فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴) صص. ۱ تا ۲۷

مسئله آپولونیوس

منصور معتمدی

چکیده

مسئله آپولونیوس عبارت است از رسم دایره‌ای که بر سه دایره مفروض مماس باشد. هدف این نوشته بررسی تاریخی، معرفی بعضی راه‌حل‌ها و بیان تعمیم و کاربردهای این مسئله کلاسیک است.

۱. مقدمه

در تاریخ ریاضیات یونان باستان، جایگاه اول و دوم به ترتیب به اقلیدس و ارشمیدس نسبت داده می‌شود. مقام سوم از آنِ آپولونیوس پرگایی است. شهرت «هندسه‌دان کبیر»، لقبی که هم روزگاران وی به او نسبت داده‌اند، بیشتر به سبب اثر شگفت انگیز او «مقاطع مخروطی» است. این اثر در هشت مقاله (فصل) در حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد نوشته شده که هفت مقالهٔ اول آن به دست ما رسیده است. در چند مقاله آخر مباحث پیشرفته‌ای مانند کمترین فاصله یک نقطه از یک مقطع مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. از این رو تعجب آور نیست که تنها چهارمقاله از هشت مقالهٔ اولیه به زبان یونانی باقی مانده است، اما آپولونیوس، صاحب آثار دیگری نیز هست که کمتر شناخته شده‌اند.

در عصر رنسانس علاقهٔ جدی به آثار ریاضی‌دانان دوران یونان باستان و از جمله آپولونیوس به وجود آمده بود. از طرفی آثار هندسه‌دان کبیر به زبان‌های یونانی یا لاتینی، در غرب وجود نداشت.

عبارات و کلمات کلیدی. تماس، صفحه انعکاسی، تبدیل لاگر.

برای رفع این مشکل و پرکردن شکاف، دانشمندان به ترجمهٔ آثار یونانی روی آوردند. همان طور که می‌دانیم این کوشش‌ها با موفقیت‌های زیادی همراه بوده است.

چهار مقالهٔ اول آپولونیوس در قرن نهم میلادی توسط هلال حمصی و سه مقالهٔ پنجم تا هفتم توسط ثابت بن قُره از یونانی به عربی ترجمه شد [۲]. ابوالفتح اصفهانی در سال ۵۱۳ هجری از این هفت مقاله خلاصه‌ای فراهم آورد و آن را «تلخیص المخروطات» نامید. این اثر در سال ۱۶۶۱ میلادی به زبان لاتین ترجمه و سپس در سال ۱۹۲۳ میلادی از روی ترجمه لاتینی به فرانسوی برگردانده شد. از طرف دیگر ریاضیدانان عصر رنسانس تحت تأثیر شرایط موجود، به منظور احیای کارهای ناپدیدشده آپولونیوس کوشش‌های خود را بر اساس نقل قول‌ها، اشاره‌ها و مراجع در آثار دیگران بنا نهادند. در بین نوشته‌های آپولونیوس که غیرمستقیم از آن‌ها اطلاع داریم، مقاله‌ای با عنوان «در باب تماس» وجود دارد که مشکل‌ترین مسئلهٔ آن چنین بیان می‌شود:

دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایره مفروض مماس باشد.

این مسئله امروزه به مسئلهٔ آپولونیوس معروف است. هدف این نوشتار شرح مختصر راه حل‌ها، تعداد جواب‌ها، تعمیم‌ها و کاربردهای آن است.

۲. بیان کلی مسئله

مسئله آپولونیوس در حالت کلی رسم یک یا بیش از یک دایره است که بر سه شییء در یک صفحه مماس باشند. هر کدام از این سه شییء می‌تواند یک نقطه، یک خط یا یک دایره باشد. این اشیاء می‌توانند به هر طریقی شکل‌بندی شوند، اما متمایز در نظر گرفته می‌شوند، بدین معنی که بر یکدیگر منطبق نیستند. خاصیت تماس چنین تعریف می‌شود : نخست فرض می‌کنیم که یک نقطه، خط یا دایره بر خودش مماس است، از این رو اگر یکی از دایره‌ها بر دو دایرهٔ دیگر مماس باشد، به عنوان یک جواب مسئله آپولونیوس شمارش می‌شود. گوییم دو شیء هندسی یکدیگر را قطع می‌کنند هرگاه دارای یک نقطه مشترک باشند. بنا به تعریف، یک نقطه بر یک خط یا یک دایره مماس است، هرگاه آنها را قطع کند، یعنی بر آنها واقع باشد، پس دو نقطهٔ متمایز نمی‌توانند مماس باشند. اگر زاویه بین خط‌ها و دایره‌ها در محل تقاطع صفر باشد، گوییم آن دو بر یکدیگر مماس‌اند. در عمل دو دایره برهم مماس‌اند هرگاه در یک نقطه متقاطع باشند. اگر تعداد نقطه‌های برخورد صفر یا دو باشد، مماس نیستند. در مورد یک خط و یک دایره نیز چنین است. می‌توان دو خط موازی را به عنوان مماس در نقطه‌ای در بینهایت در نظر گرفت. دایره جواب می‌تواند مماس داخلی یا مماس

خارجی، بر هر یک از دایره‌ها باشد. مماس خارجی مماسی است که دو دایره مماس در نقطه تماس، خمیدگیشان از یکدیگر دور شده، در دو جهت مخالف خط مماس در آن نقطه قرار داشته و هیچ‌کدام شامل دیگری نباشد. در این حالت فاصله بین دو مرکز برابر مجموع دو شعاع است. مماس داخلی مماسی است که در آن، دو دایره در نقطه تماس در یک جهت خمیده شده‌اند و دو دایره در یک طرف خط مماس هستند. در این حالت فاصله بین دو مرکز برابر تفاضل دو شعاع است. بنابر آنچه گفته شد، می‌توان مسئله آپولونیوس را در حالت کلی چنین بیان کرد:

سه شییء که هر کدام می‌توانند یک نقطه، یک خط یا یک دایره باشند مفروض‌اند دایره‌ای رسم کنید که از هر یک از نقطه‌ها بگذرد و بر خط‌ها و دایره‌ها مماس باشد.

مسئلهٔ آپولونیوس با توجه به انتخاب هر کدام از سه شییء، ده حالت را در بر می‌گیرد . چنانچه نقطه‌ها را با P، خطها را با L و دایره‌ها را با C نشان دهیم، معمول است که هر کدام از این حالت، را با یک کد سه حرفی نمایش دهند. پس این ده حالت عبارت‌اند از:

$$PPP \quad PPL \quad PLL \quad LLL \quad PPC$$
$$PLC \quad PLL \quad LCC \quad LLC \quad CCC$$

چهار حالت اول شامل هیچ دایره‌ای نیست و حالت آخر در واقع مسئله کلاسیک آپولونیوس است.

بیان کلی مسئله آپولونیوس به مجموعه نقطه‌ها ، خطها و دایره‌ها نظر دارد. از طرفی انعکاس، عناصر این مجموعه را به یکدیگر تبدیل می‌کند، پس طبیعی است که برای حل این مسئله از انعکاس استفاده شود. از این جهت بخش بعد را به مروری به «صفحه انعکاسی» و تبدیل انعکاس در آن صفحه اختصاص می‌دهیم.

۳. صفحه انعکاسی

انعکاس، تمام نقطه‌های واقع بر یک دایره مفروض را ثابت نگاه داشته و نقطه‌های داخل و خارج را رد و بدل می‌کند. با افزودن نقطه بینهایت به صفحه اقلیدسی صفحه انعکاسی یا صفحه موبیوس به دست می‌آید. این نقطه را با P_∞ نشان می‌دهیم. این کار شبیه افزودن یک خط ابدال به صفحه اقلیدسی است که هندسه تصویری را به وجود می‌آورد و به همان اندازه مفید به نظر می‌رسد. در صفحه انعکاسی می‌توان خط‌های راست را دایره‌هایی دانست که از P_∞ می‌گذرند.

نخست به بیان و اثبات قضیه زیر می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که دو دایره بر هم عمودند هرگاه مماس‌های بر آن دو دایره در یکی از نقطه‌های تقاطع بر یکدیگر عمود باشند.

