فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۸ (بهار و تابستان ۱۳۹۵) صص. ۱۱۳ تا ۱۲۵

چارچوب برنامه‌ریزی درسی ریاضی مبتنی بر اصول دوگانی، نیازهای فکورانه و استدلال پی‌درپی: DNR

مسعود بهرامی بیدکلمه

چکیده

در این مقاله، چارچوب برنامه‌ریزی درسی موسوم به DNR معرفی و روند شکل‌گیری و پیوندهای آن با تحولات چند دههٔ اخیرِ این حوزه بررسی شده است. این چارچوب ریشه در دستاوردهای حوزهٔ یادگیری، تلاش‌های انجام گرفته در حوزهٔ برنامه‌ریزی درسی ریاضی و جریان مداوم پژوهش‌های انجام گرفته توسط گرشن هَرِل دارد و می‌تواند معیارهای روشنی برای طراحی و تدوین برنامهٔ درسی ریاضی در اختیار برنامه‌ریزان این حوزه قرار دهد.

۱. مقدمه

طی چند دههٔ اخیر، به‌ویژه با پایان دورهٔ موسوم به «ریاضیات جدید[1]» بازنگری و تصحیح مداوم برنامه‌های درسی و تلاش برای بهبود و ارتقای آن‌ها، به جریانی مداوم در حوزهٔ برنامه‌ریزی درسی بدل شده است. تداوم این جریان در مقیاس جهانی یا ملی، گاه در قالب بازبینیِ بنیادینِ برنامه‌ها و گاه در قالب اصلاح موارد جزئی نمود یافته است. برای لزوم بازنگری در برنامه‌های درسی دلایل متعددی را می‌توان برشمرد:

- تغییر اهداف، چشم‌اندازها و انتظارات آموزشی؛

عبارات و کلمات کلیدی. برنامه‌ریزی درسی ریاضی، دوگانی، نیازهای فکورانه، استدلال پی‌درپی، DNR .

[1]New Math Era

- فراگیر شدن استفاده از محصولات متنوع فناورانه مانند ماشین حساب، رایانه، اینترنت، نرم‌افزارهای آموزشی و تخته‌های هوشمند؛
- مطالعهٔ نتایج حاصل از اجرای برنامه‌های درسی در حال اجرا؛
- دستاوردهای تازه در حوزهٔ مطالعات نظری.

برنامه‌ریزی درسی به معنای عام، طراحی نقشه برای ایجاد فرصت‌های مناسب یادگیری به‌منظور رسیدن به هدف‌های در نظر گرفته شده برای یادگیرندگان است. با این تعبیر، برنامهٔ درسی، محدوده‌ای بیش از یک موضوع درسی خاص را در بر می‌گیرد، اما نقش پررنگ ریاضیات در موضوعات آموزشی، گسترهٔ چشمگیر مخاطبان و ویژگی‌های یگانهٔ آن، توجه خاص به برنامه‌ریزی درسی در حوزهٔ آموزش ریاضی را به ضرورتی اجتناب‌ناپذیر تبدیل کرده است.

«اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای[۱]» از جمله بارزترین نتایج تلاش‌های انجام شده برای تبیین مبانی برنامه‌ریزی درسی ریاضی تا انتهای قرن بیستم است که در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط شورای ملی معلمان ریاضی[۲] (آمریکای شمالی) منتشر شد. در دورهٔ پانزده سالهٔ بعد از انتشار این سند که نقطهٔ عطفی در تبیین معیارهای برنامه‌ریزی درسی ریاضی به‌حساب می‌آید، تلاش‌ها و مطالعات پژوهشگران حوزهٔ آموزش ریاضی، وجوه تازه‌ای از ملزومات برنامه‌ریزی درسی ریاضی را آشکار کرده و بازتاب بر این یافته‌ها به ارائهٔ چارچوب‌های تازه‌ای در این حوزه منجر شده است. در این نوشتار به معرفی یک چارچوب نظری برای آموزش و یادگیری ریاضی می‌پردازیم که توسط گِرشِن هَرِل[۳] طراحی و تدوین شده است و با توجه به سه رکن اصلی آن، دوگانی[۴] نیازهای فکورانه[۵] و استدلال پی‌درپی[۶]، به‌اختصار DNR نامیده می‌شود. روند معرفی این چارچوب در قالب زیر سازماندهی شده است:

- معرفی کوتاه هَرِل؛
- پیشینه و روند شکل‌گیری DNR؛
- معرفی رئوس کلی DNR.

