فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۸ (بهار و تابستان ۱۳۹۵) صص. ۶۷ تا ۸۸

سنتزی* از فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی، آموزش پیش‌دبستانی تا پایان دورهٔ کارشناسی و جنبش حقوق مدنی

ای. دوبینسکی و آر. پی. موزز

برگردان: سهیلا غلام آزاد

سرآغاز

رابرت موزز در دانشگاه هاروارد، تحت راهنمایی ویلارد فَن اُرمان کواین[۱] - ریاضی‌دان و فیلسوف به‌نام، فلسفهٔ ریاضی خوانده است. او در دبیرستان‌های شهرهای نیویورک، جکسون در ایالت می‌سی‌پی و میامی در فلوریدا تدریس کرده است. وی که شخصی برجسته در جنبش حقوق مدنی[۲] در سال‌های ۱۹۶۰ بود، در حال حاضر مشغول تولید یک برنامهٔ درسی جبر برای دوره‌های متوسطهٔ اول و دوم است تا بتواند دانش‌آموزانِ متعلق به گروه‌های محروم[۳] را نیز مخاطب قرار دهد و برای آن‌ها، جبر را قابل یادگیری کند.

اِد دوبینسکی بیست و پنج سال از عمر خود را صرف پژوهش در آنالیز تابعی برای حل مسئلهٔ

---

* گرچه برای واژهٔ synthesis معادل‌های مختلفی مانند پیوند، ترکیب، تلفیق و غیره وجود دارد، اما هیچ‌یک به رساییِ خودش نیست.

Dubinsky, E. & Moses R. P. (2011). Philosophy, Math Research, Math Ed Research, K-16 Education, and the Civil Rights Movement: A Synthesis. Notices of the AMS. Vol.58, No. 3, pp. 401-409.

Ed Dubinsky اِد دوبینسکی استاد بازنشستهٔ ریاضی و آموزش ریاضی. نشانی الکترونیکی او: edd@math.kent.edu

Robert P. Moses رابرت پی. موزز رئیس پروژهٔ جبر است. نشانی الکترونیکی او: ben@algebra.org

[۱] W.V.O.Quine کوآین، ریاضی‌دان و فیلسوف معروف آمریکایی و استاد دانشگاه هاروارد بود که در سال ۱۹۰۸ به دنیا آمد و در سال ۲۰۰۰ از دنیا رفت. او نابغه‌ای در منطق ریاضی، نظریهٔ مجموعه‌ها، فلسفهٔ زبان و فلسفهٔ منطق بود. برای اطلاعات بیشتر، به سایت http://www.wvquine.org/wvq-drop.html مراجعه کنید-م.

[۲] Civil Rights Movement [۳] Underrepresented Groups

تقریب کراندار گروتندیک[۱] و بیست و پنج سال دیگر را هم وقف پژوهش در آموزش ریاضیِ دانشگاهی (دورهٔ کارشناسی) کرده است. او نظریه‌ای در مورد یادگیری ریاضیِ دورهٔ کارشناسی تبیین نموده و برنامه‌های درسی نوآورانه‌ای برای چندین درس در دورهٔ کارشناسی طراحی کرده است. دوبینسکی هم مانند موزز، در جنبش حقوق مدنی سال‌های ۱۹۶۰، فعال بوده است.

احتمالاً تجارب مشترکمان در مبارزه برای حقوق بشر و داشتن دغدغهٔ درکِ چگونگی عملکرد ذهنی دانش‌آموزانی که تلاش می‌کنند ریاضی یاد بگیرند، به ما اجازه داد تا با وجود پیشینه‌ها و تجربه‌های مختلف زندگی، بتوانیم به‌سبب علاقه‌ای که به افزایش دسترسیِ همه دانش‌آموزان به جبر دبیرستان داشتیم، به‌ویژه دانش‌آموزانِ متعلق به گروه‌های محروم، با هم ارتباط آکادمیک برقرار کنیم. نکتهٔ مهم این است که یک ریاضیدان توانسته است در یک پروژهٔ جبریِ در حال تکوین، با یک فیلسوفِ آموزشگر ریاضی مشارکت داشته باشد و ما هر دو امیدواریم که در سال‌های آینده، این پروژه به رشد و توسعهٔ خود ادامه دهد.

هدف این مقاله، بحث درباره تفکری است که باعث شد دو متخصص از دو تبار مختلف، برای توسعهٔ آموزش ریاضیِ مدرسه‌ای، با هم مشارکت معنادار و اثربخش داشته باشند. به این منظور، بعضی نتایج حاصل از این همکاری را شرح خواهیم داد. ابتدا هر یک از ما به‌طور جداگانه، دیدگاهمان را دربارهٔ معرفت‌شناسیِ یادگیری ریاضی ارائه می‌کنیم؛ سپس در مورد چگونگیِ ترکیب این دو دیدگاه بحث خواهیم کرد و آنگاه برنامهٔ درسی جبر دبیرستانی خود را که به حساب پیمانه‌ای[۲] مربوط می‌شود، توصیف می‌کنیم. سرانجام، شرح می‌دهیم که چطور پروژهٔ جبری که توسط موزز پایه‌گذاری شده است، به جنبش حقوق مدنی مربوط می‌شود.

داستان اِد

در بیست و پنج سالی که صرف پژوهش در آنالیز تابعی و تدریس ریاضی در دورهٔ کارشناسی در شش دانشگاه و پنج کشور و سه قاره کرده‌ام، همیشه به تدریسِ اثرگذار ریاضی علاقه‌مند بوده‌ام. متأسفانه با وجود امتحان کردن روش‌های متعدد مشهور و متداول (روش سقراطی[۳] ، آموزش خود – گام[۴] ، یادگیری در حد تسلط[۵] ، و غیره)، آنچه ارائه دادم، اغلب اوقات تدریسی بی‌اثر بود. من مدرسی خوب و مشتاق تدریس بودم و نسبت به این که کارم را خوب انجام دهم، جدی و همیشه مراقب و متوجه دانشجویانم بودم. آن‌ها نیز من و درس‌هایی را که تدریس می‌کردم، دوست داشتند. اما به استناد مشاهداتم، می‌دانستم که در مقایسه با دانشجویانِ سایر مدرسان، دانشجویانم چیز چندان بیشتری در کلاس‌های من، یاد نمی‌گرفتند

[۱] Grothendieck's Bounded Approximation Problem [۲] Modular Arithmetic [۳] Modified Socratic
[۴] Self-paced Instruction [۵] Mastery Learning

و این وضعیت برایم کمبود شدیدی به‌حساب می‌آمد، همان‌طور که بسیاری از گزارش‌های ملی دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ نیز بیان‌گر همین نتیجه بودند.

با ناامیدی، فهمیدم که اگر بخواهم تواناییِ یادگیری دانشجویانم را به‌طور قابل‌توجهی بهبود بخشم، اول باید از چگونگی فرآیند یادگیری ریاضی در آن‌ها سر در بیاورم. یعنی لازم بود بفهمم که وقتی دانشجو در تلاش برای درک یک مفهوم ریاضی است، چه چیزی ممکن است در ذهن وی بگذرد و برای این که دانشجو در یادگیری ریاضی‌اش موفق باشد، به چه نوع فعالیت‌های ذهنی نیاز دارد؟ من فکر می‌کردم هر چه فرآیند یادگیری ریاضی را بهتر بشناسم، بیشتر قادر خواهم بود تا رهیافت‌های پداگوژیکی مناسبی بیابم که بتوانم به دانشجویان/ دانش‌آموزان کمک کنم تا درگیر فعالیت‌های ذهنی مناسب شده و موفق‌تر شوند. در نتیجه شروع به مطالعه در حوزهٔ یادگیری ریاضی کردم.

طی دو سال اول حرفهٔ جدیدم، زیاد مطالعه کردم (می‌گویم جدید، زیرا کمی بعد از شروع، تمام علاقه‌ام به آنالیز تابعی خشکید). بعضی از نوشته‌جات مربوط به حوزهٔ آموزش ریاضی را که خواندم، خوب بودند؛ ولی بیشترشان چندان برایم سودمند نبودند. سرانجام، وقتی آثار پیاژه را خواندم، تازه متوجه شدم نویسنده‌ای را پیدا کرده‌ام که فرآیند ذهنی یادگیری ریاضی را درک کرده است. یادم می‌آید وقتی یک دانشجوی جوانِ آنالیز تابعی بودم، با مفهوم دوگان فضای موضعاً محدب خیلی مشکل داشتم. با مفهوم تابعک‌های خطی که روی عضوهای فضای موضعاً محدب عمل می‌کنند، مشکلی نداشتم. اما فهم ایدهٔ انجام عملیات روی این تبدیلات، قرار دادن آن‌ها در یک مجموعه و مجهز کردن آن مجموعه به اعمال جبری و حتی توپولوژی، برایم واقعاً سخت بود. می‌فهمیدم که این تابعک‌های خطی، اعمالی روی عضوهای یک فضای برداری انجام می‌دهند، اما از درک چگونگیِ انجام این عمل‌ها ناتوان بودم. در آن زمان، این موضوع به‌طور وحشتناکی برایم گیج‌کننده بود. مدتی طولانی تقلا کردم و سرانجام در این بخش ریاضی خبره شدم، اما نمی‌توانستم بگویم که چه در ذهنم گذشته بود.

