیشینه و روند شکل‌گیری DNR؛
- معرفی رئوس کلی DNR.

۲. مختصری در مورد هَزل

گرشن هَزل تحصیلات خود را در رشته ریاضی در سال ۱۹۸۵ (قریب به سی سال پیش) به پایان برد و از آن سال تا کنون، در دانشگاه‌های ایلینویز، پردو و دانشگاه ایالتی کالیفرنیا در سن‌دیوگو^۷ به تدریس و تحقیق در حوزه‌های ریاضی و آموزش ریاضی اشتغال دارد. وی در حوزه آموزش ریاضی، از شهرت

^۱Principles and Standards for School Mathematics ^۲The National Council of Teachers of Mathematics

^۳Guershon Harel ^۴Duality ^۵Necessity ^۶Repeated Reasoning ^۷University of California, San Diego

و مقبولیت قابل توجهی برخوردار است و بیش از ۸۰ مقاله (از سطح مقدماتی تا دانشگاهی) در کارنامه پژوهشی خود دارد. دستاوردهای پژوهشی دامنه‌دار وی در حوزه اثبات ریاضی، از جمله بارزترین کارهای پژوهشی دو دهه اخیر در حوزه آموزش ریاضی به حساب می‌آید و نام وی را در میان نام‌آوران این حوزه قرار می‌دهد. شناخت و معرفت‌شناسی ریاضی و کاربرد آن در برنامه‌ریزی درسی و آموزش معلمان، از جمله مهم‌ترین علایق تحقیقی تازه او در حوزه آموزش ریاضی هستند. هرل مجری پروژه‌های تحقیقاتی متعددی بوده است که نهادهایی از قبیل بنیاد ملی علوم^۱، وزارت آموزش ایالات متحده آمریکا^۲ و دولت محلی ایالت کالیفرنیا^۳ حامی مالی آن بوده‌اند. از جمله این پروژه‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- پروژه اعداد گویا (پروژه‌ای تحقیقی با هدف بررسی یادگیری و آموزش مفاهیم چندگانه مانند کسرها)؛

- بنیاد تفکر جبری (پروژه‌ای با هدف توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی دبیرستان)؛

- توسعه دانش ریاضی معلمان بر پایه شیوه تدریس مبتنی بر روش DNR.

یکی از پربارترین نتایج حضور دیرپای هرل در این حوزه، توسعه چارچوبی نظری برای برنامه‌ریزی درسی ریاضی است که طی چند سال اخیر به کانون فعالیت‌های پژوهشی او تبدیل شده است. در ادامه، این چارچوب نظری را که به اختصار DNR نامیده می‌شود، معرفی می‌کنیم.

۳. معرفی DNR

برنامه‌ریزی درسی، بازتاب موضع‌گیری‌های اساسی درباره آموزش و چگونگی کاربرد آن‌ها در جریان عمل آموزش است. در حوزه برنامه‌ریزی درسی، شاخص‌هایی وجود دارد که با بررسی آن‌ها، می‌توان تصویری کلی از ابعاد گوناگون دیدگاه حاکم بر برنامه‌های درسی و موضع‌گیری‌های اساسی‌شان ارائه داد. در بررسی DNR ما شاخص‌های پیشنهاد شده توسط جی. پی. میلر^۴ را در نظر داشته‌ایم که اهداف کلی برنامه درسی، تلقی نسبت به فرآیند یادگیری و چگونگی پی‌گیری این اهداف را از جمله شاخص‌های اصلی می‌داند که در جریان بررسی برنامه‌های درسی باید آن‌ها را در کانون توجه قرار داد. بر اساس چارچوب پیشنهاد شده توسط میلر، یکی از مهم‌ترین شاخص‌های بررسی مدل‌های ارائه شده برای برنامه‌ریزی درسی، هدفی است که برنامه‌های درسی برای دستیابی به آن طراحی می‌شوند. بدیهی است که هدف غایی هر برنامه درسی ریاضی، یادگیری ریاضی است. لیکن پرسشی که عموماً در این زمینه مطرح می‌شود این است که در جریان آموزش عمومی چه ریاضیاتی را باید به یادگیرندگان آموخت؟ نیازهای فعلی یا

^۱ National Science Foundation ^۲ US Department of Education ^۳ State of California ^۴ John P.

آتی یادگیرندگان، در تعیین موضوعات و محتوای ریاضی عرضه شده به یادگیرندگان نقشی اساسی ایفا می‌کنند و تغییر مداوم و سریع شرایط و نیازهای یادگیرندگان طی ده‌های اخیر، پیش‌بینی این نیازها را تا اندازه زیادی سخت‌تر از گذشته کرده است. یکی از پیامدهای این مطلب، ضرورت بازنگری پی‌درپی در برنامه‌های درسی چند دهه اخیر و کاهش فاصله زمانی تغییرات متوالی آن‌ها بوده است.

یکی از وجوه بارز دیدگاه حاکم بر چارچوب برنامه‌ریزی، DNR تجدید نظر اساسی در تلقی از محتوای ریاضیاتی است که در برنامه درسی ریاضی گنجانده می‌شود. هرل بر این باور است که در تعیین محتوای ریاضی گنجانده شده در برنامه‌های درسی «عموماً این تمایل وجود دارد که ریاضیات مجموعه‌ای متشکل از تعاریف، قضایا، اثبات‌ها، مسائل و راه‌حل‌هایشان در نظر گرفته شود.» او این دیدگاه را نافی جامعیت ریاضیات می‌داند و معتقد است که ریاضیات وجه دیگری هم دارد که غالباً در منابع رسمی، بررسی یا گزارش نمی‌شود و به این ترتیب، در زمره اهداف آموزشی قرار نمی‌گیرد و یا گاهی در تعاملات غیررسمی ریاضی‌دانان، نموده‌هایی از این وجه از ریاضیات عرضه می‌شود. موضع هرل در مورد چیستی ریاضیات، بسیار شبیه به موضعی است که بیش از هفت دهه پیش، پولیا در جریان پرداختن به فرآیند حل مسئله به این صورت به آن اشاره کرده است:

«ریاضیات دانش دقیق اقلیدسی است؛ اما چیز دیگری هم هست. ریاضیاتی که به شیوه اقلیدس عرضه می‌گردد یک دانش بسامان قیاسی است، اما ریاضیات، زمانی که بدان اشتغال داریم به صورت یک دانش تجربی و استقرایی نمود می‌یابد. هر دو وجه از قدمتی به اندازه خود ریاضیات برخوردارند، اما دومین وجه از یک جنبه جدید است: فرآیند ابداع کردن هرگز به دانش‌آموزان، معلمان یا عموم مردم ارائه نشده است. [۱]»

وی کتاب «چگونه حل کنیم» پولیا را تلاش نادر ریاضی‌دانی حرفه‌ای می‌داند که به این وجه از ریاضیات پرداخته است. این موضع معرفت‌شناختی^۱ هرل یکی از مهم‌ترین فصول تمایز DNR با سایر دیدگاه رایج در برنامه‌ریزی درسی است. درک این موضع و پیامدهای آموزشی آن، مستلزم آشنایی با مقوله‌بندی هرل در حوزه عملکرد ذهنی است که در ادامه، به آن خواهیم پرداخت. این مقوله‌بندی پیامد تفکیک نتیجه اعمال ذهنی و مشخصه اعمال ذهنی است که هرل آن‌ها را ذیل عناوین «راه‌های فهمیدن»^۲ و «راه‌های فکر کردن»^۳ از هم تفکیک کرده است. هرل معتقد است که این مقوله‌بندی چه از دیدگاه شناختی و چه از

^۱ epistemological ^۲ the ways of understanding ^۳ the ways of thinking

دیدگاه آموزشی، حائز اهمیت بسیار زیادی هستند، زیرا به ما کمک می‌کند عمل ریاضی افراد یا گروه‌ها را در طول دوره‌های متفاوت تاریخی بهتر درک کنیم و بر مبنای آن‌ها اهداف آموزشی صریحی تدوین کنیم.

۴. راه‌های فهمیدن و راه‌های فکر کردن

برای روشن شدن منظور هرل از آنچه که تحت عناوین «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن» به آن‌ها اشاره می‌کند، تلاش می‌کنیم با ذکر چند مثال تصویری قابل فهم از این مقولات ارائه دهیم.

(الف) تفسیرهای متفاوت مفاهیم ریاضی. نمادهای $y = \sqrt{5-x}$ را در نظر بگیرید. در جریان کار با این نمادها، دو نوع قابل تفکیک از دانش‌ما، نقش ایفا می‌کنند. این نمادها را به عنوان یک معادله (یعنی شرطی در مورد متغیرهای x و y)، به عنوان یک تابع حقیقی مقدار یا مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب و یا به شیوه‌های گوناگون دیگری می‌توان تعبیر کرد. هرل چنین تعبیرهایی را از یک اصطلاح یا مجموعه‌ای از نمادها، ذیل عنوان «راه‌های فهمیدن» دسته‌بندی می‌کند. در سطحی دیگر، کسی که در مورد چنین مجموعه‌ای از نمادها دارای بیش از یک تعبیر است، احتمالاً این گونه می‌اندیشد که نمادهای ریاضی می‌توانند بیش از یک تفسیر داشته باشند و کسی که قادر است با توجه به مسائل پیش رو، تعبیرش از نمادها را تغییر دهد، از این اقبال برخوردار است که بداند تعبیر متفاوت نمادهای ریاضی در حل مسائل، می‌تواند یک مزیت باشد. هرل این نوع از دانش ریاضی را به عنوان «راه‌های فکر کردن» دسته‌بندی می‌کند.

(ب) حل مسئله. مطابق دسته‌بندی هرل، در حوزه حل مسئله، راه‌حل‌هایی (درست یا نادرستی) که یک فرد برای حل یک مسئله ارائه می‌کند در زمره «راه‌های فهمیدن» او به حساب می‌آیند، اما شیوه‌های مورد استفاده در حل مسائل را باید در زمره «راه‌های فکر کردن» او دانست. برای مثال، یافتن مسئله ساده‌تر، در نظر گرفتن حالات ممکن دیگر، پیدا کردن واژگان کلیدی در صورت مسئله و نظایر آن، تا حدودی نشان‌دهنده مشخصه‌های عمل حل مسئله هستند و در زمره «راه‌های فکر کردن» به حساب می‌آیند.

(ج) طرح‌واره‌های اثبات. هرل در بررسی «طرح‌واره‌های اثبات»^۱ به نمونه‌های دیگری از «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن» اشاره می‌کند. از نظر وی، اثبات اقدامی است که به منظور رفع شک در مورد درستی یک ادعا صورت می‌پذیرد. به این ترتیب، اثبات می‌تواند تلاش یک فرد برای رفع شک خودش در مورد درستی یا نادرستی یک ادعا و یا عملی باشد که به منظور رفع تردید دیگران در مورد یک حدس، صورت می‌پذیرد. با این تعبیر، منظور از «طرح‌واره اثبات»، مشخصه‌ای مرتبط با این دو نوع

^۱proof scheme

تلاش برای رفع شک در مورد درستی حدس‌ها است که در ادامه، به آن می‌پردازیم. طرح‌واره اثبات مورد پذیرش در ریاضیات، طرح‌واره‌ای است که هرل از آن با نام «طرح‌واره اثبات استنتاجی» یاد می‌کند. مطابق این طرح‌واره، یک ادعا توسط زنجیره‌ای از گام‌ها اثبات می‌شود که هر گام، نتیجه‌ای از اصول اولیه یا نتایج قبلی است که بر مبنای قوانین استنتاجی به دست آمده‌اند. البته در بین دانش‌آموزان، طرح‌واره‌های اثبات دیگری هم رایج است. برای مثال، یک طرح‌واره اثبات شایع در میان دانش‌آموزان، «طرح‌واره اثبات اقتدارمحور» است که بر اساس آن، درستی اثبات به تأیید معلم یا منابع درسی وابسته است. یک نمونه دیگر از طرح‌واره‌های اثبات رایج در بین دانش‌آموزان، «طرح‌واره اثبات تجربی» است که درستی آن به مشاهده مثال‌های محدود یا دریافت‌های بصری متکی است. با استفاده از اصطلاحات معرفی شده توسط هرل، «طرح‌واره‌های اثبات» در زمره «راه‌های فکر کردن» و خود اثبات‌ها در زمره «راه‌های فهمیدن» به شمار می‌آیند.

د) ناوردایی جبری. «ناوردایی جبری» به یک «راه فکر کردن» اشاره دارد که مطابق آن، دست‌ورزی عبارت‌های جبری نه به صورت تصادفی بلکه به منظور رسیدن به صورتی مطلوب با عدم تغییر بعضی از ویژگی‌های عبارت‌های جبری، صورت می‌پذیرد. هرل معتقد است که اگر این «راه فکر کردن» را یک هدف آموزشی در نظر بگیریم، جبر مقدماتی و به‌ویژه مهارت‌های دست‌ورزی نمادها به صورتی متفاوت و معنادار آموخته خواهند شد. برای مثال، بر اساس این دیدگاه، در جریان آشنایی با روش مربع کامل کردن، هدف از عرضه این روش، تنها ارائه ابزاری برای حل معادله‌های درجه ۲ نخواهد بود، بلکه می‌تواند فعالیتی برای هدایت دانش‌آموزان به سمت آشنایی با «روش فکر کردن» منطبق بر ناوردایی جبری نیز باشد. به این ترتیب، دانش‌آموزان متوجه این مطلب می‌شوند که عبارت‌های جبری به منظور خاصی بازنویسی می‌شوند و اعمالی که برای بازنویسی عبارت‌های جبری به کار می‌روند، به صورتی معنادار فهمیده و تعمیق می‌شوند. در چنین وضعیتی، دست‌ورزی نمادها دیگر نوعی خرگوش از کلاه درآوردن نیست، بلکه رشته‌ای از اعمال هدفمند است که همه می‌توانند آن را یاد بگیرند. بدون به دست آوردن این توانایی، این خطر وجود دارد که دست‌ورزی عبارت‌های جبری به اعمالی رازآلود برای دانش‌آموزان تبدیل شود؛ اعمالی که در انجام آن‌ها باید قوانین خاصی را رعایت کرد، اما هدف از انجام آن‌ها روشن نیست. هرل معتقد است که یکی از دلایل کاهش تأکید بر دست‌ورزی نمادین عبارت‌های جبری در برنامه‌های درسی، عدم توجه به «ناوردایی جبری» در برنامه‌های درسی است. منظور هرل از «ناوردایی جبری»، حالت خاصی از یک «راه فکر کردن» است که بر پایه آن، تلاش می‌شود یک مسئله، به مسئله‌ای آسانتر تبدیل شود یا یک شیء ریاضی، به شیء ریاضی به دردت‌بخش‌تری تبدیل گردد.

نکته بسیار مهم این است که چنین «راه فکر کردنی» یکباره آموخته نمی‌شود، بلکه فرد به‌کار بستن آن را در زمینه‌های مختلف مانند حل معادله‌های درجه ۲، حل دستگاه‌های معادلات و روش‌های انتگرال‌گیری مشاهده می‌کند و به‌تدریج آن را می‌آموزد. از این‌رو آشنایی با این راه فکر کردن را باید در جریان یادگیری ریاضیات مقدماتی آغاز نمود. مثلاً آشنایی با تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای اعشاری، توجه به هم‌ارز بودن کسرهایی مانند $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ یا آشنایی با این مطلب که تقسیم دو عدد اعشاری را می‌توان به محاسبه حاصل تقسیم دو عدد کامل تبدیل کرد، موقعیت‌هایی در ریاضیات مقدماتی هستند که می‌توانند زمینه آشنایی با این «راه فکر کردن» را فراهم کنند. البته اهمیت دارد که این کار به‌صورتی معنادار انجام شود و تا زمانی که دانش‌آموزان چگونگی انجام این کارها را بدون توجیه مناسب بیاموزند، فرصت شکل‌گیری «راه‌های فکر کردن» مبتنی بر ناوردایی جبری، فراهم نمی‌شود.

۵. پیامدهای آموزشی

با توجه به تقسیم‌بندی دانش ریاضی به «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن»، هرل معتقد است که اهداف آموزشی، غالباً شامل «راه‌های فهمیدن»، یعنی نتایج کارکردهای ذهنی؛ یا تعاریف، رویه‌ها، تکنیک‌ها، قضایا و اثبات‌ها هستند و شامل «راه‌های فکر کردن» نمی‌شوند. بنابراین بعید است که دانش‌آموزان در جریان یادگیری ریاضی، به استقلال برسند. علاوه بر این، شکل‌گیری «راه‌های فکر کردن»، نسبتاً دشوار و تغییر راه‌های فکر کردنی که از قبل شکل گرفته‌اند به سختی امکان‌پذیر است. با توجه به این مطلب، جریان آشنایی با «راه‌های فکر کردن» را نباید به زمانی که یادگیرندگان به ریاضیات پیشرفته می‌پردازند، موقوف نمود و باید زمینه آشنایی دانش‌آموزان با «راه‌های فکر کردن» را هنگام یادگیری ریاضیات مقدماتی آغاز نمود. هرل معتقد است که در ریاضیات مقدماتی، موقعیت‌هایی غنی وجود دارد که می‌توانند زمینه انجام این کار را فراهم کنند. برای مثال، او مفهوم کسر را در نظر می‌گیرد. رایج‌ترین روش فهمیدن یک کسر در میان دانش‌آموزان ابتدایی، همان چیزی است که در منابع آموزشی از آن با عنوان جزء-کل نام برده می‌شود: $\frac{m}{n}$ یعنی m چیز از n چیز که در آن، m و n دو عدد صحیح مثبت هستند. راه فهمیدن بسیاری از دانش‌آموزان، به همین تعبیر کسر محدود می‌شود و به همین دلیل از درک توسعه معنادار حساب کسرها باز می‌مانند. البته راه‌های فهمیدن متنوعی برای درک معنای کسر وجود دارد. از جمله:

$$\bullet \quad \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$$

• مقدار حاصل از تقسیم m واحد به n قسمت برابر؛

- نتیجه حاصل از اندازه‌گیری پاره‌خطی به طول m واحد با استفاده از خط‌کشی که هر واحد آن n واحد است؛
- جواب معادله $nx = m$ ؛
- نسبت m به n .

آشنایی با چنین رده متنوعی از «راه‌های فهمیدن»، موضوع کسر را غنی ساخته و می‌تواند زمینه آشنایی دانش‌آموزان را با بعضی از «راه‌های فکر کردن» بسیار مفید فراهم نماید. از جمله این «راه‌های فکر کردن» به موارد زیر اشاره می‌شود:

- مفاهیم ریاضی را می‌توان به روش‌های متنوعی فهمید؛
 - گاهی لازم است مفاهیم ریاضی را به روش‌های دیگری فهمید؛
 - تغییر شیوه فهمیدن یک مفهوم می‌تواند در حل بعضی از مسائل ریاضی، مزایایی داشته باشد.
- این راه‌های فکر کردن برای فراهم شدن زمینه آشنایی با راه‌های فهمیدنی که در چشم‌انداز جریان یادگیری افراد قرار دارند، ضروری است. برای مثال، در حساب دیفرانسیل و انتگرال بسته به موقعیت، ممکن است لازم باشد مشتق تابع f را در نقطه a به صورت مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه a ، آهنگ تغییر لحظه‌ای در a یا شیب بهترین تقریب خطی یک تابع در نزدیکی a تعبیر کنیم. همین طور، در حل مسائل جبرخطی این که یک «روش فهمیدن» را به «روش فهمیدن» دیگر تبدیل کنیم، مثلاً استفاده از هم‌ارزی دستگاه‌های معادلات خطی با ماتریس‌ها و تبدیلات خطی، در حل مسائل ضروری است و بدون آشنایی با این راه‌های فکر کردن، انتظار می‌رود که یادگیرندگان در فرآیند یادگیری جبرخطی، با مشکل مواجه شوند.

اصل دوگانی. با روشن شدن منظور هرل از اصطلاحات «راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدن»، می‌توانیم به دیدگاه معرفت‌شناختی وی و یکی از پیامدهای آموزشی آن که از اصول چارچوب DNR به حساب می‌آید، اشاره کنیم. از دید هرل:

«دانش ریاضی متشکل از «تمام راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدن» است

که در روند تاریخی تکوین ریاضی نهاده شده‌اند.» [۲]

علاوه بر این، همان‌طور که در مثال‌های قبلی اشاره شد، یادگیری «راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدن» اثری متقابل بر هم دارند. این مطلب یکی از اصول چارچوب DNR است که هرل از آن با نام «اصل دوگانی» یاد می‌کند:

”دانش‌آموزان راه‌های فکر کردن‌شان را با آشنایی با راه‌های فهمیدن‌شان توسعه

می‌دهند و راه‌ای فهمیدن آن‌ها متأثر از راه‌های فکر کردن است. [۲]“

از منظری دیگر، پذیرش این اصل متضمن پذیرش ادعای دیگری نیز هست؛ آشنایی با یکی از این دو نوع دانش بدون ایجاد تغییر مقتضی در دیگری، امکان‌پذیر نیست. بنابراین در مقایسه با سایر دیدگاه‌های رایج در حوزه برنامه‌ریزی درسی ریاضی، در این دیدگاه، در نظر داشتن راه‌های فکر کردن به‌عنوان هدف آموزشی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. البته موعظه در مورد توجه به راه‌های فکر کردن اثری بر بهبود راه‌های فهمیدن نخواهد داشت. برای مثال، صحبت درباره ماهیت اثبات ریاضی و یا توصیه در مورد به‌کار بستن رهیافت‌های حل مسئله، تأثیر ناچیزی در چگونگی اثبات‌ها یا راه‌حل‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان خواهد داشت و تنها با تولید راه‌های مناسب فهمیدن، مثل حل مسائل یا اثبات ریاضی، دانش‌آموزان می‌توانند راه‌های مطلوب فکر کردن را شکل دهند. این که معلمان رهیافت‌های حل مسأله را به‌صورت صریح آموزش دهند و انتظار داشته باشند دانش‌آموزان از آن‌ها به‌عنوان قواعدی کلی در حل مسائل پیروی کنند، بسیار ساده‌انگارانه و سطحی است. همان‌طور که قبلاً هم گفته شد، توجه به راه‌های مناسب فکر کردن مانند ناوردایی جبری، استدلال متناسب، استدلال الگوریتمی، راه‌های خاص فهمیدن (مانند حل معادله‌های درجه ۲، روش‌های انتگرال‌گیری، و تقسیم اعداد اعشاری)، مفاهیم و فرآیندهای خاصی را پررنگ می‌کند. به‌علاوه، در جریان آموزش راه‌های فهمیدن، باید راه‌های فکر کردن فعلی دانش‌آموزان نیز مورد توجه قرار گیرند. برای مثال، هرل بر این نکته تأکید دارد که حتی دانشجویان دوره کارشناسی فاقد طرح‌واره اثبات اصل موضوعی هستند و اتخاذ این رویکرد (که مبتنی بر راه فکر کردنی است که در آغاز قرن بیستم و با انتشار کارهای هیلبرت ابداع شده و در روند رشد ریاضی موضوعی، دگرگون‌کننده تلقی می‌شود)، برای آن‌ها مناسب نیست. تأکیدات فوق، پرسش درمورد ماهیت رفتار آموزشی را که به ساختن راه‌های مطلوب فکر کردن و فهمیدن توسط دانش‌آموزان کمک می‌کند، به پرسشی کلیدی تبدیل می‌کند که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

اصل نیاز فکورانه. دومین اصل چارچوب برنامه‌ریزی درسی موسوم به DNR را نیز به‌کمک یک موقعیت آموزشی تشریح می‌کنیم. معمولاً پیش از آشنایی با روش‌های حل معادله، ردّ قابل‌توجهی از اتحادهای جبری در برنامه درسی گنجانده می‌شود و در گام بعد، بحث حل معادله‌ها مطرح می‌شود. چشم‌داشت اصلی عرضه اتحادها، قبل از پیش کشیدن بحث حل معادله‌ها، این است که یادگیرندگان با روش‌هایی که در جریان حل معادله‌ها به آن‌ها نیاز دارند، آشنا شوند. هر چند اتخاذ این رویکرد از دیدگاه منطقی موجه به‌نظر می‌رسد، اما هرل معتقد است که نتیجه اتخاذ چنین رویکردی به القای بی‌هدف بودن