قضیه ۱.۳. *هر دایره‌ای که از نقطه A می‌گذرد و بر دایره σ عمود است (دایره σ از A نمی‌گذرد) از نقطه ثابت دیگر A' نیز می‌گذرد.*

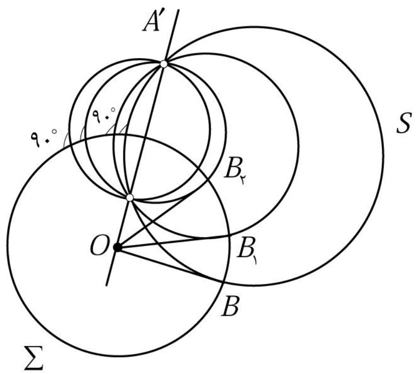
اثبات. فرض می‌کنیم S دایره‌ای باشد که از A گذشته و بر Σ عمود است. اگر A' نقطه برخورد دیگر OA با دایره S باشد، نقطه O را به B نقطه برخورد Σ و S وصل می‌کنیم (شکل ۱). OB بر S مماس است و بنا به خاصیت معروف مماس بر دایره

$$OA.OA' = OB^{۲}$$

یا این که

$$OA' = \frac{R^{۲}}{OA}$$

که در آن R شعاع دایره است. از این رو A' نقطه تلاقی OA با S به انتخاب S بستگی نداشته و تمام دایره‌هایی که از A می‌گذرند، از A' نیز می‌گذرند. □



شکل ۱

بنا به قضیهٔ ۱.۳ تعریف زیر موجه به نظر می‌رسد.

تعریف ۲.۳. گوییم نقطه A' قرینهٔ نقطه A نسبت به دایره است، هرگاه هر دایره‌ای که از A می‌گذرد و بر Σ عمود است، از A' نیز بگذرد.

تعریف ۳.۳. تقارن نسبت به یک دایره مفروض را انعکاس مینامند. دایره Σ دایره انعکاس، مرکز دایره، مرکز انعکاس و مربع شعاع آن، یعنی $K = R^{۲}$ قوت انعکاس نامیده می‌شود.

بدیهی است که اگر A' منعکس A نسبت به Σ باشد، A نیز منعکس A' نسبت به Σ است. از این رو انعکاس یک برگشت است. مشاهده می‌کنیم که قرینه (انعکاس) نسبت به یک دایره در واقع تعمیم قرینه نسبت به یک خط است، زیرا که در صفحه انعکاسی خط مثل دایره‌ای است که از P_∞ می‌گذرد. دیگر این‌که منعکس O مرکز دایره انعکاس، P_∞ است. منعکس تمام نقطه‌های واقع بر شکل F نسبت به دایره انعکاس Σ شکلی را می‌سازند که آن را منعکس F نسبت به Σ می‌نامند. گاهی برای سهولت در امر نگارش خط‌ها و دایره‌ها را در صفحه انعکاسی، دایره انعکاسی یا به اختصار i- دایره می‌نامند.

اینک به بیان بعضی از ویژگی‌های اصلی انعکاس در صفحه انعکاسی می‌پردازیم.

(۱) منعکس هر نقطه واقع بر دایره انعکاس بر خودش منطبق است. نقطه‌های درون دایره به بیرون دایره و نقطه‌های بیرون آن به درون آن تبدیل می‌شوند.

(۲) منعکس خط راستی که از مرکز انعکاس بگذرد بر خودش منطبق است.

(۳) منعکس خط راستی که از مرکز انعکاس نگذرد، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(۴) منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نگذرد خطی است عمود بر خطی که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(۵) منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس نگذرد یک دایره است.

(۶) دایره S تحت انعکاس با دایره Σ ناوردا می‌ماند اگر و تنها اگر بر Σ عمود باشد.

(۷) انعکاس تبدیلی است همدیس، بدین معنی که زاویه بین دو خم را ناوردا نگه می‌دارد. به ویژه دو دایره بر یکدیگر مماس هستند اگر و تنها اگر مبدل‌های آن دو بر یکدیگر مماس باشند.

(۸) به وسیله انعکاس می‌توان هرجفت i- دایره غیرمتقاطع را به یک جفت دایره هم مرکز تبدیل کرد.

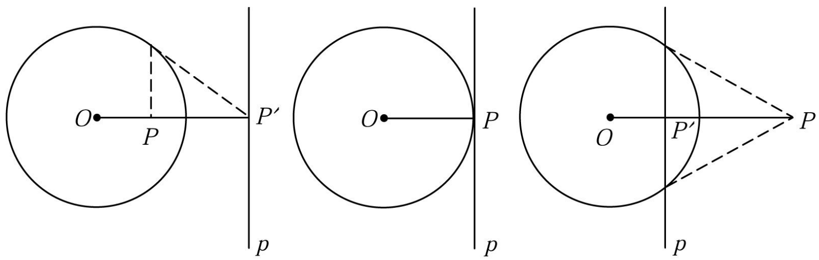
(۹) به وسیله انعکاس می‌توان هر جفت i- دایره متقاطع را به یک جفت خط متقاطع تبدیل کرد.

(۱۰) به وسیله انعکاس هر جفت i- دایره مماس را می‌توان به یک جفت خط موازی تبدیل کرد.

۴. قطب و قطبی

به سبب رابطه نزدیک قطب و قطبی با انعکاس و کاربرد آن در حل مسئله آپولونیوس در این بخش به یادآوری بعضی نکته‌ها درباره آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. دایره C به مرکز O و شعاع P را در نظر می‌گیریم. نظیر هر نقطه P یک خط وجود دارد که از P' منعکس P نسبت به C می‌گذرد. این خط را قطبی P نسبت به C می‌نامیم و آن را با P نشان می‌دهیم. به‌عکس نظیر هر خط p یک نقطه P وجود دارد که بر عمود OP' وارد بر p واقع است و منعکس نقطه P' نسبت به C میباشد. این نقطه قطب خط p نامیده می‌شود. بنابراین نسبت به دایره C هر نقطه یک قطبی و هر خط یک قطب دارد.



شکل ۲

توجه ۲.۴. برای کامل بودن بحث، قطبی مرکز انعکاس را خط در بینهایت و قطب هر قطر دایره انعکاس را نقطه در بینهایت، در جهتی که بر آن عمود است، تعریف می‌کنیم.

موارد زیر با استفاده از ویژگی‌های انعکاس و با توجه به شکل اثبات می‌شوند.

(۱) اگر P بر دایره واقع باشد، قطبی آن بر دایره مماس است و از P می‌گذرد. تنها در این حالت، قطب بر قطبی واقع است.

(۲) اگر P در خارج دایره باشد، برای رسم آن می‌توان از P دو مماس رسم کرد و نقطه‌های تماس را به یکدیگر وصل نمود.

(۳) اگر خطی دایره را قطع کند، قطب آن در داخل دایره واقع است.

(۴) اگر خطی بر دایره مماس باشد، قطب آن همان نقطه تماس است.

(۵) اگر خطی دایره را در دو نقطه قطع کند، قطب آن در خارج دایره است.

مهمترین خاصیت قطب و قطبی در قضیه زیر بیان می‌شود و اثبات را می‌توان در [۳، صفحهٔ ۱۶۹] یافت.

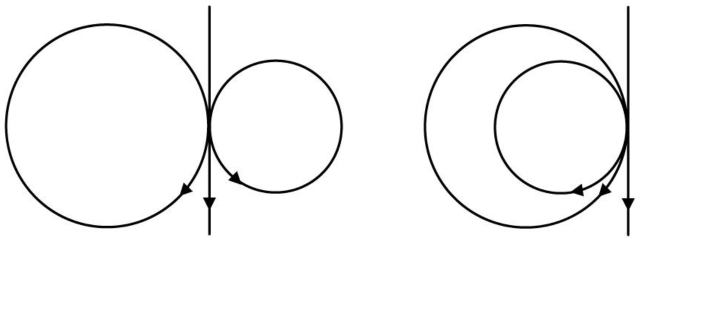
قضیه ۳.۴. *قطبی هر نقطه واقع بر یک خط مفروض از قطب آن خط می‌گذرد.*

۵. دایره‌های جهت‌دار

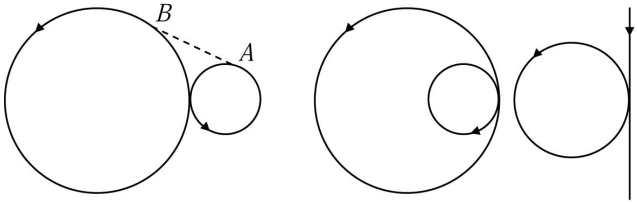
به هر دایره در صفحه می‌توان دو جهت نسبت داد. یکی پاد ساعتگرد که آن را مثبت اختیار می‌کنیم و دیگری ساعتگرد که آن را مثبت در نظر می‌گیریم. یک دایره جهت‌دار را دور نیز می‌نامند. جهت هر دور را مانند خطهای جهت‌دار با یک پیکان مشخص می‌کنند. می‌توان شعاع دایره‌ای را که به‌طور مثبت جهت‌دار شده است، مثبت و شعاع دایره‌ای را که به طور منفی جهت‌دار شده است منفی اختیار کرد. نقطه‌ها، یعنی دایره‌هایی با شعاع صفر فاقد جهت هستند.