۲. مختصری در مورد هَرِل

گرشن هَرِل تحصیلات خود را در رشتهٔ ریاضی در سال ۱۹۸۵ (قریب به سی سال پیش) به پایان برد و از آن سال تا کنون، در دانشگاه‌های ایلینویز، پردو و دانشگاه ایالتی کالیفرنیا در سن‌دیه‌گو[۷] به تدریس و تحقیق در حوزه‌های ریاضی و آموزش ریاضی اشتغال دارد. وی در حوزهٔ آموزش ریاضی، از شهرت

[۱] Principles and Standards for School Mathematics [۲] The National Council of Teachers of Mathematics
[۳] Guershon Harel [۴] Duality [۵] Necessity [۶] Repeated Reasoning [۷] University of California, San Diego

و مقبولیت قابل‌توجهی برخوردار است و بیش از ۸۰ مقاله (از سطح مقدماتی تا دانشگاهی) در کارنامهٔ پژوهشی خود دارد. دستاوردهای پژوهشی دامنه‌دار وی در حوزهٔ اثبات ریاضی، از جمله بارزترین کارهای پژوهشی دو دههٔ اخیر در حوزهٔ آموزش ریاضی به حساب می‌آید و نام وی را در میان نام‌آوران این حوزه قرار می‌دهد. شناخت و معرفت‌شناسی ریاضی و کاربرد آن در برنامه‌ریزی درسی و آموزش معلمان، از جمله مهم‌ترین علایق تحقیقی تازهٔ او در حوزهٔ آموزش ریاضی هستند. هَرِل مجری پروژه‌های تحقیقاتی متعددی بوده است که نهادهایی از قبیل بنیاد ملی علوم[۱]، وزارت آموزش ایالات متحدهٔ آمریکا[۲] و دولت محلی ایالت کالیفرنیا[۳] حامی مالی آن بوده‌اند. از جملهٔ این پروژه‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- پروژهٔ اعداد گویا (پروژه‌ای تحقیقی با هدف بررسی یادگیری و آموزش مفاهیم چندگانه مانند کسرها)؛
- بنیاد تفکر جبری (پروژه‌ای با هدف توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی دبیرستان)؛
- توسعهٔ دانش ریاضی معلمان بر پایهٔ شیوهٔ تدریس مبتنی بر روش DNR .

یکی از پربارترین نتایج حضور دیرپای هَرِل در این حوزه، توسعهٔ چارچوبی نظری برای برنامه‌ریزی درسی ریاضی است که طی چند سال اخیر به کانون فعالیت‌های پژوهشی او تبدیل شده است. در ادامه، این چارچوب نظری را که به اختصار DNR نامیده می‌شود، معرفی می‌کنیم.

۳. معرفی DNR

برنامه‌ریزی درسی، بازتاب موضع‌گیری‌های اساسی دربارهٔ آموزش و چگونگی کاربرد آن‌ها در جریان عمل آموزش است. در حوزهٔ برنامه‌ریزی درسی، شاخص‌هایی وجود دارد که با بررسی آن‌ها، می‌توان تصویری کلی از ابعاد گوناگون دیدگاه حاکم بر برنامه‌های درسی و موضع‌گیری‌های اساسی‌شان ارائه داد. در بررسی DNR ما شاخص‌های پیشنهاد شده توسط جی. پی. میلر[۴] را در نظر داشته‌ایم که اهداف کلی برنامهٔ درسی، تلقی نسبت به فرآیند یادگیری و چگونگی پی‌گیری این اهداف را از جمله شاخص‌های اصلی می‌داند که در جریان بررسی برنامه‌های درسی باید آن‌ها را در کانون توجه قرار داد. بر اساس چارچوب پیشنهاد شده توسط میلر، یکی از مهم‌ترین شاخص‌های بررسی مدل‌های ارائه شده برای برنامه‌ریزی درسی، هدفی است که برنامه‌های درسی برای دستیابی به آن طراحی می‌شوند. بدیهی است که هدف غایی هر برنامهٔ درسی ریاضی، یادگیری ریاضی است. لیکن پرسشی که عموماً در این زمینه مطرح می‌شود این است که در جریان آموزش عمومی چه ریاضیاتی را باید به یادگیرندگان آموخت؟ نیازهای فعلی یا

[۱] National Science Foundation [۲] US Department of Education [۳] State of Califorina [۴] John P. Miller

آتی یادگیرندگان، در تعیینِ موضوعات و محتوای ریاضی عرضه شده به یادگیرندگان نقشی اساسی ایفا می‌کنند و تغییر مداوم و سریع شرایط و نیازهای یادگیرندگان طی دهه‌های اخیر، پیش‌بینی این نیازها را تا اندازهٔ زیادی سخت‌تر از گذشته کرده است. یکی از پیامدهای این مطلب، ضرورت بازنگری پی‌درپی در برنامه‌های درسی چند دههٔ اخیر و کاهش فاصلهٔ زمانی تغییرات متوالی آن‌ها بوده است.

یکی از وجوه بارز دیدگاه حاکم بر چارچوب برنامه‌ریزی DNR، تجدید نظر اساسی در تلقی از محتوای ریاضیاتی است که در برنامهٔ درسی ریاضی گنجانده می‌شود. هَرِل بر این باور است که در تعیین محتوای ریاضی گنجانده شده در برنامه‌های درسی «عموماً این تمایل وجود دارد که ریاضیات مجموعه‌ای متشکل از تعاریف، قضایا، اثبات‌ها، مسائل و راه‌حل‌هایشان در نظر گرفته شود.» او این دیدگاه را نافی جامعیت ریاضیات می‌داند و معتقد است که ریاضیات وجه دیگری هم دارد که غالباً در منابع رسمی، بررسی یا گزارش نمی‌شود و به این ترتیب، در زمرهٔ اهداف آموزشی قرار نمی‌گیرد و یا گاهی در تعاملات غیررسمی ریاضی‌دانان، نمودهایی از این وجه از ریاضیات عرضه می‌شود. موضع هَرِل در مورد چیستی ریاضیات، بسیار شبیه به موضعی است که بیش از هفت دههٔ پیش، پولیا در جریان پرداختن به فرآیند حل مسئله به این صورت به آن اشاره کرده است:

> «ریاضیات دانشِ دقیق اقلیدسی است؛ اما چیزِ دیگری هم هست. ریاضیاتی که به شیوهٔ اقلیدس عرضه می‌گردد یک دانش بسامان قیاسی است، اما ریاضیات، زمانی که بدان اشتغال داریم به‌صورتِ یک دانشِ تجربی و استقرایی نمود می‌یابد. هر دو وجه از قدمتی به اندازهٔ خودِ ریاضیات برخوردارند، اما دومین وجه از یک جنبه جدید است: فرآیندِ ابداع کردن هرگز به دانش‌آموزان، معلمان یا عمومِ مردم ارائه نشده است. [۱] »

وی کتاب «چگونه حل کنیم» پولیا را تلاش نادر ریاضی‌دانی حرفه‌ای می‌داند که به این وجه از ریاضیات پرداخته است. این موضع معرفت‌شناختی [۱] هَرِل یکی از مهم‌ترین فصول تمایز DNR با سایر دیدگاه رایج در برنامه‌ریزی درسی است. درک این موضع و پیامدهای آموزشی آن، مستلزم آشنایی با مقوله‌بندی هَرِل در حوزهٔ عملکرد ذهنی است که در ادامه، به آن خواهیم پرداخت. این مقوله‌بندی پیامد تفکیک نتیجهٔ اعمال ذهنی و مشخصهٔ اعمال ذهنی است که هَرِل آن‌ها را ذیل عناوین «راه‌های فهمیدن[۲]» و «راه‌های فکر کردن[۳]» از هم تفکیک کرده است. هَرِل معتقد است که این مقوله‌بندی چه از دیدگاه شناختی و چه از

[۱] epistemological [۲] the ways of understanding [۳] the ways of thinking

دیدگاه آموزشی، حائز اهمیت بسیار زیادی هستند، زیرا به ما کمک می‌کند عمل ریاضی افراد یا گروه‌ها را در طول دوره‌های متفاوت تاریخی بهتر درک کنیم و بر مبنای آن‌ها اهداف آموزشی صریحی تدوین کنیم.

۴. راه‌های فهمیدن و راه‌های فکر کردن

برای روشن شدن منظور هَرِل از آنچه که تحت عناوین «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن» به آن‌ها اشاره می‌کند، تلاش می‌کنیم با ذکر چند مثال تصویری قابل‌فهم از این مقولات ارائه دهیم.

الف) تفسیرهای متفاوت مفاهیم ریاضی. نمادهای $y = \sqrt{۵ - x}$ را درنظر بگیرید. در جریان کار با این نمادها، دو نوعِ قابل‌تفکیک از دانشِ ما، نقش ایفا می‌کنند. این نمادها را به‌عنوان یک معادله (یعنی شرطی در مورد متغیرهای x و y)، به‌عنوان یک تابع حقیقی‌مقدار یا مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب و یا به شیوه‌های گوناگون دیگری می‌توان تعبیر کرد. هَرِل چنین تعبیرهایی را از یک اصطلاح یا مجموعه‌ای از نمادها، ذیل عنوان «راه‌های فهمیدن» دسته‌بندی می‌کند. در سطحی دیگر، کسی که در مورد چنین مجموعه‌ای از نمادها دارای بیش از یک تعبیر است، احتمالاً این‌گونه می‌اندیشد که نمادهای ریاضی می‌توانند بیش از یک تفسیر داشته باشند و کسی که قادر است با توجه به مسائل پیشِ رو، تعبیرش از نمادها را تغییر دهد، از این اقبال برخوردار است که بداند تعبیر متفاوت نمادهای ریاضی در حل مسائل، می‌تواند یک مزیت باشد. هَرِل این نوع از دانش ریاضی را به‌عنوان «راه‌های فکر کردن» دسته‌بندی می‌کند.

ب) حل مسئله. مطابق دسته‌بندی هَرِل، در حوزهٔ حل مسئله، راه‌حل‌هایی (درست یا نادرستی) که یک فرد برای حل یک مسئله ارائه می‌کند در زمرهٔ «راه‌های فهمیدن» او به‌حساب می‌آیند، اما شیوه‌های مورد استفاده در حل مسائل را باید در زمرهٔ «راه‌های فکر کردن» او دانست. برای مثال، یافتن مسئلهٔ ساده‌تر، در نظر گرفتن حالات ممکن دیگر، پیدا کردن واژگان کلیدی در صورت مسئله و نظایر آن، تا حدودی نشان‌دهندهٔ مشخصه‌های عمل حل مسئله هستند و در زمرهٔ «راه‌های فکر کردن» به‌حساب می‌آیند.