مطالب عرضه شده در کلاس‌های ریاضی منجر می‌گردد و این وضعیت را نتیجه بی‌توجهی به ضرورت فهم دلایل فکری چنین مطالبی می‌داند. این نظر جدید هِرل، ترجمان دیدگاهی در حوزه یادگیری است که به اختصار به آن اشاره می‌کنیم. مطابق دیدگاه شناخت‌گرایان در مورد یادگیری، غالباً بین دانسته‌ها و تصورات ما از موقعیت‌هایی که در آن‌ها قرار داریم، نوعی تعادل برقرار است. منظور از تعادل این است که بر پایه دانسته‌ها و تصوراتمان، قادریم از عهده تعامل رضایت‌بخش با موقعیت‌هایی که در آن قرار داریم، برآیم. اما موقعیت‌هایی وجود دارند که بر پایه دانسته‌هایمان قادر نیستیم از عهده تعامل با آن‌ها برآیم و لذا تعادل بین دانسته‌ها و تصوراتمان، با موقعیتی که در آن قرار داریم به هم می‌خورد و وادار می‌شویم با گسترش دانسته‌هایمان یا جرح و تعدیل آن‌ها، تعادل قبلی را مجدداً برقرار کنیم. در این دیدگاه، یادگیری نتیجه تلاشی است که برای بازیابی این تعادل از مسیر گسترش دانسته‌های قبلی یا جرح و تعدیل آن‌ها، صورت می‌پذیرد. بر هم خوردن تعادل بین دانسته‌های فعلی و موقعیت‌هایی که در آن‌ها قرار داریم به بروز احساس نیاز به بازیابی مجدد این تعادل در فرد منجر می‌گردد که هِرل با عنوان «نیازهای فکوره‌انه»^۱ از آن یاد می‌کند. ضرورت توجه به برانگیختن این احساس در فرآیند یادگیری در قالب دومین اصل از چارچوب DNR به صورت زیر تجلی می‌نماید:

«یادگیرندگان برای آنچه که می‌خواهیم به آن‌ها بیاموزیم باید احساس نیاز کنند.
در اینجا منظور از نیاز، نیازهای اجتماعی یا اقتصادی نیست. بلکه نیازهای
فکوره‌انه است.» [۲]

در اینجا منظور از اصطلاح «نیاز فکوره‌انه»، احساس درونی دانش‌آموزان در مواجهه با مسائلی است که به خوبی فهمیده شده و اهمیت حل آن‌ها، به خوبی درک شده است. وقتی دانش‌آموزان با موقعیتی مواجه می‌شوند که با دانش فعلی آن‌ها سازگار نیست، یا با مسأله‌ای مواجه می‌شوند که با دانش فعلی آن‌ها قابل حل نیست، این نیاز در ذهن آن‌ها برانگیخته می‌شود که برای این موقعیت، توضیحی بیابند یا آن مسئله را حل کنند. صرف نظر از این که نتیجه تلاش برای پاسخ دادن به این نیاز، به ساخت دانشی تازه منجر شود یا دانش جدیدی به دست نیاید، تلاش برای یافتن توضیح مناسب یا حل مسئله در چنین موقعیتی، برای دانش‌آموزان معنادار است، زیرا نتیجه این تلاش ریشه در نیازهای فکوره‌انه خودشان دارد و به همین دلیل نتیجه آن می‌تواند با دانش قبلی آن‌ها تجمیع شود. برای روشن شدن این مطلب، روش‌های حل معادله‌ها بر پایه رویکرد مبتنی بر نیازهای فکوره‌انه ارائه می‌شود:

^۱ Intellectual needs

- رابطه علی میان پدیده‌های گوناگون در قالب تابع بیان می‌شود که با دانستن مقدار متغیر مستقل (علت)، مقدار متغیر وابسته (معلول) به دست می‌آید. برای مثال، زمانی که یک جسم تحت تأثیر نیروی جاذبه زمین سقوط می‌کند، می‌توانیم ارتفاع آن را از سطح زمین، تابعی از زمان بدانیم و در هر لحظه پس از رها شدن، ارتفاع جسم را مشخص کنیم. در این مثال خاص، اگر ارتفاع را با y نمایش دهیم رابطه بین y و t در قالب یک تساوی مانند $y = f(t)$ ظاهر می‌شود که در آن، $f(t)$ عبارتی درجه دوم برحسب t است.
- مسائلی وجود دارند که در آن‌ها می‌خواهیم بدانیم به ازای چه مقداری از متغیر مستقل، متغیر وابسته برابر با یک مقدار مشخص خواهد بود. برای مثال، می‌خواهیم بدانیم ارتفاع جسمی که تحت تأثیر نیروی جاذبه زمین در حال سقوط است، در چه لحظه‌ای برابر با ۱۰۰ متر خواهد بود. پس در این مورد، باید مقداری را بیابیم که با جایگزین کردن آن به جای t ، تساوی $f(t) = ۱۰۰$ برقرار شود. به بیان دیگر، می‌خواهیم معادله $f(t) = ۱۰۰$ را حل کنیم.
- به جای حل معادله $f(t) = ۱۰۰$ ، کافی است معادله $f(t) - ۱۰۰ = ۰$ را حل کنیم و این شیوه در تعیین زمانی هم که ارتفاع چنین جسمی برابر با هر مقدار دیگری مانند c است، قابل استفاده است. یعنی برای حل هر معادله به شکل $f(t) = c$ ، کافی است معادله $f(t) - c = ۰$ را حل کنیم که $f(t) - c$ نیز مجدداً یک عبارت درجه دوم برحسب t است. به عبارت دیگر، برای حل چنین معادله‌هایی، کافی است نوع خاصی از آن‌ها را حل کنیم. پس اگر بتوانیم روشی کلی برای حل معادله‌های به شکل $f(t) = ۰$ بیابیم، قادر خواهیم بود همه این معادله‌ها را حل کنیم.
- در جریان حل معادلات به شکل $f(t) = ۰$ ، می‌توان نشان داد که تجزیه عبارت $f(t)$ به عوامل ضربی، می‌تواند در حل چنین مسائلی راهگشا باشد. به‌ویژه، زمانی که $f(t)$ عبارتی درجه دوم برحسب t است، با تجزیه عبارت $f(t)$ به دو عبارت درجه یک، کافی است دو معادله درجه یک را حل کنیم که از پیش با روش حل آن‌ها آشنایی داریم. به این ترتیب، روش‌هایی که ما را قادر می‌کنند عبارت‌های جبری را به صورت ضربی بازنویسی کنیم و یا به عبارت دیگر، آن‌ها را تجزیه کنیم از اهمیت قابل توجهی برخوردار خواهند شد و در چنین موقعیتی، آشنایی با اتحادهای گوناگون برای یادگیرندگان معنادار خواهد بود.

فرآیند فوق، شامل زنجیره‌ای از نیازهای فکورهانه است که برداشتن گام‌های ذکر شده در این فرآیند و ضرورت و مزیت آشنایی با رده بزرگی از اتحادها را توجیه می‌کند. با پیروی از الگویی مشابه الگوی فوق،

می‌توان فرآیند معرفی سایر مفاهیم و روش‌های ریاضی را نیز به‌گونه‌ای طراحی نمود که گام‌های برداشته شده در هر مرحله توسط نیازهای فکورانه یادگیرندگان موجه و هدفمند به‌نظر برسند. هرل معتقد است که در نظر داشتن نیازهای فکورانه، یکی از مسئولیت‌های اصلی معلمان و طراحان برنامه درسی ریاضی است.

اصل استدلال پی‌درپی. حتی در صورتی که نیاز به راه‌های فکرکردن و راه‌های فهمیدن از طریق نیازهای فکورانه یادگیرندگان تأمین شده باشد، هنوز یک موضوع دیگر باقی می‌ماند؛ این که مطمئن شویم یادگیرندگان دانش خود را درونی نموده، سازماندهی می‌کنند و آن را در بلند مدت، حفظ خواهند کرد. سومین اصل چارچوب DNR که به «اصل استدلال پی‌درپی» موسوم است، متضمن این موضوع است. هرل ضمن اشاره به تحقیقاتی که مؤید نقش حیاتی تکرار تجارب یا اعمال در فرآیند درونی‌سازی و سازماندهی دانش کسب شده توسط یادگیرندگان است، بر این نکته تأکید دارد که در آموزش مبتنی بر چارچوب DNR تکرار استدلال کردن به تقویت راه‌های مناسب فهمیدن و فکرکردن می‌انجامد. هدف دیگر تکرار استدلال کردن و نه انجام پی‌درپی تمرین‌های معمولی، فراهم آوردن زمینه‌ای است که یادگیرندگان بتوانند دانش خویش را به‌صورت مستقل و بدون تأمل، به‌کار ببرند. مسائلی که به این منظور طراحی می‌شوند، باید نیاز به استدلال را به‌طور مستمر مهیا کنند و به نیازهای فکورانه در حال تغییر یادگیرندگان پاسخ دهند.

۶. مطالعات و پژوهش‌های در دست انجام

DNR چارچوبی نظری است که ریشه در دستاوردهای حوزه یادگیری، تلاش‌های انجام گرفته در حوزه برنامه‌ریزی درسی ریاضی و جریان مداوم پژوهش‌های انجام گرفته توسط مبدع آن دارد. علاوه بر تلاش‌های انجام شده توسط مبدع این چارچوب، برای تدوین برنامه درسی مبتنی بر این دیدگاه و بررسی نتایج حاصل از آموزش مبتنی بر آن، نگارنده این مقاله نیز در حال بررسی نتایج حاصل از به‌کارگیری این رویکرد آموزشی است و امیدوار است که نتایج حاصل از این مطالعات، زمینه طراحی و تدوین برنامه درسی ریاضی مبتنی بر این دیدگاه را در اختیار برنامه‌ریزان این حوزه قرار دهد.

مراجع

- [۱] پولیا، جی. (۱۹۴۴) چگونه حل کنیم. ترجمه مسعود بهرامی بیدکلمه (۱۳۹۴). در دست چاپ.
- [2] Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I, ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500.
- [3] Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II, ZDM—The International Journal on Mathematics Education.
- [4] Harel, G. (2013) DNR-Based Curricula, the Case of Complex Numbers. Journal of Humanistic Mathematics, Vol 3, No 2.
- [5] Miller John P. (1983) The educational spectrum: Orientations to curriculum. Longman.

مسعود بهرامی بیدکلمه: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی

رایانامه: masoubahramibidkalme@yahoo.com

چرا اثبات؟

فولکر رونده

برگردان: فاطمه اختری و رسول نصراصفهانی

چکیده

پروفسور رونده استاد دانشگاه آلبرتای کانادا در رشته ریاضی است. مقالات تخصصی وی روی اثرات متقابل بین آنالیز تابعی و آنالیز هارمونیک متمرکز است. مقالات عمومی رونده درباره جنبه‌های فلسفی ریاضی نیز جالب توجه‌اند؛ از جمله مقاله حاضر که ضمن ارائه چند مثال، چرایی و چگونگی اثبات در ریاضیات را توضیح می‌دهد.

روزی روزگاری، شاهزاده‌ای بود که معلم‌های سرخانه او را تعلیم می‌دادند. یک روز، معلم ریاضی سعی کرد قضیه فیثاغورس را برای شاگرد سلطنتی‌اش توضیح دهد، اما شاهزاده آن را نپذیرفت. بنابراین معلم، قضیه را برای او اثبات کرد، اما او باز هم متقاعد نشد. معلم اثبات دیگری برای قضیه ارائه کرد و باز هم اثبات دیگری. اما شاهزاده هنوز سرش را با ناباوری تکان می‌داد. معلم با درماندگی فریاد زد: «سرورم، به شرفم سوگند این قضیه درست است!» شاهزاده ذوق زده شد و گفت: «چرا این را از همان اول نگفتید؟!»

عجیب نیست؟ سوگند ساده معلم و پذیرش درستی قضیه از طرف شاگرد ... البته که عجیب است. چه کسی مطمئن است که می‌توان به این معلم اعتماد کرد؟ او دانش خود را از کجا آورده است؟ آیا او هم به سوگند شخص دیگری اعتماد کرده است؟ آیا کسی که معلم، قضیه را از او آموخته، خودش مورد اعتماد بوده است؟ خود او دانشش را از کجا آورده است؟ آیا او هم به سوگند کسی دیگر اعتماد کرده است؟ هر

^۱ Volker Runde, "Why Proof?", *π in the Sky* 11 (2008) 12-15.

چه زنجیرهٔ سوگندها طولانی‌تر شود، قضیه سست‌تر به نظر می‌رسد. این زنجیره نمی‌تواند تا ازل ادامه پیدا کند: کسی باید روشی پذیرفتنی برای درستی این قضیه خلق کرده باشد. به تعبیر ما: کسی آن را اثبات کرده است.

چرا ریاضی‌دان‌ها تا این حد غرق در اثبات‌اند؟ پاسخ، ساده است:

« ریاضی‌دان‌ها، غرق در جستجوی حقیقت هستند.»

اثبات، روندی است که با به کارگیری قواعد خاصی، به پذیرش درستی یک ادعا می‌انجامد. اثبات‌ها تنها در ریاضیات وجود ندارند. مثلاً در یک دادرسی کیفری، شاکی سعی می‌کند جرم متهم را ثابت کند. البته قواعدی که یک اثبات برحسب آن‌ها شکل می‌گیرد بستگی زیادی به زمینهٔ مورد بحث دارد: اثبات دزدیده شدن قالپاق خودروی همسایه توسط جو اسمیت در دادگاه، یک چیز است و ارائهٔ اثباتی برای وجود بی‌نهایت عدد اول، چیزی دیگر.

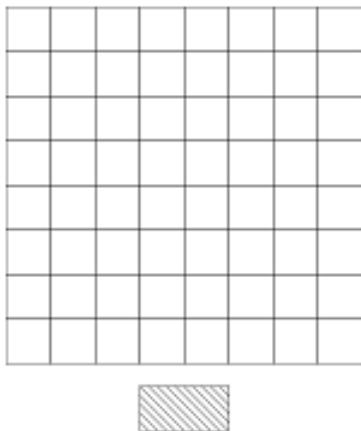
اما در نهایت، همهٔ اثبات‌ها یک هدف را دنبال می‌کنند: یافتن حقیقت.

در اینجا لطیفه‌ای بیان می‌کنیم: از یک ریاضی‌دان و یک فیزیک‌دان خواسته می‌شود تا بررسی کنند که آیا هر عدد فرد بزرگتر از یک، اول است یا نه؟ ریاضی‌دان می‌گوید: «سه، عدد اول است؛ پنج، عدد اول است؛ هفت، عدد اول است؛ اما نه، عدد اول نیست. پس این فرضیه، درست نیست.» فیزیک‌دان می‌گوید: «سه، عدد اول است؛ پنج، عدد اول است؛ هفت، عدد اول است؛ نه، عدد اول نیست؛ اما دوباره یازده و سیزده اعداد اول هستند. پس پنج مورد از شش مورد، فرضیه را تایید می‌کنند و لذا این فرضیه، درست است!»

ما به فیزیک‌دان می‌خندیم. چطور او می‌تواند مثال نقض را به همین سادگی نادیده بگیرد؟ اما این کار آنقدرها هم که به نظر می‌رسد ساده‌لوحانه نیست. داده‌های تجربی به‌ندرت با پیش‌بینی‌های نظری مطابقت کامل دارند و دانشمندان به موارد استثنا عادت کرده‌اند.

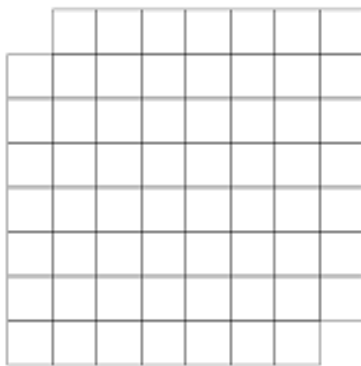
آنچه که باعث شد فیزیک‌دان در این لطیفه، ساده‌لوح به نظر برسد این است که او با یک مسئلهٔ ریاضی مانند یک مسئلهٔ تجربی رفتار کرد: او از قواعدی برای اثبات استفاده کرد که در یک زمینه درست است، اما در زمینهٔ دیگر درست نیست.

یک صفحهٔ شطرنجی شامل ۶۴ مربع را در نظر بگیرید:



سپس کاشی‌های مستطیلی شکلی را مانند آنچه در زیر صفحه شطرنجی نشان داده شده است، از آن بردارید: هر یک از آن‌ها در صفحه شطرنجی دقیقاً دو مربع کنار هم را می‌پوشانند. به‌وضوح شما می‌توانید تمام صفحه را با چنین کاشی‌هایی بپوشانید بدون این‌که هیچ دو کاشی هم‌پوشانی داشته باشند. این مسئله ساده‌ای است؛ آیا تا اینجا به اثبات نیاز داریم؟ هنوز نه!

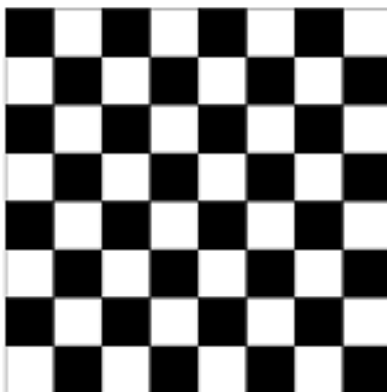
برای این‌که مسئله را کمی پیچیده‌تر کنیم، یک قیچی بردارید و مربع‌های گوشه چپ بالا و گوشه راست پایین صفحه شطرنجی را ببرید. شکل صفحه چنین خواهد شد:



حال سعی کنید این صفحه تغییر یافته را با همان کاشی‌ها بپوشانید بدون این‌که هیچ دو کاشی هم‌پوشانی داشته باشند اگر واقعاً سعی کنید این کار را انجام دهید (ترجیحاً با صفحه شطرنجی که روی یک برگه کشیده شده است)، خیلی زود خواهید فهمید که حداقل کار راحتی نیست و شاید در پی این تردید آزار دهنده، فکر کنید که حتی ناممکن است. اما چرا؟

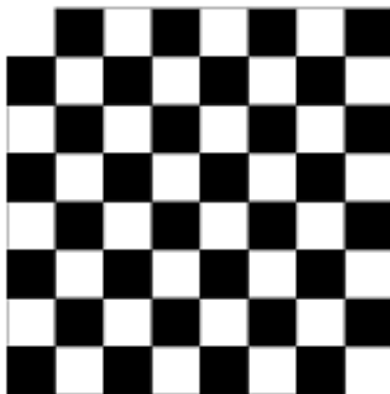
البته برای پی بردن به این مسئله می‌توان به روش افنا پناه برد. حداکثر تعدادی متناهی راه احتمالی برای قرار دادن کاشی‌ها روی صفحه شطرنجی وجود دارد و اگر همه آن راه‌ها را امتحان کنیم و ببینیم که در هیچ حالتی صفحه پوشیده شده با کاشی‌ها، با صفحه شطرنجی منطبق نیست، به نتیجه رسیده‌ایم. اما این رویکرد دو اشکال دارد: اول این‌که باید همه راه‌های احتمالی را برای قرار دادن کاشی‌ها روی صفحه شطرنجی مشخص کنیم و دوم این‌که حتی اگر این کار را انجام دهیم، ممکن است تعداد راه‌ها آنقدر زیاد باشد که نتوانیم همه آن‌ها را امتحان کنیم. بنابراین با روش افنا خداحافظی می‌کنیم ...

پس اگر روش افنا به کار نیاید، چه می‌توان کرد؟ به یاد آورید که با یک صفحه شطرنجی سر و کار داریم و یک صفحه شطرنجی تنها شامل ۶۴ مربع در یک الگوی هشت در هشت نیست، بلکه رنگ مربع‌ها تغییر یافته است: ۳۲ مربع سفید و ۳۲ مربع سیاه.



هر کاشی روی صفحه شطرنجی دقیقاً دو مربع کنار هم را می‌پوشاند و دو مربع کنار هم روی یک صفحه همیشه رنگ‌های مختلفی دارند. پس هر کاشی، یک مربع سفید و یک مربع سیاه را می‌پوشاند. در نتیجه هر آرایش از کاشی‌ها روی صفحه شطرنجی باید همان تعداد از مربع‌های سفید را بپوشاند که سیاه را.

حال صفحه شطرنجی تغییر یافته زیر را بررسی کنید:



چون دو مربع سفید را حذف کرده‌ایم، پس صفحه تغییر یافته شامل ۳۰ مربع سفید و ۳۲ مربع سیاه است. بنابراین نمی‌توانیم این صفحه را با کاشی‌ها بپوشانیم؛ یعنی آن را اثبات کردیم. آیا این اثبات چیزی شبیه جادو نیست؟ شاید از ته دل ترجیح می‌دهید همچنان به روش افنا پناه ببرید که راهی سخت‌تر اما هنوز شدنی است، و شاید تا همه راه‌های احتمالی را امتحان نکنید، نخواهید بپذیرید که نمی‌توان کاشی‌ها را به طرز مطلوب روی صفحه شطرنجی قرار داد. با این حال، در برخی موقعیت‌ها پناه بردن به روش افنا برای دستیابی به حقیقت، نه تنها سخت، بلکه ناشدنی است. به قضیه‌های ریاضی زیر توجه کنید.

قضیه ۱. هر عدد صحیح بزرگتر از یک، حاصل ضربی از اعداد اول است.

آیا این حکم صادق است؟ و اگر هست، چگونه صدق آن را اثبات کنیم؟

بهتر است با بررسی چند عدد شروع کنیم: ۲ اول است (و بنابراین حاصل ضربی از اعداد اول است)؛ ۳ نیز چنین است؛ $4 = 2 \times 2$ ؛ ۵ نیز اول است؛ $6 = 2 \times 3$ ؛ ۷ نیز اول است؛ $8 = 2 \times 2 \times 2$ ؛ ۹ و $10 = 2 \times 5$. لذا این قضیه برای تمام اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ و کوچکتر یا مساوی ۱۰ درست است. دانستن این مطلب دلگرم‌کننده است، اما در مورد اعداد صحیح بزرگتر از ۱۰ چه می‌توان گفت؟ خوب! ۱۱ اول است؛ $12 = 2 \times 2 \times 3$ ؛ ۱۳ اول است؛ $14 = 2 \times 7$ ؛ $15 = 3 \times 5$ ؛ $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$...

این بررسی را در همین جا قطع می‌کنیم چون ادامه این کار بیهوده است. بی‌نهایت عدد صحیح مثبت وجود دارد و مستقل از این که چه تعداد از آن‌ها را می‌توانیم به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسیم،

همیشه بی‌نهایت عدد باقی خواهد ماند که هنوز نشان نداده‌ایم به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشته می‌شوند. آیا $1 + 10^{10^{10}}$ حاصل‌ضربی از اعداد اول است؟ این عدد بیش از حد بزرگ است. حتی به‌کمک رایانه‌های قدرتمند ممکن است تا ابد طول بکشد تا (در صورت وجود) اعداد اولی را پیدا کنیم که حاصل‌ضربشان این عدد است. حتی اگر نشان دهیم که این قضیه برای اعداد تا $1 + 10^{10^{10}}$ برقرار است، آنگاه باز در مورد عدد بسیار بزرگتر $1 + 10^{10^{10^{10}}}$ چیزی نمی‌دانیم!

در اینجا روش افنا به جایی نمی‌رسد. بررسی این قضیه برای مثال‌هایی خاص ممکن است دریافتی از آن به شما بدهد، اما به اثبات صدق آن برای تمام اعداد صحیح بزرگتر از یک کمکی نمی‌کند.

آیا ممکن است حکم این قضیه صدق نباشد؟ این به چه معنایی است؟ اگر هر عدد صحیح بزرگتر از یک، حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد، آنگاه حداقل یک عدد صحیح مانند a وجود دارد که حاصل‌ضربی از اعداد اول نیست. شاید عدد صحیح دیگری مانند a_1 با شرط $a_1 < a$ وجود داشته باشد که آن نیز حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد؛ در این حالت a_1 را جایگزین a کنید. اگر عدد صحیح دیگری مانند a_2 با شرط $a_2 < a_1$ وجود داشته باشد که آن عدد نیز حاصل‌ضربی از اعداد اول نباشد، a_2 را جایگزین a_1 کنید و همین‌طور قدم‌های بعدی. تنها تعدادی متناهی عدد بین ۲ و a وجود دارند و بنابراین بعد از حداکثر تعدادی متناهی قدم، به بن‌بست می‌رسیم و این روند را با عدد صحیحی مانند $a > 1$ با ویژگی‌های زیر به پایان می‌بریم:

(الف) a حاصل‌ضربی از اعداد اول نیست، و

(ب) a کوچکترین عدد صحیح با این ویژگی است.

بنابراین هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ و کوچکتر از a ، حاصل‌ضربی از اعداد اول است.

بهتر است به این عدد فرضی a فکر کنیم. اگر حکم قضیه صادق نباشد، آنگاه این عدد وجود دارد. در مورد آن چه می‌توان گفت؟ این عدد نمی‌تواند اول باشد، زیرا آن‌وقت باید حاصل‌ضربی از اعداد اول (با تنها یک عامل) باشد. پس a عدد اول نیست؛ یعنی

$$a = bc$$

که در آن، b و c هیچ‌کدام a یا ۱ نیستند. این خودش بدین معنی است که

$$1 < b, c < a.$$

بنابراین طبق ویژگی (ب)، اعداد b و c هر کدام حاصل ضربی از اعداد اول هستند. در نتیجه اعداد اول $p_1, \dots, p_n$ و $q_1, \dots, q_m$ وجود دارند به طوری که

$$b = p_1 \cdots p_n,$$

$$c = q_1 \cdots q_m.$$

اما در این صورت برابری زیر برقرار است:

$$a = bc = p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m$$

و a حاصل ضربی از اعداد اول می شود که در تناقض با (الف) است.