بعدها که بحث تبدیلات[۱] پیاژه را خواندم و متوجه شدم که محتوای تبدیل شده، می‌تواند به‌صورت طرحواره‌هایی پویا در ذهن فرد شکل بگیرد و در نتیجه آن طرحواره‌ها، محتوایی برای تبدیلات سطح بالاتر شوند، فهمیدم که به نقطهٔ اول بازگشته‌ام و با مطالعهٔ سیر تاریخی شکل‌گیریِ مفاهیم ریاضی، دریافتم که این مرحلهٔ آخر هنوز هم برای تک‌تک دانشجویان خیلی سخت است. اما به‌تدریج و با مطالعهٔ بیشتر، متوجه شدم که شناساییِ ساختمان‌های ذهنی که برای درک مفاهیم ریاضی لازم است و پیاژه آن‌ها را به صورت یک نظریهٔ مرحله‌ای[۲] معرفی کرده است، امکان‌پذیر است. این دیدگاه مرا قانع می‌کرد که می‌توانم پاسخ سؤال‌هایم را در مورد شناختِ یادگیری دانشجویان بیابم. پس با ایده‌های پیاژه بیشتر کار کردم و

[۱] Transformations [۲] Stage Theory

آن‌ها را در قالب نظریه‌ای صریح و روشن به‌نام APOS بیان کردم. APOS یک ”علامت اختصاری[۱] “ است که از حرف‌های اول واژه‌های عمل[۲] (A) ، فرآیند[۳] (P) ، شئ[۴] (O) و طرحواره[۵] (S) تشکیل شده است و این نظریه توسط تیمی از ریاضی‌دانان و محققان آموزش ریاضی به سرپرستی من، تولید شد (مراجعه شود به آسیالا[۶] و همکاران ، ۱۹۹۶).

نظریه APOS

نظریهٔ APOS بر پایهٔ این اصل پیاژه بنا شده است که فرد برای یادگیریِ مفاهیم مختلف از جمله مفاهیم ریاضی، سازوکارهای ذهنی معینی را برای ساختن ساختارهای ذهنی به‌کار می‌برد و سپس از این ساختارها، برای پرداختن به موقعیت‌های مسئله‌گونه در ریاضی استفاده می‌کند. با توجه به این اصل، فرد برای هر مفهوم ریاضی، می‌تواند ساختاری ذهنی بسازد که برای آن مفهوم مناسب و برای درک، یادگیری و به‌کارگیریِ آن مفهوم، قابل استفاده باشد (آسیالا[۷] و همکاران، ۱۹۹۶). اگر کسی ساختارهای مناسب را ساخته باشد، مفاهیم ابتدایی اما پایه‌ایِ ریاضی، به‌سادگی و خیلی زود از طریق تجارب زندگی عادی، حدس و آزمایش، و بحث و گفتگو با همسالان، قابل درک می‌شوند. بعدها، با استفاده از چنین ساختارهایی، مفاهیم پیشرفته‌تر را می‌توان بدون مشکل و با هر روش آموزشی (پداگوژی) که بتواند مفهوم را به ساختارها مرتبط کند، یاد گرفت. ولی اگر کسی ساختار مناسبِ یک مفهوم را در اختیار نداشته باشد، تقریباً غیرممکن است که آن را یاد بگیرد.

این جنبه از نظریهٔ پیاژه، می‌تواند پدیده‌ای را در رابطه با یادگیری ریاضی توضیح دهد که به نظر می‌رسد، جهانی است. تقریباً هر کسی، ابتدایی‌ترین مفاهیم ریاضی را از قبیل شمارش، ترتیب، تشکیل مجموعه‌ها و مفهوم عدد، یاد می‌گیرد. به‌تدریج که ریاضی پیشرفته‌تر می‌شود، فرد ممکن است برای مدتی، احساس کند که ایده‌های ریاضی تقریباً واضح هستند و فقط لازم است که نام مفهوم گفته شود یا شاید توضیح داده شود و بعد از آن، تقریباً بلافاصله و به‌صورت خودبه‌خودی، درک می‌شود. این دورهٔ « خودبه‌خودی بودن» به فرد بستگی دارد و می‌تواند برای بازه‌های زمانی متفاوتی (از ماه‌ها تا دهه‌ها) دوام داشته باشد. اما تقریباً برای همه، زمانی فرامی‌رسد که ایده‌ها سخت‌تر می‌شوند و یادگیری می‌تواند با تأخیر صورت گیرد و شاید سرانجام، متوقف شود. در چنین مواقعی است که مداخلهٔ معلمان، همکلاسی‌ها و کتاب‌های درسی، ضروری می‌شود. در چنین مواقعی، طبق اصل پیاژه– که شرح می‌دهد چه وقت مداخله لازم است و چه وقت لازم نیست– آنچه اتقاق می‌افتد این است که انواع مداخله‌ها می‌توانند تعادل موجود

[۱] Acronym [۲] Actions [۳] Processes [۴] Objects [۵] Schemas [۶] Asiala et al [۷] Asiala

ذهنی فرد را بر هم بزنند تا او به تعادلی جدید برسد. این نوع مداخله‌ها زمان‌بَر است، زیرا فرد برای ساختن ساختارهای جدید ذهنی به‌منظور مقابله با مفاهیم پیچیده‌تر، درگیر فرآیند یادگیری می‌شود. به‌تعبیرِ پیاژه، مراحل یادگیری به این ترتیب است که فرد در آغاز، با مفاهیم ابتدایی ساختارهای ذهنی‌اش را کم و بیش به‌صورت خودکار و از طریق تجاربِ معمولی روزانهٔ خود، می‌سازد. سپس به‌تدریج که مفاهیم ریاضی و ساختارهای آن پیچیده‌تر می‌شوند، حتی برای قوی‌ترین پژوهشگران ریاضی نیز درک کامل آن‌ها مشکل می‌شود و نیازمند تأمل و تمرکز بر چیزهایی است که یاد گرفته‌اند. نکتهٔ مهم در فرآیند یادگیری این است که نوع مشکل یا گاهی نقطهٔ توقف برای افراد مختلف، فرق می‌کند. در واقع، می‌توان گفت که وسعت ساختارهای ذهنی که فرد می‌تواند با حداقل مداخله بسازد، نشان دهنده استعداد ریاضی او است.

این اصل، پیامد مهمی برای آموزش دارد؛ این که تدریس باید به دانشجویان کمک کند تا در ساختارهای ذهنی موجودشان، تا جایی که ممکن است، توانایی هضم و جذب ریاضیاتی که با آن مواجه می‌شوند، افزایش یابد. یعنی برای این که دانشجویان پیشرفت بیشتری داشته باشند، تدریس باید کمک کند تا ساختارهای ذهنی جدید و قوی‌تر و توانایی هضم و جذب ریاضی بیشتر و پیشرفته‌تر در دانشجویان ایجاد شود و توسعه یابد.

این ایده‌ها، سؤال‌های مشخصی را در ذهن ایجاد می‌کند از این قبیل که "برای یادگیری یک مفهوم ریاضی خاص، از چه ساختارهای ذهنی می‌توان استفاده کرد و با دانستن آن‌ها، چطور می‌توان به دانش‌آموزان/ دانشجویان در ساختن آن مفاهیم کمک نمود؟ این‌ها از جمله سؤالاتی هستند که نظریهٔ APOS و راهبردهای پداگوژیکی مبتنی بر آن، سعی می‌کنند به آن‌ها پاسخ دهند. بنابر این نظریه، ساختارهای ذهنی برای یادگیری ریاضی شامل عمل‌ها، فرآیندها، اشیاء و طرحواره‌ها است. همچنین سازوکارهای ذهنیِ مورد استفاده برای تولید این ساختارهای ذهنی، شامل درونی‌سازی[۱] و فشرده‌سازی[۲] است. یک عمل عبارت از تبدیل یک شئ فیزیکی یا ذهنی است که نیازمند آموزش مشخص است و لازم است که به‌طور صریح و گام‌به‌گام اجرا شود. شکل‌گیری یک مفهوم ریاضی زمانی در ذهن آغاز می‌شود که یادگیرنده، یک شئ ریاضی را از طریق یک یا چند عمل، تبدیل به شئ یا اشیاء ریاضی دیگری می‌کند. هنگامی که فرد عملی را تکرار کند و بر آن تمرکز داشته و تامل کند، آن عمل می‌تواند طی فرآیندی ذهنی، درونی شود. یک فرآیند، ساختاری ذهنی است که همان کاری را انجام می‌دهد که یک عمل هنگام درونی‌شدن، انجام می‌دهد. از آنجا که همهٔ این‌ها به‌طور کامل در ذهن فرد انجام می‌شود، او می‌تواند جریان اجرای تبدیل را بدون این که مجبور به اجرای صریح هر قدم آن باشد، تصور کند. با توجه به ساختار فرآیند، می‌توان با وارونه کردن یا هماهنگ کردن دو یا چند فرآیند از طریق ترکیب آن‌ها، فرآیند

[۱] Interiorization [۲] Encapsulation

جدیدی ایجاد کرد. اگر کسی از فرآیندی به‌عنوان یک کلیت[۱] آگاهی یابد، می‌فهمد که تبدیلات می‌توانند یا به‌طور صریح یا در تصور وی، روی آن کلیت عمل کنند و ساخته شوند. در چنین حالتی می‌گوییم فرد، این فرآیند را به‌صورت یک شئ ذهنی، فشرده‌سازی کرده است. گاهی هم که فرد با اشیاء ذهنی کار می‌کند، لازم است شئ را در فرآیندی که از دل آن برآمده، مجدداً بسط[۲] دهد (باز کند). هرچند این ساختارها، توصیف می‌کنند که چگونه فرد یک تبدیل واحد را در ذهن می‌سازد، باید توجه داشت که هر ساختاری که برای یک موضوع یا مفهوم ریاضی تشکیل می‌شود، شامل بسیاری اعمال، فرآیندها و اشیاء است که لازم است در یک چارچوب منسجم که طرحواره خوانده می‌شود، سازماندهی شده و به هم متصل شوند. حروف اول ساختارهای ذهنیِ عمل، فرآیند، شئ، و طرحواره، کلمهٔ APOS را تشکیل می‌دهند.