ج) طرح‌واره‌های اثبات. هَرِل در بررسی «طرح‌واره‌های اثبات[۱]» به نمونه‌های دیگری از «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن» اشاره می‌کند. از نظر وی، اثبات اقدامی است که به منظور رفع شک در مورد درستی یک ادعا صورت می‌پذیرد. به این ترتیب، اثبات می‌تواند تلاش یک فرد برای رفعِ شک خودش در مورد درستی یا نادرستی یک ادعا و یا عملی باشد که به‌منظور رفع تردید دیگران در مورد یک حدس، صورت می‌پذیرد. با این تعبیر، منظور از «طرح‌وارهٔ اثبات»، مشخصه‌ای مرتبط با این دو نوع

[۱] proof scheme

تلاش برای رفع شک در مورد درستی حدس‌ها است که در ادامه، به آن می‌پردازیم. طرح‌وارهٔ اثبات مورد پذیرش در ریاضیات، طرح‌واره‌ای است که هَرِل از آن با نام «طرح‌وارهٔ اثبات استنتاجی» یاد می‌کند. مطابق این طرح‌واره، یک ادعا توسط زنجیره‌ای از گام‌ها اثبات می‌شود که هر گام، نتیجه‌ای از اصول اولیه یا نتایج قبلی است که بر مبنای قوانین استنتاجی به‌دست آمده‌اند. البته در بین دانش‌آموزان، طرح‌واره‌های اثبات دیگری هم رایج است. برای مثال، یک طرح‌وارهٔ اثبات شایع در میان دانش‌آموزان، «طرح‌وارهٔ اثبات اقتدارمحور» است که بر اساس آن، درستی اثبات به تأیید معلم یا منابع درسی وابسته است. یک نمونهٔ دیگر از طرح‌واره‌های اثبات رایج در بین دانش‌آموزان، «طرح‌وارهٔ اثبات تجربی» است که درستی آن به مشاهدهٔ مثال‌های محدود یا دریافت‌های بصری متکی است. با استفاده از اصطلاحات معرفی شده توسط هَرِل، «طرح‌واره‌های اثبات» در زمرهٔ «راه‌های فکر کردن» و خودِ اثبات‌ها در زمرهٔ «راه‌های فهمیدن» به‌شمار می‌آیند.

د) ناوردایی ِ جبری. «ناوردایی ِ جبری» به یک «راه فکر کردن» اشاره دارد که مطابق آن، دست‌ورزیِ عبارت‌های جبری نه به‌صورت تصادفی بلکه به منظور رسیدن به‌صورتی مطلوب با عدم تغییر بعضی از ویژگی‌های عبارت‌های جبری، صورت می‌پذیرد. هَرِل معتقد است که اگر این «راه فکر کردن» را یک هدف آموزشی در نظر بگیریم، جبر مقدماتی و به‌ویژه مهارت‌های دست‌ورزی نمادها به‌صورتی متفاوت و معنادار آموخته خواهند شد. برای مثال، بر اساس این دیدگاه، در جریان آشنایی با روش مربع کامل کردن، هدف از عرضهٔ این روش، تنها ارائهٔ ابزاری برای حل معادله‌های درجهٔ ۲ نخواهد بود، بلکه می‌تواند فعالیتی برای هدایت دانش‌آموزان به سمت آشنایی با «روش فکر کردن» منطبق بر ناوردایی ِ جبری نیز باشد. به این ترتیب، دانش‌آموزان متوجه این مطلب می‌شوند که عبارت‌های جبری به‌منظور خاصی بازنویسی می‌شوند و اعمالی که برای بازنویسیِ عبارت‌های جبری به‌کار می‌روند، به‌صورتی معنادار فهمیده و تعمیق می‌شوند. در چنین وضعیتی، دست‌ورزی نمادها دیگر نوعی خرگوش از کلاه درآوردن نیست، بلکه رشته‌ای از اعمال هدفمند است که همه می‌توانند آن را یاد بگیرند. بدون به‌دست آوردن این توانایی، این خطر وجود دارد که دست‌ورزی عبارت‌های جبری به اعمالی رازآلود برای دانش‌آموزان تبدیل شود؛ اعمالی که در انجام آن‌ها باید قوانین خاصی را رعایت کرد، اما هدف از انجام آن‌ها روشن نیست. هَرِل معتقد است که یکی از دلایل کاهش تأکید بر دست‌ورزی نمادین عبارت‌های جبری در برنامه‌های درسی، عدم توجه به «ناوردایی ِ جبری» در برنامه‌های درسی است. منظور هَرِل از «ناوردایی جبری» ، حالت خاصی از یک «راه فکر کردن» است که بر پایه آن، تلاش می‌شود یک مسئله، به مسئله‌ای آشناتر تبدیل شود یا یک شئ ریاضی، به شئ ریاضی به‌دردبخورتری تبدیل گردد.