فرض کردیم حکم صادق نباشد و بر اساس این فرض، عددی صحیح مانند a یافتیم که حاصل ضربی از اعداد اول نیست؛ ولی بعداً معلوم شد که a حاصل ضربی از اعداد اول هست. تنها راه خروج از این تناقض، این است که بگوییم فرض ما نادرست بوده، یعنی حکم این قضیه صادق است! (و اکنون می دانیم که $1 + 10^{10^{10}}$ حاصل ضربی از اعداد اول است بدون این که آن اعداد را بیابیم.)

این روشی که برای اثبات قضیه ۱ استفاده کردیم، اثبات غیرمستقیم نامیده می شود. برای برخی چیزها نمی توان اثبات مستقیم ارائه کرد. در چنین حالتی، فرض می کنیم آنچه ادعا شده است، کاذب باشد و امیدواریم با این فرض، به یک تناقض برسیم.

اکنون اثبات غیرمستقیم دیگری را امتحان می کنیم.

قضیه ۲. بی نهایت عدد اول وجود دارد.

آیا این قضیه پذیرفتنی است؟ هیچ فرمول آسانی برای محاسبه عدد اول n -ام وجود ندارد و پس از کنار گذاشتن چند عدد اول، دستیابی به عدد اول بعدی سخت و سخت تر می شود. پس آیا حکم قضیه کاذب است و آیا ما به سادگی، بعد از مدتی همه اعداد اول را می یابیم؟

فرض کنیم چنین باشد؛ به این معنی که تنها تعداد متناهی عدد اول وجود داشته باشد: مثلاً $p_1, \dots, p_n$. قرار دهید

$$a := p_1 \cdots p_n + 1.$$

بنابر قضیه ۱، عدد a حاصل ضربی از اعداد اول است. در واقع عددی اول مانند q و عددی صحیح مثبت مانند b با شرط $a = qb$ وجود دارند. چون در اینجا $p_1, \dots, p_n$ تمام اعداد اول موجود هستند،

q نیز باید یکی از این‌ها باشد. فرض کنیم c حاصل ضرب همه p_j ‌هایی باشد که با q برابر نیستند. در این صورت

$$a = qc + 1.$$

پس برابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$0 = a - a = qc + 1 - qb = q(c - b) + 1$$

و از این‌رو

$$q(c - b) = -1.$$

اما این غیر ممکن است، زیرا $c - b$ یک عدد صحیح ناصفر است و $q \geq 2$.

بنابراین باز هم به تناقض رسیدیم، و قضیه ۲ اثبات شد.

اثبات قضیه ۲ به سادگی اثبات قضیه ۱ نیست. چرا ما a را این‌طور تعریف کردیم؟ پاسخ این است که چون اگر این‌طور تعریف کنیم، به درد می‌خورد و بیش از دو هزار سال است که چنین بوده است: قضیه ۲ اولین بار در کتاب *اصول اقلیدس* بیان و اثبات شد. به قول یک ریاضی‌دان:

«ریاضیات، مبتنی بر اثبات است و اثبات، جاودانه است.»

فاطمه اختری: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

رایانامه: f_akhtari@math.iut.ac.ir

رسول نصر اصفهانی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

رایانامه: isfahani@cc.iut.ac.ir

آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی عمیق

نرگس مرتاضی مهربانی

چکیده

در این مقاله، ابتدا توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای به‌عنوان دو رویکرد به آموزش معلمان ریاضی معرفی می‌شوند. سپس به دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی پرداخته می‌شود. در بخش آخر، تأثیر انواع دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی بر جهت‌گیری تحقیقات در حوزه آموزش معلمان ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد.

مقدمه

یادگیری ریاضی به دلایل مختلف، با یادگیری سایر موضوع‌های درسی فرق دارد. ریاضی زبان تبیین طبیعت است و بر استدلال و خلاقیت استوار است. ریاضی علاوه بر ارضای علائق شخصی، برای اهداف گوناگون کاربردی در حوزه‌های علمی دیگر نیز مطالعه می‌شود. برای بعضی آدم‌ها، و نه فقط ریاضی‌دانان حرفه‌ای، ماهیت ریاضی متکی بر زیبایی و چالش فکورانه^۱ آن است. برای بعضی دیگر، از جمله بسیاری از دانشمندان علوم تجربی و مهندسان، ارزش اصلی ریاضی در چگونگی به‌کارگیری آن برای کارهای خودشان است. به سبب نقش اساسی که ریاضی در فرهنگ جدید بازی می‌کند، درک اولیه نسبت به ماهیت ریاضی، برای دستیابی به صلاحیت‌های لازم برای سوادآموزی علمی، ضروری است. برای رسیدن به این فهم و درک، نیاز است دانش‌آموزان، ریاضی را بخشی از تلاش علمی در نظر بگیرند، ماهیت تفکر ریاضی را درک کنند و با ایده‌ها و مهارت‌های کلیدی ریاضی آشنا شوند (پروژه ۲۰۶۱،

۱۹۹۷).

^۱Intellectual

بَس (۲۰۰۴) با تأکید بر این که «یادگیری ریاضی نه تنها دیسیپلین کشف و خلق است، بلکه دیسیپلین یادگیری و تدریس نیز هست» (ص. ۴۸)، خاطرنشان می‌کند که «جامعه حرفه‌ای ریاضی، دانش تجمعی ریاضی را جذب، نقد، منتقل و منتشر می‌کند. با این حال، یادگیری ریاضی خارج از حرفه ریاضی، اغلب باعث بروز مشکل، هم برای کودکان و هم برای معلمانی می‌شود که در حال دست و پنجه نرم کردن با درک و استفاده از ایده‌ها و ابزارهای این دیسیپلین هستند؛ ابزارها و ایده‌هایی که حتی در ابتدایی‌ترین سطح نافذ، قدرتمند و ظریف هستند. در نتیجه یادگیری ریاضی برای کسانی که ریاضی را هم یکی از ارکان سواد عمومی و هم یک میراث فرهنگی غنی می‌شناسند، یک دغدغه جدی است» (ص. ۴۸).

به گفته زاسلاوسکی^۱ و لیکین^۲ (۲۰۰۴)، هم‌چنان که ریاضی، محتوا یا مفهومی چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان است، تدریس آن نیز، محتوا و مفهومی چالش‌برانگیز برای معلمان ریاضی محسوب می‌شود. معلمان ریاضی برای تدریس ریاضی، نیازمند انواع دانش‌هایی هستند که اطلاعات لازم را در مورد دانش‌آموزان در اختیار آن‌ها قرار دهد و به آنان کمک کند تا نظام‌ها و ساختارهای آموزشی را بشناسند، از انواع روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی آگاهی داشته باشند، دانش محتوایی را بدانند و به دانش‌چگونگی مدیریت کلاس درس، استفاده از منابع آموزشی و روش‌های ارزشیابی، مجهز شوند (وایت، یاورسکی، آگودلو والدراما و گوایا^۳ (۲۰۱۳)؛ بال، تامس^۴ و فلیپس^۵ (۲۰۰۸)؛ پرکس^۶ و پرستیج^۷ (۲۰۰۸)؛ فینما و فرانک (۱۹۹۲)؛ شولمن^۸ (۱۹۸۶)). تدریس با کیفیت بالا، به دانش حرفه‌ای پیچیده‌ای نیاز دارد که فراتر از قوانین ساده‌ای مانند این است که معلم بداند چه مدت برای پاسخ دادن دانش‌آموز به سؤالی که طرح کرده منتظر بماند و بعد خودش توضیح دهد (شولمن (۱۹۸۶)). جنبه اصلی کار شولمن (۱۹۸۶) در نظریه‌پردازی راجع به تدریس این بود که دانش محتوایی را به‌عنوان دانش تکنیکی و تدریس را به‌عنوان یک حرفه معرفی کرد. از طرفی، به گفته پرکس و پرستیج (۲۰۰۸)، یادگیری یک عمل حرفه‌ای مانند تدریس، به این معنی است که معلمان بتوانند در زمینه کلاس درس خود، جنبه‌های مختلف عمل تدریس‌شان را تفسیر نمایند، توانایی تفسیر کردن خود را ارتقا دهند و بتوانند در مقابل این تفسیرها، پاسخگو باشند. از این‌رو، یادگیری تدریس ریاضی، فرآیندی پیچیده است. کرینر، کِرن^۹ و شاگنسی^{۱۰} (۲۰۱۳) معتقدند که با وجود تلاش‌ها و ادعاهای پی در پی در مورد اهمیت نقش معلم در بهبود فرآیند تدریس و یادگیری، معلمان ریاضی هنوز هم کم و بیش، به‌عنوان استفاده‌کنندگان منفعل نتایج تحقیقات آموزشی و گاهی ابزارهایی برای کمک به تولید دانش، دیده می‌شوند. این در حالی است که غلام آزاد (۱۳۸۶) تأکید دارد که یکی از ارکان اصلی نظام آموزش ریاضی، معلم ریاضی است. به گفته او، تجربه

^۱Zaslavsky ^۲Leikin ^۳White, Jaworski, Agudelo- Valderrama and Gooya ^۴Thames ^۵Phelps

^۶Perks ^۷Prestage ^۸Shulman ^۹Kieren ^{۱۰}Shaughnessy

نشان داده است که هر قدر هم که برنامه‌ریزی درسی دقیق و علمی انجام شود و روش‌های پیشنهادی تدریس مبتنی بر تحقیق و یافته‌های پژوهشی باشد، در صورت عدم استقبال معلمان ریاضی از آن‌ها، چه به دلیل باور نداشتن به آن برنامه‌ها و روش‌ها و چه به دلیل نداشتن دانش لازم برای اجرا، آن برنامه‌ریزی محکوم به شکست خواهد بود. از این تجربه‌های پژوهشی می‌توان نتیجه گرفت که شناسایی ظرفیت‌های موجود در جامعه معلمان ریاضی و برنامه‌ریزی برای آموزش‌های مستمر یا به اصطلاح «ضمن خدمت» آن‌ها، جزو قدم‌های اساسی جهت ایجاد تحول در آموزش ریاضی مدرسه‌ای است.

۱. توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی

ارتقای کیفیت تدریس و یادگیری ریاضی در مدارس، یکی از مباحثی است که از اولویت بالایی برخوردار است و در دستور کار دولت‌ها، دانشگاه‌ها و خود حرفه تدریس ریاضی، قرار گرفته است (گوس ۲۰۰۹)). به گفته تیمپرلی (۲۰۱۱) «معلمان و مدیران، هر روز با چالش‌های جدیدی مانند برنامه‌های درسی جدید، سواد ریاضی برای همه، رویکردهای نوین ارزشیابی، استفاده از تکنولوژی در مدرسه‌ها و کلاس‌های درس و دانش‌آموزانی که با روش‌های متداول تدریس چیزی یاد نمی‌گیرند، رو به رو هستند» (ص. ۱) که این خود، باعث پیچیده‌تر شدن عمل تدریس ریاضی می‌شود. بنابراین معلمان بیشتر از قبل، به دانش و مهارت‌هایی نیاز دارند که آن‌ها را در مواجهه با چنین چالش‌هایی کمک کند. از همین رو، زتمیر و کرینر (۲۰۱۱) اظهار می‌دارند که «در حال حاضر توسعه حرفه‌ای، مؤلفه‌ای حیاتی در سیاست‌گذاری‌های آموزشی، جهت ارتقای کیفیت تدریس و یادگیری مدارس به حساب می‌آید» (ص. ۸۷۶). به این دلیل، راجع به شناخت ویژگی‌ها و عوامل تأثیرگذار بر کارایی برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، پژوهش‌های بسیاری صورت گرفته است که نشان می‌دهد این عوامل، پیچیده و چندجانبه‌اند (زتمیر و کرینر ۲۰۱۱)) که از بین آن‌ها، چند تحقیق معروف معرفی می‌شوند.

«شورای ملی معلمان ریاضی»^۱ (۲۰۱۰)، فراتحلیلی^۲ از نتایج تحقیقات سه دهه اخیر که مرتبط با دانش ریاضی مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی و چگونگی توسعه آن بوده، انجام داده است. نتیجه این فراتحلیل، تبیین چهار هدف زیر است:

- تولید دانش ریاضی مورد نیاز معلمان و ایجاد ظرفیت برای استفاده از آن در عمل تدریس ریاضی؛
- ایجاد ظرفیت برای معلمان ریاضی به منظور توجه و تجزیه و تحلیل تفکرات دانش‌آموزان و

پاسخ‌گویی در مقابل آن؛

^۲ Meta - analysis اخیراً از معادل «سنتزپژوهی» نیز برای این نوع تحقیق، استفاده شده است

^۱ National Council of Teachers of Mathematics: NCTM

- کمک به ایجاد عادت‌های ذهنی خلاق در معلمان ریاضی مانند حساس بودن به اشتباهات دانش‌آموزان و بازتاب بر عمل تدریس خود؛
- ایجاد سازوکارهای مناسب برای همکاری معلمان ریاضی با یکدیگر و حمایت از یادگیری مستمر آنان.

این شورا با استناد به تحقیقات انجام شده، اشاره می‌کند که عواملی مانند صرف زمان کافی، حمایت نظام‌مند از یادگیری معلمان ریاضی و فراهم کردن فرصت‌هایی برای یادگیری فعال آن‌ها، می‌توانند در رسیدن به اهداف ذکر شده برای برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، تأثیرگذار باشند. در این جمع‌بندی، رد پای حل مسأله به عنوان یک فعالیت نظام‌مند و ضروری برای ارتقای تدریس معلمان ریاضی، مشهود است؛ همان بحثی که شونفیلد در سال ۱۹۸۵ مطرح کرد. شونفیلد با تمرکز جدی بر حل مسأله ریاضی و طرح ادعای آموزش‌پذیری آن، بر نقش معلمان ریاضی به عنوان بازیگران اصلی در عرصه این آموزش، تأکید نمود. در ادامه همین بحث، شونفیلد طی سال‌ها، به نظریه‌پردازی در حوزه یادگیری حل مسأله‌های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن با تدریس و آموزش معلمان ریاضی، مشغول شد. او در سال ۲۰۱۰، با دیدگاهی شناختی و از جنبه یادگیری و تدریس، به بررسی نظری توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی پرداخت و رویکرد دانش، اهداف و باورها را تبیین نمود. شونفیلد در نظریه‌پردازی جدید خود، تدریس ریاضی را نوعی حل مسأله می‌داند که چندین هدف مرتبط به هم را به طور همزمان، دنبال می‌کند. با تبیین این نظریه، شونفیلد سعی دارد اهداف، دانش، باورها و چگونگی تصمیم‌گیری‌های معلمان ریاضی را شناسایی کند. سپس ماهیت تعامل این مؤلفه‌ها را با یکدیگر، مدل‌سازی نماید. این نظریه، بر پیشرفت فردی معلم و نیز توجه به محتوا و زمینه‌ای که محتوا در آن ارائه می‌شود، تأکید دارد. مدل کرینر (۲۰۰۰) دارای چهار بُعد زیر بود:

عمل: قابلیت معلم در تجربه واقعی تدریس و طرز تلقی او درباره تدریس و یادگیری هدفمند و اثربخش؛

بازتاب: بازتاب‌های منظم معلم بر فعالیت‌های تدریس خویش و افزایش قابلیت خود نقدپذیری او؛

استقلال: افزایش قابلیت‌های معلمان برای انجام کارهایی که خود، آغازگر، سازمان‌دهنده و تنظیم کننده‌اش هستند؛

شبکه‌سازی: قابلیت در انجام کارهای ارتباطی و تبادلی که به طور فزاینده با نظرات عموم معلمان مرتبط است.

در این مدل اولیه، هر زوج «عمل و بازتاب» و «استقلال و شبکه‌سازی» که نشان‌دهنده «تقابل» و «توافق» هستند، مکمل هم دیده شده بودند و هدف دوره‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، ایجاد تعادل بین این چهار بُعد بود.

الینارس^۱ و کرینر (۲۰۰۶) با ایجاد تغییراتی در مدل سال ۲۰۰۰ کرینر، به یادگیری معلمان ریاضی به‌عنوان یکی از جنبه‌های حیاتی توسعه حرفه‌ای نگاه کردند و در آن، بر نقش معلمان به‌عنوان زینفعان^۲ و بازیگران اصلی، تأکید نمودند. این مدل، از سه مؤلفه زیر تشکیل شده است:

محتوا: مواردی مانند طراحی فعالیت‌های مناسب و چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان، فراهم کردن تجربه‌های یادگیری چالش‌برانگیز، مشاهده و بازتاب بر عمل تدریس معلمان و ابتکارات آنان و بحث‌های سودمند در مدرسه که به تمام افراد دخیل در فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی، مربوط است.

جامعه:^۳ تیم‌های کوچک، گروه‌های کاری و نظایر آن‌ها که توسط معلمان تشکیل می‌شوند و هدفشان حمایت از مشارکت معلمان با سایر همکاران معلمشان با دو هدف ارتقای تدریس همه از طریق هم‌اندیشی و تبادل و نقد تجربه‌های تدریس یکدیگر و تسهیل حرکت هر یک به سمت استقلال یادگیرنده است.

زمینه:^۴ برنامه‌های توسعه حرفه‌ای، منابع یادگیری معلمان و گروه‌های آموزشی که در ارتقای حرفه‌ای معلمان ریاضی می‌توانند نقش سازنده‌ای بازی کنند که به دلایل مختلف از جمله نیازمندی به حمایت‌های سازمانی برنامه‌ریزی شده، کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

زتمیر و کرینر (۲۰۱۱)، به توسعه این مدل پرداختند و شناخت سه عامل اساسی را برای طراحی اثربخش برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، معرفی نمودند. در مدل توسعه‌یافته، حدود و ثغور هر یک از سه مؤلفه در مدل اولیه، مشخص‌تر شده است. به‌طور مشخص، مؤلفه «محتوا» به «تعادل بین عمل و بازتاب»، مؤلفه «جامعه» به «تعادل بین فعالیت‌های فردی و اجتماعی» و مؤلفه «زمینه» به «تعادل بین حمایت‌های داخلی و خارجی» محدود شده‌اند. از نظر آنان، چنین آموزش‌هایی می‌توانند بالقوه، خلأهای آموزش‌های حرفه‌ای سنتی را که اغلب غیرتعاملی و یک‌سویه هستند، پر کنند. ادبیات حوزه آموزش معلمان ریاضی نیز مؤید این است که می‌توان آموزش‌هایی طراحی کرد که در آن، معلمان، خود عامل ارتقای دانش حرفه‌ای خویش شوند، بر نحوه تدریس خود نظارت کنند و در بهبود روش تدریس خود سهیم باشند.

^۱Ilinares ^۲Stakeholders ^۳Community ^۴Context

کلارک^۱ و هالینگس ورث^۲ (۲۰۰۲) برای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، یک مدل شناختی از درون به هم پیوسته ارائه دادند که بر فرآیند یادگیری، تغییر و توسعه حرفه‌ای آنان، به صورت فردی متمرکز می‌شود. این مدل، به چهار حوزه می‌پردازد:

حوزه شخصی: دانش، باورها و طرز تلقی معلمان که زیربنای تدریس ریاضی آنان را تشکیل می‌دهد؛

حوزه عمل: تجربه‌های حرفه‌ای معلمان ریاضی که تحت تأثیر حوزه شخصی‌شان شکل می‌گیرد؛
حوزه نتایج: تغییر در عمل تدریس و نتایج آن است که به حوزه عمل و حوزه شخصی وابسته است؛
حوزه بیرونی: منابع اطلاعاتی، حمایتی و انگیزشی است.

۲. یادگیری حرفه‌ای معلمان ریاضی

طرح مباحث نظری در حوزه توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی و تبیین مدل‌هایی برای آن، زمینه را برای ضرورت ایجاد تمایز بین «توسعه حرفه‌ای» و «یادگیری حرفه‌ای» معلمان ریاضی فراهم نمود (ایون^۳ ۲۰۰۸). برای مثال، یاورسکی (۲۰۰۳) با تأکید بر این که تحقیق به خودی خود، ابزار قدرتمندی برای توسعه تدریس یادگیری ریاضی است، چارچوبی با چهار مؤلفه، برای تحقق یادگیری پژوهش مدار معلمان ریاضی ارائه داد که شامل، «دانش و یادگیری»، «بررسی^۴ و بازتاب^۵ درونی و بیرونی» و «فرد و جامعه» بود. یاورسکی (۲۰۰۳) در توضیح این چارچوب، ابراز نمود که «دانش و یادگیری، بُعد معرفت‌شناختی این چارچوب را تشکیل می‌دهد که در آن، شرکت‌کنندگان در تحقیق، باورها، تفکرات و خبرگی خود را به قرارگاه تحقیق^۶ می‌آورند و بدین ترتیب، یادگیری از طریق تعامل و گفت‌وگو درون‌گروهی صورت می‌گیرد». او همچنین بیان نمود که «بررسی و بازتاب، بُعد تحقیقی این چارچوب را شکل می‌دهد که در آن، سؤال‌هایی که از درون عمل تدریس و بازتاب و نحوه درگیر شدن با آن مطرح می‌شوند، به شیوه‌های جدیدی از انجام دادن و بودن، منجر می‌شوند» (صص. ۲۶۴-۲۶۳). از دیدگاه یاورسکی (۲۰۰۳)، «درونی و بیرونی، نقش معلمان و آموزشگران معلمان را در فرآیندهای توسعه تدریس مشخص می‌کند. این مؤلفه، هم به عنوان یک پژوهشگر درونی، فرآیند تدریس را بررسی می‌کند و هم به عنوان یک محقق بیرونی، فعالیت‌ها و توسعه‌های تدریس را که مرتبط با دانش بومی و عمومی است، مورد مطالعه قرار می‌دهد» (ص. ۲۶۴). در این دیدگاه، «مؤلفه فرد و جامعه، اهمیت فعالیت‌های مشارکتی را در اقدامات توسعه‌ای نشان می‌دهد. این مؤلفه، بر نقش مشارکت و تعامل گروهی بر رشد و پیشرفت فردی اشاره

^۱Clark ^۲Hollingsworth ^۳Even ^۴Inquiry ^۵Reflection ^۶Research Setting

می‌کند» (ص. ۲۶۴). یاورسکی (۲۰۰۶) بعداً در تکمیل چارچوب خود و به‌عنوان یکی از نظریه‌پردازان مدافع تمایز بین توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای، توضیح داد که در توسعه حرفه‌ای، نوعی از قدرت نهفته است که نشانگر سلطه آموزشی معلمان یا دانشگاهیان یا معلمان با تجربه‌تر، بر معلمان تازه‌کار است. او گفت که باید و الزام، در ذات توسعه حرفه‌ای سنتی است؛ به این معنی که عده‌ای به‌سبب تأیید صلاحیت‌شان توسط مراجع مورد قبول سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان، اجازه پیدا می‌کنند که به دیگرانی که به تصور آن‌ها کمتر می‌دانند، آموزش دهند. اما تحقیقات این حوزه نشان می‌دهد که این تصور ناگفته و این ماهیت پنهان، باعث ایجاد واکنش‌های خاموش معلمان شده و تأثیر آموزش‌های یک‌طرفه را به حداقل رسانده است (یاورسکی، ۲۰۰۶). در صورتی که به‌گفته یاورسکی (۲۰۰۸)، یادگیری حرفه‌ای فرآیندی دو طرفه، تعاملی و مشارکتی است که در آن، هیچ بایندی وجود ندارد، زیرا مستقیماً با کلاس درس و حرفه معلمی در ارتباط است و از آن منبعث می‌شود. در تأیید تمایز بین توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای، روسکن (۲۰۱۱) ضمن اشاره به این‌که «معلمان هر روز، در داخل و خارج کلاس درس، از طریق بازتاب بر عمل تدریس خود یا گفتگو در مورد آن و عملکرد دانش‌آموزان خود، برنامه‌ریزی برای تدریس جلسه بعد و شرکت در کنفرانس‌های درون مدرسه‌ای، درگیر فرایند توسعه حرفه‌ای هستند» (ص. ۲)، تلاش کرده تا نشان دهد که ماهیت فعالیت‌های خودانگیخته در معلمان ریاضی در بسیاری از مدرسه‌ها، همان است که یاورسکی (۲۰۰۶) از آن با عنوان ویژگی‌های یادگیری حرفه‌ای یاد می‌کند.