تعیین اعمال، فرآیندها، اشیاء، و طرحواره‌های خاص برای یک مفهوم ریاضی، نیازمند تحقیق و روش‌شناسی خاصی است که هدف این مقاله نیست. با این حال، مطالعهٔ مفهومی از ریاضی دورهٔ ابتدایی مثلاً تقسیم یک عدد بر کسر که یکی از مشکلات متداول دانش‌آموزان و حتی بعضی از معلمان است، می‌تواند مفید باشد. درک درست از تقسیم بر یک عدد، مستلزم این است که نخست آن عدد را یک شئ بدانیم و سپس فکر کنیم که چند تا از آن شئ، در این مقسوم یافت می‌شود؟ حال در مورد مفهوم کسر، مثلاً $\frac{۲}{۳}$ ، فکر کنید. اگر کسی یک شئ خاص، مثلاً یک پای سیب[۳] یا یک مستطیل را بردارد، آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کند و دو تا از آن‌ها را بردارد، یعنی فقط برحسب چنین فعالیتی به $\frac{۲}{۳}$ فکر کند، معلوم می‌شود که او، $\frac{۲}{۳}$ را به‌عنوان ‘‘عمل‘‘، درک کرده است. بعد از تکرار چنین عملی و تمرکز بر آن، این فرد ممکن است بتواند یک فرآیند درونی بسازد که از طریق آن، یک شئ نامعلوم را در تصور خود، به سه قسمت تقسیم کند و دو تا از آن‌ها را بردارد. در این صورت، او $\frac{۲}{۳}$ را یک «فرآیند» در نظر گرفته است؛ درکی که اغلب مردم، بدون سختی زیاد به آن می‌رسند و یک قدم ضروری و مشکل برای درک تقسیم یک عدد بر $\frac{۲}{۳}$ است. مثلاً، برای تقسیم ۵ بر $\frac{۲}{۳}$ ، وقتی پرسیده می‌شود که «چند تا $\frac{۲}{۳}$ در ۵ وجود دارد؟»، این سؤال مستلزم درک $\frac{۲}{۳}$ به‌عنوان یک ‘‘شئ‘‘ است. بدون چنین درک درستی، فکر کردن به جواب این مسئله، سخت است. ولی اگر فرد، فرآیند تقسیم‌کردن به ۳ قسمت و انتخاب ۲ قسمت از آن را که تا حدودی موجودیت انتزاعی دارد، فشرده‌سازی کند، درک این جواب ساده‌تر می‌شود. البته، تجربه نشان می‌دهد که یادگیرندگان برای چنین درکی، نیازمند کمک و آموزش هستند. اما چگونگیِ مداخلهٔ آموزشی برای این که فرآیند $\frac{۲}{۳}$ به‌عنوان یک شئ دیده و خوانده شود، امری نابدیهی است. در بخش بعدی، روش‌هایی را که ممکن است به یادگیرندگان در این امر کمک کند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

---

[۳] Apple Pie نوعی کیک گِرد که در ایران نیز مرسوم شده است.

[۱] totality [۲] De-encapsulate

مطالب فوق، شرحی مختصر از تجزیه و تحلیلی است که مستلزم پژوهش‌های زیاد است و لازم است که برای هر مفهوم ریاضی که می‌خواهیم دانش‌آموزان/ دانشجویان آن را یاد بگیرند، انجام شود. بعد از آشنایی با چگونگیِ به‌کارگیری این ایده‌ها در ریاضیات مقدماتی، نظریهٔ APOS را به‌عنوان صورت‌بندی جدیدی از نظریهٔ پیاژه، به گونه‌ای تبیین می‌کنم که بتواند برای تجزیه و تحلیل یادگیری مفاهیم ریاضی پیشرفته‌تر نیز به‌کار گرفته شود.

پداگوژی مبتنی برAPOS : نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای

کارم را با جستجو برای رویکردهای پداگوژیکی که با این نظریه متناسب باشند، شروع کردم. می‌خواستم راه‌هایی پیدا کنم تا دانش‌آموزان/ دانشجویان را تهییج کنم که پس از تجزیه و تحلیل نظری مفاهیم، هر وقت که لازم بود، ساختارهای ذهنی مورد نیاز را بسازند. متوجه شدم که می‌توان از طریق واداشتن دانش‌آموزان/ دانشجویان به نوشتن برنامه‌های خاص یا فقط کدهای رایانه‌ای، خیلی در این جهت پیش رفت. یعنی برای هر ساخت‌وساز ذهنی شکل‌گرفته پس از تجزیه و تحلیل APOS ، می‌توان یک تکلیف رایانه‌ای مانند نوشتن برنامه یا فقط کد، پیدا کرد که اگر دانش‌آموز/ دانشجویی درگیر انجام آن شود، به احتمال نسبتاً زیاد، خواهد توانست ساخت‌وسازهایی ذهنی بسازد که منجر به یادگیری ریاضی شود. من نمی‌گویم که تکلیف رایانه‌ای، یک ساختار ذهنی است، ولی چنین تکلیفی، تجربه‌ای است که ذهن یادگیرنده را به سمت یک یا چند ساخت‌وساز ذهنی هدایت می‌کند. برای روشن‌تر شدن این بحث، مثالی می‌زنم:

مفهوم تابع را در نظر بگیرید. طبق نظریهٔ APOS ، درک مفهوم تابع با درک ''عمل'' شروع می‌شود. یعنی معمولاً تابع به‌عنوان عبارتی جبری/ مثلثاتی در نظر گرفته می‌شود که با اعداد و نمادی مانند x یا نظایر آن، فهمیده می‌شود. ''عمل'' شامل جایگزین کردن x با یک عدد، انجام محاسبات مشخص در آن عبارت و به‌دست آوردن یک عدد به‌عنوان جواب است. ''عمل'' از خارج هدایت می‌شود، یعنی بر پایهٔ فرمولی است که برای فردِ اجرا کننده، یک عمل خارجی است. با تکرار و تمرکز بر عمل انجام شده، یادگیرنده می‌تواند این عمل را درونی کند[۱] ، یعنی یک ساختار ذهنی بسازد که همان کاری که توسط ''عمل'' از خارج انجام می‌شود، از طریق ''فرآیند'' که یک ساختار ذهنیِ جدید است، تبدیل به یک عمل داخلی شود. ''فرآیند'' به فرد اجازه می‌دهد که ''عمل'' را در حال اجرا (بدون این که واقعاً مجبور به اجرای آن باشد)، تصور کند. پس از آن، می‌توان به تابع این طور نگریست که ''چیزی وارد می‌شود، عملی روی آن انجام می‌شود و چیزی خارج می‌شود''. بعد از این مرحله، می‌توان با هماهنگ کردن دو یا چند

[۱] interiorize

فرآیند، فرآیندی جدید به‌دست آورد، یا آن که فرآیندی را اول در ذهن و بعد اگر لازم بود، با کمک مداد و کاغذ، وارونه یا معکوس کرد. سرانجام، اگر فردی بخواهد عملی روی این فرآیند ذهنی انجام دهد، اول باید آن را به‌عنوان یک کل ببیند و به‌طور ذهنی آن را در یک شیئ فشرده کند تا بتواند از آن، یک طرحواره ذهنی بسازد. (برای جزئیات بیشتر، مقاله آسیالا و همکاران، ۱۹۹۶ را ببینید.) حال، پداگوژی مناسبی که بتوان بر اساس این تجزیه و تحلیل نظری بنا کرد کدام است؟

برای استفاده از این ابزار نظری، لازم است معلم در آغاز، ایده‌ای راجع به نقطهٔ شروع دانش‌آموزان/ دانشجویان برای ایجاد طرحواره‌های ذهنی‌شان داشته باشد. او باید بفهمد که آیا دانش‌آموز/ دانشجو، تابع را تنها به‌عنوان یک ''عمل'' می‌شناسد یا قادر به درک تابع به‌عنوان یک ''فرآیند''هم هست، ولی هنوز نمی‌تواند این ''فرآیند'' را در یک ''شیئ'' فشرده کند. بالأخره، مسئله این است که معلم چگونه می‌تواند به‌کمک مواد آموزشی، فعالیت‌های ذهنی دانش‌آموزان/ دانشجویان را بشناسد تا درس را جلو ببرد. دانش‌آموزان/ دانشجویان نیز برای این که درک خوبی از پیشرفت‌شان داشته باشند، باید با فعالیت‌های ذهنی خود آشنا باشند. در این راستا، یافته‌های پژوهشی به شاخص‌هایی رسیده‌اند تا بتوان به‌کمک آن‌ها و با استفاده از تجزیه و تحلیل APOS، در مورد این که حدوداً، دانش‌آموزان/ دانشجویان در چه مرحله‌ای قرار دارند، حدس‌های معقولی زد. برای مثال، اگر دانش‌آموزی/ دانشجویی اصرار داشت (همان‌طور که بسیاری چنین می‌کنند) که شرط وجود تابع، داشتن فرمولی صریح برای آن است، می‌توان حدس زد که احتمالاً درک این دانش‌آموز/ دانشجو از مفهوم تابع، در سطح عمل است. از سوی دیگر، اگر دانش‌آموز/ دانشجو چگونگی تشکیل مجموعه‌های توابع را بفهمد و تشخیص دهد که مشتق، می‌تواند عملگری باشد که تابع را به تابعی دیگر تبدیل کند، آنگاه شاید تفکر این دانش‌آموز/ دانشجو در مورد تابع در سطح شیئ باشد.