تعریف ۱.۵. گوییم دو دایره جهت‌دار یا یک خط جهت‌دار و یک دایره جهت‌دار مماس‌اند هرگاه خط‌ها و دایره‌های زمینه آن‌ها بر یکدیگر مماس بوده و جهت آن در نقطه تماس یکی باشد.

در شکل ۳ دایره‌ها و خط‌های جهت‌دار مماس‌اند. از طرفی در شکل ۴ دو دایره جهت‌دار و نیز خط جهت‌دار و دایره جهت‌دار مماس نیستند.

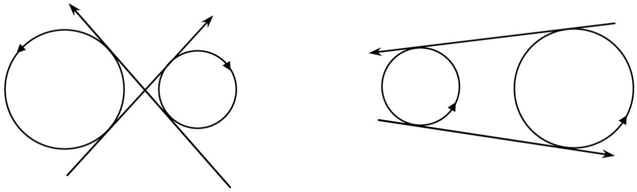


شکل ۳



شکل ۴

از آنچه که گفته شد چنین نتیجه می‌شود که دو دایره جهت‌دار نمی‌توانند بیش از دو مماس مشترک داشته باشند. چنان چه جهت دو دایره یکی باشد، مماس‌ها خارجی‌اند و در غیراین صورت مماس‌ها داخلی‌اند (شکل ۵).



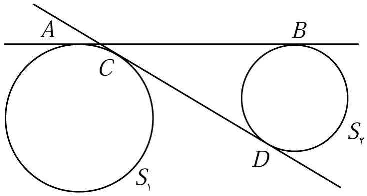
شکل ۵

با توجه به این که نقطه‌ها، دایره‌هایی به شعاع صفر هستند و جهت ندارند گوییم یک دایره یا یک خط بر نقطه A مماس است، هرگاه از A بگذرد. فاصله مماسی دو دایره که جهت‌دار نیستند می‌تواند دو مقدار AB یا CD باشد (شکل ۶).

حال آنکه دو دایرهٔ جهت‌دار نمی‌توانند بیش از دو مماس مشترک داشته باشند. از طرفی طول پاره خط‌های این دو مماس برابر است. از این رو تعریف زیر موجه می‌نماید.

تعریف ۲.۵. فاصله مماسی بین دو دایره جهت‌دار طول مماس مشترک‌های آن دو دایره جهت‌دار است (شکل ۵)

می‌دانیم هر جفت خط متقاطع دو زاویه تشکیل می‌دهند. اما زاویه بین دو خط جهت‌دار متقاطع نیز به طور یکتا مشخص می‌شود. با استفاده از این نکته می‌توان ضرب داخلی دو دایره را تعریف



شکل ۶

و خواص آن را بررسی کرد [۴]. اگر دو دایره جهت‌دار مماس مشترک نداشته باشند، برای مثال یکی داخل دیگری باشد، دارای فاصله مماسی نیستند. به همین نحو زاویه بین دو دایره غیرمتقاطع مشخص نیست. اینک می‌توان گفت سه گفتهٔ زیر معادل‌اند:

(آ) دو دایره جهت‌دار $C_۱$ و $C_۲$ مماس‌اند،

(ب) زاویه بین $C_۱$ و $C_۲$ صفر است،

(پ) فاصله مماسی $C_۱$ و $C_۲$ صفر است.

به سادگی دیده می‌شود که اگر شعاع‌های دو دایره جهت‌دار $C_۱$ و $C_۲$ به ترتیب برابر $r_۱$ و $r_۲$ و فاصله بین مرکزهای آن دو برابر d باشد، آنگاه فاصله مماسی بین $C_۱$ و $C_۲$ برابر است با

$$t = \sqrt{d^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲}$$

تعریف ۳.۵. فرض کنیم a یک عدد حقیقی ناصفر باشد، یک انبساط (مثبت یا منفی) تبدیلی است که بر روی خط‌ها و دایره‌های جهت‌دار به طریق زیر عمل می‌کند:

الف) اگر a مثبت باشد، هر خط جهت‌دار به اندازه a به سمت راست می‌رود و اگر a منفی باشد، به اندازه a به سمت چپ می‌رود.

ب) هر دایره جهت‌دار به مرکز O و با شعاع r به یک دایره جهت‌دار با همان مرکز O و شعاع $r + a$ تبدیل می‌شود.

قضیه ۴.۵. *انبساط (مثبت یا منفی) فاصله مماسی بین دو دایره جهت‌دار را حفظ می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم $C_۱$ و $C_۲$ با شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ با انبساط a به دایره‌های جهت‌دار $C'_۱$ و $C'_۲$ تبدیل شوند. در این صورت شعاع‌های $C'_۱$ و $C'_۲$ به ترتیب عبارت‌اند از $r_۱ + a$ و $r_۲ + a$.

اگر توجه کنیم که فاصله بین مرکزهای C'_1 و C'_2 همان فاصله بین مرکزهای C_1 وC_2 است. داریم

$$t' = \sqrt{d'^2 - (r'_1 - r'_2)^2} = \sqrt{d^2 - [(r_1 + a) - (r_2 + a)]^2}$$
$$= \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} = t$$

همان که باید ثابت می‌شد. □

نتیجه ۵.۵. *اگر دو دایره جهت‌دار C_1 و C_2 مماس باشند انبساط یافته‌های آن‌ها (مثبت یا منفی) یعنی C'_1 و C'_2 نیز بر هم مماس‌اند. همچنین به سادگی می‌توان ثابت کرد که انبساط (مثبت یا منفی) یک دایره و خط جهت‌دار مماس را به یک دایره جهت‌دار و خط جهت‌دار مماس تبدیل می‌کند.*

۶. راه‌حل‌ها

ریاضیدانان مشهوری برای حل مسئله آپولونیوس کوشیده‌اند و راه‌حل‌های مختلفی برای این مشهورترین مسئله هندسه دوران باستان به دست آورده‌اند. در ادامه به اختصار به شرح بعضی از این راه حل‌ها می‌پردازیم.

ژرگون[1] با استفاده از تبدیل‌های انعکاس و قطب و قطبی به حل مسئله پرداخته است.

۱.۶. راه حل ژرگون. بیش از شرح مختصر روش ژرگون، ریاضی‌دان و منطق‌دان قرن ۱۸ فرانسه، به بیان یک تعریف و دو قضیه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۶. هرگاه نقطه ثابتی مانند S و عدد جبری ثابتی مانند k$(k \neq 0)$ مفروض باشد، مجانس هر نقطه مانند A نسبت به مرکز تجانس k نقطه‌ای است مانند A' که با A و S بر یک خط راست بوده و نسبت اندازه‌های جبری فاصله‌های S از A' و A برابر k باشد. اگر k مثبت باشد، تجانس را مستقیم و اگر k منفی باشد، تجانس را معکوس می‌نامند.

اثبات قضیهٔ زیر ساده است.