در این راستا، تیمپرلی (۲۰۱۱) معتقد است که توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای معلمان ریاضی، هر دو فرآیندهایی عامدانه^۱، مستمر^۲ و نظام‌مند^۳ هستند. ولی در اکثر مواقع، اصطلاح «توسعه حرفه‌ای» به معنای انتقال یک سوئه اطلاعات خاص به معلمان به‌کار می‌رود تا بتوانند عمل تدریس خود را بهبود بخشند، در حالی که «یادگیری حرفه‌ای» فرآیندی درونی است که در آن، افراد از طریق تعامل با اطلاعات تولید شده در پیشرفت حرفه‌ای و به چالش کشیدن فرض‌های قبلی و معناسازی‌های جدید، می‌توانند دانش حرفه‌ای مورد نیاز را برای تدریس خود، بسازند. در این فرآیند، «چالش» و «معناسازی»، نقش مهمی بازی می‌کنند. در حقیقت از نظر تیمپرلی (۲۰۱۱)، یکی از تمایزهای اساسی توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای این است که در یادگیری حرفه‌ای، معلمان به‌طور جدی در یادگیری خویش سهیم‌اند، در حالی که در توسعه حرفه‌ای، کمتر به مشارکت و درگیری معلم با فرآیند یادگیری توجه می‌شود. به باور او، ماهیت یادگیری حرفه‌ای به گونه‌ای است که مستلزم «جستجوی نظام‌مند^۴» و «ارزیابی» است. یادگیری حرفه‌ای، فرآیندی فعال برای بررسی نظام‌مند کارایی تدریس است که هدف آن، یادگیری و ارتقای

^۱Intentional ^۲Ongoing ^۳Delivery ^۴Systematic Inquiry

دانش‌آموزان است. با این حال، همان‌طور که وایت، یاورسکی، والدرا و گویا (۲۰۱۳) تأکید کرده‌اند، در ادبیات آموزشی و پژوهشی حوزه آموزش معلمان ریاضی، هنوز مرز روشنی بین «توسعه حرفه‌ای» و «یادگیری حرفه‌ای»، وجود ندارد و این حوزه نیازمند پژوهش‌های متنوع از ابعاد مختلف است.

۳. دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی

در دو دهه اخیر، در ادبیات مربوط به آموزش معلمان ریاضی به دو نوع دانش: یکی «دانش حرفه‌ای» و دیگری «دانش موضوعی»، توجه شده است که با توجه به این دو، می‌توان آموزش‌هایی طراحی کرد که از طریق آن‌ها، معلمان، خود عامل ارتقای دانش حرفه‌ای خویش شوند، بر نحوه تدریس خود نظارت کنند و در بهبود شیوه تدریس، سهیم باشند. به گفته بال (۲۰۰۸)، با آن‌که دانش محتوایی در ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، اما به توسعه و مطالعه آن به‌طور منسجم توجه نشده است و پژوهش، نسبت به چگونگی افزایش درک معلمان از موضوعی که تدریس می‌کنند، بی‌توجه بوده است. او علت را پیش‌فرضی می‌داند که مطالعه موضوع درسی را در سطح پیشرفته، در درجه اول اهمیت قرار می‌دهد و طبیعی است که پیامد آن، تمرکز بیشتر بر میزان آمادگی محتوایی معلمان در مقابل نوع محتوای مورد نیاز آنان برای تدریس است.

۱.۳. مقوله‌های اصلی دانش معلمان از دیدگاه شولمن. در اواسط دهه هشتاد میلادی، لی شولمن (۱۹۸۶)، حوزه خاصی از دانش معلمان را به نام «دانش محتوایی پداگوژیک^۱» معرفی کرد که با «دانش محتوایی^۲» تمایز داشت. از نظر او «دانش محتوایی» در موقعیت‌های نظام‌وار، قابل مطالعه و یادگرفتن است. اما از دیدگاه شولمن، «دانش محتوایی پداگوژیک»، معجون خاصی از محتوا و پداگوژی مورد نیاز برای تدریس یک موضوع درسی است. ایده‌های شولمن و تمایزی که بین انواع دانش‌های مورد نیاز برای معلمان قائل شد، بر جامعه پژوهشی حوزه آموزش معلمان ریاضی تأثیر چشمگیری گذاشت که به‌اختصار، به آن‌ها می‌پردازیم.

دانش محتوایی: شامل دانش موضوعی و ساختارهای سازمان‌یافته در ذهن است. برای تفکر در مورد دانش محتوایی یک حوزه، لازم است فراتر از دانش مربوط به مفاهیم یا حقایق^۳ موجود در آن حوزه رفته و ساختارهای موضوعی آن را درک کرد. به گفته شولمن (۱۹۸۶)، برای این کار می‌توان از ایده‌های شوآب^۴ (۱۹۷۱) استفاده نمود. از نظر شوآب، ساختارهای یک موضوع، شامل «ساختارهای اسمی^۵» و «ساختارهای نحوی^۶» است. شوآب توضیح می‌دهد که ساختارهای اسمی، روش‌هایی است که در آن،

^۱Pedagogical Content Knowledge: PCK ^۲Content Knowledge ^۳Facts ^۴Schowab ^۵Substantive

^۶Syntactic

مفاهیم اساسی و اصول موجود در یک نظام موضوعی، سازمان‌دهی می‌شوند تا حقایق آن نظام را یکپارچه کند. در حالی که ساختار نحوی یک نظام، مجموعه‌ای از روش‌ها است که به وسیله آن، صدق^۱ و کذب^۲ و صحت^۳ و بطلان^۴ تعریف می‌شوند. به گفته پترو و گولدینگ (۲۰۱۱)، دانش نحوی در ریاضی، شامل فعالیت‌هایی مانند صورت‌بندی کردن، آزمایش کردن تعمیم‌ها و ساختن اثبات‌ها است و انتظار می‌رود که معلمان را قادر کند تا حقایق پذیرفته‌شده در حوزه مورد نظر را تعریف نمایند و به آنان کمک کند تا بتوانند در مورد چرایی درست بودن قضیه‌ای خاص، توضیح دهند. همچنین ضروری است که معلمان بتوانند دانش‌آموزان را توجیه کنند که چرا یک موضوع ریاضی ارزش یادگیری را دارد و چگونه این موضوع به موضوعات دیگر مرتبط می‌شود.

دانش برنامه درسی: به معنای درک خاصی از برنامه درسی موضوعی و برنامه‌هایی است که برای معلمان هر موضوع درسی، مانند «ابزار کار»^۵ آن‌ها است و همیشه با آن سروکار دارند. تجلی این دانش در برنامه‌های طراحی شده برای تدریس موضوعات خاص درسی در سطح‌های معین، تنوع مواد آموزشی قابل دسترس در رابطه با آن برنامه‌ها و مجموعه‌ای از ویژگی‌ها دیده می‌شود. همسو با این تعبیر، پترو و گولدینگ (۲۰۱۱) نیز دانش برنامه درسی را دانش مواد آموزشی قابل دسترس مانند راهنمای برنامه درسی و کتاب‌های درسی می‌دانند که به‌خاطر ویژگی‌های آن در هر پایه تحصیلی، شولمن از آن به‌عنوان دانش برنامه درسی افقی یاد کرده است. برای مثال در انگلستان، نظام ارزشیابی محدودیت‌هایی برای معلمان ایجاد کرده بود که این نوع دانش برنامه درسی به معلمان کمک می‌کرد که نه تنها مواد آموزشی و منابع را بشناسند، بلکه بدانند که در چه چارچوبی کار کنند تا در مقابل انتظارات نظام ارزشیابی، پاسخگو باشند. از این‌ها گذشته، شولمن بر جنبه دیگری از دانش برنامه درسی که در بردارنده آگاهی از موضوع‌ها و روش‌های توسعه یک مفهوم طی دوازده سال آموزش مدرسه‌ای است، تأکید کرده و آن را از دانش‌های ضروری برای معلمان دانسته است. شولمن به دلیل ماهیت تسلسلی این بُعد از دانش برنامه درسی، آن را دانش برنامه درسی عمودی نامیده است.

دانش محتوایی-پداگوژیکی: تلفیق خاصی از محتوا و پداگوژی است و منحصراً در قلمرو معلمان است و شکل خاصی از درک حرفه‌ای آن‌ها را شامل می‌شود. شولمن این دانش را مفیدترین شکل بازنمایی ایده‌ها و قدرت‌مندترین نوع استنتاج‌ها، مثال‌ها، به تصویر کشیدن‌ها، توضیحات و اثبات‌ها و در یک کلمه، مفیدترین روش بازنمایی و صورت‌بندی برای یک موضوع می‌داند که درک آن را برای یادگیرندگان، قابل فهم می‌کند. دانش محتوایی - پداگوژیکی شامل درک این نکته نیز هست که چه

^۱Truth ^۲Falsehood ^۳Validity ^۴Invalidity ^۵Tools of the trade

چیزی، یادگیری یک موضوع خاص را سخت یا آسان می‌سازد. این دانش، مفاهیم و تصوراتی را که دانش‌آموزان نسبت به یک موضوع در طول زمان ساخته و توسعه داده‌اند، در برمی‌گیرد.

از نظر شولمن، سه مقولهٔ اخیر یعنی «دانش محتوایی»، «دانش برنامهٔ درسی» و «دانش محتوایی - پداگوژیکی»، ابعاد خاص محتوایی^۱ را تعریف می‌کنند و در واقع، پارادایم گم‌شده در تحقیقات مربوط به تدریس هستند. او اشاره می‌کند که تأکید بر ابعاد محتوایی دانش معلمان، به معنای بی‌اعتنایی به درک و مهارت‌های پداگوژیکی آنان نیست. به عقیده او، دانش محتوایی - پداگوژیکی مانند پلی بین دانش محتوایی و عمل تدریس است و این نشان می‌دهد که همان‌گونه که بحث‌های مربوط به محتوا، به تدریس هم مرتبط هستند، بحث‌های مربوط به تدریس، توجه را به محتوا معطوف می‌سازند. بدین سبب بال و همکاران (۲۰۰۸) «دانش محتوایی - پداگوژیکی» را قلمرو انحصاری معلمان می‌دانند. با این حال و بعد از چند دهه فعالیت، هنوز ماهیت و نقش این نوع دانش به‌عنوان پلی بین دانش محتوایی و عمل تدریس، به اندازهٔ کافی درک نشده است. در حقیقت به نظر بال و همکاران (۲۰۰۸)، اگرچه چارچوب ارائه شده توسط شولمن (۱۹۸۶) به لحاظ نظری انسجام دارد، هنوز در حوزهٔ موضوعی ریاضی، توسعهٔ کافی نیافته است.

جمع‌بندی: بال و همکاران (۲۰۰۸) به این نتیجه رسیدند که فقط تعداد معدودی از مطالعات انجام شده در حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی که از یافته‌های نظری شولمن استفاده کرده‌اند، به بررسی احتمال وجود دانش‌هایی به غیر از دانش محتوایی که برای تدریس ریاضی مهم هستند، پرداخته‌اند. آنان همچنین دریافتند که در همین محدود پژوهش‌های انجام شده نیز تلاش‌های اندکی برای توسعهٔ معیارهایی^۲ برای سنجش دانش محتوایی - پداگوژیکی و نیز استفاده از آن‌ها در بررسی تعریف، ماهیت و اثرات این نوع دانش بر تدریس و یادگیری ریاضی، صورت گرفته است. سرانجام، آنان مدعی شدند که در اکثر پژوهش‌های مرتبط با حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی، دانش محتوایی - پداگوژیکی، اغلب به‌عنوان یک واقعیت مسلم در نظر گرفته شده و یافته‌های پژوهشی قابل توجهی که بتواند راهنمای عمل قرار گیرد، موجود نیست. در نتیجه به دلیل فقدان تعریف مناسب، عدم یافته‌های پژوهشی کافی در مورد ماهیت دانش محتوایی - پداگوژیکی و محدود بودن شواهد تجربی، ایده‌های ارائه شده در این رابطه، نقش محدودی در جرح و تعدیل برنامه‌های آماده‌سازی محتوایی معلمان ریاضی بازی کرده است. لذا این ایده‌ها، در شکل‌گیری سیاست‌گذاری‌های مربوط به توسعهٔ حرفه‌ای یا ایجاد درکی عمیق‌تر از روابط بین دانش معلمان، تدریس آنان و یادگیری دانش‌آموزان، اثرات محدودی داشته است. پیش از این هم فرانک و فیما (۱۹۹۲) نقدشان بر دیدگاه شولمن این بود که در آن، پویایی ماهیت دانش و پیشرفت واقعی دانش

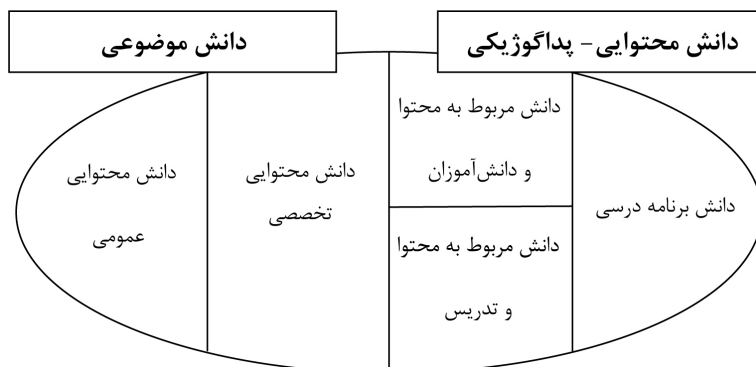
^۱Content-specific ^۲Measures

معلمان از طریق تعامل‌های کلاس درس، نادیده گرفته شده است. بالأخره، مردیت (۱۹۹۵) نیز نظریه شولمن را در رابطه با معلمان ریاضی، بدین جهت که نقش باورهای معلمان را در شکل‌گیری و توسعه دانش محتوایی - پداگوژیکی نادیده گرفته است، مورد انتقاد قرار داده است. از نظر او، معلمانی که ریاضی را پویا و چندبعدی می‌بینند و معتقدند که می‌توانند از طریق حل مسأله، در تولید دانش ریاضی سهم باشند، مسلماً می‌توانند دانش‌های متفاوتی را هم برای تدریس ریاضی تولید کنند و سعی در توسعه آن داشته باشند (نقل شده در پترو و گولدینگ (۲۰۱۱)).

۲.۳. سازمان‌دهی مجدد دانش محتوایی و دانش محتوایی- پداگوژیکی توسط بال و همکاران.

با توجه به ابهاماتی که در تعریف و تبیین شولمن از دانش محتوایی- پداگوژیکی به‌طور عام و در رابطه با ریاضی به‌طور خاص وجود دارد، در دهه‌های اخیر گرایش‌ات پژوهشی بسیاری نسبت به بررسی ماهیت دانش مورد نیاز معلمان ریاضی، در محققان حوزه آموزش معلمان ریاضی ایجاد شده است. مثلاً بال و همکاران (۲۰۰۸) در پژوهش خود، این سؤال را مطرح کردند که «معلمان چه چیزی را لازم است بدانند تا بتوانند به‌طور مؤثر، ریاضی تدریس کنند». آن‌ها با بدیهی فرض کردن این‌که معلمان باید موضوعات و رویه‌هایی را که تدریس می‌کنند بدانند، تصمیم گرفتند به‌طور خاص، بر این‌که معلمان چگونه باید آن محتوا را بدانند، تمرکز کنند. همچنین محققان علاقه‌مند بودند بدانند که معلمان به دانستن چه چیزهای دیگری از ریاضی نیاز دارند و چگونه و کجا از آن دانش ریاضی در عمل تدریس خود استفاده کنند. در این پژوهش، ایشان به‌جای آن‌که با برنامه درسی یا استانداردهای تعریف شده در یادگیری دانش‌آموزان شروع کنند، بر عمل تدریس معلمان متمرکز شدند و می‌خواستند بدانند که معلمان در حین تدریس ریاضی چه کار می‌کنند و چگونه عمل تدریس‌شان مواردی مانند استدلال، بینش و درک و مهارت ریاضی را می‌طلبد. بال و همکاران (۲۰۰۸)، رویکرد انتخابی خود را نوعی تجزیه و تحلیل حرفه معلمی نامیدند و نتیجه این تجزیه و تحلیل‌ها، مبنایی برای ارائه یک نظریه عمل- مدار در مورد دانش‌های ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی شد. برای این کار، ابتدا فیلم‌های ویدیویی تهیه شده از عمل تدریس واقعی تجزیه و تحلیل کیفی شدند. سپس محققان بر پایه مقوله‌های ظاهر شده از این تجزیه و تحلیل‌های کیفی، معیارهایی از دانش‌های ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی را طراحی کردند. تجزیه و تحلیل‌ها نشان داد که در حقیقت، دانش مورد نیاز برای تدریس ریاضی، چندبعدی است. محققان با استفاده از یافته‌های این تحقیق، توانستند مقوله‌های ارائه شده توسط شولمن، یعنی دانش موضوعی و دانش محتوایی- پداگوژیکی را دوباره سازمان‌دهی نمایند. برای این کار، مقوله‌های دانش محتوایی و دانش محتوایی- پداگوژیکی شولمن، به اجزای فرعی «دانش محتوایی عمومی» و «دانش محتوایی تخصصی» از یک سو و «دانش

مربوط به محتوا و دانش‌آموزان» و «دانش مربوط به محتوا و تدریس» از سویی دیگر، تقسیم‌بندی شد (شکل ۱).



شکل ۱. سازمان‌دهی مجدد دانش محتوایی و دانش محتوایی پداگوژیکی توسط بال و همکاران- (۲۰۰۸)

مقوله‌هایی که مجدداً سازماندهی شدند، بدین شرح‌اند:

دانش محتوایی عمومی: با محتوای برنامه درسی سروکار داشته و به دانش و مهارت‌های ریاضی اشاره دارد که در هر موقعیتی - نه لزوماً تدریس - مورد استفاده قرار می‌گیرند. این دانش شامل توانایی شخص برای رسیدن به یک راه‌حل درست و یافتن پاسخ درست برای مسائل ریاضی است. این دانش، به دانستن مفاهیم و رویه‌های ریاضی، تشخیص پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان، بازشناختن تعریف‌های نادقیق ارائه شده توسط کتاب‌های درسی و استفاده درست از نمادگذاری‌ها و اصطلاحات شفاهی و مکتوب توسط معلمان ریاضی، اشاره دارد. به عبارت دیگر، «دانش محتوایی عمومی» همان دانش ریاضی است که از یک فرد تحصیل‌کرده انتظار می‌رود. مثلاً انتظار می‌رود که معلم تشخیص دهد آیا دانش‌آموز، تفریق زیر را درست انجام داده است یا خیر:

$$۱۳۹ = ۱۶۷ - ۳۰۷$$

تجزیه و تحلیل فیلم‌های ویدیویی تهیه شده از تدریس‌های کلاسی، اهمیت دانش محتوایی عمومی را نشان داد. برای نمونه، زمانی که معلم یک اصطلاح ریاضی را به درستی تلفظ نمی‌کرد، در محاسبات خطا داشت یا نمی‌توانست مسأله را در کلاس حل کند، به‌وضوح در فرآیند تدریس ریاضی او، خلل ایجاد می‌شد و

زمان زیادی به هدر می‌رفت و این امر، ضرورت توجه به این دانش را در تدریس و یادگیری ریاضی، برجسته نمود.

دانش محتوایی تخصصی: فراتر از دانشی است که از فردی که آموزش عمومی را تمام کرده یا در یک حوزه متخصص شده، انتظار می‌رود. مثلاً حسابداران و مهندسان نیز با اعداد سروکار دارند، اما لازم نیست بدانند یا توضیح دهند که چرا وقتی عددی در ۱۰ ضرب می‌شود، یک صفر به سمت راست آن اضافه می‌گردد، یا وقتی که دانش‌آموزان، روش‌های غیراستانداردی برای انجام رویه‌های ریاضی ارائه می‌دهند، لازم است که معلم از خود بپرسد که «چرا این روش، درست است؟»، «آیا با این روش همیشه می‌توان به پاسخ درست رسید؟» و «چگونه می‌توان این روش را برای دانش‌آموزان توضیح داد و از نظر ریاضی، آن را توجیه کرد؟» از طرف دیگر، تدریس ریاضی، با دانستن روابط بین رویه‌ها، معانی گوناگون اصطلاحات و بیان و تشریح مفاهیم، درگیر است. مثلاً معلمان به روش‌های مؤثری برای بازنمایی معنای الگوریتم تقسیم نیاز دارند و لازم است که روابط بین الگوریتم تقسیم و تفریق را بدانند تا بتوانند معنای گام‌های تقسیم را بیان کنند و آن‌ها را برای دانش‌آموزان توضیح دهند. بال و همکاران (۲۰۰۸) اشاره می‌کنند که منظورشان این نیست که «معلمان ریاضی باید چه چیزی را تدریس کنند»، بلکه بحث آن‌ها در مورد دانشی است که لازم است معلمان ریاضی بدانند و قادر به انجام آن باشند تا بتوانند آن را تدریس کنند. به‌طور خلاصه، این دانش به معلمان کمک می‌کند تا دانش ریاضی مورد تدریس را باز کرده^۱ و جنبه‌های مختلف آن را به دانش‌آموزان نشان دهند.

دانش مربوط به محتوا و دانش‌آموز چیزی است که دانش درباره دانش‌آموزان و دانش درباره ریاضی را با هم ترکیب می‌کند. به عبارت دیگر، معلمان باید بتوانند مشکلات و موانع دانش‌آموزان را پیش‌بینی کنند، به حرف دانش‌آموزان گوش دهند و به تفکر دانش‌آموزان به‌طور مناسب، پاسخ دهند و هنگام تدریس، از مثال‌ها و بازنمایی‌های مناسب استفاده نمایند. همچنین لازم است معلمان هنگام طراحی تدریس و اجرای آن، از چگونگی درک مفهومی‌ها و بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان درباره موضوعات ریاضی آگاه باشند. مثلاً دانستن الگوریتم تفریق، اگرچه برای تدریس آن لازم است، کافی نیست. برای داشتن یک تدریس کارا، لازم است معلمان سرچشمه‌های خطاهای ریاضی دانش‌آموزان را بررسی کنند و مهم‌تر این‌که این بررسی باید سریع و در لحظه انجام شود. دانش‌آموزان نمی‌توانند ساعت‌ها منتظر بمانند تا معلمان، خطاهایشان را شناسایی کرده و به آن‌ها کمک کنند. در حقیقت، معلمان به نوعی استدلال ریاضی نیاز دارند که بسیاری از افراد دیگر، لازم نیست آن را بدانند. هرچند ریاضی‌دان‌ها نیز با تجزیه و تحلیل خطاها و بررسی اثبات‌ها سروکار دارند، لازم نیست این کار را وقتی دانش‌آموز منتظر راهنمایی

^۱Unpack

آن‌ها است، به سرعت انجام دهند. برای مثال، در تفریق زیر، معلم برای کمک به دانش‌آموز، علاوه بر تشخیص نادرستی جواب، نیاز دارد تا سرچشمه خطای او را نیز مشخص نماید:

$$۱۶۹ = ۱۶۸ - ۳۰۷$$

علاوه بر این، معلمان در انتخاب یک مثال، نیاز دارند تا در مورد میزان جالب بودن و نیز ایجاد انگیزه برای حل آن و میزان سختی یا آسانی‌اش از دید دانش‌آموزان، پیش‌بینی‌هایی مبتنی بر شواهد داشته باشند. معلمان باید بتوانند به ایده‌ها یا اندیشه‌های ناکامل دانش‌آموزان گوش کنند و آن‌ها را تفسیر نمایند. تمام این فعالیت‌ها، به ترکیبی از «دانش محتوایی تخصصی» و «آشنایی با دانش‌آموزان و نوع تفکر آن‌ها» نیاز دارد و به آن، «دانش مربوط به محتوا و دانش‌آموز» گفته می‌شود. این دانش، نوعی از دانش پداگوژیکی است که دانستن در مورد دانش‌آموز و دانستن در مورد ریاضی را با یکدیگر ادغام می‌کند.

دانش مربوط به محتوا و تدریس، دانش درباره ریاضی را با دانش درباره تدریس ترکیب می‌کند. بسیاری از فعالیت‌های مربوط به تدریس ریاضی، به دانش ریاضی خاصی نیاز دارد که با طراحی آموزشی در تعامل است. معلم نیاز دارد تا با گزینشی مناسب، محتوای ریاضی را برای آموزش، پشت سر هم بچیند، تصمیم بگیرد با چه مثالی شروع کند و از چه مثال‌هایی برای تعمیق مطلب استفاده نماید. بال و همکاران (۲۰۰۸) معتقدند که لازم است معلم، مزایا و معایب آموزشی بازنمایی‌های مورد استفاده را برای تدریس یک ایده خاص ریاضی، ارزیابی کند و از طریق بحث‌های کلاسی، تصمیم بگیرد که کجا، از دانش‌آموزان توضیح بیشتری بخواهد و چه موقع از اظهارنظرهای دانش‌آموزان برای ارائه یک موضوع ریاضی، استفاده نماید. تمام این فعالیت‌ها، به تعامل بین «درک ریاضی تخصصی» و «درک بحث‌های پداگوژیکی» نیاز دارد که بر یادگیری دانش‌آموز، اثر می‌گذارد.