نکتهٔ بسیار مهم این است که چنین «راه فکر کردنی» یکباره آموخته نمی‌شود، بلکه فرد به‌کار بستن آن را در زمینه‌های مختلف مانند حل معادله‌های درجهٔ ۲، حل دستگاه‌های معادلات و روش‌های انتگرال‌گیری مشاهده می‌کند و به‌تدریج آن را می‌آموزد. از این‌رو آشنایی با این راه فکر کردن را باید در جریان یادگیری ریاضیات مقدماتی آغاز نمود. مثلاً آشنایی با تبدیل کسرهای متعارفی به کسرهای اعشاری، توجه به هم‌ارز بودنِ کسرهایی مانند $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ یا آشنایی با این مطلب که تقسیم دو عدد اعشاری را می‌توان به محاسبهٔ حاصل تقسیم دو عدد کامل تبدیل کرد، موقعیت‌هایی در ریاضیات مقدماتی هستند که می‌توانند زمینهٔ آشنایی با این «راه فکر کردن» را فراهم کنند. البته اهمیت دارد که این کار به‌صورتی معنادار انجام شود و تا زمانی که دانش‌آموزان چگونگیِ انجام این کارها را بدون توجیه مناسب بیاموزند، فرصت شکل‌گیری «راه‌های فکر کردن» مبتنی بر ناوردایی جبری، فراهم نمی‌شود.

۵. پیامدهای آموزشی

با توجه به تقسیم‌بندی دانش ریاضی به «راه‌های فهمیدن» و «راه‌های فکر کردن»، هَرِل معتقد است که اهداف آموزشی، غالباً شامل «راه‌های فهمیدن»، یعنی نتایج کارکردهای ذهنی؛ یا تعاریف، رویه‌ها، تکنیک‌ها، قضایا و اثبات‌ها هستند و شامل «راه‌های فکر کردن» نمی‌شوند. بنابراین بعید است که دانش‌آموزان در جریانِ یادگیری ریاضی، به استقلال برسند. علاوه بر این، شکل‌گیری «راه‌های فکر کردن»، نسبتاً دشوار و تغییر راه‌های فکر کردنی که از قبل شکل گرفته‌اند به سختی امکان‌پذیر است. با توجه به این مطلب، جریان آشنایی با «راه‌های فکر کردن» را نباید به زمانی که یادگیرندگان به ریاضیات پیشرفته می‌پردازند، موکول نمود و باید زمینهٔ آشنایی دانش‌آموزان با «راه‌های فکر کردن» را هنگام یادگیری ریاضیات مقدماتی آغاز نمود. هَرِل معتقد است که در ریاضیات مقدماتی، موقعیت‌هایی غنی وجود دارد که می‌توانند زمینهٔ انجام این کار را فراهم کنند. برای مثال، او مفهوم کسر را در نظر می‌گیرد. رایج‌ترین روش فهمیدن یک کسر در میان دانش‌آموزان ابتدایی، همان چیزی است که در منابع آموزشی از آن با عنوان جزء_ کل نام برده می‌شود: $\frac{m}{n}$ یعنی m چیز از n چیز که در آن، m و n دو عدد صحیح مثبت هستند. راه فهمیدن بسیاری از دانش‌آموزان، به همین تعبیر کسر محدود می‌شود و به همین دلیل از درک توسعهٔ معنادار حساب کسرها باز می‌مانند. البته راه‌های فهمیدن متنوعی برای درک معنای کسر وجود دارد. از جمله:

- $\frac{۱}{n} + \cdots + \frac{۱}{n}$؛
- مقدار حاصل از تقسیم m واحد به n قسمت برابر؛

- نتیجهٔ حاصل از اندازه‌گیری پاره‌خطی به طول m واحد با استفاده از خط‌کشی که هر واحد آن n واحد است؛
- جواب معادلهٔ $nx = m$؛
- نسبت m به n.

آشنایی با چنین ردهٔ متنوعی از «راه‌های فهمیدن»، موضوع کسرها را غنی ساخته و می‌تواند زمینهٔ آشنایی دانش‌آموزان را با بعضی از «راه‌های فکر کردن» بسیار مفید فراهم نماید. از جملهٔ این «راه‌های فکر کردن» به موارد زیر اشاره می‌شود:

- مفاهیم ریاضی را می‌توان به روش‌های متنوعی فهمید؛
- گاهی لازم است مفاهیم ریاضی را به روش‌های دیگری فهمید؛
- تغییر شیوهٔ فهمیدن یک مفهوم می‌تواند در حل بعضی از مسائل ریاضی، مزایایی داشته باشد.

این راه‌های فکر کردن برای فراهم شدن زمینهٔ آشنایی با راه‌های فهمیدنی که در چشم‌انداز جریان یادگیری افراد قرار دارند، ضروری است. برای مثال، در حساب دیفرانسیل و انتگرال بسته به موقعیت، ممکن است لازم باشد مشتق تابع f را در نقطهٔ a به‌صورت مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$، شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ a، آهنگ تغییر لحظه‌ای در a یا شیب بهترین تقریب خطی یک تابع در نزدیکی a تعبیر کنیم. همین طور، در حل مسائل جبرخطی این که یک «روش فهمیدن» را به «روش فهمیدن» دیگر تبدیل کنیم، مثلاً استفاده از هم‌ارزیِ دستگاه‌های معادلات خطی با ماتریس‌ها و تبدیلات خطی، در حل مسائل ضروری است و بدون آشنایی با این راه‌های فکر کردن، انتظار می‌رود که یادگیرندگان در فرآیند یادگیری جبرخطی، با مشکل مواجه شوند.