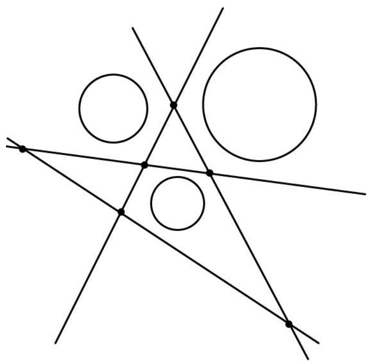
قضیه ۲.۶. *دو دایره واقع در یک صفحه را همواره می‌توان هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس یکدیگر دانست.*

[1] J. D. Gergonne

قضیه ۳.۶. *هرگاه مرکزهای سه دایره بر یک امتداد نباشند، سه مرکز تجانس آن‌ها بر یک امتداد است. همچنین دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک امتداد هستند.*

اثبات. روش‌های گوناگونی برای اثبات این قضیه وجود دارد. برای مثال می‌توان به [۱، ۸] مراجعه کرد. □

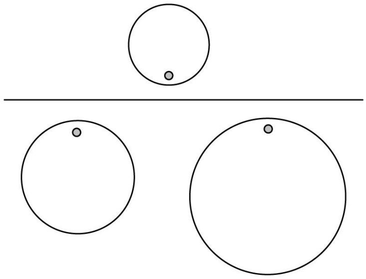
در حل ژرگون لازم است که مرکزهای تجانس هر جفت از دایره‌ها مشخص شود. هر جفت از دایره‌ها دارای دو مرکز تجانس مستقیم و معکوس است. از آنجا که سه جفت دایره وجود دارد و هر کدام دارای دو مرکز تجانس هستند، این فرآیند، شش نقطه را به دست می‌دهد. بنا به قضیه ۵ هر سه تایی از این شش نقطه بر یک امتداد هستند. (شکل ۷)



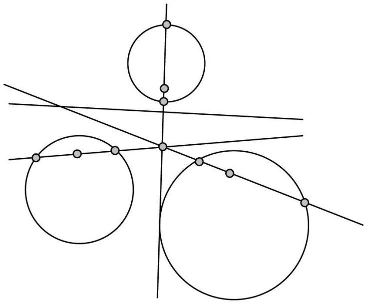
شکل ۷. نقطه‌ها و خط‌های تجانس

قطب‌های این خط‌های تجانس را نسبت به هر یک از دایره‌ها مشخص می‌کنیم (شکل ۸) و قطب‌ها را به مرکز اصلی سه دایره وصل می‌کنیم (شکل ۹). یادآوری می‌کنیم که مرکز اصلی سه دایره نقطه تلاقی سه دایره مفروض است. محور اصلی دو دایره مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است که بر هر دو دایره عمودند یا اینکه مکان هندسی نقطه‌هایی است که طول مماس‌های رسم شده بر دو دایره برابرند [۳]. در این حالت هر خط گذرنده از مرکز اصلی و قطب، دایره خود را در دو نقطه قطع می‌کند.

مرکز دایره بالایی در (شکل ۹) در یک طرف خط تجانس تشکیل شده از مرکزهای تجانس است. بر روی این دایره دورترین نقطه برخورد محور اصلی با دایره را انتخاب می‌کنیم. بر دو دایره



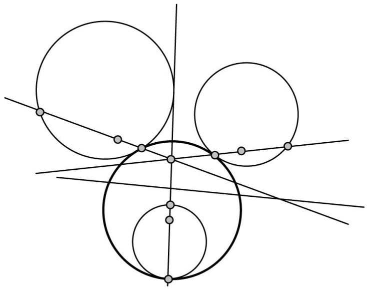
شکل ۸. قطب‌ها



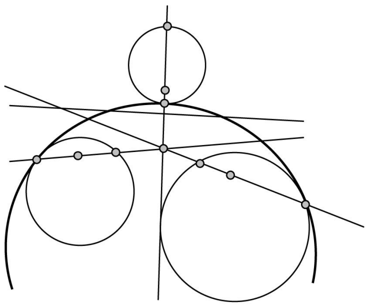
شکل ۹. نقطه‌های تماس

دیگر نزدیکترین نقطه تلاقی انتخاب می‌شود. این سه نقطه، نقطه‌های تماس دایره جواب هستند که در (شکل ۱۰) نشان داده شده است. سه نقطه دیگر تقاطع نقطه‌های تماس یک جواب دیگر هستند.

روش حل ژرگون را می‌توان در حالتی‌که دو تا از دایره‌ها به خط یا نقطه تبدیل می‌شوند به کار برد. در حالتی که سه دایره بر یک امتداد باشند، مرکز اصلی و سه قطب هر خط تجانس به بینهایت می‌رود. برای رفع این مشکل کافی است توجه کنیم که سه دایره در حالت کلی را به‌وسیله انعکاس، می‌توان به دایره‌هایی که مرکزهای آن بر یک امتداد هستند، تبدیل کرد [۳]. ترسیم ژرگون تمام چهارخط تشکیل شده از نقطه‌های تجانس را به دست می‌دهد و هرکدام از خط‌ها حداکثر دو جواب را به دست می‌دهند. در این صورت تمام هشت جواب ترسیم‌پذیر است.



شکل ۱۰. دایره‌های مماس



شکل ۱۱. یک جواب دیگر

۲.۶. راه حل جبری. چنانچه مختصات مرکزهای سه دایره را با (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) شعاع‌های آنها را به ترتیب با r_3، r_2، r_1 و شعاع دایره جواب را با r_s نشان دهیم، شرط مماس بودن دایره جواب بر سه دایره مفروض به صورت جبری به شکل معادله‌های درجه دوم زیر بیان می‌شود:

$$(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_1)^2 = (r_s - s_1 r_1)^2,$$

$$(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_2)^2 = (r_s - s_2 r_2)^2,$$

$$(x_s - x_3)^2 + (y_s - y_3)^2 = (r_s - s_3 r_3)^2,$$

که در آن‌ها سه عدد $s_۱$ ،$s_۲$ و$s_۳$ در سمت راست معادله‌ها بر حسب این‌که دایره(های) جواب مماس داخل یا خارج باشند، برابر ۱+ یا ۱− است. با تفریق یکی از معادله‌ها از معادله دیگر عبارت‌های درجه دوم حذف شده و تنها جمله‌های خطی باقی می‌مانند. بدین ترتیب x_s و y_s از معادله‌هایی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$x_s = A + Br_s \qquad (\star)$$

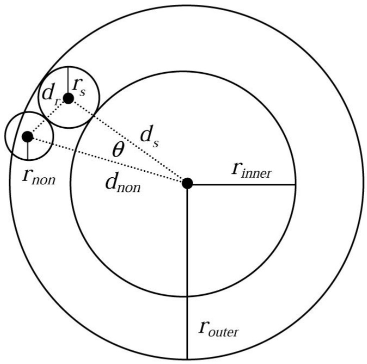
$$y_s = C + Dr_s \qquad (\star\star)$$

که در آن A، B، C و D وابسته به دایره‌ها و اعداد ۱+ یا ۱− است. با جانشانی x_s و y_s در یکی از این دو معادله، معادله درجه دومی بر حسب r_s به دست می‌آید. پس از حل معادله درجه دوم r_s (ها) به دست آمده، با جانشانی در $(\star)$ و $(\star\star)$، x_s و y_s نیز به دست می‌آیند. علامت‌های $s_۱$، $s_۲$ و $s_۳$ می‌توانند به هشت نوع مختلف انتخاب شده و هر انتخاب علامت، دو جواب به دست می‌دهد اگر (r_s, x_s, y_s) با یک انتخاب s_i یک جواب باشد، $(-r_s, x_s, y_s)$ با انتخاب علامت مخالف $-s_i$ همان جواب را به دست می‌دهد. بنابراین حداکثر هشت جواب متمایز وجود خواهد داشت.

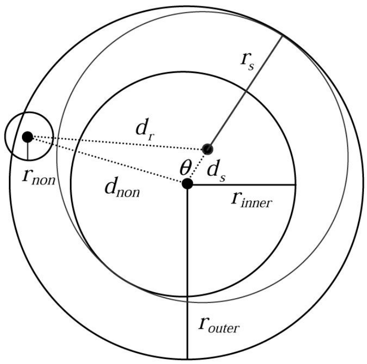
اگر معادله درجه دوم حاصل دارای دو ریشه متمایز باشد، هر جفت ریشه متناظر یک جفت جواب است که در انعکاس متناظرند. چنانچه دو ریشه برابر باشند، جواب حاصل متناظر دایره‌ای است که منعکس آن بر خودش منطبق است. در این حالت یکی از دایره‌های مفروض، خود یک جواب است و تعداد جواب‌ها یکی کاهش می‌یابد. اگر یکی از جواب‌ها عددی مختلط باشد تعداد جواب‌ها دو تا کاهش پیدا می‌کند. نکته جالب توجه این که به هر حال تعداد جواب‌ها نمی‌تواند برابر هفت باشد [۱۹]. هرچند هر تعداد دیگری از صفر تا هشت و نیز بینهایت می‌تواند رخ بدهد. شرح بیشتر در این مورد در بخش ۹ خواهد آمد.

۳.۶. تبدیل به دایره‌های هم‌مرکز. اگر دو دایره از سه دایره مفروض متقاطع باشند انعکاسی وجود دارد که این دو دایره را به دو دایره هم‌مرکز تبدیل می‌کند. با این شرط‌های جدید دایره(های) جواب باید در طوق بین دو دایره هم‌مرکز قرار گیرند. بنابراین جواب‌ها به دو خانواده یک پارامتری تعلق دارند، در خانواده اول (شکل ۱۲) دایره جواب دایره داخلی را محصور نکرده و در طوق می‌چرخد.

در خانواده دوم (شکل ۱۳) دایره‌های جواب دایره داخلی هم مرکز را محصور کرده‌اند در حالت کلی برای هر خانواده چهارجواب وجود دارد که در مجموع هشت جواب به دست می‌آید.



شکل ۱۲



شکل ۱۳

در حالتی که دو دایره از سه دایره مفروض هم مرکز باشند، مسئله آپولونیوس به سادگی حل می‌شود. شعاع‌های سه دایره و نیز فاصله d_{non} از مرکز مشترک تا دایره ناهم‌مرکز معلوم است (شکل ۱۲). دایره جواب را می‌توان از شعاع r_n. زاویه θ و فاصله‌های d_s و d_T از مرکز مشترک و همچنین مرکز نامشترک یافت. شعاع و فاصله d_s معلوم است و بر حسب اینکه دایره جواب

مماس داخلی یا خارجی باشد داریم $d_T = r_s \pm r_{non}$ بنابراین به موجب قانون کسینوس‌ها داریم

$$\cos\theta = \frac{d_s^{۲} + d_{non}^{۲} - d_T^{۲}}{۲ d_s d_{non}} = C.$$

مقدار C بر حسب اینکه دایره جواب، مماس داخلی یا خارجی باشد مثبت یا منفی است. می‌توان نتیجه گرفت که

$$\theta = \pm ۲ \arctan\left(\sqrt{\frac{۱-C}{۱+C}}\right).$$

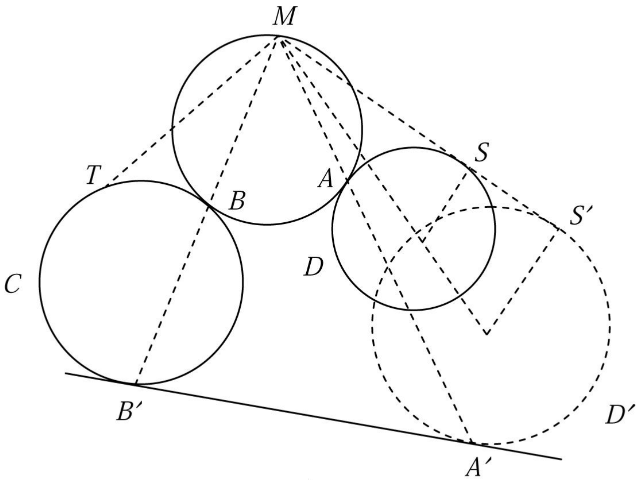
در اینجا نیز با توجه به علامت‌ها در می‌یابیم که تعداد جوابها برابر هشت است از آنجا که انعکاس یک برگشت است، مسئله اصلی پس از برگشت به مرحله اولیه ترسیم پذیر می‌شود.

۴.۶. تبدیل از CCC به CCP. نخست سه دایره مفروض $C_۱$، $C_۲$ و$C_۳$ را جهت‌دار می‌کنیم. انبساطی وجود دارد که یکی از این سه دایره را به یک نقطه تبدیل می‌کند (چرا؟) فرض کنیم $C_۱$ آن دایره بوده و به نقطه $C'_۱$ تبدیل شود. در این صورت دایره‌های $C_۲$ و $C_۳$ به دایره‌های $C'_۲$ و$C'_۳$ تبدیل شده و دایره جواب C مماس بر $C_۱$، $C_۲$ و$C_۳$ از$C'_۱$ گذشته و بر $C'_۲$ و $C'_۳$ مماس است. در این صورت مسئله آپولونیوس به یافتن دایره C' که بر $C'_۲$ و $C'_۳$ مماس بوده و از $C'_۱$ بگذرد کاهش می‌یابد، که همان حالت CCP است.

برای حل مسئله آپولونیوس در حالت CCP دو دایره و نقطه مفروض را به ترتیب C، D و M می‌نامیم. از M مماس MT را بر دایره C رسم می‌کنیم (شکل ۱۴). نقطه M را مرکز انعکاس و $MT^{۲}$ را قوت انعکاسی اختیار می‌کنیم. اینک منعکس‌های C و D را مشخص می‌کنیم. منعکس C بر خودش منطبق است و منعکس D، دایره D' است. مماس مشترک دو دایره D' و C را رسم می‌کنیم تا بر آنها در A' و B' مماس شود.

خط MA' دایره D را در A و MB' دایره C را در B قطع می‌کند. دایره‌ای که از A، M و B بگذرد دایره جواب است، زیرا که این دایره چون منعکس مماس مشترک $A'B'$ است بر دو دایره مفروض مماس می‌باشد.

تمام حالت‌های دیگر نقطه، خط و دایره و شکل‌بندی‌های گوناگون راه حل‌های ویژه خود را دارند که پرداختن به آن‌ها از حوصله این نوشته خارج است. بی‌مناسبت نیست یادآوری کنیم که مسئله آپولونیوس، زمانی در کتاب درسی «هندسه و مخروطات» سال ششم ریاضی دبیرستان بیان و حل می‌شده است [۱].



شکل ۱۴

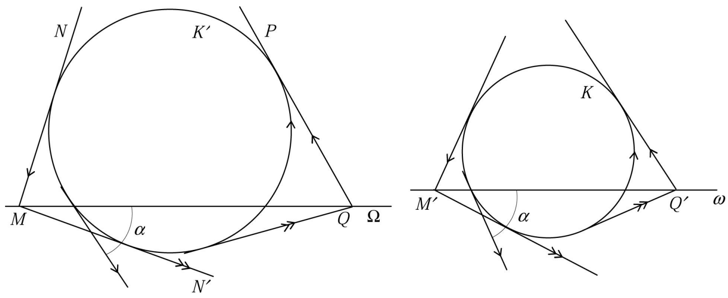
۷. انعکاس محوری

لاگر[1] در ۱۸۸۲ یک تبدیل هندسی را بر مجموعه خط‌های جهت‌دار تعریف کرد که اینک به نام تبدیل لاگریا انعکاس محوری شناخته می‌شود. می‌توان گفت انعکاس محوری دوگان انعکاس نسبت به یک دایره است. بسیاری از خواص آن در [۲۶] با جزئیات مطرح شده‌اند. یکی از راه‌حل‌های زیبای مسئله آپولونیوس استفاده از این تبدیل است که در این بخش به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۷. فرض کنیم NM یک خط جهت‌دار باشد که خط جهت‌دار Ω را در M قطع می‌کند. یک دایره جهت‌دار دلخواه K' که Ω را با زاویه α قطع کرده و بر NM مماس است رسم می‌کنیم. مماس دیگری که از M بر K' رسم می‌شود یعنی MM' مبدل NM است. (شکل ۱۵) خط Ω را محور انعکاس می‌نامیم.

می‌توان هر دایره جهت‌دار و ثابت K که خط ω را با زاویه α قطع کرده و در آن ω با Ω موازی است به عنوان مدلی برای K' در نظر گرفت. این بدان علت است که دو شکل ۱۵ مجانس یکدیگر هستند و لازم نیست دایره مرجع K در موقعیت ثابتی باشد. نظیر هر دو جفت مماس بر K که در ω تلاقی می‌کنند در مورد Ω وجود دارد. برای یافتن K' که این خط‌های جهت‌دار بر آن مماس‌اند، تمامی آنچه لازم است نگاشت M' به M و Q' به Q در یک تجانس مستقیم است.

[1] Laguerre

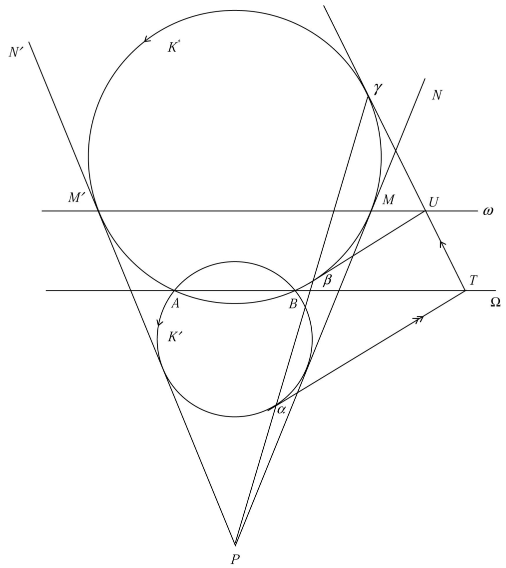


شکل ۱۵

قضیه ۲.۷. *انعکاس محوری مماس‌های جهت‌دار بر یک دایره جهت‌دار K^* را به مماس‌های جهت‌دار بر یک دایره جهت‌دار K' تبدیل می‌کند. علاوه بر آن محور انعکاس، محور اصلی K^* و K' است.*

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که مماس‌های جهت‌دار بر K که ω را قطع می‌کنند تحت انعکاس محوری به خودشان تبدیل می‌شوند (شکل ۱۶). پس هر انعکاس محوری دارای جفت خطهای جهت‌دار خود متناظر (ثابت) است. اینک فرض کنیم K^* دایره جهت‌داری باشد که Ω را در A و B قطع می‌کند. نشان می‌دهیم که مبدل بر مماس جهت‌دار بر K^* بر دایره جهت‌دار دیگری که مشخص خواهد شد، مماس است.

مماس‌های جهت‌دار MN و $N'M$ را که موازی خطهای جهت‌دار در یک انعکاس محوری داده شده ثابت هستند رسم می‌کنیم تا K^* را به ترتیب در M و M' قطع کنند. دایره جهت‌داری را که از A و B گذشته و بر MN ، $N'M'$ مماس است K' نامیده و نشان می‌دهیم که K' مبدل K^* است (شکل ۱۶). دایره جهت‌دار K^* را به عنوان دایره جهت‌دار اصلی اختیار می‌کنیم. خط $MM' = \omega$ محور انعکاس است. فرض کنیم P نقطه تلاقی NM و $N'M'$ باشد. خط گذرنده از P، K^* را در β و γ و K' را در α قطع می‌کند. نقطه α متناظر P، در تجانسی است که بین K' و $K'^\star$ وجود دارد. مماس‌های رسم شده بر $K^\star$ در β و γ در U واقع بر ω که قطبی P نسبت به $K^\star$ است یکدیگر را قطع می‌کنند. از آنجا که مماس در α بر K' در β بر $K^\star$ مماس است، نقطه تقاطع γU و مماس در α بر K' چنان هستند که $|T\alpha| = |T\gamma|$. بنابراین T بر AB محور اصلی دو دایره K' و K^* قرار دارد. اینک بیدرنگ نتیجه می‌گیریم که مبدل خط جهت‌دار $U\gamma$، از طریق ${K'}^*$ ، خط جهت‌دار αT است که موازی βU بوده و Ω را در T قطع می‌کند.



شکل ۱۶

بنابراین خط‌های جهت‌داری که بر K^* مماس هستند به خط‌های جهت‌داری که بر K' مماس‌اند تبدیل می‌شوند. $\square$

توضیح. در اثبات قضیه ۲.۷ مبدل مماس‌های جهت‌داری که Ω را قطع می‌کنند مشخص شده‌اند. اینک این پرسش مطرح می‌شود که مبدل مماس جهت‌داری که با Ω موازی است کدام است. بررسی و تعیین این مبدل را به عهده خواننده می‌گذاریم.

قضیه ۳.۷. *انعکاس محوری فاصله مماسی را حفظ می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم C و D دو دایره جهت‌دار باشند. مبدل‌های C و D را به ترتیب C' و D' می‌نامیم. فرض کنیم مماس مشترک C و D در P و Q بر آنها مماس بوده و محور انعکاس را در T قطع کند. این مماس مشترک به مماس مشترک C' و D' با نقطه‌های تماس P' و Q' تبدیل می‌شود. از آنجا که بنا به اثبات قضیه ۳.۶، Ω محور اصلی C و C' است $|TP| = |TP'|$ و چون Ω مماس مشترک D و D' نیز هست داریم $|TQ| = |TQ'|$، پس $|PQ| = |P'Q'|$. $\square$

نتیجه ۴.۷. *انعکاس محوری دایره‌های جهت‌دار مماس را به دایره‌های جهت‌دار مماس تبدیل می‌کند.*

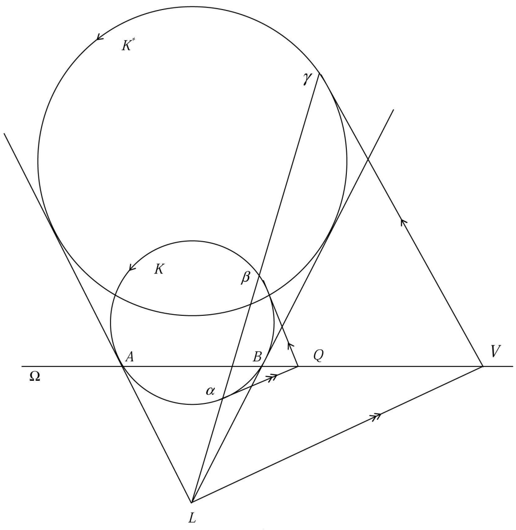
قضیه ۵.۷. *برای هر دایره جهت‌دار یک انعکاس محوری وجود دارد که آن را به یک نقطه تبدیل می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم K^* یک دایره جهت‌دار و L نقطه‌ای خارج از آن باشد (شکل ۱۶) فرض کنیم Ω محور اصلی دستگاه هم محوری باشد که با K^* و دایره- نقطه L مشخص می‌شود. مماس‌هایی از L بر K^* رسم می‌کنیم تا این که Ω را در A و B قطع کند. دایره جهت‌داری را که از A و B گذشته و بر LA مماس است K می‌نامیم. نشان می‌دهیم که انعکاس محوری با دایره جهت‌دار K و Ω به عنوان محور انعکاس، K^* را به L تبدیل می‌کند.

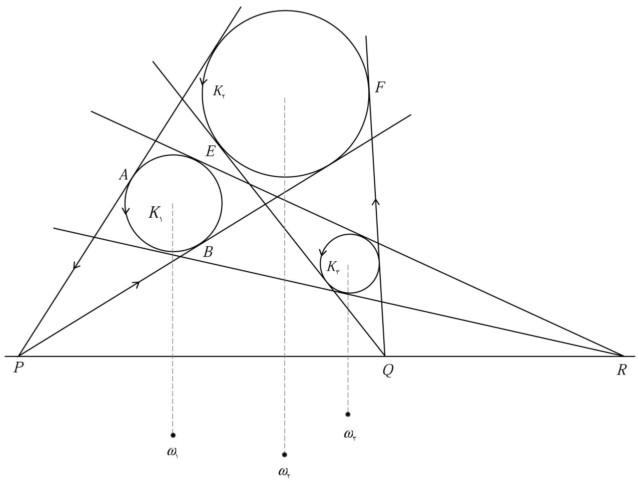
اگر یک خط گذرنده از L، K دایره جهت‌دار را در α و β و K^* را در γ قطع کند (γ و β نقطه‌های متناظر در تجانس به مرکز L هستند). آنگاه اگر مماس در γ بر K^*، Ω را در V قطع کند، داریم $|V\gamma| = |VL|$، زیرا که Ω محور اصلی K^* و L است. اگر مماس‌های بر K در α و β در Q، واقع بر Ω یکدیگر را قطع کنند، آنگاه BQ موازی γV است و چون $|\beta Q| = |\alpha Q|$ نتیجه می گیریم که VL موازی $Q\alpha$ است، پس LV مبدل γV است. بنابراین دایره جهت‌دار K^* به L تبدیل می‌شود. در واقع از این که تنها نقطه‌ها دارای جهت نیستند استفاده می‌کنیم. □

قضیه ۶.۷ (قضیه لاگر). *سه دایره جهت‌دار را می‌توان به طور همزمان، با یک انعکاس محوری به سه نقطه تبدیل کرد.*

اثبات. فرض کنیم K_1، K_2 و K_3 سه دایره جهت‌دار با مماس‌های مشترکی باشند که در شکل ۱۸ نمایش داده شده‌اند. مرکزهای تجانس را با P، Q و R نشان می‌دهیم. این سه نقطه بر یک خط راست که همان خط تجانس است قرار دارند. خط PQR را به عنوان محور انعکاس انتخاب کرده و فرض می‌کنیم هیچ یک از دایره‌ها را قطع نکند. اینک می‌توان دایره جهت‌دار K_1 را به نقطه ω_1 تبدیل کرد که ω_1 نقطه حدی یک دستگاه هم محوری است که با K_1 و PQR خارج دایره K_1 است. با این انعکاس محوری خط‌های جهت‌دار AP و PB مماس بر K_1 به خط‌های جهت‌دار در امتداد $P\omega_1$ تبدیل می‌شوند خط‌های جهت دار AP و BP بر K_2 نیز مماس‌اند. از آنجا که به خط‌های جهت‌دار در همان امتداد $P\omega_2$ تبدیل می‌شوند، دایره جهت‌دار K_2 به نقطه ω_2 تبدیل می‌شود. این نقطه باید بر محل تقاطع $P\omega_1$ و عمود وارد از مرکز K_2 بر خط PQR باشد.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

خط‌های جهت‌دار EQ و QF بر $K_۳$ نیز مماس‌اند. دایره جهت‌دار $K_۳$ به $\omega_۳$ محل تلاقی $Q\omega_۲$ و عمود وارد از مرکز $K_۳$ بر PQR تبدیل می‌شود.

لاگر از قضیه قبل برای حل مسئله آپولونیوس استفاده می‌کند. نخست اینکه دایره‌ها جهت‌دار می‌شوند. اگر $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ سه دایره جهت‌دار باشند، پس از تبدیل آن‌ها به نقطه‌های $\omega_۱$، $\omega_۲$ و $\omega_۳$ لاگر دایره‌هایی را که از این سه نقطه می‌گذرند در نظر می‌گیرد. این دایره، دو دایره جهت‌دار K و K' را مشخص می‌کند. با به کارگیری این انعکاس نقطه‌ها به دایره‌های جهت‌دار برمی‌گردند. بنا به نتیجه قضیه ۳.۷ دایره‌های جهت‌دار K و K' به دایره‌های جهت‌داری که بر $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ مماس می‌شوند برمی‌گردد. □

توضیح: برای اثبات‌های جبری قضیه لاگر و نیز قضیه ۵.۷ به [۲۶] مراجعه شود.

۸. قضیه دکارت

اگر سه دایره مفروض در مسئله آپولونیوس دو به دو بر یکدیگر مماس باشند (شکل ۱۹) مسئله آپولونیوس دارای پنج جواب است که سه جواب آن همان دایره‌های داده شده هستند. دو دایره دیگر متناظر دایره‌های محیطی و محاطی هستند [۲۷] و دایره‌های سُدی[1] نامیده می‌شوند. هر کدام از دایره‌های سُدی با سه دایره مفروض یک مجموعه از چهار دایره را تشکیل می‌دهند که در شش نقطه بر یکدیگر مماس هستند. شعاع‌های این چهار دایره در رابطهٔ زیر که به قضیه دکارت معروف است صدق می‌کند:

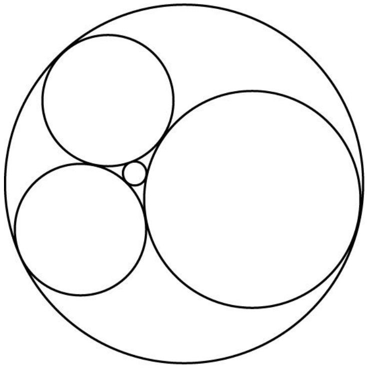
$$(k_۱ + k_۲ + k_۳ + k_s)^۲ = ۲ \left(k_۱^۲ + k_۲^۲ + k_۳^۲ + k_s^۲\right)$$

که در آن $k_s = ۱/r_s$ و r_s شعاع دایره جواب است. همچنین، $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ خمیدگی‌های دایره‌های داده شده هستند. قضیه دکارت توسط اشتاینز[2] در ۱۸۲۸ و توسط بیکرافت[3] در در ۱۸۴۲، و بازهم توسط سُدی برنده جایزه نوبل در شیمی در ۱۹۳۶ کشف مجدد شده است. سدی یافته خود را به صورت شعری با عنوان «بوسه دقیق» در [۲۳] به چاپ رسانیده است. برای اثبات این قضیه و بعضی تعمیم‌های آن می‌توان به [۸، ۹] مراجعه کرد.

۹. شمارش جواب‌ها و رده‌های شکل بندی

مسئله شمارش جواب‌ها برای انواع گوناگون مسئله آپولونیوس در واقع یک مسئله هندسه شمارشی است [۵، ۱۱]. هر ترتیب سه شییء می‌تواند تعداد جوابها را تغییر دهد. برای مثال در حالتی که هر سه شی، سه نقطه باشند مسئله تنها یک جواب دارد و آن هم دایره‌ای است که از آن سه

[1] F. Soddy [2] J. Steiner [3] P. Beecroft



شکل ۱۹

نقطه می‌گذرد. اگر یکی از سه دایره مفروض داخلی یکی از دایره‌ها باشد مسئله جواب ندارد. چنانچه هر سه دایره در یک نقطه بر یکدیگر مماس باشند بینهایت جواب وجود دارد. مویرهد[۱] نخستین کسی است که هرچند نه به طور کامل، به این مسئله پرداخته است. باردیگر، در ۱۹۷۴ این مسئله مورد توجه فیتز جرالد [۲] قرار گرفت. سرانجام در ۱۹۸۳ مشخص شد که تعداد تمام حالت‌های متمایز، با توجه به رده‌بندی شکل‌ها برابر ۳۳ است [۵]. از آنجا که ویژگی وقوع در انعکاس تغییر نمی‌کند هرگونه شمارش حالت‌ها باید به حالت‌هایی که با انعکاسی یا ترکیب انعکاس‌ها به یکدیگر تبدیل نمی‌شوند کاهش یابد. برن[۳] ، فیشر[۴] و ویلکر[۵] [۵] توانسته‌اند با توجه به ویژگی‌های ۹ ، ۸ و ۱۰ که در بخش ۳ (صفحه انعکاسی) آمده است فهرست زیر را که دو به دو مجزا هستند و تمام حالت‌های سه شییء را در برمی‌گیرد به دست آورند.

(۱) سه نقطه،

(۲) دو نقطه و یک خط،

(۳) یک نقطه و دو دایره هم مرکز،

(۴) یک نقطه و دو خط متقاطع،

(۵) یک نقطه و دو خط موازی،

(۶) دو دایره هم مرکز و یک $i-$ دایره،

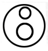
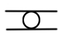
(۷) دو خط متقاطع و یک $i-$ دایره که هر دو خط را قطع می‌کند،

[۱] R. F. Muirhead [۲] J.M. Fitz-Gerald [۳] A. Bruen [۴] J. C. Fisher [۵] J. B. Wilker

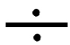
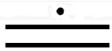
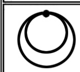
(۸) دو خط موازی و یک $i-$ دایره که بر هر دو خط مماس است،

جدول های ۱ و ۲ برگرفته از [۵] است.

جدول ۱

شکل بندی	تعداد جوابها							
	۰	۲	۳	۴	۵	۶	۸	∞
دو دایره هم مرکز و یک i– دایره .				  				
دو خط متقاطع و یک i– دایره که هردوخط قطع‌می‌کند.					 		 	
دو خط موازی و یک i– دایره که بر هر دو خط مماس است .								

جدول ۲

شکل بندی	تعداد جوابها					
	۰	۱	۲	۳	۴	∞
سه نقطه						
دو نقطه و یک خط		 				
یک نقطه و دو دایره هم مرکز						
یک نقطه و دوخط متقاطع			 			
یک نقطه و دوخط موازی						

باید توجه کرد که این شمارش‌ها در صفحه انعکاسی (موبیوس) یعنی صفحه اقلیدسی که P_∞ به آن اضافه شده است انجام گرفته است. چنانچه خط‌ها و دایره‌ها جهت‌دار در نظر گرفته شوند، شمارش در صفحه لاگر که مفاهیم اولیه آن همان خط‌ها و دایره‌های جهت‌دار هستند و مدلی است برای هندسه لاگر، انجام می‌گیرد [۱۲].

۱۰. بعضی تعمیم‌ها

الف) اگر توجه کنیم که زاویه بین دو دایره مماس بر هم برابر صفر است مسئله آپولونیوس به این شکل تعمیم می‌یابد: دایره‌ای رسم کنید که با سه دایره مفروض زاویه‌ای برابر θ یا در حالت کلی‌تر به

ترتیب زاویه‌هایی برابر $\theta_۱$ ، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ بسازد. از طرف دیگر اگر در نظر داشته باشیم که فاصله مماسی دو دایره جهت‌دار برابر صفر است، تعمیم دیگر این است که دایرهٔ جهت‌داری رسم شود که فاصله‌های مماسی آن با سه دایره جهت‌دار مقادیر مشخصی باشد [۲۶].

ب) تعمیم مسئله آپولونیوس در سه بعد عبارت از یافتن کره‌ای است که بر چهار کره مفروض مماس باشد. این مسئله را می‌توان با روش‌های مشابه در دو بعد حل کرد. مسئله را حتی می‌توان به فضای d بعدی نیز تعمیم داد: ابرکره‌ای بیابید که بر $d+۱$ ابرکره مماس باشد.

پ) مسئله آپولونیوس در صفحه اقلیدسی یا صفحه انعکاسی به کره و سایر رویه‌های درجه دوم نیز تعمیم می‌یابد. در مورد کره هدف یافتن دایره‌هایی است که بر سه دایره واقع بر روی کره مماس باشند. این مسئله را می‌توان با تصویر گنج نگاشتی به مسئله‌ای در صفحه اقلیدسی تبدیل کرد. حل متناظر آن با برگشت به دست خواهد آمد.

۱۱. کاربردها

یکی از راه‌حل‌های مسئله آپولونیوس که ابتدا توسط ادریان فون رومن[۱] (۱۵۹۲) ارائه و سپس توسط نیوتن ساده‌تر شده است، تبدیل مسئله به یافتن محل برخورد هذلولی‌هاست. سه دایره مفروض را $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$، شعاع‌های آنها را $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ و شعاع دایره جواب را با r_s نشان می‌دهیم. بر حسب این که $C_۱$ یا دایره جواب مماس خارج یا مماس داخل باشد، فاصله بین مرکزهای این دو دایره، $d_۱$ برابر $r_s+r_۱$ یا $r_s-r_۱$ است. به همین شکل $d_۲$ فاصله بین مرکزهای $C_۲$ و دایره جواب برابر $r_s+r_۲$ یا $r_s-r_۲$ است. از این‌رو $d_۱-d_۲$ مقداری است ثابت که به r_s بستگی ندارد. از این رو دایره جواب احتمالی بر یک هذلولی قرار دارد. همین امر در مورد دایره جواب و $C_۳$ نیز صادق است. این روش حل هرچند در نهایت به برخورد دایره‌ها و خطها منتهی نمی‌شود، اما سبب می‌شود که این مسئله کاربردهایی در سایر قسمت‌ها پیدا کند. از آن جمله نیوتون در یافتن مسیر ستارگان از آن استفاده کرده است.

از کاربردهای دیگر مسئله آپولونیوس استفاده از آن در سیستم موقعیت‌یابی فراگیر[۲] است [۱۴]، شاید جدیدترین کاربرد این مسئله در بیوشیمی و داروسازی باشد [۱۷].

[۱] A. vanRoomen [۲] Global positioning systems

۱۱. سخن آخر

آنچه که تاکنون به آن پرداختیم، خاصه در بخش حل جبری، بیش از همه گویای «ترسیم پذیری» مسئله آپولونیوس است؛ زیرا که حل نهایی به یافتن محل برخورد دایره‌ها و خط‌ها برمی‌گردد. از طرفی روش‌های گوناگون حل این مسئله معروف، افزون بر پیچیدگی مستلزم رسم خط‌ها و دایره‌های کمکی بسیار است. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که به راستی در عالم عمل چه باید کرد؟

جهت‌دار کردن خط‌ها و دایره‌ها و تبدیل لاگر راه حل زیبایی را پیش رو می‌گذارد. از طرفی خط‌ها و دایره‌های جهت‌دار مفاهیم اولیه «هندسه لاگر» هستند. اما این هندسه دارای یک الگوی سه بعدی نیز هست که مخروط‌های قائم در آن نقش اساسی دارند [۶] و [۲۶]. تبدیلی که این دو الگو را یکریخت می‌کند دورنگاشتی[۱] (دور به جای دایره جهت‌دار) می‌نامند. آنچه را که در بخش ۷ آمده است، می‌توان در این الگو بیان، تفسیر و اثبات کرد. به هر روی این مختصر را به این سبب آوردیم که یادآوری شود، در نرم افزاری مانند GeoGebra حل (رسم) مسئله آپولونیوس بر اساس استفاده از این الگو و تبدیل دورنگاشتی است [۲۶]. مسئله در فضای سه بعدی حل و ترسیم شده، سپس به فضای دو بعدی برگشت داده می‌شود.

مراجع

[۱] م. آذرنوش، و دیگران، *هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی*، تهران ، ۱۳۴۸.

[۲] ا. قربانی، *زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری*، چاپ دوم با تجدید نظر، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۵.

[۳] هـ.س.م، کوکس‌تیز، س.ل. گریتز، *بازآموزی و بازشناخت هندسه*، ترجمه ع. مصحفی، چاپ نهم، انتشارات دفتر کمک آموزشی و کتابخانه‌ها، تهران، ۱۳۷۶.

[۴] م . هشترودی، *تمرین‌های ریاضیات مقدماتی، هندسه دوایر*، انتشارات یکان، تهران، ۱۳۴۵.

[5] A. Bruen, J. C. Fisher, J. B. Wilker, Apollonius by inversion, *Math. Mag.* 56 (1987) 97-103.

[6] L. Budai, A possible general approach of the Apollonius problem with the help of GeoGebra, *Ann. Math. Inform*, **40** (2013) 163-173.

[7] E. T. Cecil, Lie sphere geometry, Second edition, Springer- Verlag, New York, (2007).

[8] H. S. M. Coxter, Introduction to geometry, Second edition, Wiley, New York, (1969).

[۱] cyclography

[9] H. S. M. Coxter, The problem of Apollonius, *Amer. Math. Monthly.* **58** (1968) 5-15.

[10] N. A. Court, The problem of Apollonius, *Math. Teacher* **59** (1961) 444-452.

[11] K. Dreschler, U. Sterz, Apollonius' contact problem in n-space in view of enumerative geometry, *Acta Math. Univ. Comenian.* **68** (1999) 37–47.

[12] J. M. Fitz- Gerald, , A note on a problem of Apollonius. *J. Geom* . **5**, (1974) 15-26.

[13] D. Giseh, J.M. Ribando, Apollonious problem: a study of solutions, and their connections, *AJUR* . **3**, (2004) 15-25.

[14] J. Hoshen, The GPS equation and the problem of Apollonius. *IEEE Trans. Aearospace Elect. Syst.* **32** (1996) 1116-1124.

[15] R. D. Knight, The Apollonius contact problem and Lie geometry. *J. Geom.* **83**, (2005) 137-157.

[16] P. Kunkel, The tangency problem of Apollonius, three looks, *BSHM.*, **22** (2007) 34-46.

[17] R. H. Lewis, S. Bridgell, Conic tangency equation and Apollonius problem in biochemistry and pharmacology, *Math. Comput. Simulation.* **61** (2003) 101-104.

[18] D. Pedoe, Forgotten geometrical transformation, *Enseign. Math.* **18** (1972) 255-267.

[19] D. Pedoe, The missing sevent circles, *Elem. Math.* **25** (1970) 14-15.

[20] D. Pedoe, On a theorem of geometry. *Amer. Math. Monthly,* **74** (1967) 627-640.

[21] H. Pottman, M. Petterell, Application of Laguerre geometry in CAGD. *Comput. Aided Geom. Design.* **15** (1998) 165-186.

[22] R. Schmidt, A new approach to geometry of range difference location, *IEEE Trans. Aearospace Elect. Syst.* **810** (1972) 821-835.

[23] F. Soddy, Kiss precise, *Nature*, **137** (1936) 1021.

[24] J. L. Spiesberger, Geometry of locating sounds from differences in travel time isodiachrons, *J. Acoust. Soc. Amer.* **116** (2004) 3168-3177.

[25] B. J. Zlobec, N. M. Kasta, Configuration of cycles and Apollonius problem, *Rockey Mountain J. Math.* **31** (2001) 725-744.

[26] I. M. Yaglom, *Geometric transformations IV*, The Mathematical Association of America, (2009).

[27] http//en.wikipedia. org/wiki/problem of Apollonius.

منصور معتمدی: خانه ریاضیات اصفهان

رایانامه: Motamedi.mansoor@gmail.com