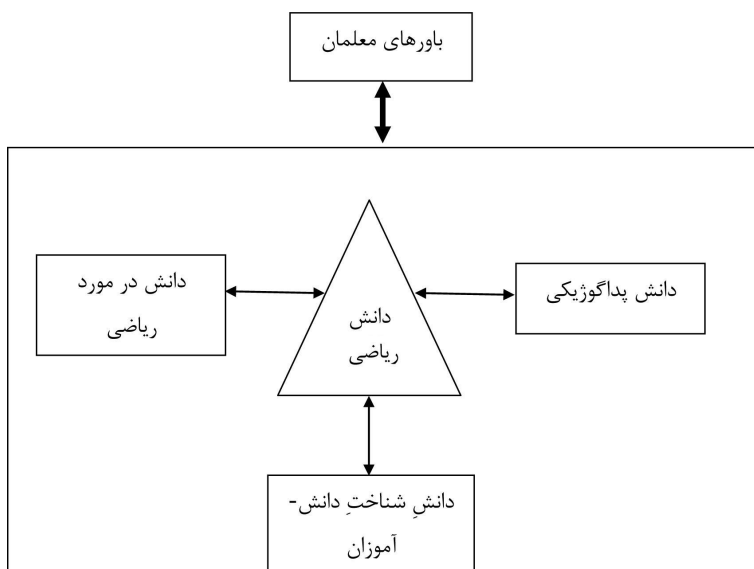
دانش مربوط به محتوا و تدریس، دانستن در مورد تدریس و دانستن در مورد ریاضی را با یکدیگر ترکیب می‌کند.

جمع‌بندی: در مدل ارائه شده توسط بال و همکاران (۲۰۰۸)، بر اهمیت تأثیر باور معلمان در تدریس‌شان، تأکید خاصی نشده است. در حالی که برخی از محققان معتقدند که این مؤلفه، در تدریس ریاضی تأثیرگذار است. برای نمونه، گویا (۱۹۹۲) و پترو و گولدینگ (۲۰۱۱) ابراز می‌دارند که اگر معلمان باور داشته باشند که ریاضی به‌طور خاص، مجموعه‌ای از قوانین و رویه‌های معمولی است که باید به خاطر سپرده شود، رویکرد آن‌ها در رویارویی با مسائل ناآشنای ریاضی، محدود خواهد شد و این امر، ممکن است بر تدریس آن‌ها تأثیر بگذارد. باورها ممکن است در توسعه دانش نحوی؛ جایی که حدس

زدن، یافتن شواهد و بیان توضیحات از یافتن قوانین و رویه‌های معمولی در زمینه‌های قابل تشخیص، کاملاً متفاوت است، نقش برجسته‌ای داشته باشند.

۳.۳. جرح و تعدیل دانش معلمان ریاضی در بستر کلاس درس^۱: نظرات فیما و فرانک.

فیما و فرانک (۱۹۹۲) بر تدریس ریاضی و نیز بر اهمیت نقش باور معلمان در تدریس متمرکز شدند. مدل ارائه‌شده توسط آن‌ها، اساساً مبتنی بر چارچوب شولمن است. اما با تأکید بر این‌که دانش مورد نیاز برای تدریس ریاضی دارای ماهیت پویا و تعاملی است، فیما و فرانک (۱۹۹۲) مدل شولمن را جرح و تعدیل نمودند و مدلی برای توصیف دانش‌های مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی پیشنهاد دادند. مدل آنان شامل چهار مؤلفه «دانش در مورد ریاضی»، «دانش پداگوژیکی»، «دانش شناخت دانش‌آموزان» و «دانش باورهای معلمان» است (شکل ۲).



شکل ۲. دانش معلمان: جرح و تعدیل شده در بستر کلاس درس (فیما و فرانک (۱۹۹۲)، صفحه ۱۶۲)

این مدل، بهای اصلی را برای تولید و توسعه، به بستر کلاس درس می‌دهد. به باور فیما و فرانک (۱۹۹۲)، بستر کلاس درس باعث می‌شود تا دانش محتوایی معلمان به دانش پداگوژی آن‌ها مرتبط شود. همچنین در بستر کلاس درس است که شناخت دانش‌آموزان با باورهای معلم ترکیب می‌شود و دانش

^۱Context

تولید شده بر اثر این تعامل، عمل‌های تدریس و رفتار معلم را در کلاس شکل می‌دهد. به علاوه، تأکید آن‌ها بر این است که تدریس، فرآیندی است که طی آن، معلم می‌تواند دانش خود را تغییر دهد و دانش جدیدی تولید نماید که این، به معنای پویا بودن دانش مورد نیاز برای تدریس است. برای مشخص‌تر شدن اجزای این مدل، برای هر یک توضیحی اجمالی می‌دهیم.

دانش دربارهٔ ریاضی: شامل مفاهیم، رویه‌ها، رویه‌های حل مسأله، دانش مفاهیم زیربنایی و رویه‌ها و ارتباط مفاهیم با یکدیگر است. این مؤلفه، به چگونگی استفاده از مفاهیم و رویه‌ها در انواع مختلف حل مسأله نیز اشاره دارد.

دانش پداگوژیکی: به دانش معلمان در مورد رویه‌های تدریس مانند استراتژی‌های مؤثر برای برنامه‌ریزی، رویه‌های معمولی کلاس درس، روش‌های مدیریت رفتار، رویه‌های سازمان‌دهی کلاس درس، روش‌های ایجاد انگیزه و نیز، روش‌های بازنمایی مناسب اشاره می‌کند.

دانش شناخت دانش‌آموزان: شامل دانش در مورد تفکر و یادگیری دانش‌آموزان است. این مؤلفه در مورد این‌که چگونه تفکر و یادگیری دانش‌آموزان در محتوای خاص ریاضی آشکار می‌شود، بحث می‌کند. همچنین درک فرآیندهای مورد استفاده توسط دانش‌آموزان و پیش‌بینی موفقیت یا عدم موفقیت آنان، در این مقوله جا می‌گیرد. تفاوت مدل فینما و فرانک با مدل شولمن در این است که «شناخت دانش‌آموزان» در آن، به‌عنوان مؤلفه‌ای مستقل از مؤلفه دانش پداگوژیکی شولمن در نظر گرفته شده است. اما هر دو مدل، بر این ایده که دانش چگونگی تفکر و یادگیری دانش‌آموزان عاملی مهم در تدریس کارآمد است، تأکید کرده‌اند.

جمع‌بندی: فینما و فرانک (۱۹۹۲) اظهار می‌دارند که تمام جنبه‌های دانش معلمان و باور آن‌ها، به یکدیگر مرتبط هستند و این مؤلفه‌ها با هم، در یک تدریس کارآمد ریاضی نقش سازنده‌ای ایفا می‌کنند. ایشان بر این باورند که دانش معلمان در زمینه‌های خاص و اغلب از طریق تعامل با موضوع درسی و دانش‌آموزان، توسعه می‌یابد. بنابراین به نظر آن‌ها، چالش‌های موجود در تحقیقات مربوط به حوزه دانش معلمان، باید نوعی از روش‌شناسی را تولید کند که در آن، تمام این مؤلفه‌ها با هم دیده شوند. آن‌ها توصیه می‌کنند که برای پژوهش در زمینه دانش‌های مورد نیاز معلمان برای تدریس، ضروری است که روش‌شناسی‌های مناسبی برای شناخت عمیق‌تر ماهیت تعاملی بین مقوله‌های مختلف دانش معلمان و نقشی که این تعامل در تدریس ریاضی بازی می‌کند، ابداع شوند تا بتوان به‌کمک آن‌ها، شناخت همه‌جانبه‌تری از چگونگی تعامل معلمان با دانش‌آموزان خود در کلاس‌های درس ریاضی، پیدا نمود.

۴.۳. مقوله‌های دانش معلمان: دیدگاه وایت و همکاران. وایت، یاورسکی، آگودلو- والدراما و گویا (۲۰۱۳) به دو نوع دانش عملی و نظری اشاره می‌کنند و معتقدند که بین دانش نظری و دانش برخاسته از عمل تدریس، تفاوت‌هایی وجود دارد. دانش برخاسته از عمل که در ادبیات آموزشی به «دانش پیشه‌وری»^۱ به معنای هنر و مهارت ویژه آن پیشه و برخاسته از آن معروف است، به دانشی اطلاق می‌شود که معلمان آن را طی فرآیندهای بازتاب و حل عملی مسأله و برای پاسخگویی به نیازهای حرفه‌ای خود می‌سازند و توسعه می‌دهند. در مقابل، «دانش نظری» قرار دارد که شامل اصول و چارچوب‌هایی است که از مطالعات پژوهشی حاصل شده است و قابل تعمیم به زمینه‌ها و حوزه‌های دیگر است و کمتر بر شخص معلم و جزئیات عملی برای تدریس، متمرکز است. این در حالی است که دیویس و اسمیت (۲۰۰۶)، نقل شده در زاکیس (۲۰۱۰) معتقدند که لزومی به جدا کردن محتوا و پداگوژی نیست. به نظر آن‌ها، «ریاضی برای تدریس» را می‌توان به عنوان شاخه‌ای از نظام ریاضی در نظر گرفت که در آن، جنبه‌های درهم‌تنیده‌ای مانند اشیاء ریاضی، ساختارهای برنامه درسی، جامعیت^۲ کلاس درس و درک ذهنی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

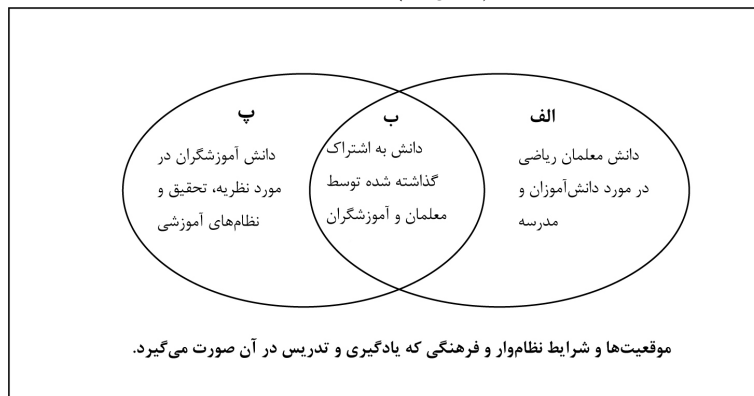
۴. تأثیر انواع دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی، بر جهت‌گیری پژوهش در حوزه آموزش معلمان ریاضی

مقوله‌بندی‌های ارائه شده در رابطه با جنبه‌های مختلف دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس، موضوع‌های پژوهشی مختلفی برای محققان ایجاد کرده است. مثلاً بال و همکاران (۲۰۰۸) بر ارزیابی مؤلفه‌های متفاوت دانش معلمان ریاضی تمرکز کرده‌اند. در صورتی که دیویس و اسمیت (۲۰۰۶) تلاش کرده‌اند تا از طریق پژوهش‌های خود دریابند که معلمان ریاضی «چه می‌دانند» و «چه باید بدانند». علاوه بر این‌ها، بال (۲۰۰۸) تلاش کرد تا رابطه بین انواع مختلف دانش مورد نیاز را برای تدریس ریاضی، مشخص کند. در مقابل، همان‌طور که زاکیس (۲۰۱۰) توضیح داده است، بعضی دیگر از محققان مانند واتسون (۲۰۰۸)، از مقوله‌بندی دانش معلمان ریاضی خودداری کرده و در عوض، دانش ریاضی مورد نیاز را برای تدریس، «مشارکت در عمل‌های ریاضی کلاس درس و نیز هنگام آماده شدن برای تدریس» دانسته‌اند. اما به هر تقدیر، او ابراز می‌کند که این دیدگاه‌های مختلف، همگی در این واقعیت که ماهیت دانش ریاضی معلمان حوزه‌ای پیچیده است، توافق دارند و به همین جهت، برای تحقیق در مورد دانش‌های ریاضی مورد نیاز معلمان ریاضی، جنبه‌های مختلفی را در نظر گرفته و بر آن تمرکز کرده‌اند.

^۱Craft Knowledge ^۲Collectivity

علاوه بر این، لی‌پینگ ما^۱ (۱۹۹۹)، ایده «درک عمیق مفاهیم بنیادین ریاضی^۲» را ارائه نمود. او طی مصاحبه با ۷۲ معلم دوره ابتدایی در چین، مفهوم «بسته‌های دانش^۳» را معرفی کرد. این بسته‌های دانش، به سازمان‌دهی و توسعه مجموعه‌ای از ایده‌های مرتبط با هم در یک حوزه خاص حساب^۴ اشاره دارند. از نظر لی‌پینگ ما (۱۹۹۹)، برای این‌که معلمان بتوانند از دانش ریاضی خود در تدریس استفاده کنند، باید قادر باشند تا روابط بین مجموعه‌ای از ایده‌ها را ساختار بندی کنند و یک خط سیر افقی از فرآیند توسعه مفاهیم را ترسیم نمایند که ماهیت این دانش، «محتوایی-پداگوژیکی» است. در مجموع، پژوهش‌های انجام شده در چند دهه گذشته نشان می‌دهند که دانش ریاضی مورد نیاز برای یک معلم کارآمد ریاضی، با دانش مورد نیاز برای یک ریاضی‌دان با صلاحیت، یا دانش ریاضی مورد نیاز برای کاربرد ریاضی در حوزه‌های دیگر مانند مهندسی و علوم، متفاوت است. بال (۲۰۰۳) با تأکید بر این‌که در تدریس ریاضی، به نوع خاصی از دانش ریاضی نیازمندیم، معتقد بود که شواهد و توصیفات تجربی کافی در مورد دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس کارآمد، وجود ندارد. وی با اشاره به توسعه قابل توجه بنیان‌های نظری این حوزه که می‌تواند پشتوانه مناسبی برای انجام پژوهش‌های میدانی و یافته‌های تجربی با توصیفات دقیق از کلاس درس باشد، پژوهش‌های متعددی را طراحی و اجرا نمود که نتایج آن‌ها، راهگشای پژوهش‌های بیشتری در این زمینه شد.

برای نمونه، یاورسکی (۲۰۰۸، ص ۲۰) جنبه‌های مختلف دانش معلمان ریاضی و آموزشگران ریاضی را در ارتباط با یکدیگر نشان داده است (شکل ۳).



شکل ۳. توصیف جنبه‌های مختلف دانش معلمان ریاضی و آموزشگران ریاضی در ارتباط با یکدیگر

^۱ محقق به‌طور عامدانه به نام و نام خانوادگی ارجاع داده است تا با کلمه «ما» در فارسی اشتباه نشود.

به گفته یاورسکی (۲۰۰۸)، با وجود این که این نوع دانش، ممکن است برای معلمان و آموزشگران تعبیرهای متفاوتی داشته باشد، می تواند پایه ای مناسب برای برقراری ارتباط بین آن ها در حوزه ها، تجربه ها و علایق مشترک باشد. علاوه بر این، همان طور که در قسمت های (الف) و (پ) (شکل ۳) دیده می شود، معلمان و آموزشگران، دانش تخصصی خاص خود را دارند. به طور مثال، آموزشگران الزاماً دانشی غنی در زمینه مدرسه و دانش آموزان ندارند. معلمان نیز ضرورتاً در زمینه دانش نظری و پژوهشی، قوی نیستند. شکل (۳) نشان دهنده پیچیدگی موجود در محیط های آموزشی است که تدریس و توسعه تدریس در آن ها صورت می گیرد. به هر حال، تعامل مناسب بین معلمان و آموزشگران معلمان، می تواند در ارتقای یادگیری حرفه ای هر دو گروه تأثیرگذار باشد.

علاوه بر این، زاسلاوسکی (۲۰۰۹) با توجه به نظریه تعامل اجتماعی ویگوتسکی که به ماهیت اجتماعی فرآیند یادگیری می پردازد، برنامه های یادگیری حرفه ای را به گونه ای طراحی کرد که در آن، معلمان و آموزشگران معلمان، یادگیرندگانی در نظر گرفته شدند که به طور مستمر بر کار خودشان بازتاب دارند. در این دیدگاه، معلمان ریاضی و آموزشگران معلمان ریاضی، اغلب به چشم دو جامعه درهم تنیده دیده می شوند که باعث توسعه یکدیگر می گردند.

در حالی که پژوهش های انجام شده در حوزه آموزش معلمان ریاضی به درجه ای از بلوغ رسیده است، اما در سال های اخیر، تنها دانش موضوعی مورد نیاز برای تدریس به طور فزاینده ای مورد توجه سیاست گذاران آموزشی در ایالات متحده قرار گرفته است. مثلاً برای آن که دانش آموزان در برنامه «هیچ کودکی عقب نماند»^۱ (راویچ، ۲۰۰۹)، با «معلمان با صلاحیت های سطح بالا»^۲ سر و کار داشته باشند، دولت فدرال اعلام کرده که معلمان باید صلاحیت های موضوعی خود را از طریق گواهینامه ها^۳، رشته تحصیلی^۴ و نظایر آن به اثبات برسانند. همچنین هدف برنامه هایی مانند «مشارکت علوم- ریاضی»^۵ که به ابتکار مؤسسات «توسعه حرفه ای کالیفرنیا»^۶ و «بنیاد ملی علوم»^۷ تدوین و اجرا شده، فراهم کردن برنامه های توسعه حرفه ای محتوا - مدار است تا بدین ترتیب، دانش محتوایی معلمان ارتقا یابد.

۵. جمع بندی

یونسکو دهه اخیر را «دهه آموزش برای توسعه پایدار»^۸ نامگذاری کرده است و به دنبال آن، پروژه های با عنوان «چالش های آموزش ریاضی پایه»^۹ با پنج هدف تعریف نموده است که از بین آن ها دو مورد

^۱No Child Left Behind ^۲Highly qualified teachers ^۳Certification ^۴Subject matter major

^۵Math-Science Partnership ^۶California's Professional Development ^۷National Science Foundation: NSF

^۸Education for Sustainable Development: ESD ^۹Challenges in Basic Mathematics

به‌طور خاص مربوط به آموزش معلمان ریاضی و تدریس ریاضی است. این دو مورد، یکی «آماده‌سازی و توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی» و دیگری، «دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی و در حین تدریس» است. این پروژه معتقد است که «تمام این مباحث اگر در بسترهای بومی عرضه شوند، در مقایسه با دیگر کشورها، معنای متفاوتی خواهند داشت». اما در ادامه آورده است که «همین تفاوت است که اتخاذ رویکردهای مرتبط با تدریس و یادگیری ریاضی را ایجاب می‌کند و ما را از مفروض گرفتن یک زبان جهانی برای ریاضی و ویژگی‌های فرهنگی آن در این عصر و نسل، برحذر می‌دارد». علاوه بر این، یونسکو تأکید دارد که «لازم است مراقب مباحث اساسی و بحران‌هایی که در این راه ممکن است پیش آید، باشیم تا هم از خطر نقض فرهنگی توسط نوآوری‌ها، هم از خطر از «خودبیگانگی فرهنگی»^۱ و هم از خطر از دست دادن غنای فرهنگی موجود در مناطق مختلف جهان، اجتناب کنیم». این دغدغه‌ها و تأکیده‌ها، انجام پژوهش‌هایی در حوزه تدریس ریاضی و آموزش معلمان ریاضی را از منظرهایی که هم مستند به یافته‌های جهانی بوده و هم به‌طور عمیق، متأثر از شرایط بومی/ فرهنگی کشورهای گوناگون باشد، ضروری کرده است.

این برنامه‌ها، مورد انتقاد شدید محافل آموزشی در آمریکا قرار گرفته که از موضوع بحث ما خارج است.

مراجع

- [۱] پروژه ۲۰۶۱. (۱۹۹۷). ماهیت ریاضی. ترجمه زهرا گویا و نرگس مرتاضی مهریانی. رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۶. صص. ۴ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
- [۲] غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۶). موضوعات مطالعاتی در آموزش ریاضی ایران. رشد آموزش ریاضی. شماره ۸۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی. وزارت آموزش و پرورش. صفحات ۲۸-۳۳.
- [3] Ball, D. (2003). Teachers' Mathematical Knowledge: Its Development and Use in Teaching. *Mathematical Proficiency for all Students: Toward a Strategic research and development Program in Mathematics education/ RAND Mathematics study Panel*. Deborah Ball, Chair. pp. 15-27. RAND
- [4] Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education*, (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.

^۱Cultural Alienation

- [5] Ball, D., Thames, M., Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special. *Math Teacher Education*. pp. 389-407.
- [6] Bass, H. (2004). Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education. *First Plenary Lecture of the 10th International Congress on Mathematical Education*. 4-11 July, 2004, Denmark.
- [7] Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18, pp. 947-967.
- [8] Even, R. (2008). Facing the challenge of educators to work with practicing mathematics teachers. In T. Wood, B. Jaworsky, K. Krainer, D. Tirosh, P. Sullivan (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Vol.4. Pp. 57-74.
- [9] Fennema, E., & Franke, L.M. (1992). Teachers' Knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Pp. 147-164. New York: Macmillan.
- [10] Goos, M. (2009). Investigating the professional Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: A theoretical Discussion and Research Agenda. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol.1). Palmerston North, NZ: MERGA.
- [11] Goodchild, S. (2008). A Quest for 'Good' Research. . In T. Wood, B., Jaworski (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. pp. 201-220.
- [12] Hill, H.; Ball, D. & Shilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Research in Mathematics Education*. Vol.39. PP.372-400.
- [13] Hill, C.; Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*. PP.371-406.
- [14] Jaworski, B. (2003). Research Practice into/Influencing Mathematics Teaching and Learning Development: Towards A Theoretical Framework Based on Co-Learning Partnership. *Educational Studies in Mathematics* 54: 249-282, 2003. 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [15] Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- [16] Jaworski, B. (2008). Development of Mathematics Teacher Educator and its relation to teaching development. In T. Wood, B., Jaworski, K., Krainer, D., Tirosh, P., Sullivan (Eds.) *The*

- International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Vol. 1, pp.17-36. Bergen, Norway: international group for the Psychology of Mathematics.
- [17] Krainer, K. (2000). Teacher Education as Research – A Trend in European Mathematics Teachers Education. University of Klagenfurt. Lecture at ICME 9, WGA 7, Tokyo, August 2000.
- [18] Krainer, K; Kieran, C; & Shaughnessy, J.M. (2013). Linking Research to Practice: Teachers Education Research. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.
- [19] Llinares, S., & Krainer, K (2006). Professional aspects of teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future*, (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.
- [20] National council of Teachers of Mathematics. (2010). *Professional Development Research Brief: Mathematics Professional Development*. The Author.
- [21] Ma, L. P. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the Unites States*. Mahwah, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- [22] Perks, P.; & Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. In B. Jaworski and T. Wood (Eds.). *The Mathematics Teacher Eduvator as a Developing Professional*. Pp. 265-280. Sense Publishers.
- [23] Petrou, M; Goulding, M.(2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. In T.Rowland & K.Ruthven (Eds.) *Mathematical Knowlwdge in Teaching*. Springer. Pp. 9-25.
- [24] Ravitch, D. (2009). Time to Kill 'No Child Left Behind'. From Education Week [American Education's Newspaper of Record], Wednesday, June 10, 2009, Volume 28, Issue 33, pp. 30-36. http://www.edweek.org/ew/articles/2009/06/04/33ravitch_ep.h28.html?tkn
- [25] Roesken. B. (2011). Hidden Dimensions in the Professional Development of Mathematics Teachers: In-Service Education for and with Teachers. Sense Publisher. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- [26] Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series)*. Taylor and Francis Press.
- [27] Shulman, L.S. (1986). Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*. Vol 15, No. 2. Pp. 4-14. American Educational Research Association.

- [28] Timperley, H. (2011). *Realized the Power of Professional Learning*. Open University Press.
- [29] White, A.; Jaworski, B.; Agudelo- Valderrama, C.; & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.
- [30] Zazkis, R; Zazkis, D.(2010). The significance of Mathematical Knowledge in Teaching Elementary Methods Courses: Perspectives of Mathematics Teacher Educators. Published Online. Springer
- [31] Zaslavsky, O.; & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educator: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Kluwer Academic Publishers.
- [32] Zaslavsky, O. (2009). Mathematics Educators' Knowledge and Development. In Even, D.L. Ball (Eds.). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. pp. 105-11.
- [33] Zehetmeier, S., Krainer, k. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM Mathematics Education*. pp. 875-887.