در جریان کار با همکاران مختلف، همه متوجه شدیم که مفاهیم ریاضیِ بسیاری را می‌توان برحسب این اعمال، فرآیندها و اشیاء، تجزیه و تحلیل کرد. چنین تجزیه و تحلیل‌هایی می‌توانست مشکلات دانش‌آموزان/ دانشجویان را برحسب ساخت و سازهای ذهنیِ انجام نشده، توضیح دهد. از سوی دیگر، ما دریافتیم که اگر از دانشجویان می‌خواستیم که عملی ریاضی انجام دهند و یک برنامهٔ رایانه‌ای بنویسند که بیان‌کنندهٔ آن عمل باشد، در اجرای این تکلیف، دانشجویان مایل بودند که این عمل را به‌صورت فرآیند، درونی کنند. حتی هیجان‌انگیزتر این بود که اگر پس از این تکلیف، دانشجو برنامهٔ دیگری می‌نوشت که برنامهٔ اول را به‌عنوان ورودی می‌پذیرفت، آن را به طریقی تبدیل می‌کرد و برنامه جدیدی پس می‌داد. یعنی این دانشجو به احتمال زیاد، قادر شده بود این فرآیند را فشرده‌سازی کند و آن را به‌عنوان یک شیئ

ببیند. حرکت کردن مدام بین عمل و فرآیند در مفهوم‌سازی ایده‌های ریاضی، که برای ریاضی‌ورزی بسیار ضروری است، تقریباً بدون دردسر، از این پداگوژی نتیجه شد (ولر[۱] و همکاران، ۲۰۰۳).

بر اساس این ایده‌ها، یک رویکرد پداگوژیکیِ سازمان یافته ابداع کردیم. در این رویکرد، مواد درسی به واحدهای کوچکی تقسیم می‌شود که آموزش هر کدام، یک هفته طول می‌کشد. هر هفته، شامل انجام چرخه‌ای از سه نوع کار است. کار نخست این است که دانشجویان (اغلب در گروه‌های مشارکتی)، در آزمایشگاه رایانه روی نوشتن برنامه‌ها و کدهای طراحی شده برای پروراندن ساخت و سازهای ذهنی که می‌تواند به آن‌ها در درک مفاهیم آن واحد کمک کند، کار می‌کنند. آن‌ها این کار را خارج از کلاس انجام می‌دهند. دوم این که در کلاس درس، دانشجویان (باز هم به صورت گروهی) روی تکلیف‌هایی کار می‌کنند که به گونه‌ای طراحی شده‌اند که به دانشجویان، در تبدیل ساختارهای ذهنی‌شان به درک مفاهیم ریاضی، کمک کنند. سوم، با این فرض که اکثر دانشجویان به‌تدریج به درک و فهمی از ریاضی رسیده‌اند که با نوع درک ریاضیدانان متناسب است، تمرین‌هایی طراحی می‌شوند که هدف آن‌ها، تمرین، تقویت و گسترش دانشی است که در حال ایجاد است (آسیالا و همکاران، ۱۹۹۶).

ما درس‌های دورهٔ کارشناسی را مبتنی بر این رویکرد، طراحی و اجرا کرده‌ایم. تمام کتاب‌های درسی نوشته شده دارای این ساختار هستند و محتوای آن‌ها، نشان‌دهنده این چرخهٔ سه قسمتی است. با استفاده از هر دو روش پژوهش کمی و کیفی در مورد عملکرد و نگرش دانشجویان، پژوهش‌های تجربی انجام داده‌ایم. نتایج این پژوهش‌ها حاکی از این بود که این رویکرد، می‌تواند در کمک به دانشجویان برای یادگیریِ مفاهیم پیشرفتهٔ ریاضی در موضوعاتی مانند انواع درس‌های ریاضی عمومیِ دانشگاهی، ریاضی گسسته، جبر مجرد، و جبر خطی خیلی مؤثر باشد (ولر و همکاران، ۲۰۰۳). البته باید اذعان داشت که این رهیافتِ پداگوژیکی مستلزم وجود مدرسانی است که نه تنها فکرشان را در مورد یادگیری و تدریس به‌طور چشم‌گیر و معنادار تغییر داده‌اند، بلکه تلاش قابل‌توجهی برای یادگیری این روش نیز به خرج می‌دهند. ما معتقدیم که این استلزامات، از جمله چیزهایی است که گزینش گستردهٔ این روش را در تدریس ریاضی دورهٔ کارشناسی، محدود کرده است.

داستان باب

در سال تحصیلی ۱۹۸۸–۱۹۸۷، من به‌عنوان یکی از والدین، به‌طور داوطلب در «برنامه آزاد[۲]» در مدسه مارتین لوتر کینگ پسر[۳] در شهر کمبریج واقع در ایالت ماساچوست، به کلاس هشتمی‌ها جبر

[۱] Weller [۲] Open program [۳] Martin Luther King Jr. School

تدریس می‌کردم. پسرم، اُمو[۱] در این کلاس بود و از دوستانش هم خواسته بود که به این کلاس بیایند تا موقع یادگیری جبر، احساس تنهایی نکند. یکی از دوستانش که می‌خواست عضو گروه باشد، جدول ضرب بلد نبود. من او را در این کلاس پذیرفتم و هر روز کنار هم، کار می‌کردیم. وقتی به سؤالاتی در مورد محور اعداد رسیدیم، متوجه شدم که موقع جمع کردن اعداد صحیح روی محور اعداد، او همیشه پاسخ‌های یکسان به‌دست می‌آورد. یعنی، او دائم به سؤالی غیر از آنچه کتاب می‌پرسید، پاسخ می‌داد. در حقیقت، این دانش‌آموز فقط یک سؤال در مورد اعداد در ذهنش داشت و آن، ''چندتا'' بود. مشکل من هم پیدا کردن سؤال دیگری در مورد اعداد بود که در ذهن وی ایجاد کنم.

سرانجام، سؤالِ ''کدام راه'' را انتخاب کردم. این سؤال، بخشی از روال روزانه و اصطلاحات مورد استفاده او بود. مثلاً او می‌دانست چطور بپرسد که '' کدام راه به مرکز خرید؟'' یا ''کدام راه به منزل دوستش؟'' می‌رود، اما نمی‌توانست سؤال‌های ''چندتا'' را با سؤال‌های ''کدام راه''، به‌عنوان بخشی از مفهوم عدد، تلفیق کند. در نتیجه یکی از دغدغه‌های من این شد که چگونه سؤال‌هایی از جنس ''کدام راه'' را با درک وی از عدد، در شرایطی برابر با ''چندتا'' قرار دهم.

یک روز برای رفتن از کمبریج به بوستون، وارد «تی‌استاپ[۲] » در خط «رِد لاین[۳] » در ایستگاه متروی «سانترال اسکوئر[۴] » شده و متوجه شدم که در بلندگو از همه مسافران خواسته می‌شود که اول، نسبت به جهت حرکت خود، تصمیم بگیرند [منظور از چه مبدئی به چه مقصدی] و بر اساس آن، خطِ خود را انتخاب کنند – یعنی دو پاسخ برای سؤال ''کدام راه'' وجود داشت. در این موقع، ایده‌های کواین[۵] را در مورد فرآیند تولید بعضی از مفاهیم ریاضیات مقدماتی از طریق یادگیری تجربی به یاد آوردم– ایده‌ای که برنامه آموزشیِ ''برنامه آزاد'' در مدرسه مارتین لوترکینگ پسر، از آن الهام گرفته بود. با مشاهدۀ این پدیده، به‌همراه سایر معلمان و دانش‌آموزان مدرسه، به این ایستگاه مترو رفتیم و از دانش‌آموزان خواستیم که در مورد سوار شدن به مترو مطلب بنویسند، حرف بزنند و نقاشی کنند. ما این بازنمایی‌ها[۶] را به‌عنوان ''بازنمایی عقل سلیم[۷] '' آن‌ها در نظر گرفتیم – آنچه که کواین آن را ''گفتمان معمولی'' می‌خواند. سپس از دانش‌آموزان خواستیم که جنبه‌های مهم این بازنمایی‌ها را به‌عنوان ویژگی‌های آن‌ها شناسایی کنند. آنگاه با دانش‌آموزان دربارۀ ویژگی‌های بدیهی مانند سوار شدن در ابتدای مسیر و پیاده شدن در مقصد و ویژگی‌هایی که خیلی هم بدیهی نبودند، مثل مکان‌ها و موقعیت‌های نسبی توقفگاه‌ها، بحث و گفتگو کردیم.