اصل دوگانی. با روشن شدن منظور هَرِل از اصطلاحات «راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدن»، می‌توانیم به دیدگاه معرفت‌شناختی وی و یکی از پیامدهای آموزشی آن که از اصول چارچوب DNR به حساب می‌آید، اشاره کنیم. از دید هَرِل:

> ”دانش ریاضی متشکل از «تمام راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدنی» است
> که در روند تاریخی تکوین ریاضی نهادینه شده‌اند.[۲] “

علاوه بر این، همان‌طور که در مثال‌های قبلی اشاره شد، یادگیری «راه‌های فکر کردن» و «راه‌های فهمیدن» اثری متقابل بر هم دارند. این مطلب یکی از اصول چارچوب DNR است که هَرِل از آن با نام «اصل دوگانی» یاد می‌کند:

"دانش‌آموزان راه‌های فکر کردن‌شان را با آشنایی با راه‌های فهمیدن‌شان توسعه می‌دهند و راهای فهمیدن آن‌ها متأثر از راه‌های فکر کردن است. [۲] "

از منظری دیگر، پذیرش این اصل متضمن پذیرش ادعای دیگری نیز هست؛ آشنایی با یکی از این دو نوع دانش بدون ایجاد تغییر مقتضی در دیگری، امکان‌پذیر نیست. بنابراین در مقایسه با سایر دیدگاه‌های رایج در حوزهٔ برنامه‌ریزی درسی ریاضی، در این دیدگاه، در نظر داشتنِ راه‌های فکر کردن به‌عنوان هدف آموزشی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. البته موعظه در مورد توجه به راه‌های فکر کردن اثری بر بهبود راه‌های فهمیدن نخواهد داشت. برای مثال، صحبت دربارهٔ ماهیت اثبات ریاضی و یا توصیه در مورد به‌کار بستنِ رهیافت‌های حل مسئله، تأثیر ناچیزی در چگونگی اثبات‌ها یا راه‌حل‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان خواهد داشت و تنها با تولید راه‌های مناسب فهمیدن، مثل حل مسائل یا اثبات ریاضی، دانش‌آموزان می‌توانند راه‌های مطلوب فکر کردن را شکل دهند. این که معلمان رهیافت‌های حل مسأله را به‌صورت صریح آموزش دهند و انتظار داشته باشند دانش‌آموزان از آن‌ها به‌عنوان قواعدی کلی در حل مسائل پیروی کنند، بسیار ساده‌انگارانه و سطحی است. همان‌طور که قبلاً هم گفته شد، توجه به راه‌های مناسب فکر کردن مانند ناوردایی ِجبری، استدلال متناسب، استدلال الگوریتمی، راه‌های خاص فهمیدن (مانند حل معادله‌های درجهٔ ۲، روش‌های انتگرال گیری، و تقسیم اعداد اعشاری)، مفاهیم و فرآیندهای خاصی را پررنگ می‌کند. به‌علاوه، در جریان آموزش راه‌های فهمیدن، باید راه‌های فکر کردن فعلی دانش‌آموزان نیز مورد توجه قرار گیرند. برای مثال، هَرِل بر این نکته تأکید دارد که حتی دانشجویان دورهٔ کارشناسی فاقد طرح‌وارهٔ اثبات اصل موضوعی هستند و اتخاذ این رویکرد (که مبتنی بر راه فکر کردنی است که در آغاز قرن بیستم و با انتشار کارهای هیلبرت ابداع شده و در روند رشد ریاضی موضوعی، دگرگون‌کننده تلقی می‌شود)، برای آن‌ها مناسب نیست. تأکیدات فوق، پرسش درمورد ماهیت رفتار آموزشی را که به ساختن راه‌های مطلوب فکر کردن و فهمیدن توسط دانش‌آموزان کمک می‌کند، به پرسشی کلیدی تبدیل می‌کند که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

اصل نیاز فکورانه. دومین اصل چارچوب برنامه‌ریزی درسی موسوم به DNR را نیز به‌کمک یک موقعیت آموزشی تشریح می‌کنیم. معمولاً پیش از آشنایی با روش‌های حل معادله، ردهٔ قابل‌توجهی از اتحادهای جبری در برنامهٔ درسی گنجانده می‌شود و در گام بعد، بحث حل معادله‌ها مطرح می‌شود. چشم‌داشت اصلی عرضهٔ اتحادها، قبل از پیش کشیدن بحث حل معادله‌ها، این است که یادگیرندگان با روش‌هایی که در جریان حل معادله‌ها به آن‌ها نیاز دارند، آشنا شوند. هر چند اتخاذ این رویکرد از دیدگاه منطقی موجه به‌نظر می‌رسد، اما هَرِل معتقد است که نتیجهٔ اتخاذ چنین رویکردی به القای بی‌هدف بودنِ

مطالب عرضه شده در کلاس‌های ریاضی منجر می‌گردد و این وضعیت را نتیجهٔ بی‌توجهیِ به ضرورت فهم دلایل فکری چنین مطالبی می‌داند. این نظر جدید هَرِل، ترجمان دیدگاهی در حوزهٔ یادگیری است که به‌اختصار به آن اشاره می‌کنیم. مطابق دیدگاه شناخت‌گرایان در مورد یادگیری، غالباً بین دانسته‌ها و تصورات ما از موقعیت‌هایی که در آن‌ها قرار داریم، نوعی تعادل برقرار است. منظور از تعادل این است که بر پایهٔ دانسته‌ها و تصوراتمان، قادریم از عهدهٔ تعامل رضایت‌بخش با موقعیت‌هایی که در آن قرار داریم، برآییم. اما موقعیت‌هایی وجود دارند که بر پایهٔ دانسته‌هایمان قادر نیستیم از عهدهٔ تعامل با آن‌ها برآییم و لذا تعادل بین دانسته‌ها و تصوراتمان، با موقعیتی که در آن قرار داریم به هم می‌خورد و وادار می‌شویم با گسترش دانسته‌هایمان یا جرح و تعدیل آن‌ها، تعادل قبلی را مجدداً برقرار کنیم. در این دیدگاه، یادگیری نتیجهٔ تلاشی است که برای بازیابی این تعادل از مسیر گسترش دانسته‌های قبلی یا جرح و تعدیل آن‌ها، صورت می‌پذیرد. بر هم خوردنِ تعادل بین دانسته‌های فعلی و موقعیت‌هایی که در آن‌ها قرار داریم به بروز احساس نیاز به بازیابابی مجدد این تعادل در فرد منجر می‌گردد که هَرِل با عنوان «نیازهای فکورانه[۱]» از آن یاد می‌کند. ضرورت توجه به برانگیخن این احساس در فرآیند یادگیری در قالب دومین اصل از چارچوب DNR به‌صورت زیر تجلی می‌نماید:

> ''یادگیرندگان برای آنچه که می‌خواهیم به آن‌ها بیاموزیم باید احساس نیاز کنند. در اینجا منظور از نیاز، نیازهای اجتماعی یا اقتصادی نیست. بلکه نیازهای فکورانه است. [۲]''

در اینجا منظور از اصطلاح «نیاز فکورانه»، احساس درونی دانش‌آموزان در مواجهه با مسائلی است که به‌خوبی فهمیده شده و اهمیت حل آن‌ها، به‌خوبی درک شده است. وقتی دانش‌آموزان با موقعیتی مواجه می‌شوند که با دانش فعلی آن‌ها سازگار نیست، یا با مسأله‌ای مواجه می‌شوند که با دانش فعلی آن‌ها قابل‌حل نیست، این نیاز در ذهن آن‌ها برانگیخته می‌شود که برای این موقعیت، توضیحی بیابند یا آن مسئله را حل کنند. صرف‌نظر از این که نتیجهٔ تلاش برای پاسخ دادن به این نیاز، به ساخت دانشی تازه منجر شود یا دانش جدیدی به‌دست نیاید، تلاش برای یافتن توضیح مناسب یا حل مسئله در چنین موقعیتی، برای دانش‌آموزان معنادار است، زیرا نتیجهٔ این تلاش ریشه در نیازهای فکورانهٔ خودشان دارد و به همین دلیل نتیجهٔ آن می‌تواند با دانش قبلی آن‌ها تجمیع شود. برای روشن شدن این مطلب، روش‌های حل معادله‌ها بر پایهٔ رویکرد مبتنی بر نیازهای فکورانه ارائه می‌شود:

[۱] Intellectual needs

- رابطهٔ علّی میان پدیده‌های گوناگون در قالب تابع بیان می‌شود که با دانستن مقدار متغیر مستقل (علت)، مقدار متغیر وابسته (معلول) به‌دست می‌آید. برای مثال، زمانی که یک جسم تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ زمین سقوط می‌کند، می‌توانیم ارتفاع آن را از سطح زمین، تابعی از زمان بدانیم و در هر لحظه پس از رها شدن، ارتفاع جسم را مشخص کنیم. در این مثال خاص، اگر ارتفاع را با y نمایش دهیم رابطهٔ بین y و t در قالب یک تساوی مانند $y = f(t)$ ظاهر می‌شود که در آن، $f(t)$ عبارتی درجهٔ دوم برحسب t است.
- مسائلی وجود دارند که در آن‌ها می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چه مقداری از متغیر مستقل، متغیر وابسته برابر با یک مقدار مشخص خواهد بود. برای مثال، می‌خواهیم بدانیم ارتفاع جسمی که تحت تاثیر نیروی جاذبهٔ زمین در حال سقوط است، در چه لحظه‌ای برابر با ۱۰۰ متر خواهد بود. پس در این مورد، باید مقداری را بیابیم که با جایگزین کردن آن به‌جای t، تساوی $f(t) = ۱۰۰$ برقرار شود. به‌بیان دیگر، می‌خواهیم معادلهٔ $f(t) = ۱۰۰$ را حل کنیم.
- به‌جای حل معادلهٔ $f(t) = ۱۰۰$، کافی است معادلهٔ $f(t) - ۱۰۰ = ۰$ را حل کنیم و این شیوه در تعیین زمانی هم که ارتفاع چنین جسمی برابر با هر مقدار دیگری مانند c است، قابل‌استفاده است. یعنی برای حل هر معادله به‌شکل $f(t) = c$، کافی است معادلهٔ $f(t) - c = ۰$ را حل کنیم که $f(t) - c$ نیز مجدداً یک عبارت درجهٔ دوم برحسب t است. به عبارت دیگر، برای حل چنین معادله‌هایی، کافی است نوع خاصی از آن‌ها را حل کنیم. پس اگر بتوانیم روشی کلی برای حل معادله‌ای به شکل $f(t) = ۰$ بیابیم، قادر خواهیم بود همهٔ این معادله‌ها را حل کنیم.
- در جریان حل معادلات به‌شکل $f(t) = ۰$، می‌توان نشان داد که تجزیهٔ عبارت $f(t)$ به عوامل ضربی، می‌تواند در حل چنین مسائلی راه‌گشا باشد. به‌ویژه، زمانی که $f(t)$ عبارتی درجهٔ دوم برحسب t است، با تجزیهٔ عبارت $f(t)$ به دو عبارت درجهٔ یک، کافی است دو معادلهٔ درجهٔ یک را حل کنیم که از پیش با روش حل آن‌ها اشنایی داریم. به این ترتیب، روش‌هایی که ما را قادر می کنند عبارت‌های جبری را به‌صورت ضربی بازنویسی کنیم و یا به عبات دیگر، آن‌ها را تجزیه کنیم از اهمیت قابل‌توجهی برخوردار خواهند شد و در چنین موقعیتی، آشنایی با اتحادهای گوناگون برای یادگیرندگان معنادار خواهد بود.

فرآیند فوق، شامل زنجیره‌ای از نیازهای فکورانه است که برداشتن گام‌های ذکر شده در این فرآیند و ضرورت و مزیت آشنایی با ردهٔ بزرگی از اتحادها را توجیه می‌کند. با پیروی از الگویی مشابه الگوی فوق،

می‌توان فرآیند معرفی سایر مفاهیم و روش‌های ریاضی را نیز به‌گونه‌ای طراحی نمود که گام‌های برداشته شده در هر مرحله توسط نیازهای فکورانهٔ یادگیرندگان موجه و هدفمند به‌نظر برسند. هَرِل معتقد است که در نظر داشتن نیازهای فکورانه، یکی از مسئولیت‌های اصلی معلمان و طراحان برنامه درسی ریاضی است.

اصل استدلال پی‌درپی. حتی در صورتی که نیاز به راه‌های فکرکردن و راه‌های فهمیدن از طریق نیازهای فکورانهٔ یادگیرندگان تأمین شده باشد، هنوز یک موضوع دیگر باقی می‌ماند؛ این که مطمئن شویم یادگیرندگان دانش خود را درونی نموده، سازماندهی می‌کنند و آن را در بلند مدت، حفظ خواهند کرد. سومین اصل چارچوب DNR که به «اصل استدلال پی‌درپی» موسوم است، متضمن این موضوع است. هَرِل ضمن اشاره به تحقیقاتی که مؤید نقش حیاتی تکرار تجارب یا اعمال در فرآیند درونی‌سازی و سازماندهی دانش کسب شده توسط یادگیرندگان است، بر این نکته تاکید دارد که در آموزش مبتنی بر چارچوب DNR تکرار استدلال کردن به تقویت راه‌های مناسب فهمیدن و فکر کردن می‌انجامد. هدف دیگر تکرار استدلال کردن و نه انجامِ پی‌درپی تمرین‌های معمولی، فراهم آوردنِ زمینه‌ای است که یادگیرندگان بتوانند دانش خویش را به‌صورت مستقل و بدون تأمل، به‌کار برند. مسائلی که به این منظور طراحی می‌شوند، باید نیاز به استدلال را به‌طور مستمر مهیا کنند و به نیازهای فکورانهٔ در حال تغییر یادگیرندگان پاسخ دهند.

۶. مطالعات و پژوهش‌های در دست انجام

DNR چارچوبی نظری است که ریشه در دستاوردهای حوزهٔ یادگیری، تلاش‌های انجام گرفته در حوزهٔ برنامه‌ریزی درسی ریاضی و جریان مداوم پژوهش‌های انجام گرفته توسط مبدع آن دارد. علاوه بر تلاش‌های انجام شده توسط مبدع این چارچوب، برای تدوین برنامهٔ درسی مبتنی بر این دیدگاه و بررسی نتایج حاصل از آموزش مبتنی بر آن، نگارندهٔ این مقاله نیز در حال بررسی نتایج حاصل از به‌کارگیریِ این رویکرد آموزشی است و امیدوار است که نتایج حاصل از این مطالعات، زمینهٔ طراحی و تدوین برنامهٔ درسی ریاضی مبتنی بر این دیدگاه را در اختیار برنامه‌ریزان این حوزه قرار دهد.

مراجع

[۱] پولیا، جی. (۱۹۴۴) چگونه حل کنیم. ترجمهٔ مسعود بهرامی بیدکلمه (۱۳۹۴). در دست چاپ.

[2] Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I, ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500.

[3] Harel, G. (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II, ZDM—The International Journal on Mathematics Education.

[4] Harel, G. (2013) DNR-Based Curricula, the Case of Complex Numbers. Jouranl of Humanistic Mathematics, Vol 3, No 2.

[5] Miller John P. (1983) The educational spectrum: Orientations to curriculum. Longman.

مسعود بهرامی بیدکلمه: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی

رایانامه: masoudbahramibidkalme@yahoo.com