درک بنی از قواعد و پاسخ‌ها در ریاضیات مبتنی بر «آموزش تجویزی فردی»*

اس. اچ. ارلوانگر

برگردان: ابوالفضل رفیع‌پور و نوشین فرامرزی‌پور

یادداشت مترجمان

مقاله «درک بنی از قواعد و پاسخ‌ها در ریاضیات مبتنی بر «آموزش تجویزی فردی»^۱، نوشته استنلی اچ. ارلوانگر^۲ است که برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ منتشر شده است. ترجمه این مقاله پس از ۴۳ سال، از دو جهت حائز اهمیت است:

اول از دیدگاه روش‌شناسی تحقیق: در این مقاله، از مطالعه موردی که یکی از سنت‌های پژوهش کیفی می‌باشد، استفاده شده است، به‌طوری‌که عملکردهای یک دانش‌آموز نوعی به اسم بنی را در انجام عملیات ریاضی بر روی اعداد اعشاری و کسرها، به تصویر می‌کشد. معرفی مطالعه موردی به‌عنوان یکی از روش‌های پژوهش در حوزه آموزش ریاضی، از آن جهت حائز اهمیت است که گاهی تازه‌واردان به حوزه آموزش ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی را مترادف با پژوهش‌های کمی می‌دانند، و حتی گاهی آن را در سطح استفاده از نرم‌افزارهای تحلیل داده‌های کمی مانند، SPSS تقلیل می‌دهند. در حالی که

* این مقاله ترجمه ای است از

Erlwanger, S.H. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. Journal of Childeren's Mathematical Behavior. 1(2): 7-26

^۱Individually Prescribed Instruction: IPI ^۲S. H. Erlwanger

پژوهش‌های کیفی و مطالعات موردی روشنگر، می‌توانند اطلاعات مفیدی را برای پژوهش‌های آموزش ریاضی ارائه نمایند.

دوم از دیدگاه تاریخی: «دوره ریاضی جدید»^۱ در اواخر دهه ۱۹۵۰ و دهه ۱۹۶۰، به جامعه آموزشی در دنیا معرفی شد. در اوایل دهه ۱۹۷۰، نقدهای زیادی به جنبش ریاضی جدید وارد شد و راه را برای نهضت «بازگشت به اصول»^۲ باز کرد. بازگشت به اصول، رویکرد اشتباه دیگری بود و شواهد تاریخی متعددی این اشتباه را تصدیق می‌کنند.^۳ مشکل اصلی رویکرد «بازگشت به اصول» تمرکز به مفاهیم و رویه‌های ریاضی بود. خطر بالقوه رویکرد «بازگشت به اصول» نادیده گرفتن درک مفهومی دانش‌آموزان بود. برنامه «آموزش تجویزی فردی» یکی از مظاهر جنبش بازگشت به اصول بود. این روش، مستلزم استفاده از جزوه‌های آموزشی از قبل برنامه‌ریزی شده بود که دانش‌آموزان به‌صورت فردی و با سرعت خودشان و با کمک معلم، روی محتواهای آموزشی کار می‌کردند و زمانی که برای آزمون آماده می‌شدند، در آزمون مهارتی شرکت می‌کردند. تعامل نامناسب و غیرمکفی معلم و دانش‌آموز در برنامه «آموزش تجویزی فردی»، باعث می‌شد که دانش‌آموزان بسیاری همانند بنی در یادگیری ریاضی دچار بدفهمی‌های جدی شوند ولی بدون توجه به درستی یا نادرستی یک قاعده از نظر منطقی، صرفاً به کلید تصحیح توجه داشتند تا نمره بالایی را در آزمون کسب کنند. مقاله ارلوانگر، ما را از خطر تدریس رویه‌های ریاضی بدون توجه به درک مفهومی، آگاه می‌کند و برای روشن کردن میزان این خطر، شواهد تحقیقی قدرتمندی را از نحوه تفکر دانش‌آموزی به نام بنی ارائه می‌کند.

مقاله ارلوانگر، نه تنها در زمان خود، بلکه در زمان‌های پس از آن نیز مورد توجه واقع شده است. به گونه‌ای که در کتاب «مجموعه مقالات کلاسیک در پژوهش آموزش ریاضی» که در سال ۲۰۰۴ توسط شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا منتشر شده، به عنوان یکی از فصل‌های کتاب آمده است. با توجه به اهمیت این مقاله، مترجمان متقاعد شدند که این اثر را ترجمه نمایند. در ترجمه پیش رو، از علامت‌های زیر برای خواناتر شدن بحث‌ها، استفاده شده است.

- علامت [] حاوی توضیحات مصاحبه‌گر است که برای خواناتر شدن مطالب آمده‌اند.
- علامت { } حاوی توضیحات مترجمان است که برای خواناتر شدن مطالب اضافه شده‌اند.

^۳ برای اطلاعات بیشتر به مقاله «واکنش‌های پس از جنبش ریاضی جدید» در شماره ۵۴ مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی مراجعه شود.

۱. مقدمه

این مطالعه از طریق مشاهده یک کلاس درس در پایه ششم، شکل گرفته است. در این کلاس از «آموزش تجویزی فردی» به منظور کشف ماهیت خطاهای {ریاضی} و کمک به دانش‌آموزانی که نیاز به آموزش جبرانی دارند، استفاده شده است. به این ترتیب به نظر نمی‌آمد که بنی دوازده ساله، آزمودنی مناسبی برای این مطالعه باشد، زیرا پیشرفت او از طریق برنامه IPI از میانگین کل دانش‌آموزان تحت این برنامه، خیلی بیشتر بود و از نظر معلمش، او یکی از بهترین دانش‌آموزان کلاس در ریاضی بود. در یک برنامه سازمان یافته مانند «آموزش تجویزی فردی» (IPI) این انتظار توسط معلم وجود داشت که بنی بدون فهم و تسلط بر کارهای قبلی، نمی‌تواند پیشرفت زیادی داشته باشد.

بنی مایل به صحبت کردن با من- به عنوان پژوهشگر- بود و من هم مشتاق بودم که صحبت با وی را شروع کنم. پس به زودی، بحث در مورد درس فعلی او را شروع کردیم. من به زودی دریافتم که بنی، بعضی از مطالب قبلی را نادرست فهمیده است. مثلاً او در اغلب تمرین‌ها، می‌توانست کسرها را جمع و اعداد اعشاری را به درستی در هم ضرب کند. {اما وقتی از او خواستم که جمع دو کسر $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ را به دست آورد}، بنی پاسخ داد $1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ و $\frac{2}{4}$ را به صورت عدد اعشاری $1/2$ نوشت. بحث‌ها و مصاحبه‌های بعدی با بنی مرا با ماهیت درکش از اعداد اعشاری و کسر، بیشتر آشنا کرد و نظرش را در مورد قواعد، روابط و پاسخ‌ها در ریاضی، بهتر شناختم.

این مقاله تلاش می‌کند تا نشان دهد که هدف «آموزش تجویزی فردی»، آن طوری که لیندوال و کوکس^۱ (۲، ص. ۳۴) آن را به عنوان «ارائه یک برنامه آموزشی که انطباق بسیاری با نیازهای افراد دارد» می‌دانستند، به طور کلی {در مورد} بنی، صادق نبود. به طور مشخص، این مقاله نشان می‌دهد که معایب «آموزش تجویزی فردی» برای بنی، شامل رویکرد رفتارگرایی^۲ آن در مورد ریاضی، برداشت این برنامه از مفهوم «فردی سازی»^۳ و روش آموزش آن می‌باشد. مصاحبه را با آزمودن تصور بنی از اعداد اعشاری و کسر، شروع کردیم.

۲. تبدیل عدد اعشاری و کسر {به یکدیگر}

بنی کسرها را با پیدا کردن حاصل جمع صورت و مخرج و تصمیم‌گیری برای مکان ممیز در عدد حاصل، به اعداد اعشاری تبدیل می‌کرد. این رویه در مصاحبه انتخاب شده در زیر، توضیح داده شده است. (B: بنی، E: ارل وانگر) {م: محقق و مصاحبه گر؛ د: دانش‌آموز که در اینجا بنی است}

^۱Lindvall and Cox ^۲Behaviorist ^۳Individualization

م: چگونه $\frac{۲}{۱۰}$ را به صورت یک عدد اعشاری یا کسر اعشاری می نویسی؟

د: یک ممیز دو (نوشت $۱/۲$)

م: $\frac{۵}{۱۰}$ و

د: $۱/۵$

بنی قادر بود که روش خودش را توضیح دهد. مثلاً برای $\frac{۵}{۱۰} = ۱/۵$ ، چنین استدلال کرد که «۱ به جای ۱۰ قرار می گیرد، ممیز و سپس ۵ که تعداد یکان را نشان می دهد». در مثال دیگری، {او نوشت} $\frac{۴۰۰}{۴۰۰۰} = ۸/۱۰۰$ {در ادامه او توضیح داد} چون عددها یکسان هستند [تعداد ارقام] . . . همانند ۴۰۰۰ روی ۵۰۰۰. همه آنچه که انجام می دهیم، این است که آنها را جمع کرده و بعد پاسخ را می نویسیم؛ سپس ممیز را در [سمت] راست قرار می دهیم. . . در جلوی [آخرین این] سه عدد». توضیح او (بنی) در مورد ممیز، اگرچه بیشتر رمزگونه بود، ولی عجیب هم بود. وی در ادامه، در مورد مثال $\frac{۹}{۱۰} = ۱/۹$ ، توضیح داد که ممیز، «به معنی جدا کردن [به دو بخش جداگانه] است. شما می توانید یک و نه را در نظر بگیرید که می شود ۱۹ و در $۱/۹$ ، بخش اعشاری [یعنی ۹] نشان می دهد. . . که چه تعداد دهگان و چه تعداد صدگان یا غیره {داریم}».

این روش، بنی را قادر می ساخت تا هر کسری را به یک عدد اعشاری تبدیل کند. پاسخ بنی برای کسرهای مختلف، در زیر آمده است.

$$\frac{۴}{۶} = ۱/۰, \quad \frac{۱}{۹} = ۱/۰, \quad \frac{۱}{۸} = ۰/۹, \quad \frac{۲۷}{۱۵} = ۴/۲, \quad \frac{۳}{۱۰۰۰} = ۱/۰۰۳, \quad \frac{۴۲۹}{۱۰۰} = ۵/۲۹.$$

روشی که بنی به کار برد، در همه موارد با هم سازگار بود. به علاوه او کاملاً از این حقیقت آگاه بود که این روش برای بسیاری از کسرهای متفاوت نتایج یکسانی دارد، اما به نظر نمی رسید او به غلط بودن این روش پی برده باشد. در نمونه منتخب زیر، {دلیل این استنباط،} توضیح داده شده است:

م: و $\frac{۴}{۱۱}$ ؟

د: $۱/۵$

م: حالا اگر $\left[\frac{۴}{۱۱}\right]$ را تغییر بدیم و بگیریم که یازده چهارم [مصاحبه گر نوشت $\frac{۱۱}{۴}$]؟

د: اصلاً تغییر نمی کنه! این همان خواهد شد { $\left[\frac{۴}{۱۱}\right]$ همان $\left[\frac{۱۱}{۴}\right]$ است } ... {می شه} $۱/۵$.

م: چگونه این کار رو انجام دادی؟ آیا $\frac{۴}{۱۱}$ همان $\frac{۱۱}{۴}$ است؟

د: بله ... چون که یک ۱۰ تایی در بالا {صورت} وجود داره. پس تو باید ۱۰ رو جدا کنی ... ۱۰

رو به یک طرف ببری و بعد اونو در پایین {مخرج} بنویسی، [او نشان می دهد که چگونه {

$\frac{11}{4}$ {تبدیل به} $\frac{1}{4}$ می‌شود؛ سپس یک ۱ و یک ۴ داریم. بنابراین واقعا آن عدد همان $\frac{1}{4}$ خواهد شد. بنابراین شما باید این اعداد رو با هم جمع کنی که ۵ خواهد شد؛ سپس $\frac{1}{5}$ را داریم... بنابراین به $\frac{1}{5}$ می‌رسیم.

دو الگوریتم معادلی که بنی استفاده کرد (به شرط آن که a, b, c عددی {مفروض} باشند) می‌تواند به این صورت توضیح داده شود:

$$\frac{ab}{c} = a/(b+c), \quad \frac{ab}{c} = \frac{b}{ac} = a/(b+c).$$

بنی از یک روش مشابه برای تبدیل کردن عدد اعشاری به عدد کسری استفاده می‌کرد؛ به صورت زیر:

$$X = \circ/(a+b) = \frac{a}{b} \text{ یا } \frac{b}{a}.$$

{جزئیات روش کار بنی در تبدیل کردن عدد اعشاری به عدد کسری} در ادامه آمده است:

م: چگونه $\frac{5}{5}$ رو به صورت یک کسر معمولی می‌نویسی؟
د: $\frac{5}{5}$... این عدد شبیه این است... $\frac{3}{3}$ یا $\frac{2}{2}$ یا هر چیز دیگه‌ای که پاسخش بشه ۵ {جمع صورت و مخرج برابر ۵ بشود}، چون اونا رو جمع می‌کنین.

از این مثال‌ها متوجه شدم که برای بنی یک عدد اعشاری به وسیله نمادهای متناسب با یکدیگر - دو یا تعداد بیشتری عدد و یک ممیز - در الگویی به شکل a/bc تشکیل می‌شود ... (که a, b, c عدد هستند). تبدیل یک کسر به یک عدد اعشاری، یک پاسخ منحصر به فرد دارد یعنی $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$ ؛ اما تبدیل یک عدد اعشاری یعنی $\frac{5}{5}$ به یک کسر، منجر به هر پاسخی از مجموعه جفت اعدادی که مجموع آن‌ها ۵ است، خواهد شد. مجموعه جواب برای $\frac{5}{5}$ عبارت است از $\{\frac{4}{4}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots\}$.

۳. جمع و ضرب اعداد اعشاری

در عمل با اعداد اعشاری، بنی ابتدا با اعداد، به صورت عدد صحیح کار می‌کرد و بعد، در مورد قرار دادن ممیز در حاصل جمع اعداد، از روی مکان‌های ممیز در مسئله تصمیم می‌گرفت. روش او برای جمع زدن، در زیر نشان داده شده است:

م: مثلاً اگه $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$ را جمع کنی، چه جوابی به دست می‌آری؟

د: جواب می‌شه ... اوه هفت ... $[07]$. . . $\frac{7}{5}$

م: چطوری برای جای ممیز، تصمیم گرفتی؟

د: چون دو تا ممیز وجود دارد، در مقابل ۴ و در مقابل ۳. پس شما باید دو تا عدد بعد از ممیز داشته باشی، چون ... شما می‌دانید که ... دو تا عدد اعشاری داریم. اکنون اگر من $0/44$ و $0/44$ داشته باشم [یعنی $0/44 + 0/44$]، باید چهار رقم بعد از ممیز داشته باشم [یعنی $0/0088$]

{ به همین ترتیب، } بنی از یک روش متناظر برای ضرب اعداد اعشاری استفاده می‌کرد.

م: در مورد $0/5 \times 0/7$ چه طور؟

د: می‌شه $0/35$

م: در مورد جای ممیز، چطور تصمیم گرفتی؟

د: چون دو تا ممیز داریم، یکی در هر دو عدد ... در جلوی هر یک از اعداد؛ بنابراین شما باید تعداد اعداد {پس از ممیز} را جمع کنید و {داریم} ... ۱ و ۱ برابر با ۲ می‌شود. بنابراین باید دو عدد بعد از ممیز وجود داشته باشد.

این روش منجر به پاسخ‌هایی از قبیل زیر شد:

$$7/48 - 7 = 7/41, \quad 4 + 1/6 = 2/0, \quad 0/4 \times 8 = 3/2, \quad 0/2 \times 0/3 \times 0/4 = 0/024.$$

بنی همه این کارها را با اطمینان انجام می‌داد و از خطاهایش آگاه نبود. در حین مصاحبه با بنی در این مرحله، مصاحبه‌گر برای آموزش بنی یا حتی ارائه راهنمایی درباره اینکه کدام یک از پاسخ‌ها درست هستند، تلاشی نکرد. او {بنی} نیز برای هیچ یک، سؤالی نپرسید.

۴. جمع زدن کسرها

بنی قبلاً کار روی کسرهای معادل و جمع کسرهای دارای مخرج یکسان از $\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{11}$ را انجام داده بود. به نظر می‌آمد که بنی، مفهوم نصف و ربع را فهمیده است، یعنی می‌دانست که $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. بنی معتقد بود که برای انواع مختلف کسرهای قواعدی وجود دارد که نمونه زیر نشانگر آن است.

د: در کسرهای ما ۱۰۰ نوع قاعده مختلف داریم. ...

م: آیا می‌تونی ۱۰۰ تا قاعده رو بگی؟

د: بله ... ممکنه، اما نه همه اونا رو.

او قادر بود که قواعد جمع کسرهای را به صورت نسبتاً واضحی، (به این ترتیب که به مخرج کسرهای مربوط می شود) برایم بیان کند. این قواعد به شرح جدول شماره ۱ هستند.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 1$
$\frac{b}{100} + \frac{a}{10} = \frac{a+b}{110}$	$\frac{20}{100} + \frac{6}{10} = \frac{26}{110}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{c} = 1\frac{a}{b}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 1\frac{2}{3}$

جدول شماره ۱: قواعد جمع بنی در کسرهای

بنی برای ساده کردن کسر، از «صفحه های تقسیم» استفاده می کرد ... وقتی که او می خواست به مصاحبه گر نشان دهد که چگونه از آنها استفاده می کند، به نتیجه نادرست زیر رسید:

م: حالا وقتی که $\frac{3}{8}$ رو ساده می کنی، به چی می رسی؟
د: باید بشود $\frac{1}{4}$ ، چون ما به صفحه تقسیم داریم [او به گفتن ادامه داد]. وقتی که کسرهای $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}$ رو با هم جمع می کنی [به جای جواب $\frac{3}{8}$ ، طبق قواعد بنی که در بالا شرح داده شد] جواب $\frac{1}{4}$ می شه.^۱

اما برای بنی، کسرهای اغلب نمادهایی به شکل $\frac{a}{b}$ بودند که مطابق با قاعده های خاص، جمع می شوند. چنین درکی از مفهوم کسرهای و قاعده ها، منجر به خطاهایی از قبیل $\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$ می شود. به علاوه، $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ «مانند $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ است، زیرا $\frac{2}{4}$ معکوس $\frac{1}{4}$ است و حاصل جمع برابر یک می شود و روش مهم نیست. یک همان یک است.»

۵. تسلط و ادراک در آموزش تجویزی فردی

سؤال این است که بنی با چنین درکی از اعداد اعشاری و کسرهای، چگونه پیشرفت زیادی در یادگیری ریاضی از طریق «آموزش تجویزی فردی»، به دست آورده بود؟ طرفداران «آموزش تجویزی فردی» مدعی اند که از جمله ویژگی های منحصر به فرد این نوع تدریس، داشتن اهداف آموزشی و برنامه ارزشیابی منظم و مداوم است. لندوال و کوکس [۲، ص. ۸۶] اعتقاد داشتند که

^۱ بنی عدد $\frac{1}{4}$ را طبق قواعد خودش به صورت $\frac{4}{4}$ می نویسد. $\frac{4}{4}$ می تواند به صورت کسر $\frac{2}{2}$ نیز نوشته شود. از طرف دیگر حاصل جمع $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ با استفاده از صفحه تقسیم برابر $\frac{2}{4}$ می شود. اکنون $\frac{2}{4}$ و $\frac{3}{4}$ با استفاده از قواعد جمع بنی که در جدول شماره ۱ آمده است، برابر $\frac{5}{4}$ می شود و دوباره بر اساس صفحه تقسیم این عدد همان $\frac{1}{4}$ است.

«یک فرض اساسی در برنامه آموزش تجویزی فردی این است که اگر تدریس توسط دنباله‌ای از اهداف سلسله‌مراتبی انجام شود به‌طوری‌که آنچه یک دانش‌آموز در هر درس مطالعه می‌کند، بر پایه توانایی‌های پیشینی باشد که در درس‌های قبلی بر آن‌ها تسلط یافته، می‌تواند به‌صورت مؤثری در یادگیری انفرادی پیشرفت کند.»

گزارش دیگری درباره «آموزش تجویزی فردی» که به وسیله اتحادیه تحقیق برای مدارس بهتر^۱ و مرکز توسعه و تحقیق یادگیری [تاریخ ندارد] انجام شد، نشان داده است که در این برنامه هر هدفی باید به‌طور دقیق معلوم کند که یک دانش‌آموز، چه کاری باید انجام دهد تا تسلطش را بر محتوا و مهارت‌های در نظر گرفته شده برای تحقق هر هدف، نشان دهد. این محتوا و مهارت‌ها، خصوصاً باید به گونه‌ای باشند که دانش‌آموزان متوسط هم بتوانند بر آن‌ها تسلط یابند. . . . از این گذشته، اعتبار آزمون‌های مبتنی بر محتوا که در «آموزش تجویزی فردی» از آن‌ها استفاده می‌شود، به تناظر جمله‌های آزمون و هدف‌های رفتاری، وابسته است. قبل از این هم لیندوال و کوکس [۲، ص. ۱۸۹] در طرفداری از برنامه‌های ارزشیابی «آموزش تجویزی فردی» گفته بودند که «آموزش تجویزی فردی» یک فناوری مؤثر از دستورالعمل‌هاست که خیلی زیاد، بر اندازه‌گیری اثربخش از شایستگی دانش‌آموز نسبت به موضوعات درسی در ابتدا، ادامه و پایان فرآیند آموزش، تکیه دارد. در این برنامه، از طریق ارزیابی تشخیصی یا پیش‌آزمون، نقطه شروع مشخص می‌شود. سپس با آزمون‌های مداوم در حین تدریس {و در پایان هر بخش از تدریس} که عملاً، جانشینی برای برنامه آموزشی هستند و بالاخره پس‌آزمون‌ها به منظور اندازه‌گیری میزان یادگیری جمعی، انجام می‌شوند. بعد از آن، لیندوال و کوکس [۲، ص. ۲۱] مجدداً تأکید کردند که «در برنامه «آموزش تجویزی فردی»، آزمون‌ها، دستورالعمل‌های اساسی برای بررسی پیشرفت دانش‌آموز و تشخیص نیازهای دقیق او هستند. . . و قادرند که وی را تا سطحی از مهارت ۸۰ تا ۸۵ درصدی لازم برسانند». یعنی این برنامه، قادر است هر دانش‌آموز را به «پیشرفت خوبی» نسبت به آنچه که هدف آن بوده، برساند که میزان این «خوبی»، به‌وسیله نمره ارزیابی‌ها و درصد گفته شده، معلوم می‌شود. با این معیار برای «خوبی»، بنی جزو تعداد اندک دانش‌آموزان کلاسی بود که طبق این برنامه، به‌صورت فردی کار می‌کردند و نمره ۸۰ درصد یا بیشتر را کسب می‌کردند. سرعت بنی در انجام دادن تمرین‌ها خیلی بالا بود، اما در کسب نمره ۸۰ درصد یا بیشتر به وسیله قواعد «آموزش تجویزی فردی» که شرط رفتن به مرحله بالاتر یادگیری بود، شکست خورد. بدین سبب، تلاش کرد تا الگوی پاسخ‌های درست را بفهمد و سریع، روشی

^۱Research for Better School Inc.

برای پاسخ‌هایش ابداع کرد که با توجه به کلید سؤال، توانست موفقیت بیشتری به‌دست آورد که بعداً با جزئیات بیشتری این روش را ارزیابی خواهیم کرد.

مورد بِنی نشان داد که تنها تسلط بر محتوا و مهارت، باعث ایجاد درک و فهم نمی‌شود. این یافته نشان داد که تأکید صرف بر اهداف آموزشی و روش‌های ارزشیابی ممکن است به تجربه‌های یادگیری مناسب برای دانش‌آموزان منجر نشود. این استدلال که شاید بِنی، مفاهیم ریاضی قبلی خود را فراموش کرده و به تمرین‌های جدید تنها با حدس زدن پاسخ می‌دهد، قابل دفاع نیست. بر عکس، بِنی روش‌های منسجم و سازگاری برای انجام عملیات متفاوت ریاضی ابداع نمود که قادر بود با رضایت، آن‌ها را برای خودش توضیح دهد. {نکته جالب در مورد بِنی این بود که} او، روش ابداعی پاسخ دادن به سؤال‌ها را تحت فشار، تغییر نمی‌داد.