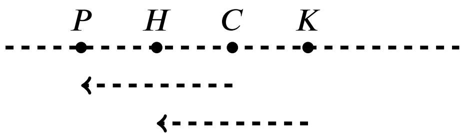
[۴] Central Square این ایستگاه مترو، در بین راه دانشگاه هاروارد تا اِم.آی.تی قرار دارد و واقع در خیابان ماساچوست است.

[۱] Omo [۲] T- Stop [۳] Red Line [۵] Quine [۶] Representation [۷] Common sense

کواین این فرآیند، یعنی حرکت از گفتمان معمولی به زبان منظمِ مورد استفاده در ریاضی را ”ریاضی‌وار کردن[۱] “ رویدادها می‌شناسد. با اقتباس از نظریهٔ کواین، بازنمایی‌های عقل سلیم را ”حرف عامه[۲] “ و بازنمایی‌های منظم یا قاعده‌مند را ”حرف خاص[۳] “ نامیدیم. سپس دانش‌آموزان را درگیر فرآیند ساخت نمادها کردیم؛ نمادهایی در قالب بازنمایی‌های تصویری و مجرد برای ویژگی‌هایی که قصد ریاضی‌وار کردن آن‌ها را داشتیم. به این ترتیب، برای ویژگی‌های گوناگون این رفت و آمدهای درون‌شهری، بازنمایی‌های تصویری و بازنمایی‌های مجرد تولید کردیم.

با گذشت زمان، مشخص شد دانش‌آموزانی که این رفت و آمدها را ریاضی‌وار کردند، استعاره‌ها و تصوراتی قوی برای جمع و تفریق کسب کرده‌اند که با استعاره‌های آن‌ها برای اعمال حسابی، خیلی تفاوت داشت. برای نمونه، می‌توان به مفهوم ”جابجایی“ به‌عنوان یک شئ ریاضی برای پاسخ دادن به دو نوع سؤال ”چندتا“ و ”کدام راه“ اشاره نمود. دو سؤال زیر را در نظر بگیرید: ”روی نقشه رِدلاین، میدان پورتر[۴] نسبت به سانترال اسکوئر در کمبریج، کجا قرار دارد؟“ و ”هاروارد اسکوئر[۵] نسبت به کندال اسکوئر[۶]، کجا قرار دارد؟“

مبنای هر دو سؤال، مفهوم موقعیت نسبیِ دو ایستگاه در مسیر رِدلاین است و پاسخ هر دو، یکسان است: ”دو ایستگاه دورتر“. این پاسخی به دو نوع سؤال ”چندتا“ و ”کدام راه“ است. همچنین، نمایش هندسی این پاسخ، جابجایی دو مکان یا دو نقطه است. دانش‌آموزان به تغییر مکان از سانترال اسکوئر به پورتر اسکوئر، به‌صورت شروع از سانترال اسکوئر و سپس دو واحد جابجایی فکر کردند و حرکت از کندال اسکوئر به هاروارد اسکوئر را به‌صورت شروع از کندال اسکوئر و دو واحد جابجایی تصور کردند. بنابراین دو تغییر مکان داریم که دارای تعداد مساوی توقف بوده و در جهت یکسان هستند، یعنی این دو حرکت، جابجایی یکسانی را نشان می‌دهند.



ما این نمودار را ”بازنمایی تصویری“ برای این رفت و آمدها می‌خوانیم. بازنماییِ ”حرف عامه“، گزاره‌های زیر هستند:

پورتر دو ایستگاه دورتر از سانترال است.

هاروارد دو ایستگاه دورتر از کندال است.

[۱]Mathematizing [۲]Ordinary Discourse [۳]Regimented Language [۴]Porter Square [۵]Harvard Square
[۶]Kendal Square

''حرف خاص'' شامل اشارهٔ دقیق به مکان و موقعیت نسبی ایستگاه‌ها است. این بازنمایی، عمل ''جمع'' را با حرکت از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر در یکی از دو جهت و علامت ''تفریق'' را با مقایسهٔ ایستگاه پایانی (مقصد) نسبت به ایستگاه آغازین (مبدأ)، نشان می‌دهد. به عبارت دیگر،

با شروع از کندال اسکوئر و دو ایستگاه نقل مکان، به هاروارد اسکوئر می‌رسیم.

این''حرف خاص''، منجر به جمع می‌شود.

ایستگاه هاروارد در مقایسه با کندال، ۲ ایستگاه دورتر است

این''حرف خاص''، منجر به تفریق می‌شود. برای این ریاضی‌ورزی[۱] ، بعضی از ایستگاه‌ها را به‌عنوان معیار[۲] انتخاب کردیم. سپس با دانش‌آموزان در مورد اختصاص دادن نمادهایی مانند ۰ (صفر) برای معیار، $x_۱$ برای مکان کندال (یکی از ایستگاه‌ها)، $x_۲$ برای مکان هاروارد (یک ایستگاه دیگر)، و Δx برای جابجایی، بحث و گفتگو کردیم. در چنین وضعیتی، اولین جملهٔ ''حرف خاص'' چنین می‌شود:

$$x_۱ + \Delta x = x_۲$$

و دومین ''حرف خاص'' می‌شود:

$$x_۲ - x_۱ = \Delta x$$

ما می‌توانیم فرآیند ریاضی‌وار کردن این نوع جمله‌ها را در هشت مرحلهٔ زیر خلاصه کنیم:

۱. شناسایی جملهٔ مورد مشاهده.

هاروارد دو ایستگاه دورتر از کندال است.

۲. شناسایی اسامی در جمله‌ها.

هاروارد، کندال.

۳. شناسایی مُسند (خبر یا دلالت) جمله‌ها.

در این حالت، مُسند رابطه تساوی (''است'') بین اسم (''هاروارد'') و شئ حاصل از به‌کارگیری عمل (''دو ایستگاه دورتر '') روی اسم (''کندال'') است.

۴. ساخت یک نماد تصویری برای اسم(ها).

این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.

۵. ساختن یک نماد تصویری برای مُسند.

این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.

[۱] Mathematization [۲] Benchmark

۶. ساختن یک بازنمایی تصویری برای این جمله.

این نمودار، مسیر رفت و آمد شده در بالا را نشان می‌دهد. این کار را دانش‌آموزان انجام می‌دهند.

۷. ترجمهٔ جملهٔ مشاهده شده، به جمله‌ای با استفاده از زبان منظم یا قاعده‌مند.

دو راه برای انجام این کار وجود دارد:

الف. با شروع از کندال، دو ایستگاه بعد به هاروارد می‌رسیم.

ب. موقعیت هاروارد در مقایسه با کندال، ۲ ایستگاه دورتر است.

(۱) شناسایی نمادهای مرسوم که برای ترجمهٔ زبان منظم یا قاعده‌مند به نمادهای مرسوم ریاضی و انجام آن ترجمه، مورد نیاز هستند. برای ایستگاه‌های هاروارد و کندال، می‌توانیم به‌ترتیب $L(H)$ و $L(K)$ و علامت + را برای ''حرکت'' و − را برای ''در مقایسه با'' در نظر بگیریم. این نمادگذاری، منجر به بازنمایی نمادین مجرد دو جملهٔ زیر می‌شود:

الف. $L(K) + -۲ = L(H)$

ب. $L(H) – L(K) = -۲$

این دستورالعمل برای تبدیل یک تجربه به بیان ریاضی، که می‌توان آن را در طیف گسترده‌ای از موقعیت‌ها اعمال کرد، به‌همراه دانش‌آموزانی که واقعاً این موقعیت را تجربه می‌کنند، نشان‌دهندهٔ دستاورد اصلی یک پداگوژی است که ''یادگیری تجربی'' نامیده می‌شود.

یک سنتز

در تلفیق ایده‌هایی که در برنامهٔ درسی جبر توضیح داده شد، از ساختار توصیف شده در داستان باب، به‌عنوان چارچوب هدایت‌کننده استفاده شد. در این برنامه، به ''عمل''، ''فرآیند''، و ''شیٔ''های ممکنی که دانش‌آموزان می‌توانند در ذهنشان بسازند، به همان گونه که در داستان اِد توصیف شد، توجه شده است. برای نمونه، بخشی از برنامه شامل استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای با بازی‌های معین و بحث و نوشتن درباره آن‌هاست. از سوی دیگر، بسیاری از جزئیات این بازی‌ها، با توجه به لزوم ایجاد ساخت‌وسازهای ذهنی و معینِ پیشنهاد شده توسط نظریهٔ APOS ، طراحی می‌شوند. ما می‌توانیم از تلفیق این دو ''داستان'' استفاده‌های بسیاری بکنیم. مثلاً رابطه‌ای مانند زیر را در نظر بگیرید که در هر کتاب جبر پایهٔ دبیرستانی دیده می‌شود:

$$a - b = a + -b$$

در این رابطه، هر دوی a و b می‌توانند عدد صحیح باشند. همان‌طور که در بحثِ رفت و آمدهای داستان باب دیدیم، یک عدد صحیح را می‌توان یک حرکت با تعداد معینی از قدم‌ها و در جهتی معین، یا مکانی روی محور اعداد قلمداد کرد. پس سؤال این است که عدد صحیح، یک حرکت است یا یک مکان؟ نظریهٔ APOS در داستان اِد، این ابهام ظاهری را حل می‌کند. اگر عدد صحیح را به حرکت تعبیر کنیم، آنگاه بنابر نظریهٔ APOS ، یک فرآیند است و فشرده‌سازی آن فرآیند، شیئی است که در مورد عدد صحیح، مکانی روی محور اعداد است. با سازوکار فشرده‌سازی و وارونه کردن این فرآیند، ممکن است تعبیرمان را از عدد صحیح به‌عنوان یک حرکت یا یک مکان، بارها تغییر دهیم. حال فرض کنید از مکان b شروع به (این) حرکت می‌کنیم:

$$a + -b$$

این تغیر مکان، با حرکت از معیار (مبدأ) به مکان a و انجام حرکت $-b$ برای رسیدن به مکان $a + -b$ که برعکسِ فرآیند فشرده‌سازی است، انجام می‌شود (گاهی آن را $a + -b$ نیز می‌خوانیم). حالا می‌توانیم با شروع حرکت از مکان b، حرکت $a + -b$ را ایجاد کنیم که بر اساس تعبیرمان از عمل ”جمع“، ما را به مکان

$$b + (a + -b)$$

می‌رساند که این هم با استفاده از خاصیت‌های استاندارد اعداد صحیح، برابر با مکان a است [۱]. به‌طور خلاصه، به ما گفته شده اگر از b شروع کرده و حرکت $(a + -b)$ را ایجاد کنیم، آنگاه به a می‌رسیم. علاوه بر این، بنابر تعبیرمان از ”تفریق“، این حرکت فقط $a - b$ است. پس داریم

$$a - b = a + -b.$$

این رابطه به نظر روشن‌تر از آن است که برای ریاضی‌دانانِ باتجربه بیان شود، اما به‌صراحت می‌توان گفت که تقریباً در هر کتاب درسیِ جبر دبیرستانی وجود دارد و برای دانش‌آموزان، از قسمت‌های سخت شروع جبر است.

ما برای تولید برنامه برای کلاس درس، محتوا را به قطعاتی تقسیم می‌کنیم. هر قطعه را با تجربه‌ای، مثل یک بازی، شروع می‌کنیم. دانش‌آموزان بازی را انجام داده و اطلاعات چشم‌گیری را ثبت می‌کنند. سپس هر دانش‌آموز، توصیفی از آنچه را که موقع انجام بازی اتفاق افتاده می‌نویسد. آن‌ها به نوشتن جمله‌های کامل و منظم در بندهای مختلف یا همان ”حرف عامه“، تشویق می‌شوند. سپس در یک

[۱] قبل از این که این روابط توضیح داده شوند، این خواص در برنامهٔ درسی ریاضی ما آمده است (این پانویس از نویسندگان است).

بحثِ کلاسی، معلم به دانش‌آموزان در تشخیص ویژگی‌های بازی یعنی ''حرف خاص''، ''عمل''هایی که با این ویژگی‌ها اجرا می‌شوند، و گزاره‌ای که هدف بازی یا ''فرآیند ریاضی‌ورزی''را توصیف می‌کند، یاری می‌رساند. آنگاه از دانش‌آموزان خواسته می‌شود برای پاسخ‌گویی به سؤالات معینِ طراحی شده برای پیش بردن آن‌ها به سمت ریاضی‌وار کردن یک موقعیت، بیشتر به‌صورت گروهی کار کنند. این بحث، با توصیف معلم از زبان و نمادهایی که توسط ریاضیدان‌ها استفاده می‌شود، به پایان می‌رسد. همچنین می‌توانیم از این رویکرد در تعبیر دو معادلهٔ خیلی مهم که در دروس ریاضی بعد از جبر می‌آید، استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} x_۲ - x_۱ &= \Delta x \\ x_۱ + \Delta x &= x_۲ \end{aligned}$$

بنابر تعبیرمان از تفریق، رابطهٔ اول مبین این است که نتیجهٔ مقایسهٔ $x_۲$ با $x_۱$ ، Δx است. یعنی این حرکتی است که ما را از $x_۱$ به $x_۲$ می‌برد. به عبارت دیگر، اگر از $x_۱$ شروع کنیم و حرکت Δx را انجام دهیم، به $x_۲$ می‌رسیم که بنا به تعبیرمان از جمع، دقیقاً معادلهٔ دوم است.

البته این دو معادله، چیزی بیش از حساب ساده را شامل نمی‌شود، اما برای انجام دادنِ همان حساب با هر نوع درک و فهمی، دانش‌آموزان به تعبیرها یا استعاره‌های مفیدی برای این معادلات احتیاج دارند. ما معتقدیم استعاره‌هایی که برای جمع و تفریق اعداد صحیح ارائه کرده‌ایم، می‌توانند تعبیرهای لازم را فراهم کنند.

یک مثال

به‌عنوان آخرین مثال، به اختصار، رئوس مطالب برنامهٔ درسی برای موضوع حساب پیمانه‌ای[1] که مبتنی بر چند بازی خاص است، ارائه می‌شود. در بحث این بازی‌ها و آنچه که در کلاس درس اتفاق می‌افتد، توضیح می‌دهیم که چطور این پداگوژی، به ایده‌های مطرح در داستان‌های اِد و باب، مربوط می‌شود.

اولین هدف این واحد درسی برای دانش‌آموزان، درک عمل ریاضیِ ''تقسیم با باقیمانده''، برای تقسیم عدد صحیح مثبت a بر عدد صحیح مثبت b برحسب معادلهٔ کلاسیک زیر است:

$$a = qb + r, \qquad r = ۰, ۱, ۲, \dots, b - ۱. \qquad (۱)$$

[1] Modular Arithmetic

این بخش از درس، با یک بازی به نام ''چرخیدن به دور مکان‌ها[۱] '' شروع می‌شود. در این بازی، دوازده جایگاه وجود دارد که نشان‌دهندهٔ اعداد روی صفحه ساعت یا دایره‌البروج سال‌های چینی[۲] است. در آغاز بازی، یک جایگاه به‌عنوان مبدأ انتخاب می‌شود (به‌طورکلی، انتخاب‌ها توسط دانش‌آموزان کلاس با قدری راهنمایی از جانب معلم انجام می‌شود) و در طول بازی، یک دانش‌آموز در آن جایگاه می‌نشیند. بازی به این ترتیب است که دانش‌آموزان، یک عدد صحیح انتخاب می‌کنند و دانش‌آموز دوم به محلِ شروع می‌رود و با حرکت از میان جایگاه‌ها، آنقدر می‌شمارد تا به عدد انتخاب شده برسد. در حین حرکت دانش‌آموز دوم، دانش‌آموز اول که در جایگاه نشسته، تعداد دفعاتی را که دانش‌آموز دوم از جلوی او گذشته و همچنین جایگاه آخری را که به آن می‌رسد، یادداشت می‌کند.

ویژگی‌های این بازی عبارت‌اند از: مکانِ شروع، تعداد مکان‌هایی که باید از آن‌ها گذشت، تعداد گردش‌ها و مکان پایانی. عمل این بازی، شمردن مکان‌ها است و گزاره‌ای سؤالی مبنی بر این که ''چند گردش وجود دارد''. مقصود از این بازی برای دانش‌آموزان این است که فرآیند حرکت از میان جایگاه‌ها و گردش به دور دایره را در ذهن خود بسازند. ما این کار را نخست با واداشتنِ دانش‌آموزان به ضرب کردنِ اعداد صریح b در اعداد q و اضافه کردن مقادیر r که کمتر از b هستند و دوم، با درونی کردن این عمل به فرآیندی که همین کار را می‌کند، انجام می‌دهیم. دلیل انجام این کار آن است که یک تجزیه و تحلیل APOS ، فرآیند ذهنی زیربنایی (۱) را به‌عنوان عکس فرآیند ضرب کردن b با q و اضافه کردن r بیان می‌کند.

بازی بعدی هم به همین شکل انجام می‌شود با این تفاوت که این بار، به‌جای انتخاب تنها یک عدد برای شروع برای تعداد چرخش‌ها، دانش‌آموزان عدد دیگری به‌عنوان میزان افزایش آن تعداد نیز (که باید عددی بین ۰ تا ۱۱ باشد)، انتخاب می‌کنند. اساساً ویژگی‌های این بازی نیز با بازی قبلی یکسان است، اما عمل ضربِ تعداد گردش‌ها در ۱۲ و میزان افزایش برای پاسخ به این گزاره که ''چند جایگاه پیموده شده است؟''، به آن اضافه شده است. با این ریاضی‌ورزی، دانش‌آموزان به درک فرمول اصلیِ تقسیم با باقیمانده (۱) هدایت می‌شوند. این بازی، بیانگر یک فرآیند ذهنی است که در آن، گذشتن از دوازده جایگاه، در یک ''گردش[۳] '' فشرده‌سازی شده است.

بازی بعدی برای کمک به دانش‌آموزان در معکوس کردن فرآیند ذهنی ضرب کردنِ تعداد گردش‌ها در ۱۲ و اضافه کردن میزان افزایش، طراحی شده است. این بازی با در نظر گرفتن دوازده جایگاه به نمایندگی از اعداد روی صفحه ساعت نیز، انجام می‌شود و عددِ ساعت‌ها برای نشان دادن زمان سپری

[۱]Winding Around Positions [۲]Chinees Years Zodiac [۳]Wind

شده است. با کار کردن به‌صورت گروهی، دانش‌آموزان از ۱۲ شروع می‌کنند و ساعت را می‌شمارند تا تعداد گردش‌ها و میزان افزایشی که زمان نهایی را روی (صفحه) ساعت نشان می‌دهد، تعیین کنند. ویژگی‌های این بازی عبارت‌اند از: زمان سپری شده، تعداد گردش‌ها، و باقیمانده یا زمان پایان. در این بازی، عمل شامل تقسیم زمان سپری شده بر ۱۲ برای یافتن تعداد گردش‌ها (خارج قسمت) و زمان پایان (باقیمانده) است. ریاضی ورزیِ این بازی، تقسیم با باقیمانده است و با همان فرمول (۱) نمادگذاری می‌شود، با این تفاوت که در اینجا، بیان‌کننده معکوس آن فرآیند است که شامل ضرب تعداد گردش‌ها در ۱۲ و اضافه کردن میزان افزایش برای به‌دست آوردن کل بود. در حالی که فرآیند معکوس، شامل شروع با کل، تعیین تعداد گردش‌ها و تعیین باقیمانده است.

حال می‌توان همهٔ این بازی‌ها را با جایگزین کردنِ هفت روز هفته به‌جای دوازده ساعت، تکرار نمود. سپس با بحث کردن راجع به آن چه که در همهٔ این بازی‌ها مشترک است، یعنی ریاضی‌وار کردن این بازی‌ها، به این جمع‌بندی می‌رسیم که برای به‌دست آوردن مفهوم یک عدد صحیح به پیمانهٔ n به‌طوری که در آن n، برابر ۱۲ ، ۷، یا هر عدد صحیح مثبت دیگری باشد، همنهشتی به پیمانه n ، افراز مجموعه‌هایی از اعداد صحیح و رابطهٔ بین هم‌ارزی و افراز را مجاز می‌سازد.

سپس می‌توان برای انجام حساب، به بازی‌های ساعت و روزهای هفته با استفاده از همان منظرِ معرفت‌شناسی و همان پداگوژی بازگشت. برای عمل جمع، به‌سادگی می‌توان بازی گردش را با دو عدد انجام داد که عدد اول نقطهٔ شروع (ساعت ۱۲ یا یکشنبه) و عدد دوم نقطهٔ پایان است. ایدهٔ عمیق ریاضی موجود در این بازی (که به احتمال زیاد به همین دلیل، در دسترس دانش‌آموزان قرار می‌گیرد) آن است که می‌توان برای جمع کردن دو عدد a و b به پیمانهٔ n یا اول آن‌ها را جمع کرد و بعد هم‌ارز آن را در پیمانهٔ n یافت، یا اول هم‌ارز آن‌ها را یافت و بعد در پیمانهٔ n آن‌ها را جمع کرد. البته ویژگی‌های گروه $\mathbb{Z}_n$ با عمل جمع به پیمانهٔ n را می‌توان به‌طور کامل برحسب گردش به دور ساعت یا در تقویم، مورد بحث قرار داد.

برای عمل ضرب، بازی جمع را چندین بار با همان عدد انجام می‌دهیم. این کار باعث می‌شود دانش‌آموزان به ضرب، به‌عنوان تکرار جمع توجه کنند. پداگوژی استفاده شده در اینجا نیز کاملاً مثل قبلی‌ها شامل بحث گروهیِ دانش‌آموزان، گفتگو راجع به ویژگی‌ها، ریاضی‌ورزی از طریق انجام اعمال روی این ویژگی‌ها، ارزشیابی گزاره‌ها و تخصیص نمادها است که نتیجه همهٔ این‌ها، درک مفهوم ضرب به پیمانهٔ n است. چون مبناهای ۱۲ و ۷ مورد استفاده قرار گرفتند، دانش‌آموزان می‌توانند مستقیماً پدیدهٔ ریاضیِ وضع اصول موضوع برای یک میدان را که در دستگاه پیمانهٔ ۷ صدق می‌کند اما در دستگاه پیمانهٔ

۱۲ صدق نمی‌کند، تجربه کنند. حتی ممکن است بعضی از دانش‌آموزانِ باهوش‌تر، به فکر کردن در مورد ویژگی‌های ۱۲ و ۷ که منجر به این تفاوت می‌شود، علاقه‌مند شوند.

پروژهٔ جبر و جنبش حقوق مدنی

ایالات متحدهٔ آمریکا برای پایه‌ریزی اقتصادیِ نظام طبقاتی ایجاد شده بعد از جنگ داخلی، صنعت فولاد را با به خدمت گرفتن برده‌وار مردان جوانِ سیاه پوست در آلاباما[۱] ساخت و صنعت نساجی‌اش را بر پایهٔ حقوق ناچیزی که بین کارگران پنبه‌چین در می‌سی‌سی‌پی توزیع می‌کرد[۲] ، بنا نهاد. جنبش حقوق مدنی، مظاهر نظام طبقاتی را با ایجاد خواست عمومی برای امکانات رفاهی همگانی، رأی‌گیری و حزب دموکرات ملی، برچید. با وجود این، آشکارترین مظهر این نظام طبقاتی، در مدارس عمومی باقی مانده است. پروژهٔ جبر، خَلَف مستقیم جنبش حقوق مدنیِ سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۶۵ در آمفی تئاتر می‌سی‌سی‌پی، درست سروقتِ این بُعد از کارِ ناتمام جنبشِ ملت می‌رود.

موضوع بحث ما این است که با استیلای فناوری اطلاعات و پیچیدگی فزایندهٔ جامعه، ریاضی هم مانند خواندن و نوشتن، بخش اصلی سواد شهروندی است. یعنی تاریخ نشان می‌دهد که ریاضی‌دانان و متخصصان آموزش ریاضی در آمریکا خواسته یا ناخواسته، به وسط تنگناهای بنیادی اجتماعی هل داده شده‌اند و از آن‌ها انتظار رفته است که برای خروج از تنگناهایی مانند توافق و سازگاری آرمان‌ها در اعلامیه استقلالِ آمریکا[۳] و مواجههٔ قانون اساسی ایالات متحده با ساختارهای نژادی و طبقاتی و میراث برده‌داری و تبعیض نژادی[۴] ، راه‌حل‌های مناسب ارائه دهند. حاصل آن که، در سال ۱۸۷۵، کنگره حاضر نشد درخواست رئیس جمهور را برای متمم مشروطیتِ تضمین حق آموزش برای همهٔ کودکان از جمله برده‌های آزاد شده در سطح دولت فدرال، مورد رسیدگی قرار دهد. کنگره، لایحهٔ قانونی حقوق مدنی را تصویب کرد، اما دیوان عالی در سال ۱۸۸۳، اعلام کرد که کنگره حق نداشته است این کار را انجام دهد و این طور شد که صحنه برای هشتاد و یک سال تبعیض‌های جدی نژادی و طبقاتی مهیا گشت.

دادگاه تصمیم گرفت که به‌منظورِ دسترسیِ همگانی به امکانات رفاهی، متممی بر قانون اساسی بزند که از طریق آن، مردم به‌جای شهروندان کشور، شهروندان ایالت‌ها باشند، در حالی که طبق قانون اساسی، حق رأی و عضویت در ساختارهای حزبی سیاسی کشور و آموزش در مدارس دولتی، برایشان محفوظ بماند.

---

[۱] Blackmon, Slavery by Another Name [۲] Barry, Rising Tide; Lemann, Redemption and the Promised Land [۳] The Declaration of Independence [۴] Jim Crow

حکم دیوان عالی کشور در سال ۱۹۵۴، این وضعیت قانون اساسی در ارتباط با آموزش کودکان کشور را به چالش نکشید. بلکه بند ”حمایت برابر[۱] “ از متمم چهاردهم قانون اساسی را تأیید کرد که طبق آن، ایالت‌ها به‌جای دولت فدرال و بر اساس قانون اساسی، موظف به فراهم نمودن دسترسی برابر به آموزش مدرسه‌ای دولتی برای تمام شهروندان هستند. همان‌طور که جیمز بریانت کونانت در سال ۱۹۶۱ به ما یادآوری کرد، آشکارترین تجلی نظام طبقاتی کشور، خود را در نظام آموزشی نشان داد (کونانت، ۱۹۶۱).

این نابرابری در سال ۱۹۶۸ تأیید شد، زمانی که چهارصد دانش‌آموز دبیرستانی مکزیکی- امریکایی، مدرسه را به قصد شرکت در راهپیمایی به‌منظور تقاضا برای برخورداری از امکانات فیزیکی بهتر و معلمان بهتر، ترک کردند. مادران آن‌ها نیز شکایت کردند و مورد آن‌ها یعنی ”مدرسهٔ مستقل سن آنتونیو در منطقهٔ رودریگز“ در ۲۱ مارس ۱۹۷۳، مورد تصمیم‌گیری قرار گرفت:

رأی اکثریت دادگاه لوئیس پاول در رودریگز این است که آموزش یک حق اساسی نیست، چون به‌طور صریح یا ضمنی در قانون اساسی تضمین نشده است.

حکم پاول در عمل تضمین کرد که آموزش مدارس دولتی، واضح‌ترین مظهر نظام طبقاتی کشور بماند که در حال حاضر از طبقه هم گذشته و به نژاد نیز گسترش یافته است. این وضعیت هنوز هم برقرار است.

وقتی در سال ۱۹۶۰، رابرت کندی به ریاست جمهوری آمریکا رسید، دانشجویان سیاه‌پوست در دانشگاه‌ها و کالج‌های سیاه‌پوستان، پا به عرصهٔ تاریخ گذاشتند: ”در اول فوریهٔ سال ۱۹۶۰، چهار دانشجوی آفریقایی- آمریکایی در محوطهٔ غذاخوری وول‌ورثِ گرینز برو در ایالت کارولینای شمالی، تحصن کردند و مؤدبانه درخواست خدمات نمودند. تقاضای آن‌ها رد شد. وقتی از این دانشجویان خواسته شد که آنجا را ترک کنند، آن‌ها در صندلی‌های خود باقی ماندند. مقاومت منفی و تحصن صلح‌آمیزشان، به مشتعل شدن جنبش جوانان در به چالش کشیدنِ نابرابریِ نژادی در سراسر جنوب، کمک کرد“.

دانشجویانِ متحصن خواستار تغییر عملی در وضعیت قانونی خود بودند: به‌منظور دسترسی به امکانات رفاهی همگانی، آن‌ها خواستار داشتن موقعیت و شأنی برابر با سایر شهروندان کشور بودند نه این که تنها شهروندان ایالتی به‌حساب آیند. این تقاضا یک سال بعد با اعتراض ”سواران آزادی[۲]“، شفاف‌تر شد.

[۲] Freedom Riders، در این حرکت، سیاه‌پوستان برای اولین بار وارد اتوبوس‌های عمومی سفیدپوستان شدند و این خود سرفصل جدیدی در مبارزات ضدنژادپرستی در ایالات متحده بود.

[۱] Equal Protection

با تشکر زیاد از الا بکر[۱]، جنبش تحصن تبدیل به شبکه‌ای از رهبران تحصن با عنوان ''کمیته هماهنگی دانشجویی عدم خشونت[۲] '' یا SNCC شد. سپس اَمزی مور، از این انرژی تولید شده توسط نهضت SNCC برای اعتراض به وضعیت کشاورزان (سهم‌گیر) در دلتای می‌سی‌سی‌پی و بی‌توجهی قانون اساسی به آن‌ها استفاده کرد و بالأخره به یمن تلاش‌هایش به مردم می‌سی‌سی‌پی حق رأی داده شد. در حقیقت، SNCC از کشاورزان (سهم‌گیر)، نه تنها در مطالبهٔ حقوق خود به‌عنوان شهروند کشور و داشتن حق رأی، بلکه در مطالبهٔ وضعیت برابر با توجه به مشارکت در ساختار حزب دموکراتیک ملی و امکان نامزد شدنِ یک آمریکایی- افریقایی تبار برای ریاست جمهوری حمایت کرد.

رابرت (باب) موزز، همکار نویسندهٔ این مقاله و رئیس و پایه‌گذار پروژهٔ جبر، مدیر کمیتهٔ هماهنگی دانشجویی عدم خشونت یا SNCC در ایالت می‌سی‌سی‌پی بود. او می‌سی‌سی‌پی را در سال ۱۹۶۵ و کشور را در سال ۱۹۶۶ ترک کرد و به‌همراه همسرش ژانت، راهی تانزانیا شد و آنجا زندگی مشترکشان را شروع کردند. آن‌ها در سال ۱۹۷۶ به‌همراه چهار فرزندشان: می‌شا، اُمووال (اُمو)، تاباسوری (تابا) و مالیکا، به ایالات متحده برگشتند. در بازگشت، کار باب در خانواده این بود که مطمئن شود بچه‌ها تکالیف ریاضی خود را انجام داده‌اند و این کار را به‌عنوان یکی از والدین داوطلب در ''برنامه آزاد'' مدرسه مارتین لوترکینگ پسر در شهر کمبریج واقع در ایالت ماساچوست، برای تدریس جبر به فرزندش می‌شا و سه نفر از همکلاسی‌های او که در سال ۱۹۸۲ پایهٔ هشتم را شروع کردند، ادامه داد. باب در سال ۱۹۸۲، ''بورس مک‌آرتور[۳] '' را دریافت کرد و برای پرداختن به موضوع جبر برای همهٔ کلاس هشتمی‌ها، آن را در ''برنامه آزاد'' هزینه کرد و ''پروژهٔ جبر'' را با آن، راه‌اندازی نمود. این پروژه ناگزیر، با وقایع می‌سی‌سی‌پی و مقوله‌ای که از جنبش حقوق مدنی می‌سی‌سی‌پی در سال‌های ۱۹۶۱-۱۹۶۵ به حالت تعلیق درآمده بود، مرتبط است. با توجه به وضعیت کودکان کشور و حقوق تصریح شدهٔ آن‌ها در قانون اساسی و با توجه به آموزش آن‌ها در مدارس دولتی/ آموزش عمومی، واضح است که تا همهٔ کودکان از حق آموزش در مدارس دولتی به‌عنوان شهروندان کشور برخوردار نشوند، آموزش عمومی در آمریکا، همچنان مظهر آشکار نظام طبقاتی در کشور باقی خواهد ماند.

نتیجه‌گیری

امروز، پروژهٔ جبر، در همکاری با ''سازمان‌های خواهر[۴] '' مانند پروژهٔ جوانان با حمایت بنیاد ملی علوم و سایر سازمان‌های عمومی و خصوصی، یک حرکت ملی است که تلاش دارد تجارب آموزشیِ کودکان

---

[۱] Ella Baker [۲] The Student Nonviolent Coordinating Committee [۳] MacArtour Fellowship [۴] Sister Organizations

محرومِ چارک پائینی جامعه را دگرگون کند. پروژهٔ جبر، مثالی از نخستین فعالیت‌هایی است که نشان می‌دهد چگونه افرادی از حوزه‌های علمی مختلف مانند فلسفه، پژوهش در ریاضی، پژوهش در آموزش ریاضی و نیز معلمان و مدیران حوزه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی گرفته تا پایان دورهٔ کارشناسی در دانشگاه (k – ۱۶)، با همکاری افرادی مثل ما که برای برقراریِ عدالت اجتماعی و اقتصادی در آمریکا مبارزه می‌کنیم، می‌توانند زمینه‌های مشترکی پیدا کنند تا با هم کار کنند و در حل بعضی از مسائل بزرگ که کشورمان در قرن بیست و یکم با آن رو به رو است، مشارکت داشته باشند.

مراجع

[1] M. Asiala, A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews, and K. Thomas, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, Research in Collegiate Mathematics Education II, *CBMS Issues in Mathematics Education* 6 (1996), pp. 1–32.

[2] John M. Barry, *Rising Tide*, Touchstone Book, Simon and Schuster, 1998.

[3] Douglas A. Blackmon, *Slavery by Another Name*, Anchor Books, a division of Random House Inc., 2009.

[4] J. B. Conant, *Slums and Suburbs*, McGraw-Hill, 1961,pp. 8–11.

[5] L. Delpit, *Other People's Children: Conflict in the Classroom*, The New Press, 1995.

[6] Supreme Court Justice John Marshall Harlan's dissent, Civil Rights Cases 1883. See also Plessyv. Ferguson: Harlan's Great Dissent by Charles Thompson, Louis D. Brandeis School of Law, U. of Louisville.

[7] Nicholas Lemann, *The Promised Land*, Vintage Books, 1992.

[8] *Redemption*, Farrar, Strauss and Giroux, 2006.

[9] Robert P. Moses, *Constitutional People*, written testimony submitted to the United States Senate Judiciary Committee by Robert P. Moses, Tuesday, September 4, 2007. http://judiciary.authoring.senate.gov/hearings/testimony. cfm.

[10] W. V. O. Quine, *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, 1980, pp. 102–103.

[11] *Quintessence*, Belknap Press of Harvard University Press, 2004, pp. 172–173.

[12] Philosophy of Logic, Harvard University Press, 1986, pp. 5–7, 95–102.

[13] Pursuit of Truth, Harvard University Press, 1992, pp. 1-21.

[14] *The Philosophy of W. V. Quine, The Library of Living Philosophers*, Volume XVIII, edited by Lewis Edwin Hahn and Paul Arthur Schilpp, 1988, p. 169 (*Quine's Grammar* by Gilbert

Harman, pp. 165–180 and *Quine: Reply to Gilbert Harman*, pp. 181–188), see also Charles Parson, *Quine on the Philosoph of Mathematics*, pp. 369–395, and *Quine: Reply to Charles Parson*, pp. 396–403.

[15] United States of America, Plaintiff v. State of Mississippi, et al., Defendants: Civil Action No. 3312, Comparison of Education for Negroes and White Persons, 1890–1963, Answers to Interrogatories of State of Mississippi, In the United States District Courtfor the Southern District of Mississippi, Jackson Division.

[16] K. Weller, J. Clark, E. Dubinsky, S. Loch, M. McDonald, and R. Merkovsky, Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. In A. Selden, G. Harel,& F. Hitt (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. 2003 (pp. 97–131), American Mathematical Society, Providence, RI.

[17] C. Vann Woodward, *The Strange Career of Jim Crow*, commemorative edition, Oxford University Press, 2001.

سهیلا غلام آزاد: پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش
رایانامه: soheila_azad@yahoo.com