۶. نقش ناسازگار معلم در آموزش تجویزی فردی

ممکن است شخصی چنین بحث کند که اثربخشی^۱ «آموزش تجویزی فردی» به نقشی که معلم در آن ایفا می‌کند بستگی دارد. چون برنامه «آموزش تجویزی فردی» مطالبی را برای آموزش انفرادی فراهم می‌کرد، و ابزار کمک آموزشی نیز برای معلم به منظور بررسی کارهای دانش‌آموزان و ثبت نتایج آزمون‌ها، فراهم بود، {بنابراین} معلم وقت آزاد قابل توجهی برای کمک به افراد در اختیار داشت. لیندوال و کوکس [۲، ص. ۲۵] مشاهده کردند که

«یک ویژگی منحصر به فرد این برنامه این است که به‌طور روزانه و مداوم و به‌کمک معلم، اطلاعات زیادی راجع به عادت‌های مطالعاتی، روش‌های یادگیری و ویژگی‌های شخصی دانش‌آموزان به دست می‌آورد که برای ارائه قواعد و تصمیم‌گیری در مورد تکنیک‌های آموزشی برای کودکان خاص، به‌کار گرفته می‌شوند.»

از طرفی، «آموزش تجویزی فردی» نیازمند تکرار گفت‌وگوهای شخصی بین معلم و دانش‌آموز بود، در حالی که هدف اصلی این برنامه، مستقل کردن دانش‌آموز، هدایت وی برای انتخاب مسیر یادگیری خویش و خود-خوانی یا مطالعه توسط خود است. یعنی «مواد آموزشی که توسط دانش‌آموزان و در سطح وسیع برای مطالعه مستقل فردی مورد استفاده واقع می‌شوند، باید به حداقل کمک مستقیم معلم به دانش‌آموزان، نیاز داشته باشد.» [۲، ص. ۴۹]

^۱Effectiveness

این نقش‌های متناقض و ناسازگاری که برای معلم و دانش‌آموز در این برنامه پیش‌بینی شده بود {مانند گفتگو و تأکید بر استقلال در مطالعه درس}، در مواردی ممکن است قابل‌رفع باشد. برای مثال، بنی از محتوا و مهارت‌های «آموزش تجویزی فردی» که از پایه دوم یاد گرفته بود، استفاده کرد و چون با طرز کار این برنامه آشنا بود، به نظر می‌رسید که توانسته است در پایه سوم، مسئولیت آموزش خود را بپذیرد. او به‌طور مستقل در کلاس درس کار می‌کرد و تنها مواقعی که با معلمش صحبت می‌کرد، زمان گرفتن آزمون، تحویل تکلیف‌های جدید یا وقتی بود که به کمک احتیاج داشت. بنی فقط با معلمش صحبت می‌کرد و در مورد کار درسی، با هم‌کلاسی‌هایش بحث نمی‌کرد. در حقیقت، دانش‌آموزان کلاس، امکان گفت‌وگو با هم را نداشتند، زیرا مهارتی که هر کدام روی آن کار می‌کردند، با دیگری فرق داشت. بنابراین آموزش انفرادی برای بنی، به معنای خود-خوانی یا آموزش مستقل در محدوده مشخص شده ریاضی در برنامه «آموزش تجویزی فردی» بود، و بنی، هیچ‌وقت دلیلی برای شرکت در یک بحث با معلم یا سایر هم‌کلاسی‌هایش در مورد آنچه که یاد گرفته بود و در مورد دیدگاهش نسبت به ریاضی، نداشت. با این حال، بنی در مورد ریاضی، قواعد ریاضی و پاسخ‌های مسئله‌ها؛ دیدگاه خودش را داشت.

۷. دیدگاه بنی نسبت به ماهیت محدود پاسخ‌ها در برنامه آموزش تجویزی فردی

وقتی که بنی برای آزمون‌ها آماده می‌شد، تصمیم گرفت سرعت پیشرفت‌ش را از طریق مطالبی که معلم برایش تعیین کرده بود، مشخص کند. با این کار، او دریافت که پیشرفت‌ش به میزان تسلط وی بر مطالب بستگی دارد. او باید امتیاز ۸۰ درصد یا بیشتر نمره را می‌گرفت تا بتواند به مرتبه بعدی مهارت‌آموزی برسد. اما با توجه به این که کلید تصحیح در این برنامه، ارائه تنها یک پاسخ برای هر مسئله بود، معنایش این بود که حداقل ۸۰ درصد پاسخ‌های بنی باید مطابق با آن‌هایی باشد که در کلید پاسخ آمده‌اند. ولی بنی خودش می‌دانست که یک پاسخ، ممکن است به روش‌های مختلف بیان شود که در زیر، به یک نمونه اشاره می‌شود:

م: آیا می‌تونی برام مثالی بزنی {شامل دو کسر} که من فکر کنم آنها متفاوت هستند ولی پاسخ‌هایشان واقعاً مثل هم باشن؟

د: بله! مثلاً $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ ، شما چه فکری می‌کنین؟ اولین چیزی که فکر می‌کنین، چیه؟

م: ۱

د: خوب! اگر من بنویسم $\frac{2}{4}$ ، به نظر شما با چه چیزی برابره؟

م: $\frac{1}{4}$

د: خوب حالا مثلاً اینجا برام [یعنی $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$] به نظر می‌رسد که $\frac{4}{3}$ است و $\frac{2}{3}$ برام فقط مثل نوشتن دوتا یک چهارم است ... در مورد پول، {می‌شود} ۵۰ سنت، ... و غیره.

م: پاسخ تو، با اونچه که من گفتم چه فرقی دارد؟

د: هیچی! اونا برابر، ولی پاسخ‌هاشون متفاوتن. $\frac{4}{3}$ همان یک است و $\frac{2}{3}$ می‌شه نیم.

یکی از نکات مهم {کاربردی} بحث با بنی این بود که بعضی از پاسخ‌هایی که او می‌دانست درست هستند، غلط محسوب می‌شدند چون این جواب‌ها با آنچه که در کلید پاسخ‌ها آمده بود، متفاوت بودند. نمونه زیر نشان می‌دهد که اگر بنی پاسخ مسئله‌ای مانند ۲ بر روی ۴ را به صورت $\frac{2}{4}$ می‌نوشت؛ چه اتفاقی می‌افتاد؟

د: {اگر من این را به عنوان جواب بنویسم} آن‌گاه پاسخ من غلط خواهد بود چون آنها [کامپیوتر و معلم] انتظار دارند که من $\frac{1}{2}$ را بنویسم. ولی راه منم یک راه دیگه‌س. راه‌های دیگه‌ای هم هستن. تازه برای من $\frac{2}{4}$ ، همون $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ هست. اما اگه این رو هم می‌نوشتیم، باز نمره نمی‌گرفتم. ولی به نظر من، همه این پاسخ‌ها درستن!

م: تو چرا اون‌ها رو نگفتی؟

د: چون فقط جواب‌هایی که توی کلید بودند، قبول می‌شد ... هر چی کلید بگه. من توجه نمی‌کنم که کلید چی می‌گه؛ دلیل اینکه امروزه بچه‌ها باید در پایان کار آزمون بدهند این است که مطمئن بشن که جواب‌ها همانند کلید هستن. اینکه امروزه، ما بچه‌ها جواب کسرها را اشتباه به دست می‌آوریم همینه ...

در نتیجه، بنی از این استدلال درست، یک تعمیم نادرست در مورد پاسخ‌ها ارائه کرد. برای مثال، او دو مسئله زیر را چنین حل کرد:

$$2 + \frac{0}{8} = 1\frac{0}{8}, 2 + \frac{1}{10} = 2\frac{1}{10}.$$

بخشی از مصاحبه، توضیحات بنی را در مورد دلیلش برای عوض کردن پاسخ‌ها نشان می‌دهد:

د: ... صبر کن. من بعضی چیزها رو به شما نشان می‌دم. این یه کلید. اگه من این رو داشته باشم، [$2 + \frac{0}{8}$] ... درواقع اگر من پاسخ رو $2\frac{1}{10}$ بنویسم، نمره نمی‌گیرم. حالا اگه $2 + \frac{1}{10}$ رو بدن و من بنویسم $\frac{0}{1}$ ، بازم از نظر کلید، جوابم غلط و نمره نمی‌گیرم. ولی واقعاً اون دوتا برابر! مهم نیست که کلید چی می‌گه!

این دیدگاه در مورد خطاها، باعث شد که بنی مرتکب خطاهایی مانند زیر شود:

م: ببین، اگر $3 + 2$ رو جمع کنی، می‌شه ۵ ...

د: [وقفه] $۲ + ۳$ می‌شه ۵. حالا اگه من $۰/۳ + ۲$ داشته باشم، به من عدد اعشاری $۰/۵$ رو می‌ده. ولی اگه با استفاده از شکل [مثل مدل‌های فیزیکی] اونو انجام بدم، می‌شه $۲/۳$. اگه به شکل کسر هم بنویسم، [مثل $۲ + \frac{۳}{۱۰}$] پاسخ می‌شه $\frac{۲۳}{۱۰}$.

در این مطالعه، یکی از هدف‌ها بررسی محیط یادگیری ایجاد شده توسط برنامه «آموزش تجویزی فردی» بود که باعث پرورش چنین رفتارهای یادگیری مانند بنی می‌شود. اولاً چون بخش عمده‌ای از مطالب «آموزش تجویزی فردی»، به صورت برنامه‌ریزی شده‌ای ارائه می‌شود، سؤالات اغلب به صورت پرکردن جای خالی یا انتخاب یک گزینه درست هستند. در واقع، این روش آموزشی، بیش از درگیر کردن دانش‌آموزان با فرایندهای ریاضی، بر پاسخ‌ها تأکید دارد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، برنامه «آموزش تجویزی فردی»، به نتایج ارزشیابی از پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان، اعتماد زیادی دارد و هدفش، آگاهی از نتیجه پایانی است. بنی هم از این هدف برنامه آگاه بود و می‌دانست که برای بررسی درستی پاسخ‌های او، از کلید استفاده می‌شود. در نتیجه، این کلید بود که سرعت پیشرفت بنی را تعیین می‌کرد؛ کلیدی که تنها یک پاسخ را به عنوان «درست» می‌پذیرفت، در حالی که بنی باور داشت که پاسخ یک سؤال می‌تواند به روش‌های متفاوت بیان شود. این باور به بنی اجازه می‌داد که فکر کند همه پاسخ‌ها درست هستند و می‌گفت که «مهم نیست که کلید، کدام پاسخ را درست می‌داند.»

دوم اینکه شکل برنامه‌ریزی شده «آموزش تجویزی فردی»، بنی را وادار می‌کرد که نقش منفعلی در پاسخ دادن به هر سؤال و کسب امتیاز «درست»، داشته باشد. نمونه زیر، مؤید این برداشت است:

م: آن {پیدا کردن پاسخ‌ها} به نظر می‌رسه که شبیه یک بازی باشه.

د: [همراه با احساس] بله! اونم یه بازی بیهوده {آب در هاون کوبیدن}!

م: پس تو پاسخی می‌دی که معلم انتظار داره؟

د: بله، بله.

م: کدام پاسخ رو دوست داری که بنویسی؟

د: [فریاد زد] همه {اونها را}! تا اونجایی می‌دونم اونها می‌توانند جواب درست باشند. شما که

دیدید! من عادت دارم جواب‌های مختلف خودمو بررسی کنم؛ و عادت دارم از کلید استفاده

کنم. بنابراین فقط $\frac{۱}{۲}$ رو می‌نویسم، چون نمی‌خوام از نظر کلید، پاسخم درست نباشه و امتیازم رو از دست بدم.

م: اوم ...

د: چون اگه پاسخ را $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ بذارم، آنها {کامپیوتر و معلم} به من امتیاز نمی‌دن! ولی می‌دانم که درسته. شما هم با من در این مورد موافقید. درسته. اگر من بنویسم $\frac{2}{4}$ شما با من موافقید. اگر من بنویسم $\frac{1}{4}$ باز هم شما با من موافقید. همشون درستن!

برای بنی، برنامه «آموزش تجویزی فردی» باعث شده بود که یادگیری ریاضی تبدیل به انجام یک سری از قواعد بیهوده و بی‌دلیل برای رسیدن به پاسخ‌های خاص شود. یعنی برای بنی، ریاضی موضوعی عقلانی و استدلالی نبود، زیرا او می‌توانست تنها از طریق استفاده از فرآیندی مستقل {قواعدی خاص از نظر برنامه‌ای که توسط کلید تعیین می‌شد}، پاسخ‌هایش را بررسی کند.

می‌توان بحث نمود که مشکل بنی با پاسخ‌ها، بیش از آن‌که مربوط به ضعف «آموزش تجویزی فردی» باشد، ناشی از روش نمره‌گذاری این برنامه آموزشی بود. این در حالی است که در این نوع تدریس و نقشی که برای معلم در آن دیده شده است، جایی برای چنین بحث‌هایی توسط وی، وجود ندارد. اول اینکه وظیفه ابزار کمک آموزشی^۱ این بود که درستی یا نادرستی پاسخ‌های بنی را بر اساس پاسخ‌هایی که در کلید آمده بود، به سرعت بررسی کند. دوم این که نتیجه کار بنی، مستقیماً از کامپیوتر، به معلمش داده نمی‌شد، بلکه به خود بنی داده می‌شد. بنابراین معلم تنها می‌توانست از مسائل او آگاه شود البته اگر که بنی آن‌ها را برای بحث کردن با او {معلمش} انتخاب می‌کرد.

بنی بعضی از انتقاداتش را در مورد معلم و کامپیوتر وقتی که او می‌گوید: «آن‌ها باید به وسیله [مطابق] کلید کار کنند ... آنچه کلید بگوید.» بیان می‌کند. او این موضوع را به روشنی در نمونه زیر توضیح داده است:

د: ... اونا به اون پاسخ نمره غلط می‌دن، چون که فقط با کلید کار می‌کنن. اونا به این که پاسخ‌های دیگه هم درسته یا نه کار ندارند. اونا فقط هر چی که کلید گفته درسته قبول می‌کنند. مثلاً اگه بنویسم $\frac{2}{4}$ ؛ اونا می‌خوان بدانند که یعنی چی؟ منم یک عدد صحیح نوشتم، و کلید هم می‌گوید {جواب} یک عدد صحیح است، پاسخ من درست خواهد بود؛ مهم نیست [اگر] آن اشتباه باشد. {منظور بنی این است که حتی اگر از لحاظ منطقی آن پاسخ اشتباه باشد، اما چون کلید تصحیح سؤال می‌گوید این جواب درست است، پس درست خواهد بود.}

این انتقادی قوی از طرف یک کودک پایه ششم بود. بعید است که بنی این نگرش را به‌عنوان دلیلی برای اشتباهش در به‌دست آوردن پاسخ‌های درست، بپذیرد. او از پاسخ‌های اشتباهش آگاه نبود و نسبت به بیشتر همکلاسی‌هایش، پیشرفت بیشتری از طریق برنامه‌های «آموزش تجویزی فردی» به دست آورده

^۱Aid

بود. ولی با توجه به این که تنها رابط بین بنی و معلمش این پاسخها بودند، سؤالهایی در مورد نقش معلم در کلاس درس و رابطه معلم با بنی، در این برنامه، مطرح شد. برای مثال، این سؤال ایجاد شد که تصویری که بنی نسبت به معلم خود داشت، یک دوست و راهنمای مشوق بود که پیشرفتش برای او مهم بود و در این راه کمکش می‌کرد؟ یا برعکس، بنی احساس می‌کرد که معلمش قربانی یک کلید است، زیرا «باید مطابق کلید کار کند. . . آنچه کلید بگوید؟» یا آیا بنی حس می‌کرد که معلم به او توجهی نمی‌کند، «چون فقط مطابق با کلید کار می‌کند» به این معنا که «کاری به این که پاسخ درست است یا نه، ندارد؟» این سؤالها باعث شد که ما به نقش متقابلی که از معلم انتظار می‌رود و نقشی که این برنامه برای معلم در نظر گرفته، برگردیم. در ابتدا بیان کردیم که در برنامه «آموزش تجویزی فردی»، استفاده از مطالعه مستقل به عنوان تنها روش یادگیری، فرصت بحث بین بنی و معلم را کاهش داده بود و اکنون، از طریق تأکید بر پاسخها در برنامه ارزشیابی «آموزش تجویزی فردی»، کلید رابطی بود که معلم را فقط با ناکامی‌های بنی آشنا می‌کرد. یعنی در «آموزش تجویزی فردی»، با نقشی که برای معلمان در نظر گرفته بود، آنان از فرصت لازم برای درک تصورات کودکان و دلایل کارهایی که انجام می‌دهند، محروم شده بودند. در حالی که همین مورد خاص نشان داد که معلم بنی، به شرطی می‌توانست او را برای جستجوگری، بحث و گفتگو، و بیان تجربه‌هایش در ریاضی تشویق کند که بتواند رابطه‌ای دوسویه و نزدیک با وی داشته باشد تا قادر شود که باورش را در مورد ایده‌ها، و احساسش در مورد ریاضی را درک کند و بفهمد.

۸. درک بنی از قواعد ریاضی

دیدگاه بنی در مورد پاسخ‌هایش، با فهم او از انجام عملیات در ریاضی پیوند خورده بود و برای او، عملیات ریاضی تنها به عنوان مجموعه‌ای از قواعد، معنا داشتند. برای مثال، بنی به « $2 + 8 = 10$ » نگاه کرده و «ممیز را بعد از یک» گذاشت. از نظر بنی، وجود قواعد در ریاضی ضروری بود و باور داشت که قواعد به او کمک می‌کنند که بالاترین امتیاز را کسب کند. بنی می‌گفت که «باید برای به دست آوردن هر پاسخ درست، یک قاعده داشته باشیم و هر پاسخ درستی که به دست بیاوریم، صد {امتیاز} می‌گیریم». بنی معتقد بود که برای هر نوع مسئله‌ای، قاعده‌ای وجود دارد و توضیح می‌داد که مثلاً «در کسرها، ما صد نوع مختلف، قاعده داریم». او فکر می‌کرد که این قواعد، «توسط یک فرد یا بعضی از افراد باهوش اختراع شده‌اند» و برایش این کار، وظیفه بزرگی بود، چون فکر می‌کرد که اختراع «این قواعد وقت زیادی از افراد گرفته است. . . حدوداً ۵۰ سال»، زیرا تصورش این بود که «برای به دست آوردن قواعد، باید همه مسائل را حل کرد، مثل آن منظور بنی، مسئله $2 + 8 = 10$ است ...».

به هر حال، همان‌طور که دیدیم، بنی این قاعده جداگانه را دریافته بود که پاسخ‌ها می‌توانند به روش‌های متفاوت، بیان شوند، مثل این که « $\frac{1}{p} + \frac{2}{p}$ را می‌توان به صورت $\frac{3}{p}$ یا ۱ نوشت». این نگاه نسبت به «قاعده‌ها»، باعث شده بود که بنی تصور کند که پاسخ‌ها، مثل «جادو» کار می‌کنند، زیرا «فقط ما فکر می‌کنیم متفاوت‌اند، در حالی که یکسان هستند». او برای توضیح دیدگاه خودش، از جمع $2 + \frac{1}{10}$ استفاده کرد:

د: . . . این یک کاغذ جادویی {صفحه کامپیوتر}، می‌دانی! با پاسخ‌هایی که اینجا نوشته شده [در بالای کاغذ]، . . . مخفی {الان این پاسخ روی صفحه نمایش کامپیوتر دیده نمی‌شود}. من جواب $\frac{1}{10}$ را درج کردم. همان‌طور که می‌دانی، درست مثل بالا، مخفی ... تا زمانی که اینجا را به پایین فشار می‌دم [یعنی این دکمه را]، و این نتیجه می‌شود^۱ [در وسط کاغذ] در وسط صفحه نمایش کامپیوتر، یه علامت تساوی، عدد ۲ و $\frac{1}{10}$ یا به جای نماد تساوی، کلمه «یا»، و چیزی شبیه به اون چیزی که در اینجا هست.

بنی همچنین معتقد بود که قواعد ریاضی، جهانی هستند و نمی‌توانند تغییر کنند. توضیح این دیدگاه به روشنی در زیر آمده است:

م: قواعد چی؟ آیا اون‌ها تغییر می‌کنند یا همیشه یکسان باقی می‌مانند؟
د: یکسان باقی می‌مانند.

م: تو فکر می‌کنی که وقتی از یه سطح به سطح دیگه می‌ری، قاعده‌ها تغییر می‌کنند [منظور، مراحل برنامه آموزش تجویزی فردی]؟

د: می‌تونن، اما تغییر نمی‌کنن. در واقع اگه شما قواعد کسرها رو تغییر بدی، نتایج متفاوت خواهند شد.

م: اونوقت، غلط نمی‌شه؟

د: بله. این که ما برای خودمان قاعده بسازیم اشتباه، ولی جواب درست می‌ده. اون برای بقیه درست نمی‌شه، چون که اگه اون قاعده‌ها رو برای اون کسر به کار ببریم و بخواهیم قواعد خودمان را کشف کنیم، پاسخ درست نمی‌گیریم.

دیدگاه بنی در مورد قواعد و پاسخ‌ها آشکار کرد که او، ریاضی را چگونه یاد گرفته است. از نظر وی، ریاضی از قواعد مختلف برای مسائل مختلف تشکیل شده بود و همگی اختراع شده بودند. اما بنی فکر

^۱ اینجا، منظور بنی، صفحه کامپیوتر است که در ابتدا، جواب مخفی است. تا اینکه بنی پاسخ را وارد می‌کند و دکمه مربوطه را فشار می‌دهد.

می‌کرد که آن قواعد، مانند جادو عمل می‌کنند. به گفته او، گاهی «فکر می‌کنیم آن‌ها مختلف هستند»، چون پاسخ‌های افراد از به کار بردن این قواعد، می‌تواند به روش‌های مختلف بیان شود. در صورتی که «آن‌ها یکسانند». یعنی از نظر بنی، ریاضی یک موضوع عقلانی و منطقی نیست که شخص دلیل بیاورد، تحلیل کند، روابط را جستجو کند، تعمیم دهد، و پاسخ‌ها را تصدیق و تأیید کند. برعکس، تصور بنی از یادگیری ریاضی، پیدا کردن قواعد جهت استفاده از آن‌ها برای حل مسئله بود. به باور او، برای هر نوع مسئله تنها یک قاعده وجود داشت و بدین سبب، بنی راه‌حل‌های مختلفی را برای یک مسئله در نظر نمی‌گرفت. چون قواعدی که در حال حاضر اختراع شده‌اند، یک قاعده را که غلط بود، تغییر می‌دهند چراکه پاسخ‌ها «به صورت‌های مختلف به دست می‌آمدند»^۱.

برای بنی، تأکید بر قواعد در مورد اعداد اعشاری و کسرها، مشهود بود. بنی باور داشت که اعداد اعشاری و کسرها مطابق با قواعد خاصی ساخته می‌شوند. برای مثال، {عدد اعشاری از دیدگاه بنی به صورت a/bc {است} و {عدد کسری از دیدگاه بنی به صورت $\frac{a}{b}$ است که در آن $0 < a < 10$ }. برای تبدیل اعداد اعشاری و کسری به یکدیگر، باید از قواعد مشخصی تبعیت نمود؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \div (a + b)$ یا $\frac{b}{a} = \frac{b}{a} \div (a + b)$ ، در صورتی که $a + b \geq 10$ ، در غیر این صورت $\frac{b}{a} = \frac{b}{a} \div (a + b)$ به یادداشت انتهای مقاله مراجعه شود}. قواعدی برای انجام عملیات وجود دارد، مثل این که $2 + 3 = 3 + 2$ «زیرا آن‌ها معکوس هم هستند» یا این که «آن‌ها جابه‌جا شده‌اند»، بنابراین « $\frac{1}{2}$ معکوس $\frac{2}{1}$ است». او فکر می‌کرد که برای اعداد اعشاری هم قواعدی وجود دارد که همه عملیات طبق آن‌ها صورت می‌گیرد. مثلاً چون $a + \frac{b}{10} = \frac{a + b}{10}$ ، پس $7 + \frac{48}{10} = 7 + \frac{48}{10} = 7 + \frac{48}{10}$. قاعده ضرب از نظر وی، $a \times \frac{b}{10} = \frac{a \times b}{10}$ بود و با آن، مثلاً $3 \times \frac{8}{10} = \frac{24}{10}$. بنی برای جمع کردن کسرها هم قواعد را ابداع کرده و بر اساس آن‌ها عمل می‌کرد (مطابق جدول ۱).

این قواعد و پاسخ‌هایی که بنی به دست می‌آورد، برایش مثل جادو کار می‌کردند. برای مثال، بنی برای جمع هر دو کسر، از این قاعده کمک می‌گرفت، مثل $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ که برایش $\frac{3}{4}$ یا ۱ می‌شد،

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{در حالی که} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}$$

^۱ در اینجا منظور این است اگر بنی به قاعده جدیدی در ریاضی می‌رسید، آن را جایگزین قواعد پیشین می‌کرد.

و $\frac{3}{5} + 2$ که در حالت اعشاری برابر با $\frac{13}{5}$ است و در تصویر یعنی با استفاده از مدل‌های فیزیکی، $\frac{2}{3}$ {می‌شود} و در حالت کسری $\frac{2}{3}$ خواهد بود.

وقتی که در مورد قواعد فکر می‌کنیم، به نظر می‌رسد که بنی از روابط ریاضی و اصولی که زمینه‌ساز آن قواعد بودند، آگاهی نداشت و اغلب، متکی بر الگوها بود. به این دلیل، گاهی بدون آن که دلیلش را بدانند، از قواعدی که ساخته بود، راضی نبود و آن را ابراز می‌کرد. نمونه زیر، یکی از آن موارد است:

م: وقتی می‌گی $\frac{3}{5} + 2 = 2$ ؛ دو [۲] یه عدد صحیح. تو داری اونو با یه عدد اعشاری جمع می‌کنی. چه اتفاقی می‌افته؟

د: یه عدد اعشاری می‌شه.

م: منظورت اینه که فقط این جوری می‌شه؟

د: نه! اوم ... واقعاً دوس دارم بدونم چه اتفاقی افتاده. می‌دانید من امروز می‌خواهم چه کار کنم؟ می‌رم پایین به کتابخانه می‌خوام راجع به کسرها بیشتر بدانم و ببینم که چه کسی این قاعده‌ها رو درست کرده و آن‌ها چطوری حفظ شدن.

مثال‌های بالا نشان دادند که اگرچه بنی، فرق بین کسر اعشاری و کسر متعارفی را نفهمیده بود، اما قواعدی داشت که با آن‌ها، عملیات را انجام می‌داد، البته بیشتر پاسخ‌هایش، نادرست بودند. ولی بنی معتقد بود که پاسخ‌هایش درست هستند و برای هر کلید، تنها یک پاسخ وجود دارد. بدین دلیل، بنی وظیفه اصلی خودش را این می‌دانست که پاسخ‌هایی را که مطابق با کلید بودند، دنبال کند و برای این کار، پاسخ‌هایش را آنقدر تغییر می‌داد تا با کلید، مطابقت پیدا کند. اما سؤال این است که بنی چگونه در پیدا کردن پاسخ‌های درست موفق می‌شد؟

۹. دیدگاه بنی در مورد روش آموزشی «آموزش تجویزی فردی»

در «آموزش تجویزی فردی» ریاضی، فرد از طریق انجام فعالیت‌های قلم و کاغذی^۱، با مفاهیم و مهارت‌هایی که آموخته می‌شوند؛ درگیر می‌شود و قواعد، مستقیماً مورد بحث قرار نمی‌گیرند، اما گاهی از آن‌ها به عنوان اصول کار کردن استفاده می‌شود. برای مثال، قواعد ضرب اعداد اعشاری این است که $0.1 \times 0.1 = 0.01$ ؛ اما یادگیری این قاعده از طریق تمرین‌های برنامه‌ریزی شده و تکرار زیاد، صورت می‌گیرد. در این نوع تدریس، سؤال‌ها اغلب به شکلی مطرح می‌شوند که پاسخ‌های مختصر داشته باشند. در زیر، نخستین مثال‌ها از سه گروه از تمرین‌های «آموزش تجویزی فردی» نشان داده شده است:

^۱ منظور از اصطلاح «قلم و کاغذی» (Paper & Pencil)، هر نوع فعالیت مکتوب می‌باشد.

۱- جاهای خالی را پر کنید. [اولین مثال الگویی برای ارائه سایر پاسخ ها است.]

$$3/111 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$7/652 = 7 + \frac{6}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$95/015 = 95 + \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{5}{1000}$$

.....

.....

۲- هر کسر مخلوط را به صورت عدد اعشاری، بنویسید.

$$6\frac{24}{100} = \frac{624}{100}$$

$$9\frac{35}{100} = \frac{9035}{100}$$

$$27\frac{15}{1000} = \frac{2715}{1000}$$

.....

.....

۳- کدام کسر مقدارش با رقمی که در جعبه کوچک به صورت زیر خطدار مشخص شده، برابر است؟ دور آن خط بکشید.

0.542

$$\frac{4}{10}$$

$$\frac{4}{100}$$

$$\frac{4}{1000}$$

0.320

$$\frac{2}{10}$$

$$\frac{2}{100}$$

$$\frac{2}{1000}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بنی برای حل هر مجموعه از تمرین‌ها، ابتدا سؤال‌هایی را که بلد نبود علامت‌گذاری می‌کرد و بعد، به سرعت به سراغ سایر مسئله‌ها می‌رفت و آن‌ها را حل می‌کرد. سؤال‌هایی که بنی می‌پرسید، به روابط ریاضی مربوط نبود و نشان می‌داد که او دائم به دنبال یک الگو یا قاعده است، زیرا استفاده از «آموزش تجویزی فردی» را از پایه دوم شروع کرده بود. یعنی به نظر می‌رسید که بنی، روش کار کردنش را با روش آموزشی «آموزش تجویزی فردی» سازگار کرده بود و چگونگی استفاده بنی از قواعد، پاسخ‌ها و روابط ریاضی، مؤید این نظر است.

در حقیقت، روش آموزشی «آموزش تجویزی فردی»، دیدگاه بنی را در مورد ریاضی، توضیح می‌دهد. زیرا ماهیت این برنامه به گونه‌ای بود که بنی نمی‌توانست مطالب را به روش خودش درونی کند یا آنها

دوباره سازماندهی نماید و روابط و مفاهیم ریاضی را با کلمات خود بگوید. طبیعت تکراری تمرین‌ها در «آموزش تجویزی فردی»، بنی را متقاعد کرده که برای حل هر نوع مسئله، یک قاعده وجود دارد و به این دلیل، در ذهنش این نگرش نسبت به ریاضی ایجاد شده بود که ریاضی، شامل تعداد بسیاری قاعده جزمی، برای انواع مختلفی از مسائل است و در این مورد، انعطافی ندارد.

بنی ریاضی را از طریق یک مطالعه مستقل در یک روش آموزشی برنامه‌ریزی شده یاد می‌گیرد. این روش هیچ جایی برای او به‌منظور تمرین شخصی‌اش باقی نمی‌گذاشت. در «آموزش تجویزی فردی» بنی تنها می‌توانست با اجرای تجویزهایی که معلمش ارائه می‌کرد، پیشرفت کند، زیرا «رهنمودهای آموزشی «آموزش تجویزی فردی» مبتنی بر استفاده درست از نتایج آزمون‌ها و دستورات مکتوب، تدوین شده‌اند» [۲]. بنابراین آنچه که بنی یاد می‌گرفت و چگونگی آن یادگیری خارج از کنترلش بود. ویژگی یادگیری در «آموزش تجویزی فردی» این است که به هر فرد اجازه می‌دهد تا ریاضی تجویز شده توسط آن برنامه را با سرعت خودش یاد بگیرد. غافل از این که وقتی هدف‌های یادگیری در ریاضی به‌صورت هدف‌های رفتاری دقیق تعریف می‌شوند، هدف‌های آموزشی مهمی از قبیل اینکه چگونه ریاضی‌وار فکر کنیم، زیبایی و قدرت آن را درک نماییم، درک عمیق و مفهومی ریاضی را توسعه دهیم، فراموش می‌شوند.

شاید کسی بحث کند که هدف «آموزش تجویزی فردی» فراهم کردن امکان آموزش مستمر برای یادگیری ریاضی است و اهدافی که به طرز تلقی دانش‌آموزان نسبت به ریاضی مربوط است، وظیفه معلم است. اما معلم چگونه می‌تواند به دانش‌آموز کمک کند که در چنین برنامه سازمان‌یافته و مستحکمی، نگرش مستدل و معقولی نسبت به ریاضی پیدا کند؟ به‌خصوص همان طور که قبلاً هم توضیح داده شد، به‌واسطه نقشی که برای معلم در «آموزش تجویزی فردی» پیش‌بینی شده، وی از درک و فهم دیدگاه دانش‌آموزان درباره ریاضی، محروم است.

در صورتی که در تدریس ریاضی لازم است دانش‌آموز بتواند آزادانه به روش خودش فکر کند و فرصت کشف الگوها را در روابط عددی داشته باشد. دانش‌آموز باید استدلال کردن، جستجوی روابط و الگوها، تعمیم دادن و بررسی درستی کشف‌های خود را به‌وسیله ابزارهای مستقل، بخشی از یادگیری ریاضی خود بداند. لازم است که دانش‌آموزان درک کنند که در ریاضی، قواعد به خودی خود اهمیتی ندارند و تعمیم‌هایی از مفاهیم و اصول‌اند که از آن‌ها نتیجه می‌شوند. چنین درکی کمک می‌کند تا آنان باور کنند که مسئله‌های ریاضی، تنها یک راه‌حل ندارند و می‌توان از روش‌های مختلف برای حلشان استفاده کرد و همچنان که بعضی از مسائل ممکن است بیش از یک پاسخ داشته باشند، مسائلی هم هستند که اصلاً پاسخی ندارند. چنین درکی از ریاضی، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا ایده‌هایشان را با سایر دانش‌آموزان

به اشتراك بگذارند، از ریاضی لذت ببرند و قدردان قدرت و زیبایی ریاضی شوند. همزمان، دانش‌آموزان نیاز دارند احساس کنند که از تشویق و حمایت معلمان خود در یادگیری ریاضی و حل کردن مسئله‌ها و پیدا کردن پاسخ، برخوردارند.

۱۰. کار درمانی با بنی

اگر بنی می‌توانست که در مدتی کوتاه نگرش خود را نسبت به ماهیت ریاضی و یادگیری آن تغییر دهد، شاید تجربه‌اش با «آموزش تجویزی فردی» ریاضی خیلی هم مضر نبود، اما واقعیت چیز دیگری بود. در این مطالعه، مصاحبه‌کننده به مدت ۸ هفته و هر هفته در دو بازه زمانی ۴۵ دقیقه‌ای از مدرسه بازدید می‌کرد و بعد از توضیحات مقدماتی، کار درمانی^۱ با بنی را در رابطه با اعداد اعشاری و کسرها شروع می‌کرد. در این جلسات، تأکید مصاحبه‌کننده/ پژوهشگر بر شناخت چگونگی درک و فهم ریاضی توسط بنی بود و طی مصاحبه‌ها، از مجموعه محدودی از وسایل کمک آموزشی مانند دست‌ورزی‌ها که در مدرسه قابل دسترس بود، استفاده می‌کرد. بنی دوست داشت با پژوهشگر همکاری کند و علاقه‌مند و مشتاق به یادگیری بود و همین باعث شد تا در نهایت، آمادگی پیدا کند که بداند چگونه مسئله‌ها را حل می‌کرد و پاسخ‌ها را به دست می‌آورد. پژوهشگر پس از ۵ هفته، مجدداً با وی مصاحبه کرد. نمونه زیر، بخشی از آن مصاحبه است:

بخش ۱:

$$م: \frac{29}{10}$$

$$د: \frac{2}{9}$$

$$م: \text{خیلی خوب! } \frac{8}{100} \text{ چی؟}$$

$$د: \frac{8}{100}$$

$$م: \text{این عالیه! حالا اگه بگم که } \frac{4}{11} \text{ رو به صورت عدد اعشاری بنویس؟}$$

$$د: \text{نمی‌شه! تنها با } 10 \text{ می‌شه کار کنی.}$$

بخش ۲:

$$م: \text{حالا بذاریه جمع را انجام بدهیم. پاسخ } \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \text{ چی می‌شه؟}$$

$$د: \frac{7}{12}$$

م: {خوب} حالا چگونه تصمیم گرفتی که جواب $\frac{7}{10}$ می‌شه؟

د: چون دوتا عدد اعشاری داریم و یک عدد بعد از هر ممیز وجود داره، پس پاسخ هم باید دو تا عدد بعد از ممیز داشته باشه؛ و شما فقط باید اون‌ها رو جمع کنین.

بخش ۳:

م: جواب تو برای $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ {برابر} $\frac{7}{10}$ است، ولی برای $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$ {جواب تو، برابر} $\frac{7}{10}$ است.

د: درسته!

م: آیا فکر می‌کنی این درسته؟

د: چون در اینجا $[\frac{3}{10} + \frac{4}{10}]$ هیچ عدد اعشاری وجود نداره، شما از اعشار استفاده نمی‌کنید. ولی در اینجا $[\frac{3}{10} + \frac{4}{10}]$ شما از اعشاری استفاده می‌کنید؛ و همین {مسئله} باعث تفاوت می‌شه.

بخش ۴:

م: در مورد $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ چی {پاسخت چیه}؟
د: یک عدد کامل.

م: یک عدد کامل. چطوری به این پاسخ رسیدی؟

د: اوووم! ... چون که فقط جای این‌ها {اشاره به صورت و مخرج} [یعنی $\frac{1}{2}$] را عوض می‌کنی.
م: خوب! ۲ تقسیم بر ۱ چه عددیه [به $\frac{1}{2}$ اشاره می‌کند]؟
د: ۲ تقسیم بر ۱؟ ... ۲.

م: وقتی که جای اون‌ها را عوض می‌کنی معکوس می‌کنی، پاسخ چی می‌شه؟
د: $\frac{1}{2}$

بخش ۵:

م: منظورت اینه که می‌شه جای ۲ رو با $\frac{1}{2}$ عوض کنی؟
د: بله.

م: چطوری این کارو می‌کنی؟

د: ... همه کاری که باید انجام بدی فقط اینه که ... ۲ بر روی ۱ رو... ۱ را آوردم بالا؛ حالا می‌شه $\frac{1}{2}$. یا می‌تونی اینطوری انجامش بدی [یعنی $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$] ... {با این روش که} $1 + 2$ می‌شه 3 ؛ $1 + 2$ هم می‌شه 3 ؛ 3 روی 3 ... این می‌شه ۱.

این بخش از مصاحبه نشان می‌دهد که بنی هم‌چنان در کارش، بر قواعد بیش از دلیل آوردن تأکید می‌کرد و این نشان می‌دهد که بنی به کار درمانی بیشتری با تکیه بر روابط بین اعداد و کمیت‌های فیزیکی، نیاز دارد. {از آنجا که} کارهای درمانی به مراتب کارهای نوشتنی مهمی را دربر می‌گیرند، بنابراین به نظر می‌رسد که کار درمانی آینده باید شامل تنوع وسیعی از مطالب غنی مخصوصاً با وسایل کمک آموزشی دست‌ورزی باشد.

قبلاً مشاهده شد که بنی با استفاده از صفحه تقسیم برای ساده کردن کسر^۱، به نتیجه نادرست $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ رسید که بیانگر این است که درمان این نوع {بdfهمی‌ها}، به‌طور خود به خودی انجام نمی‌شود. ولی رویکرد «آموزش تجویزی فردی» به یادگیری ریاضی به گونه‌ای است که به معلم و دانش‌آموز، فرصت استفاده از دست‌ورزی‌ها را نمی‌دهد، زیرا ساختار این نوع برنامه‌ها صلب است و روش ارزشیابی از آموخته‌های دانش‌آموزان نیز قطعی و بدون انعطاف می‌باشد. در صورتی که طی مصاحبه‌ها، معلوم شد که بنی از یادگیری ریاضی به‌کمک دست‌ورزی‌ها و حدس و آزمایش کردن، لذت می‌برد. استفاده از اشیاء ملموس، او را تشویق می‌کرد که در مورد قواعدی که ساخته بود، حدس‌های جدیدی بزند و آن‌ها را اصلاح کند. برای مثال، او کشف کرد که حاصل جمع $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ ، به‌سادگی با قاعده‌ای که برای خودش ابداع کرده بود و آن، جمع کردن صورت‌ها و مخرج‌ها بود، عملی نیست. این موضوع باعث شد که بنی در مورد قواعد خود-ساخته‌اش برای اعداد اعشاری، دچار تناقض ذهنی بشود. برای مثال، او می‌دانست که طول قد خودش $157/5$ سانتی‌متر و طول قد دوستش $145/5$ سانتی‌متر است و مجموع طول قد دو نفرشان، $303/0$ سانتی‌متر می‌شود، در صورتی که با استفاده از قواعد خودش، مجموع این دو طول برابر با $30/30$ سانتی‌متر می‌شد. بنی با فرصتی که برای تجربه کردن به دست آورده بود، ناسازگاری‌های مشابه‌ای را در سایر اندازه‌گیری‌ها یافت و به نظر می‌رسید که مصمم شده است تا برای قواعدش، توضیحات قانع‌کننده‌ای را بیابد. بنی تلاش کرد تا این تفاوت را با استفاده از حدس‌های متعدد در مورد قواعد، پاسخ‌ها، و واحدهای اندازه‌گیری، توضیح دهد و وقتی که موفق نشد، به تدریج متوجه شد که برای یادگیری ریاضی، تنها به‌کار بردن قواعد برای حل مسئله‌ها به منظور به دست آوردن یک پاسخ درست، کافی نیست.

^۱ به‌عنوان مثال، استفاده از استعاره شکل دایره برای بیان اعداد کسری به‌عنوان قسمتی از یک چیز است.

۱۱. خلاصه و نتیجه

برنامه «آموزش تجویزی فردی»، یکی از بهترین مثال‌ها است که تلاش کرده تا یک فناوری آموزشی انفرادی را ارائه دهد و با وجودی که یک تجربه با ارزش در آموزش بود، مطالعه موردی بنی ضعیف‌های اصلی این برنامه را نشان داد.

بنی یک پسر ۱۲ ساله و دانش‌آموز پایه ششم بود که دارای بهره هوشی (IQ) بین ۱۱۰ تا ۱۱۵ بود. بنی برای یادگیری ریاضی، از پایه دوم از برنامه «آموزش تجویزی فردی» استفاده کرده و آماده بود تا با همراهی معلمش، پیشرفت خوبی را در ریاضی کسب کند. اما در جریان این مطالعه، آشکار شد که بنی، بعضی از مراحل کارش را اشتباه متوجه شده بود. او عادت‌های یادگیری و دیدگاه‌هایی در مورد ریاضی کسب کرده بود که مانع پیشرفتش در آینده می‌شدند. اگرچه عامل‌های بسیاری در مشکل بودن ریاضی دخیل هستند، اما مورد بنی نشان داد که لازم است تا تأثیر برنامه «آموزش تجویزی فردی» بر درک ریاضی دانش‌آموزان و پیوند این درک با دانش قبلی آنان، مورد توجه بیشتری قرار گیرد.

بدفهمی‌های بنی نشان داد که ضعف‌های برنامه «آموزش تجویزی فردی» ریشه در دیدگاه رفتاری به ریاضی دارد که تکیه‌اش بر آموزش‌های فردی و روش‌های آموزشی مبتنی بر آن است. تأکید بیش از اندازه «آموزش تجویزی فردی» در مورد بیان اهداف ریاضی به صورت هدف‌های رفتاری دقیق، به ایجاد برنامه‌های ریاضی قطعی و بدون انعطاف از پیش تعیین شده با برنامه‌های ارزشیابی متناظر با آن‌ها منجر شد که تنها به پاسخ درست، صرف‌نظر از اینکه چگونه به دست آمده‌اند، پاداش می‌داد و به این ترتیب، مانع توسعه مطلوب مفاهیم ریاضی در {ذهن} دانش‌آموزان می‌شد.

{در «آموزش تجویزی فردی»} مطالب عمدتاً برنامه‌ریزی شده هستند و شاگردان از طریق مطالعه مستقل و با سرعت خودشان یاد می‌گیرند. به واسطه اعتماد {زیادی که} معلم و دانش‌آموز به شایستگی برنامه «آموزش تجویزی فردی» دارند، {دانش‌آموز مطالب را} از طریق مطالعه بسیار مستقل می‌آموزد. در نتیجه، معلم از آشنایی با نوع درک و فهم دانش‌آموزان محروم می‌شود. صُلب بودن ساختار «آموزش تجویزی فردی» و روش آموزشی برنامه‌ریزی شده آن، باعث دلسردی {معلم}، در استفاده از مطالب و ابزارهای غنی برای تعمیق یادگیری ریاضی دانش‌آموزان می‌شود و به طور طبیعی معلم را به سمت تدریس قاعده‌محور در ریاضی متمایل می‌کند که در آن، قاعده‌هایی که با درک عمیق دانش‌آموزان {از مفاهیم ریاضی} ناسازگار هستند به عنوان جادو و تلاش برای پاسخ «تعقیب غاز وحشی» مورد توجه قرار می‌گیرند.

یادداشت بر {قواعد بنی برای تبدیل اعداد اعشاری و کسری به یکدیگر}: ممکن است کسی وسوسه شود که این نوع از بحث‌ها را به‌عنوان نشانی از مفهوم جابه‌جایی در جبر تلقی کند، اما فرایند مصاحبه‌ها معلوم کرد که درک بنی از مفهوم قواعد، کمتر به آگاهی او از اعمال جبری مرتبط است و بیشتر به آگاهی او از الگوها بر می‌گردد. جالب خواهد بود که این نوع آگاهی-از الگوها- از دیدگاه نظریه پیازه در نظر گرفته شود. برای مثال، ممکن است انجام عملیات معکوس کردن و جابه‌جایی توسط بنی، به طرحواره بازچینی علامت‌ها مربوط باشد. شبیه به مرحله عملیات عینی^۱ که کودک با سه مهره از رنگ‌های مختلف روی یک سیم {مثلاً چرتکه} دست‌ورزی می‌کند [۳]. به عبارت دیگر، این عمل، ممکن است با تنظیم روابط تقارنی در تصاویر هم، دنبال شود [۴]. روش جایگزین اول مستلزم استفاده از عکس معکوس است که با عمل معکوس‌پذیری که یک ساختار جبری است (و روی الگوها عمل می‌کند و نه روی اعداد) هماهنگ است. روش جایگزین دوم - اگر به‌طور کامل در مرحله عملیات عینی توسعه یابد - مستلزم چیزی است که پیازه آن را نوع دوم برگشت‌پذیری^۲ (عمل متقابل تغییر جایگاه، که یک ساختار جبری غیر عددی است) می‌نامد. سپس این مطلب باید ذکر شود که همان ساختارهای شناختی (گروه‌بندی منطقی) که پیازه معتقد بود برای توسعه مفهوم عدد در تفکر بیرون از مدرسه ضروری است؛ ممکن است در مورد بنی به‌صورت کاملاً متفاوتی در مدرسه به کار گرفته شود تا او بتواند الگوهای علامت‌ها روی کاغذ را شبیه‌سازی کند و نمرات بالایی را در آزمون ریاضی کسب کند. آنچه که در مورد بنی و بسیاری از موارد دیگر به‌طور آشکار مورد غفلت قرار گرفته است، هماهنگی واقعی بین دو روش ساختار شناختی استفاده شده در حساب است (ویراستار کتاب مجموعه مقالات شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۴).

تقدیر و تشکر

مترجمان بر خود لازم می‌دانند از زحمات خانم دکتر زهرا گویا برای بازخوانی متن ترجمه و ارائه نظرات اصلاحی که باعث بهبود این ترجمه شده‌اند، تشکر نمایند.

^۱ Concrete Operational Stage ^۲ Reversibility

مراجع

- [1] Glaser, R. (1969) "the Design and Programming of Instruction," in Committee for Economic Development, The Schools and the Challenge of Innovation. McGraw-Hill, New York.
- [2] Lindvall, C. M. and Cox. R. C. (1970) "the IPI Evaluation Program." AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation, No. 5. Rand McNally and Company, Chicago.
- [3] Piaget, J. (1971) The Child's Conception of Movement and Speed. Ballantine Books, New York.
- [4] Piaget, J. and Lnhelder, B. (1969) The Psychology of the Child. Basic Books, New York.

ابوالفضل رفیع‌پور: بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رایانامه: drafiepour@uk.ac.ir

نوشین فرامرزپور: بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

رایانامه: nooshin.faramarzpoor@yahoo.com

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 35, No. 1, Spring & Summer 2016

Editor-in-Chief

Ahmad Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

Managing Editor

Shiva Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

Editorial Board

A. Abdollahi, Shiraz University
abdollahi@shirazu.ac.ir

B. Hashemi, Shiraz University of Technology
hoseynhashemi@gmail.com

E. Momtahan, Yasouj University
momtahan_e@hotmail.com

S. Maghsoudi, Zanzan University
s_maghsodi@znu.ac.ir

E. Pasha, Kharazmi University
pasha@kmu.ac.ir

A. Rafiepour, Shahid Bahonar University of Kerman
drafiepour@gmail.com

A. Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan
safapour@vru.ac.ir

R. Zaare-Nahandi, Institute for Advanced Studies in Basic Science
rashidzn@iasbs.ac.ir

S. Zamani, Sharif University of Technology
zamani@sharif.edu

Editorial Office

F. Samadian, Iranian Mathematical Society
farhang@ims.ir

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir